Phys 62
Suppl.

Die Naturlehre

nach ihrem

gegenwärtigen Zuſtande

mit Rückſicht

auf mathematiſche Begründung.

Dargeſtellt

von

Andreas Baumgartner,

Doctor der Philoſophie, öffentlichem Profeſſor der Phyſik und angewandten Mathematik, außerordentlichem Profeſſor der Mechanik für Künſtler und Handwerker an der Wiener-Univerſität, correſpondirendem Mitgliede der mähriſch-ſchleſiſchen Geſellſchaft des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde in Brünn, der Landwirthſchaftsgeſellſchaft in Krain und zu Wien, und ordentlichem Mitgliede der Naturforſchenden Geſellſchaft zu Halle.

Supplementband,

den mathematiſchen und experimentellen Theil enthaltend.

Mit 9 Kupfertafeln.

EIGENTHUM DER STADT AUGSBURG

Wien, 1831.

Im Verlage von J. G. Heubner.

Gedruckt
bei
A. Strauß's ſel. Witwe.

Seiner Excellenz

dem

Hochwohlgebornen Herrn

Andreas Joſeph Freiherrn von Stifft,

der Arzneykunde Doctor, Commandeur des königl. ungariſchen St. Stephan-Ordens, Inhaber des ſilbernen Civil-Verdienſtkreuzes, Ritter des königl. preußiſchen rothen Adler-Ordens, Commandeur des königl. portugieſiſchen Chriſtus-Ordens, des königl. ſicilianiſchen Ferdinand- und Verdienſt-Ordens, des königl. ſächſiſchen Civil-Verdienſt-Ordens, dann des königl. bairiſchen Verdienſt-Ordens, Sr. k. k. apoſtoliſchen Majeſtät wirklichem geheimen, dann Staats- und Conferenzrathe, erſtem Leibarzte und Protomedicus, Indigena des Königreichs Ungarn, Landſtand von Niederöſterreich, von Tirol und der Steiermark, der mediciniſchen Studien und Facultät Director und Präſes, Mitgliede der gelehrten mediciniſchen Geſellſchaften zu London, Venedig und Padua, der k. k. Joſephsakademie, der k. k. Landwirthſchaftsgeſellſchaft zu Wien und Brünn, der k. k. Akademie der bildenden Künſte in Wien, der königl. böhmiſchen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Prag, der kaiſerl. Leopold. Carol. der Naturforſcher, der kaiſerl. ruſſiſchen mediciniſch-chirurgiſchen Akademie zu St. Petersburg und der Univerſität zu Krakau

in tiefſter Ehrfurcht gewidmet

vom Verfaſſer.

Vorrede.

Ich habe bei der Herausgabe der zweiten Auflage meiner Naturlehre (1826) verſprochen, den mathemathiſchen Theil dieſer Wiſſenſchaft in einem beſonderen Supplementbande darzuſtellen, und dieſes Verſprechen bei der ungewöhnlich ſchnell darauf nothwendig gewordenen Herausgabe der dritten Auflage desſelben Werkes wiederholt. Das phyſikaliſche Publikum hat mich durch Nachfragen fleißig an mein gegebenes Wort gemahnt, und dasſelbe mag es nun verantworten, wenn es vielleicht durch ſeine Theilnahme eine unzeitige Frucht ins Leben gerufen hat. Ich weiß recht wohl, daß ich eine ſchwierige Aufgabe zu löſen unternommen habe, aber das Bewußtſeyn, daß ich es am angeſtrengteſten Fleiße und an der gewiſſenhafteſten Sorgfalt nicht habe fehlen laſſen, gibt mir den Muth, mit meiner Arbeit hervorzutreten, ohne befürchten zu müſſen, ich verletze dadurch die Achtung, welche jeder Schriftſteller ſeinem Publikum ſchuldig iſt. Ich hätte mir zwar die Arbeit ſehr erleichtern können,

wenn ich unter ſich unzuſammenhängende und nur mittelſt meiner Anfangsgründe der Naturlehre zu einem Ganzen verſchmelzbare Zuſätze zu liefern beabſichtiget hätte, allein ich wollte den Leſern nicht den indirecten Zwang auflegen, immer zugleich die genannten Anfangsgründe bei der Hand zu haben oder gerade aus dieſen die nöthige Vorbereitung ſchöpfen zu müſſen, ſondern ich wollte vielmehr, daß jeder mit den Elementen der Phyſik Vertraute, er mag ſie aus was immer für einem der vielen trefflichen deutſchen Lehrbücher der Naturlehre kennen gelernt haben, an dieſes Werk gehen, und es als ein ſelbſtſtändiges Ganzes vom Anfange bis zum Ende durcharbeiten kann. Ich war freilich dadurch gezwungen, manches in einigen phyſikaliſchen Elementarwerken vorkommende mit aufzunehmen, allein ich meinte, dieſes werde, da es doch nur ſelten geſchah, dem Leſer weniger anſtößig ſeyn, als es ihm vielleicht läſtig gefallen wäre, mit Hinweglaſſung ſolcher einleitender Sätze gleich mitten in den Gegenſtand hineingeführt zu werden. Da ich alle wichtigen, dem gegenwärtigen Zuſtande der Phyſik entſprechenden, mathematiſchen Arbeiten benützen mußte (leider kamen mir einige der neueſten, wie Poiſſon's Unterſuchungen über das Gleichgewicht tropfbarer Flüſſigkeiten, Gauß's Ar-

beit über die Geſtalt der Flüſſigkeiten ꝛc., erſt zu Geſichte, als die dahin einſchlagenden Parthien ſchon abgedruckt waren), und oft ſelbſt in derſelben Materie Schriftſteller concurriren, die von ganz verſchiedenen Geſichtspunkten ausgehen, ſo koſtete es mich viele Mühe, ſolchen Materien einerlei Colorit zu geben. Die Quellen, woraus ich ſchöpfte, findet man ſtets im Texte oder am Ende der einzelnen Kapitel angegeben. Uebrigens wird der Leſer, dem Titel des Werkes getreu, nicht blos mathematiſche Abhandlungen, ſondern auch Anleitungen zu experimentellen Unterſuchungen finden, die in den Händen desjenigen, der den Calcul gehörig handzuhaben weiß, zur gründlichſten Einſicht in den Verlauf der Naturerſcheinungen führen. Ueberhaupt glaube ich, es werde keiner, der ſich die Elemente der Naturlehre eigen gemacht hat, den Wunſch unterdrücken können, ausführlicher, als es in Compendien geſchehen kann, zu erlernen, auf welchem Wege, mit welchen Hilfsmitteln und Vorſichten man jene Thatſachen ausgemittelt habe, an welchen ſich die allgemeinen Naturgeſetze ausſprechen, wie die phyſikaliſchen Inſtrumente, welche zu jenen vorzüglichſten Hilfsmitteln gehören, gebraucht, beurtheilt und berichtiget werden müſſen, und wie man das unter den obwaltenden Umſtänden Gefun-

dene auf einen Normalzuſtand zurückführen kann; gerade dazu ſollte, meiner Abſicht gemäß, das vorliegende Werk dienen. Die reichhaltigen, am Ende angehängten Tafeln dürften vielleicht auch jenen, welche erweiternd im Gebiete der Wiſſenſchaft arbeiten, als zeiterſparendes Mittel nicht unwillkommen ſeyn.

Wien, im November 1830.

Der Verfaſſer.

Inhalt.

Einleitung. Über phyſ. Apparate und ihren Gebrauch überhaupt.

A. Phyſikaliſches Kabinet. B. Beobachtungen und Verſuche nebſt ihrer vortheilhafteſten Combination. C. Mittel zur Beſtimmung der Naturgeſetze.

I. Abſchnitt.

Abmeſſungen und Maße der Körper.

1. Kap. A. Beſtimmung der Abmeſſungen der Körper. B. Prüfung eines Maßſtabes. C. Rauminhalt tropfbarer Körper und Capacität der Gefäße. D. Graduiren der Gefäße. E. Rauminhalt der Gaſe.

2. Kap. Beſtimmung des Gewichts der Körper.

A. Theorie der Wage. B. Einrichtung der Wage. C. Prüfung der Wage und der Gewichte. D. Gebrauch der Wage. E. Zeigerwage. F. Reduction der Abwägungen.

3. Kap. Beſtimmung der Dichte der Körper.

A. Apparate zur Beſtimmung der Dichte mit der Wage. B. Manipulation und Vorſichten bei der Beſtimmung der Dichte mittelſt der Wage. C. Formeln zur Berechnung der Dichte. D. Beſtimmung der Dichte mittelſt Aräometer.

4. Kap. Änderung der Abmeſſungen und der Dichte durch die Wärme.

A. Für feſte Körper. B. Für tropfbare. C. Für Gaſe.

5. Kap. Thermometer.

A. Conſtruction des Thermometers. B. Prüfung und Berichtigung des Thermometers. C. Gebrauch des Thermometers.

6. Kap. Barometer.

A. Conſtruction des Barometers. B. Gebrauch des Barometers.

7. Kap. Manometer.

8. Kap. Luftpumpe.

II. Abſchnitt.

Gleichgewicht der Kräfte an Körpern.

1. Kap. Zuſammenſetzung und Zerlegung der Kräfte.

2. Kap. Gleichgewicht überhaupt, feſter elaſtiſcher Körper insbeſondere.

3. Kap. Gleichgewicht flüſſiger beſonders tropfbarer Körper.

4. Kap. Gleichgewicht tropfbarer Körper, auf welche beſtimmte Kräfte wirken.

5. Kap. Gleichgewicht der Gaſe.

6. Kap. Höhenmeſſung mit dem Barometer.

A. Theorie derſelben. B. Hypſometriſche Tafeln. C. Grad der Genauigkeit barometriſcher Meſſungen. D. Practiſche Regeln für Höhenmeſſungen.

7. Kap. Gleichgewicht der Dünſte.

A. Expanſivkraft der Dünſte. B. Dichte und ſpecifiſches Gewicht. C. Anwendung des Vorhergehenden. D. Hygrometer.

III. Abſchnitt.

Bewegung.

1. Kap. Bewegung der Körper überhaupt, feſter insbeſondere.

2. Kap. Pendelbewegung.

A. Theorie des Kreispendels. B. Pendelbeobachtungen. C. Correctionen der beobachteten Schwingungszeit. D. Coniſches Pendel.

3. Kap. Bewegung flüſſiger Körper.

4. Kap. Einiges über Bewegungen in der Atmoſphäre.

A. Winde. B. Änderungen des Luftdruckes.

5. Kap. Bewegung ſchallender Körper (Akuſtik).

A. Fortpflanzung des Schalles. B. Reflexion. C. Schwingungen der Luft in Pfeifen. D. Schwingungen elaſtiſcher Saiten. E. Schwingungen elaſtiſcher Stäbe, Platten und Membranen. F. Akuſtiſche Verſuche.

IV. Abſchnitt.

Das Licht.

1. Kap. Leuchtende Körper und Modificationen des Lichtes überhaupt.

2. Kap. Modificationen des Lichtes.

A. Reflexion. B. Einfache Brechung mit Farbenzerſtreuung. C. Verſuche über Farbenzerſtreuung. D. Brechung ohne Farbenzerſtreuung. E. Beſtimmung des Brechungsverhältniſſes und der Farbenzerſtreuung. F. Interferenz des Lichtes. G. Farbenringe. H. Beugung. I. Doppelte Brechung und Polariſation.

3. Kap. Theorie des Lichtes.

A. Vibrationshypotheſe. B. Emanationshypotheſe. C. Vergleichende Würdigung beider.

4. Kap. Optiſche Inſtrumente.

A. Helioſtat. B. Goniometer. C. Brennſpiegel. D. Brennglas. E. Brillen. F. Fernröhre. G. Microſcope. H. Unterſuchung einzelner Linſen.

V. Abſchnitt.

Die Wärme.

1. Kap. Bewegung der Wärme.

A. Theorie der ſtrahlenden Wärme. B. Verſuche über Abkühlung durch Ausſtrahlen und Mittheilung der Wärme. C. Theorie der Wärmebewegung in feſten Körpern. D. Verſuche über Wärmefortpflanzung in feſten Körpern.

2. Kap. Gleichgewicht der Wärme.

A. Gleichgewicht der Wärme mit ſich ſelbſt. B. Gleichgewicht der Wärme mit den in Körpern vorhandenen Kräften.

3. Kap. Erwärmung der Erde durch die Sonne.

VI. Abſchnitt.

Der Magnetismus.

1. Kap. Kräfte, welche die Lage einer Magnetnadel beſtimmen.

2. Kap. Freier Magnetismus künſtlicher Magnete.

3. Kap. Erdmagnetismus.

4. Kap. Theorie des Erdmagnetismus.

VII. Abſchnitt.

Electricität.

1. Kap. Apparate zur Erregung und Anhäufung der Electricität.

2. Kap. Gleichgewicht der Electricität (elect. Spannung).

A. Maß der Electricität im Gleichgewichte. B. Anordnung der Electricität in guten Leitern. C. Gleichgewicht der Electricität in Leidnerflaſchen und Condenſatoren. D. Gleichgewicht der Electricität in der Volta'ſchen Säule.

3. Kap. Electricität in Bewegung (elect. Strom).

A. Mittel, die Stärke des electriſchen Stromes zu meſſen. B. Geſetze des electriſchen Stromes.

Tafeln.

Naturlehre.

Einleitung.

Ueber phyſikaliſche Apparate und ihren Gebrauch überhaupt.

A. Phyſikaliſches Kabinet.

1. Das phyſikaliſche Kabinet iſt der zur Aufbewahrung phyſikaliſcher Inſtrumente beſtimmte Platz, welcher überdieß die zur Anſtellung der Verſuche und Beobachtungen nöthige Gelegenheit darbietet. Es iſt der Lieblingsaufenthalt jedes die Wiſſenſchaft wahrhaft liebenden Phyſikers und darum wohl einer eigenen Betrachtung werth.

Gewöhnlich ſind die phyſikaliſchen Kabinete zum Behufe des öffentlichen Unterrichtes beſtimmt; manchmal legt ſich auch ein Freund dieſes Zweiges der Naturforſchung ein ſolches an, theils um darin zu ſeiner Ergötzung und zur Erweiterung der Wiſſenſchaft Verſuche anzuſtellen, theils um das Vergnügen zu genießen, die Waffen, womit der fleißige Forſcher den Sieg über die Geheimniſſe der Natur erkämpft, ſtets vor Augen zu haben.

2. Der Werth eines phyſikaliſchen Kabinetes richtet ſich keineswegs nach ſeiner Ausdehnung und nach der Menge, ſondern nur nach der Auswahl und Güte der vorhandenen Inſtrumente. Alte Kabinete, wie man ſie noch hie und da antrifft, überraſchen das Auge durch die Menge der Geräthſchaften und ihre glänzende Außenſeite. Läßt man ſich aber durch die vergoldeten Leiſten, durch die Löwenfüße, auf denen die Inſtrumente ruhen, und durch die Adlerköpfe, welche die Handhaben tragen, nicht blenden, und ſtellt eine nähere Unterſuchung an; ſo findet man meiſtens nur electriſche und pneumatiſche Spielwerke, Waſſerkünſte und verjüngte Sonnenſyſteme.

Ein zum Unterrichte beſtimmtes Kabinet braucht allerdings manches, um den Vortrag möglichſt faßlich einzurichten und gehörig würzen zu können, das ein blos der Erweiterung der Wiſſenſchaft gewidmetes leicht entbehren kann; doch dürfte heut zu Tage ein Lehrer der Phyſik, der nicht unter die Antiquare gezählt werden will, wenig Zeit erübrigen, um ſich in blos beluſtigende Experimente einlaſſen zu können.

3. Es iſt gut, wenn auch nicht unerläßlich, daß ein phyſikaliſches Kabinet aus mehreren abgeſchloſſenen Räumen beſteht, deren jeder für beſondere Inſtrumente beſtimmt iſt; wenigſtens ſoll ſich an den eigentlichen Inſtrumentenſal ein Zimmer anſchließen, das zur Anſtellung der Verſuche oder zu Vorbereitungen beſtimmt iſt. Sollen mit den phyſikaliſchen Experimenten auch chemiſche vereinigt werden, ſo iſt ein eigenes Gemach zur Aufbewahrung chemiſcher Producte unerläßlich, damit nicht den meiſt metallenen phyſikaliſchen Apparaten die Nachbarſchaft der ſcharfen verdünſtenden chemiſchen Producte nachtheilig oder gar verderblich werde. Übrigens ſind mehrere Zimmer einem einzelnen, wenn auch am Rauminhalte ihnen gleichen vorzuziehen, weil erſtere zur Aufſtellung von Käſten mehrere Wände darbieten. Die abſolute Größe richtet ſich nach dem individuellen Zuſtande jedes Ortes und kann hier nicht angegeben werden.

4. Ein zu einem phyſikaliſchen Kabinete beſtimmtes Locale ſoll ſtets hinreichende Feſtigkeit haben. Manche Verſuche erfordern einen beſonders feſten Stand der Inſtrumente, ja viele Inſtrumente leiden durch die beſtändigen Oſcillationen, in denen ſie begriffen ſind, wenn der Boden nicht die gehörige Feſtigkeit hat. Es iſt wünſchenswerth, daß ſich wenigſtens in einem Zimmer ein Plätzchen befinde, welches ganz vom Fußboden des übrigen Theils iſolirt daſteht und daher an den Bewegungen desſelben keinen Antheil nimmt. In großer Höhe, z. B. im dritten, vierten Stockwerke, erzielt man ſelten die nöthige Feſtigkeit; dazu kommt noch, daß es gefährlich iſt, manche Inſtrumente über viele Treppen zu transportiren, und mühſam, den zu Verſuchen oder zur Reinigung der Inſtrumente nöthigen Waſſervorrath in ſolche Höhe zu bringen. Indeß iſt auch ein Platz zu ebener Erde ſelten für ein phyſikaliſches Kabinet geeignet, weil es ihm meiſtens an der nöthigen Trockenheit fehlt. Inſtrumente aus Holz quellen an feuchten Orten an, ihre Theile treten aus ihrer Verbindung; metallene oxydiren ſich oder laufen an.

Eine Electriſirmaſchine, ein Electrophor gibt an einem ſolchen Platze keine Wirkung. Bei Errichtung eines neuen Gebäudes, wo zu ebener Erde ein phyſikaliſches Kabinet eingerichtet werden ſoll, kann man der Feuchtigkeit dadurch einigermaßen vorbeugen, daß man unter den Fußboden eine Lage Schlacken, Kohlen oder einer anderen trockenen Subſtanz anbringt. Der Trockenheit wegen iſt es auch nöthig, daß ein phyſikaliſches Kabinet nicht an der ſogenannten Wetterſeite (bei uns NW.) liege, weil da faſt jeder Regen anſchlägt. Allein ſelbſt wenn dieſes nicht wäre, ſo dürfte ein phyſikaliſches Kabinet nicht an dieſer Seite liegen, wenn darin optiſche Verſuche angeſtellt werden ſollen. Zu dieſen braucht man immer directes Sonnenlicht, das man an der Nordſeite nie, an der Abendſeite nur Nachmittags bekommt, wo ſelbſt an ſonſt heiteren Tagen die Dünſte das Licht zu ſtark ſchwächen. Dieſe Umſtände machen es unerläßlich, ein phyſikaliſches Kabinet an die Mittags=, oder falls dieſes nicht angeht, an die Morgenſeite zu verlegen.

5. Es iſt nothwendig, daß man die Temperatur eines phyſikaliſchen Kabinetes ſtets innerhalb gewiſſer Grenzen erhalten kann, welches wieder nur möglich iſt, wenn man die Localitäten im Winter zu beheizen, im Sommer gegen das Eindringen des directen Sonnenlichtes zu ſchützen im Stande iſt. Bei vielen Inſtrumenten ſind Theile mit Harzkitt verbunden, der ſich erweicht, wenn er von directem Sonnenlichte getroffen wird, und den Platz verläßt, wo er am nothwendigſten iſt. Hölzerne Beſtandtheile verlieren im directen Sonnenlichte ihre Politur und trocknen ſo ſtark aus, daß ſie Sprünge bekommen. Übrigens wird auch durch eine ſolche Einwirkung des Sonnenlichtes die Luft im Kabinete während des Tages zu ſehr verdünnt, es dringt deßhalb Abends viel äußere Luft hinein und führt eine Menge Staub und feinen Sand mit ſich, der ſich an die Inſtrumente abſetzt und öfteres Abwiſchen nöthig macht, wodurch wieder die Politur leidet und nicht ſelten kleine Ritze entſtehen. Am beſten hält man das directe Sonnenlicht durch leinene Vorhänge ab, die doch noch ſo viel Licht durchlaſſen, daß man im Arbeiten nicht gehindert wird.

Kann man ein Kabinet nicht gegen die Winterkälte ſchützen, ſo frieren die wäſſerigen Flüſſigkeiten, die manche Inſtrumente, z. B. der Waſſerhammer, der Kryophor 2c. enthalten und zerreißen die Gefäße. Metalle ziehen ſich ſehr ſtark zuſammen und zwar ſtärker

als die etwa damit verbundenen Glas- oder Holztheile, und zerdrücken letztere; Harzkitte bekommen Riſſe und fallen weg.

6. Am zweckmäßigſten iſt für ein phyſikaliſches Kabinet die Luftheizung, beſonders jene Art mit einer beſonderen Heizkammer. Da erſpart man den Platz für einen Ofen und braucht nur die Heizlöcher, in deren Nähe man ohne Scheu Käſten und ſelbſt Inſtrumente verſetzen kann, während man einen großen Raum um einen Ofen herum unbeſetzt laſſen muß; man iſt im hohen Grade Meiſter der Temperatur und auch vor Feuersgefahr ſicherer als bei einer andern Beheizung. Selbſt wo die Localität keine ſolche Beheizung mit einer eigenen Heizkammer erlaubt, thut man gut, einen Meißner'ſchen Mantelofen ſtatt eines gewöhnlichen zu gebrauchen.

7. Das Locale, welches zu optiſchen Verſuchen beſtimmt iſt, muß mit Fenſterläden verſehen ſeyn, damit man alles äußere Licht abhalten und nur durch eine kleine Öffnung einen Lichtbüſchel hineinleiten kann. In einigen Muſeen iſt dazu ein eigenes Locale mit ganz ſchwarzen Wänden vorhanden. Dieſes dürfte wohl unnöthig ſeyn und überdieß eine zu ſtarke Erhitzung hervorbringen. Der unſterbliche Fraunhofer hat gewiß die genaueſten optiſchen Verſuche angeſtellt, und doch machte er ſie in einem Zimmer mit ganz weißen Wänden.

8. Die innere Einrichtung eines phyſikaliſchen Kabinetes muß ſeinem Zwecke: Aufbewahrung, Reinhaltung der Inſtrumente, und Leichtigkeit ſie zu brauchen, entſprechen. Inſtrumente, die nicht zu groß ſind, ſollen in eigenen Käſten aufbewahrt werden, aus denen man leicht jedes Stück herausnehmen kann und die gut ſchließen. Delicatere Stücke, z. B. Mikroſkope, feine Meßwerkzeuge ꝛc. haben meiſtens ein eigenes Futteral, in das ſie eingepaßt ſind. In dieſem ſollen ſie ſich auch ſtets außer der Zeit ihres Dienſtes befinden. Derlei Stücke außerhalb ihres eigentlichen Behälters aufzuſtellen, damit das Ganze beſſer ins Auge falle, iſt eine eitle Schwachheit, für welche die Inſtrumente büßen müſſen. Große Inſtrumente, die nicht in eigentliche Käſten paſſen, wie z. B. eine große Luftpumpe, eine Electriſirmaſchine, ſollen entweder mittelſt großer eigener Glaskäſten oder mittelſt eines Leinwandüberzuges vor Staub ꝛc. geſchützt werden. Nur ſolche Inſtrumente, die man faſt beſtändig braucht, müſſen ſtets bei der Hand ſeyn und dürfen nicht in einem Futterale ſich befinden. Von der Art ſind Handwagen,

ein Maßſtab, ein Barometer, ein Thermometer ꝛc. Zur Aufſtellung dieſer dienen eigene Tiſche und Poſtamente, an denen es in einem phyſikaliſchen Kabinete nicht fehlen darf.

9. Bei der Aufſtellung der Inſtrumente ſoll zwar der ſyſtematiſche Zuſammenhang eine Hauptrolle ſpielen, doch kann man auch wohl der Symmetrie ein kleines Opfer bringen; die Localität nöthiget einen ohnehin zu häufigen Abweichungen von der ſyſtematiſchen Ordnung. Stets ſoll der Zutritt zu jedem einzelnen Stücke frei ſeyn, damit man nicht nöthig habe, mehrere in die Hand zu nehmen und zu verſchieben, um eines herauszubringen. Brennſpiegel und Brenngläſer ſollen nicht nach der Seite gekehrt ſeyn, woher directes Sonnenlicht kommt; Inſtrumente mit brennbaren Stoffen ſollen feuerfeſte Stellen einnehmen.

10. Selten kann ein phyſikaliſches Kabinet, es mag zum Unterrichte oder zu Anſtellung neuer Verſuche und zur Erweiterung der Wiſſenſchaft beſtimmt ſeyn, eines kleinen chemiſchen Laboratoriums entbehren. Ein dazu beſtimmtes Locale ſoll nicht unmittelbar an die eigentlich phyſikaliſchen Inſtrumentenſäle grenzen, wie ſchon oben (3) erwähnt wurde, ſondern ein eigenes, wenn auch kleines Ganzes ausmachen. Bei einem ſolchen Locale iſt Trockenheit und directes Sonnenlicht eben ſo nothwendig, wie beim phyſikaliſchen, weil manche chemiſche Producte in feuchter Luft zerfließen und mancher Verſuch directes Sonnenlicht fordert. Übrigens iſt es unerläßlich, daß es ſich in einer Lage befinde, wo die Herbeiſchaffung einer bedeutenden Waſſermenge nicht mit großen Schwierigkeiten verknüpft iſt und ſich die Luft leicht erneuern läßt. Ein gemauerter Windofen unter einem eigenen Mantel, der in einen Rauchfang führt, nebſt tragbaren gewöhnlichen Öfen und Lampenöfen ſind ein großes Bedürfniß. Ein Kaſten mit den nöthigen chemiſchen Präparaten, ein anderer mit Mörſern, Reibſchalen und den dazu gehörigen Piſtillen, mit Abdampfſchalen, Filtrirgläſern und Trichtern, Spacheln und Glasſtangen, Retorten, Phiolen, Kolben, Vorſtößen und Verbindungsröhren, Woulf'ſchen Flaſchen, einem pneumatiſchen Waſſer- und Queckſilberapparat, Glasglocken, Flaſchenbehältern, Schmelztiegeln, Muffeln, Deſtillirapparaten, ein Kohlenbehälter ꝛc. ſind unentbehrliche Geräthſchaften eines, wenn auch nur ſupplementären, chemiſchen Laboratoriums.

11. Bei vielen phyſikaliſchen Verſuchen braucht man einige mechaniſche Handwerkzeuge. Dahin gehören: Ein kleiner Schraub-

ſtock mit einem Amboß, ein Feilkloben, eine Beißzange, eine Zange mit flachen, eine andere mit runden Backen, Pincetten, Feilen, Bohrer, ein Zieheiſen, um Dråhte auf einen beſtimmten Durchmeſſer zu bringen, Schraubenzieher ꝛc.

B. Beobachtungen und Verſuche nebſt ihrer vortheilhafteſten Combination.

12. Der Hauptzweck aller Arbeiten des Phyſikers iſt, die Natur in ihren mannigfaltigen Äußerungen kennen zu lernen und die Geſetze der Naturerſcheinungen zu entdecken. In dieſer Abſicht werden Beobachtungen und Verſuche angeſtellt. Selten låßt ſich eine Beobachtung oder ein Verſuch ohne Beihilfe eigener Inſtrumente anſtellen; die Beſchaffenheit derſelben nimmt ſtets auf das Reſultat Einfluß, und muß daher dem Phyſiker genau bekannt ſeyn.

13. Durch Verſuche und Beobachtungen will man entweder das Stattfinden einer Erſcheinung kennen lernen, oder ſie der Größe nach beſtimmen. In beiden Fållen můſſen die Umſtånde, unter denen gearbeitet wird, wohl berůckſichtiget werden. In der Natur, wo ſtets viele Kråfte zugleich thåtig ſind, werden die einzelnen Wirkungen, deren Unterſuchung man beabſichtiget, durch fremdartige Einflůſſe ſo vielfach modificirt, daß es unmöglich iſt, erſtere in ihrer Reinheit zu erkennen, wenn man nicht dieſe Einflůſſe beſeitiget. Manchmal geht dieſes nicht an und dann bleibt nur das Mittel ůbrig, die Nebenwirkungen in Rechnung zu bringen, und von dem Geſammtreſultate das wegzunehmen, was auf Rechnung derſelben gehört.

14. Das Stattfinden einer Erſcheinung iſt nur dann als erwieſen anzuſehen, wenn ſie ſich unter denſelben Umſtånden immer wieder einſtellt. Wenn man eine Erſcheinung bald hervorzurufen im Stande iſt, bald aber dieſes nicht zu thun vermag, gehört ſie in das Reich des Unſicheren und es beruht ihre Wahrnehmung auf einer Tåuſchung, oder man kennt nicht die Umſtånde, die zu ihrer Erzeugung nothwendig ſind. Übrigens darf man nicht vergeſſen, daß alles, was fůr uns wahrnehmbar ſeyn ſoll, unſere Sinne mit einer gewiſſen Stårke afficiren muß. Wir ſehen einen Körper nur, wenn ſeine Ausdehnung eine gewiſſe Grenze ůberſchreitet, nehmen ſeine Bewegung nur wahr, wenn ſie mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit geſchieht, unſere Augen verſagen uns ihre Dienſte, wenn

die Intenſität des Lichts zu gering iſt, das Ohr vernimmt nur einen Schall von gewiſſer Stärke ꝛc. ꝛc. Daher ſind die Mittel, wodurch unſere Sinne geſchärft werden, ſo wichtig, wenn es ſich um die Wahrnehmung einer ſubtilen Erſcheinung handelt.

15. Es iſt für uns unmöglich, beim Meſſen irgend einer Größe abſolute Genauigkeit zu erlangen, daher denn auch Beobachtungen und Verſuche, bei welchen man auf das Meſſen von Größen ausgeht, ſtets mit Fehlern behaftet ſind. Dieſe Fehler ſind von zweierlei Art. Die einen hängen von Umſtänden ab, die in jedem Falle verſchieden ſind, und ſtehen mit den Beobachtungen und Verſuchen nicht in nothwendiger Verbindung. Von der Art ſind diejenigen, welche vom Mangel der abſoluten Feſtigkeit der Inſtrumente, von kleinen Variationen der Temperatur, von der Unvollkommenheit unſerer Sinne ꝛc. ꝛc. abhängen. Sie laſſen ſich nicht berechnen, man kann höchſtens die Grenze angeben, die ſie nicht überſchreiten. Die Fehler der zweiten Art ſtehen ſtets mit den Beobachtungen und Verſuchen in inniger Verbindung, haften gleichſam an den Inſtrumenten und ſind entweder ſtets von derſelben Größe, oder ändern ſich doch nach einem beſtimmten Geſetze. Sie laſſen ſich berechnen. Von der Art ſind die Fehler im Gange einer ſonſt guten Uhr, die Theilungsfehler an Inſtrumenten ꝛc. Dieſe muß man vor dem Gebrauche der Werkzeuge genau kennen lernen und ihren Einfluß in Rechnung bringen, damit die Reſultate der Beobachtungen von ihnen unabhängig werden, und die Fehler derſelben blos von der erſten Art ſind. Für ſolche Fehler eines Inſtrumentes iſt ein Künſtler nie verantwortlich, ja es iſt nicht einmal immer gut, wenn er ſie gar klein macht, weil dabei ihre Beſtimmung erſchwert wird.

16. Wenn man dieſelbe Größe öfters hinter einander unter ſcheinbar ganz gleichen Umſtänden mißt, ſo erlangt man bei jeder Meſſung, ſelbſt nach Berückſichtigung aller Fehler der zweiten Art, ein anderes Reſultat. Werden mehrere Beobachtungen mit einander verbunden, um daraus irgend ein Geſetz abzuleiten, ſo nehmen die Beobachtungsfehler Einfluß auf das Ergebniß einer ſolchen Combination und man läuft Gefahr, ein von der Wahrheit weit entferntes Reſultat zu finden. Wiewohl man kein Mittel kennt, dieſen Beobachtungsfehlern ganz zu entgehen und aus Beobachtungen ganz fehlerfreie Geſetze abzuleiten; ſo hat es doch der Scharfſinn der großen Männer, die ihre Kräfte den Naturwiſſen-

ſchaften widmeten, durch mathematiſche Mittel dahin gebracht, Beobachtungen auf eine Weiſe zu combiniren, daß die daraus abgeleiteten Reſultate mit den möglich kleinſten Fehlern behaftet ſind.

Bei einem ſorgfältigen Verfahren im Meſſen von Größen wird man offenbar bald zu viel, bald zu wenig meſſen und darum werden die Fehler theils poſitiv, theils negativ ſeyn. Man kann das Verhältniß des Beobachters füglich mit dem eines Spielers vergleichen, der nur verlieren, nicht gewinnen kann, und wo jeder Fehler als Verluſt anzuſehen iſt. Allein wenn dieſes für poſitive und negative Fehler zugleich gelten ſoll, ſo muß man dem Umſtande zu begegnen ſuchen, daß ein poſitiver Fehler Gewinn bedeuten müßte, der hier gar nicht Statt findet, wenn man einen negativen als Verluſt anſieht. Zu dieſem Ende drückt man die Größe des Verluſtes durch eine Function des Fehlers aus, die poſitiv bleibt, der Fehler mag poſitiv oder negativ ſeyn. Eine ſolche Function iſt jede gerade Potenz des Fehlers; man wählt aber gewöhnlich die zweite Potenz, als die einfachſte. Die Methode, die Fehler auf den kleinſten Werth zu bringen, wird alſo darin beſtehen, das Minimum ihrer Quadrate zu ſuchen. Darum heißt dieſe Methode auch die Methode der kleinſten Quadratſumme.

17. Geſetzt man wolle eine Größe x meſſen und habe dafür bei μ mal wiederholten Beobachtungen die Werthe a, b, c, ꝛc. gefunden, ſo daß man die noch unbekannten Fehler $a - x$, $b - x$, $c - x$ ꝛc. begeht, deren Quadratſumme

$$(a-x)^2 + (b-x)^2 + (c-x)^2 + \ldots\ldots$$

iſt. Sucht man den kleinſten Werth dieſes Ausdruckes, indem man ſein Differenziale nach x gleich Null ſetzt; ſo erhält man

$$x = \frac{a + b + c + \ldots}{\mu} \ldots\ldots (A)$$

Mithin führt dieſe Methode auf das längſt übliche Verfahren, aus mehreren gleich guten Beobachtungen das arithmetiſche Mittel zu nehmen.

18. Viele Unterſuchungen führen auf Gleichungen von der Form $ap + bq + cr \ldots = m$, wo a, b, c, m durch Erfahrung beſtimmbare, p, q, r ꝛc. unbekannte Größen vorſtellen. Hat man durch Erfahrung mehr Gleichungen erhalten, als unbekannte Größen zu beſtimmen ſind, ſo ſind letztere mehr als beſtimmt. Es handelt ſich darum, die Werthe von p, q, r ꝛc. ſo auszumitteln, daß ſie mit den möglichſt kleinſten Fehlern behaftet ſind. Man bezeichne nun

mit a_1, a_2, a_3 ꝛc. b_1, b_2, b_3 ꝛc. c_1, c_2, c_3 ꝛc. die Coefficienten der unbekannten Größen in den Gleichungen von obiger Form, nenne eben ſo die Werthe der Function von p, q, r ꝛc. m_1, m_2, m_3 ꝛc. und drücke die Fehler, welche an m, m_1, m_2 ꝛc. haften, durch u, u_1, u_2 ꝛc. aus. Man hat daher

$$\begin{array}{l} ap + bq + cr + \ldots = m + u \\ a_1p + b_1q + c_1r + \ldots = m_1 + u_1 \\ a_2p + b_2q + c_2r + \ldots = m_2 + u_2 \\ a_3p + b_3q + c_3r + \ldots = m_3 + u_3 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{array}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} ap + bq + cr + \ldots - m = u \\ a_1p + b_1q + c_1r + \ldots - m_1 = u_1 \\ a_2p + b_2q + c_2r + \ldots - m_2 = u_2 \\ a_3p + b_3q + c_3r + \ldots - m_3 = u_3 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} (B)$$

Wird jede dieſer Gleichungen zum Quadrat erhoben, ſo erhält man durch Addiren derſelben den Werth von $u^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots$ und wenn man die Summe differenziirt und das Differenziale $= 0$ ſetzt; ſo erhält man Gleichungen, aus denen ſich die von den kleinſten Fehlern behafteten Werthe von p, q, r ꝛc. ableiten laſſen.

Man erhält nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} (ap + bq + cr + \ldots - m)\,(a\,dp + b\,dq + c\,dr + \ldots) \\ +(a_1p + b_1q + c_1r + \ldots - m_1)\,(a_1dp + b_1dq + c_1dr + \ldots) \\ +(a_2p + b_2q + c_2r + \ldots - m_2)\,(a_2dp + b_2dq + c_2dr + \ldots) \\ +(a_3p + b_3q + c_3r + \ldots - m_3)\,(a_3dp + b_3dq + c_3dr + \ldots) \end{array}\right\} = 0$$

oder, weil p, q, r ꝛc. von einander unabhängig ſind:

$$\left.\begin{array}{l} (ap + bq + cr + \ldots - m)\,a \\ +(a_1p + b_1q + c_1r + \ldots - m_1)\,a_1 \\ +(a_2p + b_2q + c_2r + \ldots - m_2)\,a_2 \\ +(a_3p + b_3q + c_3r + \ldots - m_3)\,a_3 \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (ap + bq + cr + \ldots - m)\,b \\ +(a_1p + b_1q + c_1r + \ldots - m_1)\,b_1 \\ +(a_2p + b_2q + c_2r + \ldots - m_2)\,b_2 \\ +(a_3p + b_3q + c_3r + \ldots - m_3)\,b_3 \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}(ap + bq + cr + \ldots - m)\, c \\ +(a_1p + b_1q + c_1r + \ldots - m_1)\, c_1 \\ +(a_2p + b_2q + c_2r + \ldots - m_2)\, c_2 \\ +(a_3p + b_3q + c_3r + \ldots - m_3)\, c_3\end{array}\right\} = 0$$

Ordnet man aber jede dieſer Gleichungen nach den Unbekannten p, q, r ꝛc. ſo erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}(a^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots)p + (ab + a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots)q \\ +(ac + a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots)r - (am + a_1m_1 + a_2m_2 + \ldots)\end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}(ab + a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots)p + (b^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots)q \\ +(bc + b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots)r - (bm + b_1m_1 + b_2m_2 + \ldots)\end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}(ac + a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots)p + (bc + b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots)q \\ +(c^2 + c_1^2 + c_2^2 + \ldots)r - (cm + c_1m_1 + c_2m_2 + \ldots)\end{array}\right\} = 0$$

Führt man das Zeichen Σ in der Bedeutung ein, daß

$$\Sigma . a^2 = a^2 + a^2_1 + a^2_2 \ldots$$
$$\Sigma . ab = ab + a_1b_1 + a_2b_2 \ldots$$
$$\Sigma . ac = ac + a_1c_1 + a_2c_2 \ldots$$

iſt; ſo hat man

$$p . \Sigma a^2 + q \Sigma ab + r \Sigma ac - \Sigma am = 0$$
$$p . \Sigma ab + q \Sigma b^2 + r \Sigma bc - \Sigma bm = 0$$
$$p . \Sigma ac + q \Sigma bc + r \Sigma c^2 - \Sigma cm = 0 \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Man hat nun ſo viele Gleichungen als zu beſtimmende Größen und kann daher letztere leicht finden.

19. Wenn auf dieſe Weiſe die Größen p, q, r ꝛc. gefunden ſind, ſo kann man ſie in die Gleichungen (B) ſetzen und dadurch die Fehler u, u_1 ꝛc. finden. Iſt einer oder der andere dieſer Fehler verhältnißmäßig gar groß, ſo iſt es nöthig die Gleichung, welche ihn führt, aus der ferneren Rechnung ganz wegzulaſſen, denn man erhält ohne ſie ein genaueres Reſultat. Es wäre aber unnöthig, darum die oft weitläufige Rechnung wieder von vorne anzufangen, denn man kommt auch zum Ziele, wenn man in der zuerſt geführten Rechnung, wozu alle Gleichungen benützt wurden, die Coefficienten derjenigen Gleichung, die nun wegbleiben ſoll, gleich Null ſetzt.

20. Bei dieſer Behandlung der Sache wird vorausgeſetzt, daß alle Beobachtungen, aus denen die Werthe der Unbekannten abgeleitet werden, denſelben relativen Werth haben. Wäre dieſer Werth nicht für alle Gleichungen derſelbe (welches z. B. eintreten würde, wenn die Methode, durch welche m beſtimmt wird, weniger Genauigkeit zuließe, als die, wodurch m_1, m_2 ꝛc. beſtimmt

werden, oder wenn m das Mittel aus wenigeren Beobachtungen wäre, als $m_{,}$ oder $m_{,,}$; ſo müßte man den Fehler u mit der relativen Genauigkeit multipliciren und daher, wenn dieſe z. B. bei der erſten Gleichung in (B) gleich h wäre, ſtatt der vorher gebrauchten $ap + bq + cr \ldots - m = u$ die Gleichung $hap + hbq + hcr \ldots - hm = hu$ in Rechnung nehmen.

21. Beim Gebrauch von Mittelwerthen aus gleich guten Beobachtungen ſteht der Werth des Reſultates im geraden Verhältniſſe mit der Anzahl von Beobachtungen, aus denen das Mittel genommen iſt. Wäre m durch 5, $m_{,}$ aber durch 8 Beobachtungen beſtimmt, bei denen gleich große Fehler wahrſcheinlich ſind, ſo wäre das Verhältniß ihres Werthes 5 : 8 oder für den erſten Fall hätte man $h = 5$, für den zweiten $h = 8$. In Fällen, wo die empiriſchen Beſtimmungen nach ganz verſchiedenen Methoden gemacht worden ſind, iſt es oft ſchwer, den Werth der Reſultate kennen zu lernen. Das ſicherſte Mittel iſt folgendes: Man mache nach jeder Methode vorläufig eine beſtimmte Anzahl von Beobachtungen und ſuche aus den nach jeder dieſer Methoden gefundenen Zahlenwerthen das arithmetiſche Mittel. Hierauf nehme man den Mittelwerth aus allen jenen Reſultaten, welche durch dieſelbe Methode beſtimmt wurden und größer oder kleiner ſind als der zu dieſer Beobachtungsreihe gehörige Mittelwerth. Die größten Unterſchiede zwiſchen dem allgemeinen Mittelwerth, und demjenigen, welcher den auf einer Seite des Mittels liegenden Werthen entſpricht, ſtehen im verkehrten Verhältniſſe zum relativen Werth der nach jeder Methode gemachten Beobachtungen. Z. B. man habe nach einer Methode beim Meſſen einer Größe durch 5malige Beobachtung die Werthe 7, 5, 8, 7.5, 6.3, nach einer anderen aber die Werthe 8, 6, 5, 7, 4 erhalten. Der Mittelwerth der erſteren iſt 6.76, der Mittelwerth der letzteren 6.00. Das Mittel der Werthe nach der erſten Methode, welche kleiner ſind als 6.76, iſt 5.65, das Mittel der Werthe nach der zweiten Methode, welche kleiner ſind als 6.00, iſt 4.50, und daher $6.76 - 5.65 = 1.11$, $6.00 - 4.50 = 1.50$ und daher erſtere Methode der zweiten im Verhältniſſe 150 : 111 überlegen.

22. Oft iſt einem viel daran gelegen, die Größe des wahrſcheinlichen Fehlers, von welchem das nach der Methode der kleinſten Quadratſumme gefundene Reſultat behaftet iſt, zu finden. Dahin gelangt man durch die folgenden Betrachtungen:

Die Leichtigkeit einen Fehler von der Größe u zu begehen, iſt

bei übrigens gleichen Umſtänden eine Function der Größe dieſes Fehlers, und die Wahrſcheinlichkeit, ihn begangen zu haben, deſto größer, je leichter er zu begehen war. Darum iſt auch dieſe Wahrſcheinlichkeit eine Function des Fehlers. Es ſey dieſe Wahrſcheinlichkeit φu, mithin die eines Fehlers, der zwiſchen u und du liegt, gleich $\varphi u\,du$. Die Function φ läßt ſich zwar nicht a priori beſtimmen, aber es iſt doch klar, daß ſie für Werthe von u, die außerhalb der Grenzen der möglichen Fehler liegen, gleich Null ſey und daß ſie in den meiſten Fällen für $+u$ und $-u$ gleich groß iſt, weil gleich große Fehler von entgegengeſetzten Zeichen meiſtens gleich leicht zu begehen ſind, oder daß $\varphi u = \varphi(-u)$ iſt.

Die Wahrſcheinlichkeit, daß ein Fehler zwiſchen den Grenzen $+a$ und $-a$ liege, iſt

$$\int_{-a}^{+a} \varphi u\, du$$

Sind $+a$ und $-a$ die äußerſten Grenzen der möglichen Fehler, ſo liegt der Fehler gewiß zwiſchen dieſen Grenzen und man hat

$$\int_{-a}^{+a} \varphi u\, du = 1$$

weil Gewißheit die Wahrſcheinlichkeit $= 1$ iſt. Da aber für alle Werthe von u außerhalb $+a$ und $-a$ das Integrale gleich Null iſt, ſo wird man auch ſetzen können

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi u\, du = 1.$$

Wenn dem Vorhergehenden gemäß die Wahrſcheinlichkeit des Fehlers u gleich φu, die des Fehlers u_1 gleich φu_1, u. ſ. w. iſt; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß man zugleich alle dieſe Fehler, u, u_1, u_2 ꝛc. begangen hat,

$$\varphi u\, \varphi u_1\, \varphi u_2 \ldots = x$$

Daraus wird durch Differenziiren

$$dx = d\varphi u(\varphi u_1 \varphi u_2 \ldots) + d\varphi u_1(\varphi u\, \varphi u_2 \ldots) + d\varphi u_2(\varphi u\, \varphi u_1 \ldots)$$

oder wenn (wie in 18) u, u_1, u_2 ꝛc. Functionen von p, q, r ꝛc. ſind, und die Wahrſcheinlichkeit, daß dieſe Fehler begangen worden ſeyen, ein Maximum ſeyn ſoll,

$$\left.\begin{aligned} dx = &\left(\frac{d\varphi u}{dp} + \frac{d\varphi u}{dq} + \frac{d\varphi u}{dr} + \ldots\right)\varphi u_1 \varphi u_2 \\ &+ \left(\frac{d\varphi u_1}{dp} + \frac{d\varphi u_1}{dq} + \frac{d\varphi u_1}{dr} + \ldots\right)\varphi u \varphi u_2 \\ &+ \left(\frac{d\varphi u_2}{dp} + \frac{d\varphi u_2}{dq} + \frac{d\varphi u_2}{dr} + \ldots\right)\varphi u \varphi u_1 \\ &- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ &- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \end{aligned}\right\} = 0$$

ſchreibt man ſtatt der Factoren $\varphi u_1 \varphi u_2$, $\varphi u \varphi u_2$, $\varphi u \varphi u_1$ ꝛc. die ihnen gleichen $\frac{x}{\varphi u}$, $\frac{x}{\varphi u_1}$, $\frac{x}{\varphi u_2}$ und ordnet die Gleichung nach den Variablen p, q, r ꝛc. ſo erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{d\varphi u}{\varphi u\, dp} + \frac{d\varphi u_1}{\varphi u_1\, dp} + \frac{d\varphi u_2}{\varphi u_2\, dp}\right) x \\ &+ \left(\frac{d\varphi u}{\varphi u\, dq} + \frac{d\varphi u_1}{\varphi u_1\, dq} + \frac{d\varphi u_2}{\varphi u_2\, dq}\right) x \\ &+ \left(\frac{d\varphi u}{\varphi u\, dr} + \frac{d\varphi u_1}{\varphi u_1\, dr} + \frac{d\varphi u_2}{\varphi u_2\, dr}\right) x \\ &\ldots\ldots \end{aligned}\right\} = 0$$

und daher

$$\frac{d\varphi u}{\varphi u\, dp} + \frac{d\varphi u_1}{\varphi u_1\, dp} + \frac{d\varphi u_2}{\varphi u_2\, dp} = 0$$

$$\frac{d\varphi u}{\varphi u\, dq} + \frac{d\varphi u_1}{\varphi u_1\, dq} + \frac{d\varphi u_2}{\varphi u_2\, dq} = 0$$

$$\frac{d\varphi u}{\varphi u\, dr} + \frac{d\varphi u_1}{\varphi u_1\, dq} + \frac{d\varphi u_2}{\varphi u_2\, dr} = 0$$

oder wenn man $\frac{d\varphi u}{\varphi u} = \varphi_1 u\, du$, $\frac{d\varphi u_1}{\varphi u_1} = \varphi_1 u_1\, du_1$ ꝛc. ſetzt,

$$\varphi_1 u \frac{du}{dp} + \varphi_1 u_1 \frac{du_1}{dp} + \varphi_1 u_2 \frac{du_2}{dp} \ldots = 0$$

$$\varphi_1 u \frac{du}{dq} + \varphi_1 u_1 \frac{du_1}{dq} + \varphi_1 u_2 \frac{du_2}{dq} \ldots = 0$$

$$\varphi_1 u \frac{du}{dr} + \varphi_1 u_1 \frac{du_1}{dr} + \varphi_1 u_2 \frac{du_2}{dr} \ldots = 0$$

Zur näheren Beſtimmung des Werthes φu oder $\varphi_1 u$ ſetze man voraus, man habe aus gleich guten Beobachtungen für die Größe

p durch Gleichungen von der Form $ap+bq+cr-m=u$ die Größen $n, n_1, n_2 \ldots$ gefunden, ſo, daß das arithmetiſche Mittel dieſer Werthe dem wahren Werth am nächſten kommt und man daher hat

$$p=\frac{n+n_1+n_2\ldots}{\mu}$$

wo μ die Anzahl der zur Beſtimmung von p, q, r ꝛc. vorhandenen Gleichungen bezeichnet.

Da nun $u=n-p$, $u_1=n_1-p$, $u_2=n_2-p$ ꝛc. und

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}p}=\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}p}$$

iſt, ſo wird aus der erſteren von obigen Gleichungen

$$\varphi_1(n-p)+\varphi_1(n_1-p)+\varphi_1(n_2-p)\ldots=0.$$

Setzt man nun alle Werthe n_1, n_2, einander gleich und verlegt den ganzen Fehler auf n, ſo iſt auch

$$p=\frac{n+(\mu-1)(n-\mu u)}{\mu}=n-(\mu-1)u$$

und daher die vorhergehende Gleichung

$$\varphi_1(\mu-1)u+\varphi_1(-u)+\varphi_1(-u)+\ldots=0$$

das iſt

$$\varphi_1(\mu-1)u+(\mu-1)\varphi_1(-u)=0, \text{ oder}$$

$$\varphi_1(\mu-1)u=-(\mu-1)\varphi_1(-u).$$

Demnach iſt $\varphi_1 u$ gleich dem Producte einer conſtanten Größe k in u oder man hat:

$$\varphi_1 u=\frac{\mathrm{d}\varphi u}{\varphi u\,\mathrm{d}u}=ku$$

und daher

$$\log\varphi u=\frac{1}{2}ku^2+c$$

wo c die Conſtante der Integration bedeutet. Setzt man $\frac{1}{2}k=-h^2$, ſo wird

$$\varphi u=ce^{-h^2u^2} \text{ oder } \int\varphi u\,\mathrm{d}u=c\int e^{-h^2u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Zur Beſtimmung der Conſtanten c hat man

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi u\,\mathrm{d}u=1 \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

wo π die halbe Peripherie eines Kreiſes vom Halbmeſſer $= 1$ bedeutet, daher iſt

$$1 = \frac{c\sqrt{\pi}}{h} \text{ oder } c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

woraus man erhält:

$$\varphi u = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}.$$

Auf dieſelbe Weiſe findet man auch

$$\varphi u_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u_1^2}, \; \varphi u_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u_2^2}$$

und daher

$$x = \varphi u \varphi u_1 \varphi u_2 \ldots = \pi^{\frac{-\mu}{2}} h^{\mu} e^{-h^2 (u^2 + u_1^2 + u_2^2 \ldots.)} \quad (C.)$$

23. Die Größe h bezeichnet das **Maß der Genauigkeit** der Beobachtungen; denn die Wahrſcheinlichkeit, daß der begangene Fehler zwiſchen $+f$ und $-f$ liege, iſt

$$\int_{-f}^{+f} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2} \, \mathrm{d}u$$

die Wahrſcheinlichkeit, daß er zwiſchen $+f_1$ und $-f_1$ liege,

$$\int_{-f_1}^{+f_1} \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 u^2} \, \mathrm{d}u.$$

Beide Ausdrücke werden einander gleich, wenn man hat

$$fh = f_1 h_1.$$

Iſt h bei einer Beobachtung doppelt ſo groß als h_1, ſo iſt f_1 doppelt ſo groß als f und man kann bei dieſer eben ſo leicht einen doppelten, wie bei jener einen einfachen Fehler begehen.

24. Die Wahrſcheinlichkeit, daß ein Fehler die Größe u nicht überſchreite, alſo zwiſchen $+u$ und $-u$ falle, iſt doppelt ſo groß, als die, daß er zwiſchen o und u liege, d. h. es iſt

$$\int_{-u}^{+u} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2} \, \mathrm{d}u = 2 \int_{o}^{u} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2} \, \mathrm{d}u =$$

$$\int_{o}^{u} \frac{2 h e^{-h^2 u^2} \, \mathrm{d}u}{\sqrt{\pi}}.$$

Setzt man

$$\varphi u = \int_0^u \frac{2 e^{-u^2} du}{\sqrt{\pi}}, \text{ ſo iſt}$$

$$\varphi h u = \int_0^u \frac{2 h e^{-h^2 u^2} du}{\sqrt{\pi}} = \int_{-u}^{+u} \frac{h e^{-h^2 u^2} du}{\sqrt{\pi}}$$

und daher $\varphi h u$ die Wahrſcheinlichkeit, daß der Fehler die Größe u nicht überſchreitet. Iſt u gegen die Einheit klein, ſo erlangt man durch Auflöſung der Größe e^{-u^2} in eine Reihe, und nachheriges Integriren

$$\varphi u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(u - \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{u^5}{1.2} - \ldots \right).$$

Für $\varphi u = \frac{1}{2}$ iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß der Fehler u nicht überſchreitet, gerade ſo groß, als die des Gegentheils. Für dieſe Vorausſetzung iſt aber $u = 0.4769363 = \rho$ und daher für $\varphi h u = \frac{1}{2}$ auch $h u = \rho$ oder $u = \frac{\rho}{h}$. Dieſe Größe $\frac{\rho}{h}$ heißt daher der wahrſcheinliche Fehler. Man nenne ihn γ.

25. Der obige Werth von x (C) gibt die größte Wahrſcheinlichkeit für die Fehler u, u_1, u_2 ꝛc. an, wenn x den größten Werth hat. Sucht man dieſen, indem man den vorhergehenden Ausdruck nach h differenziirt und das Differenziale Null ſetzt, ſo findet man:

$$\mu h^{\mu-1} - 2 h^{\mu+1} (u^2 + u_1^2 + u_2^2 \ldots) = 0$$

und hieraus der wahrſcheinlichſte Werth von h gleich

$$\sqrt{\frac{\mu}{2(u^2 + u_1^2 + u_2^2 \ldots)}} = H$$

und der wahrſcheinlichſte Werth von γ gleich

$$\rho \sqrt{\frac{2(u^2 + u_1^2 + u_2^2 \ldots)}{\mu}} =$$

$$= 0.6744897 \sqrt{\frac{u^2 + u_1^2 + u_2^2 \ldots}{\mu}} = \Gamma.$$

Wiewohl dieſes Reſultat allgemein gilt, μ mag groß oder klein ſeyn, ſo kann man ſich davon doch eine deſto größere Genauigkeit verſprechen, je größer μ iſt.

26. Man weiß nun, die Wahrſcheinlichkeit, H ſey der wahre Werth von h, verhalte ſich zur Wahrſcheinlichkeit, daß dieſer Werth $H+\eta$ iſt, wie

$$H^{\mu} e^{-H^2(u^2+u_1^2+u_2^2)} : (H+\eta)^{\mu} e^{-(H+\eta)^2\mu(u^2+u_1^2+u_2^2\ldots)}$$

oder wenn man für $u^2+u_1^2+u_2^2\ldots$ das ſetzt, was ſich dafür aus dem Werthe von H (25) ergibt, ſo wird dieſes Verhältniß

$$H^{\mu} e^{-\frac{\mu}{2}} : (H+\eta)^{\mu} e^{-\mu\left(\frac{H+\eta}{2H^2}\right)^2}$$

oder

$$1 : e^{-\frac{\eta^2\mu}{H^2}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\eta}{H}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\eta^2}{H^2}\cdots\cdots\right)}.$$

Iſt endlich μ eine große Zahl und $\frac{\eta}{H}$ ein kleiner Bruch, ſo wird jenes Verhältniß gar

$$1 : e^{-\frac{\eta^2\mu}{H^2}}.$$

Die Wahrſcheinlichkeit, daß der wahre Werth von h zwiſchen $H+\eta$ und zwiſchen $H+\eta+d\eta$ liege, iſt daher

$$K e^{-\frac{\eta^2\mu}{H^2}} d\eta,$$

wo K ſo beſtimmt wird, wie c in 22 beſtimmt wurde.

Es iſt daher die Wahrſcheinlichkeit, daß der wahre Werth von h zwiſchen $H+\eta$ und $H-\eta$ liege, gleich

$$\varphi\left(\frac{\eta}{H}\sqrt{\mu}\right).$$

Dieſer Ausdruck wird $=\frac{1}{2}$, wenn $\frac{\eta}{H}\sqrt{\mu}=0.4769363=\rho$, oder wenn $\eta=\frac{\rho H}{\sqrt{\mu}}$ iſt; d. h. die Wahrſcheinlichkeit, daß der wahre

Werth von h zwiſchen $H+\eta=H\left(1+\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)$ und zwiſchen $H-\eta=H\left(1-\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)$ liege, iſt eben ſo groß als die ſeines Gegentheils, oder es iſt 1 gegen 1 zu wetten, daß der wahre Werth von h zwiſchen den Grenzen

$$H\left(1+\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) \text{ und } H\left(1-\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)$$

liege. Weil aber $\frac{\rho}{h}=\gamma$ iſt, ſo wird auch der wahre Werth von γ zwiſchen

$$\frac{\rho}{H\left(1+\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)} \text{ und } \frac{\rho}{H\left(1-\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

enthalten ſeyn, welche Grenzen aber in

$$\frac{\Gamma}{1+\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}} \text{ und } \frac{\Gamma}{1-\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}}$$

übergehen, wenn man im Zähler ſtatt ρ ſeinen Werth ΓH ſetzt.

Entwickelt man dieſe Größen und vernachläſſiget alle Glieder bis auf die zwei erſten, ſo bekommt man als wahrſcheinliche Grenzen von γ

$$\Gamma\left(1-\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right) \text{ und } \Gamma\left(1+\frac{\rho}{\sqrt{\mu}}\right)$$

d. i. $\sqrt{\frac{u^2+u_1^2+u_2^2}{\mu}}\left(0.6744897-\frac{0.3216886}{\sqrt{\mu}}\right)$

und $\sqrt{\frac{u^2+u_1^2+u_2^2}{\mu}}\left(0.6744897+\frac{0.3216886}{\sqrt{\mu}}\right)$.

27. Es gibt noch eine viel einfachere aber auch minder ſcharfe Methode, aus einer Anzahl Gleichungen, die größer iſt als die der darin vorkommenden unbekannten Größen, für letztere die der Wahrheit ſehr nahe liegenden Werthe zu beſtimmen. Man ändert nämlich die gegebenen Gleichungen dahin ab, daß die zu beſtimmende Größe in allen dieſelben Zeichen hat, und addirt alle dieſe

Gleichungen. Dadurch wird der Coefficient dieſer Größe am größten, und weil alle übrigen mit dieſem zuletzt dividirt werden müſſen; ſo haben die Fehler, die etwa an ihnen haften, auf den Werth der erſteren den mindeſten Einfluß. Geſetzt man habe folgende Gleichungen und es ſollen aus ihnen p, q, r ꝛc. beſtimmt werden:

$$p - q + 2r = 3$$
$$3p + 2q - 5r = 5$$
$$4p + q + 4r = 21$$
$$-p + 3q + 3r = 14.$$

Um eine Gleichung für p zu erhalten, ändert man die letzte Gleichung in $p - 3q - 3r = -14$, welche zu den 3 übrigen addirt $9p - q - 2r = 15$ gibt. Zur Beſtimmung einer Gleichung für q und r ändert man die Zeichen der erſten und zweiten Gleichung, addirt ſie zu den übrigen und findet ſo

$$5p + 7q = 37 \text{ und } p + q + 14r = 33.$$

Aus allen 3 Gleichungen beſtimmt man p, q, r und findet

$$p = 2.485,\ q = 3.510,\ r = 1.929,$$

Werthe, welche von denen, die man nach der Methode der kleinſten Quadratſumme findet, nicht ſehr abweichen.

28. Die erſtere Methode iſt nur anwendbar, wenn die unbekannten Größen in der erſten Potenz vorkommen, für höhere Potenzen muß man einen andern Weg einſchlagen.

Man kann nämlich die Werthe der Größen p, q, r nach der zweiten Methode annäherungsweiſe finden. Geſetzt man findet ſie gleich P, Q, R. Sie werden aber ſelten genau genug ſeyn. Darum muß man ſie auf folgende Art verbeſſern.

Es ſey $p = P + \alpha$, $q = Q + \beta$, $r = R + \gamma$, wo α, β, γ immer nur ſehr kleine Größen ſeyn werden, deren höhere Potenzen man füglich vernachläſſigen kann. Setzt man dieſe Werthe von p, q, r in die gegebenen Gleichungen, und verwirft alle Potenzen von α, β, γ, welche die erſte überſteigen; ſo bekommt man für α, β, γ Gleichungen des erſten Grades, die man nach der erſten Methode auflöſen kann. So erhält man den nächſten Werth von α, β, γ und daher auch den von p, q, r.

Der erſte, welcher ſich der Methode der kleinſten Quadratſumme bediente, war Gauß, der ſie i. J. 1795 zur Berechnung der Planetenbahn anwendete; Legendre bediente ſich derſelben Methode im Jahre

1805, um die Elemente zweier Kometenbahnen dadurch zu verbeſſern. Heut zu Tage hat ſie in der Phyſik zahlreiche Anwendungen gefunden, wie mehrere ſchöne Arbeiten von Pauker, Kämtz, Hållſtröm, Sabine ꝛc. beweiſen, und iſt überhaupt für den Phyſiker unentbehrlich.

C. Mittel zur Beſtimmung der Naturgeſetze.

29. Wenn einer Erſcheinung, deren Geſetz ausgemittelt werden ſoll, eine bekannte Urſache zum Grunde liegt, ſo iſt es gewöhnlich nicht ſchwer die Geſetze zu finden, nach welchen die Erſcheinung ſelbſt erfolgt; wenn man es aber mit Phänomenen zu thun hat, die von unbekannten Urſachen herrühren, ſo hält es oft ſehr ſchwer, jenen Zweck zu erreichen. Doch gibt es Mittel, welche oft ſehr kurz zum Ziele führen. Von der Art ſind 1) die graphiſche Darſtellung der Erſcheinung; 2) die Ausmittlung eines mathematiſchen Ausdruckes, deſſen Form der Erſcheinung entſpricht.

30. Bei der graphiſchen Darſtellung wird der Verlauf einer Erſcheinung durch eine Curve ausgedrückt, deren Coordinaten die veränderlichen Größen ſind, von denen ſie abhängt. So z. B. ſtellt man den Gang der Queckſilberſäule im Barometer durch eine Curve vor, deren Ordinaten der Zeit, in welcher das Barometer beobachtet wurde, und deren Abſciſſen der beobachteten Barometerhöhe ſelbſt proportionirt ſind. Oft geſchieht es, daß eine ſolche Curve mit einer der bekannten, nach einem gewiſſen Geſetze gebildeten, große Ähnlichkeit hat, oder gar damit zuſammenfällt, und dann iſt ſchon zur genaueren Erörterung des geſuchten Geſetzes viel geſchehen. Wenigſtens würde man eine hypothetiſch entworfene mathematiſche Theorie dieſer Erſcheinung leichter prüfen können, als es nach bloßen Zahlenangaben, welche Beobachtungen liefern, möglich wäre.

Solche Darſtellungen haben aber immer das Mangelhafte, daß ſie nicht blos von den Beobachtungsfehlern, ſondern auch von den Unregelmäßigkeiten und Störungen der Erſcheinung behaftet ſind.

31. Viel beſſere Dienſte leiſtet eine die Erſcheinung darſtellende mathematiſche Formel. Eine ſolche läßt ſich insbeſondere für jene Fälle mit beſonderem Vortheil brauchen und ohne beſondere Schwierigkeit finden, wo die Erſcheinung periodiſch in derſelben Ordnung und mit derſelben Größe wiederkehrt, wie

z. B. die Lufttemperaturen, Barometerſtände ꝛc. die magnetiſche Abweichung ꝛc. ꝛc. Die Form des Ausdruckes iſt durch die Bedingung gegeben, daß die Erſcheinung ſtetig fortſchreitet und jedes Mal die Periode einhält. Bezeichnet k den Umfang der Periode, nach deren Beendigung das Phänomen wieder in der Größe y wiederkehrt, und x die Größe, von welcher y abhängt, ſo wird vom mathematiſchen Ausdrucke gefordert, daß y denſelben Werth beibehält, wenn man für x ſetzt $x+k$, $x+2k$, $x+3k$ ꝛc.

Dieſer Bedingung entſpricht die Formel

$$y = a + p_1 \sin\left(P_1 + \frac{x}{k}\,2\pi\right) + p_2 \sin\left(P_2 + \frac{x}{k}\,4\pi\right) + \ldots.$$

wo $p_1\ p_2\ P_1\ P_2$ ꝛc. beſtändige Größen bedeuten und $2\pi = 360°$ iſt.

Nun handelt es ſich darum a, p_1, ... P_1, P_2 ꝛc. aus den beobachteten Werthen von y zu finden. Dieſes wird beſonders leicht, wenn dieſe Werthe von y zu ſolchen Werthen von x gehören, die in arithmetiſcher Progreſſion fortſchreiten und ſich auf die ganze Periode erſtrecken.

Entwickelt man obige Sinuſſe und ſetzt

$$p_1 \sin P_1 = a_1 \qquad p_2 \sin P_2 = a_2,\ \text{ꝛc.} \ldots$$
$$p_1 \cos P_1 = b_1 \qquad p_2 \cos P_2 = b_2 \ldots\ldots$$
$$\frac{x}{k}\,2\pi \quad = z$$

ſo geht die vorhergehende Formel in folgende über:

$$y = a + a_1 \cos z + b_1 \sin z + a_2 \cos 2z + b_2 \sin 2z + \ldots$$

Von dieſer Gleichung kann man ſo viele Unbekannte beſtimmen, als man Werthe von y kennt. Allein es genügt faſt immer, nur einige Glieder dieſer Gleichung zu kennen, indem ſie meiſtens ſchnell convergirt. Es wird zwar auf ſolche Weiſe y nicht vollſtändig beſtimmt, dafür erreicht man aber den Vortheil, eine große Anzahl der früheren Glieder auf das vortheilhafteſte beſtimmen zu können, indem man ſich der Methode der kleinſten Quadrate bedient. Natürlich wird dazu erfordert, daß mehrere Werthe von y bekannt ſind, als man unbekannte Größen zu ſuchen hat. Dieſe Beſtimmung wird leicht auf eine eigenthümliche Weiſe geſchehen können, die mit der gewöhnlichen Beſtimmungsweiſe der Unbekannten nach der Methode der kleinſten Quadrate verglichen, ein Mittel an die Hand gibt, zu beurtheilen, ob man eine zur Erzielung

der nöthigen Genauigkeit hinreichende Anzahl Unbekannter beſtimmt habe oder nicht.

32. Man nehme an, die Größen z, z_1, z_2 ꝛc., bilden eine arithmetiſche Reihe, deren Differenz ein aliquoter Theil von 360° iſt, ſo daß die ganze Reihe

$$0,\ z,\ 2z, \ldots\ldots (n-1)\,z$$

wird, wo $n = \frac{2\pi}{z}$ iſt. Unter dieſer Vorausſetzung erhält man die Werthe von y, die der Ordnung nach durch A, A_1, A_2 ꝛc. ausgedrückt werden mögen, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
A &= a + a_1 + a_2 + \ldots\ldots \\
A_1 &= a + a_1 \cos z + b_1 \sin z + a_2 \cos 2z + b_2 \sin 2z + \ldots \\
A_2 &= a + a_1 \cos 2z + b_1 \sin 2z + a_2 \cos 4z + b_2 \sin 4z + \ldots \\
&- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
&- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
A_{n-1} &= a + a_1 \cos (n-1)\,z + b_1 \sin (n-1)\,z + a_2 \cos (n-1)\,2z \\
&\quad + b_2 \sin (n-1)\,2z + \ldots
\end{aligned}$$

unter der Bedingung, daß, der Methode der kleinſten Quadrate gemäß, das Differentiale von

$$\left\{\begin{aligned}
&(a + a_1 + a_2 \ldots\ldots - A)^2 \\
&+ (a + a_1 \cos z + b_1 \sin z \ldots - A_1)^2 + \ldots \\
&+ (a + a_1 \cos (n-1)\,z + b_1 \sin (n-1)\,z \ldots - A_{n-1})^2
\end{aligned}\right\} = 0$$

ſey, oder daß

$$d\,.\,\Sigma\,(a + a_1 \cos z + b_1 \sin z \ldots - A \ldots)^2 = 0$$

wo Σ die bekannte Bedeutung hat. Verrichtet man die Differenziirung nach allen Variablen und ſetzt jeden Coefficienten, welcher zu dem Differentiale derſelben Variablen gehört, = o, ſo erhält man:

$$\left\{\begin{aligned}
&\Sigma(a + a_1 \cos z + b_1 \cos z + \ldots\ldots\ldots - A) = 0 \\
&\Sigma.\cos\ z\,(a + a_1 \cos z + b_1 \sin z \ldots\ldots - A) = 0 \\
&\Sigma.\sin\ z\,(a + a_1 \cos z + b_1 \sin z \ldots\ldots - A) = 0 \\
&\Sigma.\cos 2z\,(a + a_1 \cos z + b_1 \sin z \ldots\ldots - A) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Allein weil $nz = 2\pi$ iſt, ſo verſchwinden die Summen

$$\sin z + \sin 2z + \ldots\ldots \sin (n-1)\,z$$
$$1 + \cos z + \cos 2z + \ldots\ldots \cos (n-1)\,z$$

in der Entwickelung der vorhergehenden Gleichungen, und es bleibt blos

$$na - \Sigma A \quad = 0$$

$$\frac{n}{2} a_1 - \Sigma A \cos z = 0$$

$$\frac{n}{2} b_1 - \Sigma A \sin z = 0,$$

mithin ſind die wahrſcheinlichſten Werthe der Unbekannten folgende:

$$a = \frac{1}{n}(A + A_1 + A_2 \ldots\ldots A_{n-1})$$

$$a_1 = \frac{2}{n}(A + A_1 \cos z + A_2 \cos 2z + \ldots A_{n-1} \cos (n-1) z)$$

$$b_1 = \frac{2}{n}(\quad A_1 \sin z + A_2 \sin 2z + \ldots A_{n-1} \sin (n-1) z)$$

$$a_2 = \frac{2}{n}(A + A_1 \cos 2z + A_2 \cos 4z + \ldots A_{n-1} \cos (n-1) 2z)$$

$$b_2 = \frac{2}{n}(\quad A_1 \sin 2z + A_2 \sin 4z + \ldots A_{n-1} \sin (n-1) 2z).$$

33. Nach dem gewöhnlichen, der Methode der kleinſten Quadrate entſprechenden Verfahren erhält man als Summe der Quadrate der Fehler (18) den Ausdruck,

$$\Sigma A^2 - a \Sigma A - a_1 \Sigma A \cos z \ldots.$$

und daher durch Vergleichung der einzelnen Glieder dieſes Ausdruckes mit den vorhergefundenen Werthen:

$$\Sigma . A \quad = na \quad , \Sigma . A \cos z \quad = \frac{n a_1}{2}$$

$$\Sigma . A \sin z = \frac{n b_1}{2} , \Sigma . A \cos 2z = \frac{n a_2}{2} \ldots\ldots$$

$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Dieſe Werthe in den vorhergehenden Ausdruck geſetzt, geben als Summen der Quadrate der Fehler

$$\Sigma . A^2 - n a^2 - \frac{n}{2} a_1^2 - \frac{n}{2} b_1^2 - \frac{n}{2} a_2^2 + \ldots\ldots$$

Von dieſer Gleichung läßt ſich der (31) erwähnte Gebrauch machen; man kann nämlich mittelſt derſelben den Fehler finden, welchen man begeht, wenn man die Entwickelung der Unbekannten mit irgend einem Gliede abbricht und daraus ſehen, ob man ſich mit dem bereits erhaltenen Reſultate begnügen dürfe oder ob daher noch mehrere Glieder entwickelt werden müſſen. Hat man z. B. nur a

entwickelt, und man zieht deſſen n faches Quadrat von ΣA^2 ab, ſo gibt der Reſt das, was durch die folgenden Glieder noch ergänzt wird; zieht man überdieß noch das $\frac{n}{2}$ fache Product von a_1^2 davon ab, ſo gibt der Reſt das, was die folgenden Glieder noch erklären u. ſ. w.

34. Oft ſind die Werthe von y nicht für alle Glieder der Reihe

$$o,\ z,\ 2z,\ 3z \ldots\ldots (n-1)z$$

gegeben, ſondern es fehlen deren einige, wie z. B. die Glieder αz, γz ꝛc., und man hat demnach auch nicht alle Glieder der Reihe

$$A,\ A_1,\ A_2 \ldots\ldots A_{(n-1)}.$$

Dieſes hindert aber die Auflöſung nicht. Man kann nämlich entweder die mangelnden Werthe von y durch Interpoliren finden, wenn aber dieſes nicht angeht, ſo muß man die unbekannten Glieder A_α, A_γ zu dem Ausdruck von a, a_1, a_2 ꝛc. addiren, ſo daß man hat:

$$a = \frac{1}{n} \quad \Sigma . A + \frac{1}{n} A_\alpha + \frac{1}{n} A_\gamma + \ldots.$$

$$a_1 = \frac{2}{n} . \Sigma . A \cos \quad z + \frac{2}{n} A_\alpha \cos \quad \alpha z + \frac{2}{n} A_\gamma \cos \quad \gamma z + \ldots$$

$$b_1 = \frac{2}{n} \quad \Sigma . A \sin \quad z + \frac{2}{n} A_\alpha \sin \quad \alpha z + \frac{2}{n} A_\gamma \sin \quad \gamma z + \ldots$$

$$a_2 = \frac{2}{n} \quad \Sigma . A \cos 2z + \frac{2}{n} A_\alpha \cos 2\alpha z + \frac{2}{n} A_\gamma \cos 2\gamma z + \ldots$$

Um nun dieſe Werthe von den ihnen anhängenden unbekannten Theilen zu befreien, ſetze man ſie in die Ausdrücke

$$A_\alpha = a + a_1 \cos \alpha z + b_1 \sin \alpha z + \ldots.$$
$$A_\gamma = a + a_1 \cos \gamma z + b_1 \sin \gamma z + \ldots.$$

und man erhält die zur Beſtimmung der Größen A_α, A_γ nöthige Anzahl Gleichungen. Sind ſo die Werthe A_α, A_γ gefunden, ſo ſetze man ſie in die vorhergehenden Ausdrücke von a, a_1 a_2 b_1 b_2 ꝛc. und erhält dadurch auch ihren Werth, wodurch der Zweck erreicht iſt.

35. Es gibt Fälle, wo die bisher als conſtant angenommenen Coefficienten ſelbſt veränderlich, und zwar periodiſche Functionen eines Winkels z_1 ſind, ſo, daß ſelbſt dieſe die Form

$$p + p_1 \cos z_1 + q_1 \sin z_1 + p_2 \cos 2z_1 + q_2 \sin 2z_1 + \ldots$$

haben. Auch in ſolchen Fällen hat die beabſichtigte Auffindung des Geſetzes keine Schwierigkeit, ſobald man nicht blos die den Werthen $0, z, 2z \ldots (n-1)z$ entſprechenden Werthe von y für einen beſtimmten Werth von z_1 kennt, ſondern für jeden der Werthe $0, z_1\ 2z_1\ 3z_1 \ldots (n_1-1)z_1$. In dieſem Falle beſtimmt man zuerſt nach der vorhergehenden Methode die Größen p, p_1, p_2 2c. q_1, q_2 2c. und mittelſt der für ſie gefundenen Ausdrücke die Werthe von $a, a_1\ a_2$ 2c. Für den Fall, wo die Werthe von y nicht den vorhin genannten Bedingungen entſprechen, wird die Beſtimmung oft ſchwierig und läßt ſich meiſtens nur für beſondere Fälle erreichen.

Über die Methode der kleinſten Quadrate ſiehe:

Gauss theoria mot. c. coel. Hamb. 1809.

Derſelbe in Zeitſchrift für Aſtronomie von Lindenau und Bohnenberger. B. I. S. 185.

Littrow theoretiſche und practiſche Aſtronomie. Wien 1821. B. I., S. 252 u. f.

Desſelben Vorleſungen über Aſtronomie. Wien 1830. S. 252.

Pauker über die Anwendung der Methode der kleinſten Quadratſumme auf phyſik. Beobachtungen. Mietau 1819.

Gehler's phyſ. Wörterbuch herausgegeben von Brandes, Gmelin, Horner, Muncke und Pfaff. B. I. S. 901.

Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes par M. Legendre. Paris 1806.

Comment. soc. reg. Goetting. Tom. V. 1823.

Calcul des probabilités par M. Laplace. Paris IV.

Über die Beſtimmung des Geſetzes einer periodiſchen Erſcheinung:

Lagrange in Berliner Ephemeriden für 1763.

Beſſel in Schumacher's aſtronomiſchen Nachrichten. B. VI. S. 333.

Derſelbe in den Berliner Abhandlungen für 1820—1821.

Erster Abschnitt.

Abmeſſungen und Maße der Körper.

36. Die meiſten phyſikaliſchen Unterſuchungen fordern eine genaue Kenntniß der Abmeſſungen und der Maſſe der Körper oder des Verhältniſſes beider zu einander. Darum iſt die Beſtimmung dieſer Größen für den Phyſiker eine Sache von der größten Wichtigkeit und dieſe ſoll hier mit der nöthigen Umſtändlichkeit aus einander geſetzt werden.

Erſtes Kapitel.

A. Beſtimmung der Abmeſſungen der Körper.

37. Die Abmeſſungen eines Körpers, welche nicht gar zu klein ſind, beſtimmt man mittelſt der Maßſtäbe. Man überträgt ſie zu dieſem Behufe entweder mittelſt eines Zirkels auf den Maßſtab, oder vergleicht ſie unmittelbar mit letzterem, indem man ſie feſt an den Maßſtab anhält und entweder mit freiem oder beſſer mit bewaffnetem Auge ſieht, wie viele Theilſtriche desſelben zwiſchen die zwei Grenzen der Dimenſion fallen, welche man beſtimmen will. Man kann die Aufgabe, eine Abmeſſung zu beſtimmen, ſtets mit der für gleichlautend halten, die Entfernung zweier Puncte von einander anzugeben.

Die erſtere der zwei oben erwähnten Methoden iſt immer etwas unſicher, ſelbſt wenn der Zirkel ungemein feine Spitzen hat, weil man zwei Operationen verrichten muß, deren keine ganz ohne Fehler ablauft. Zwei Zirkelſpitzen genau ſo weit zu öffnen, als der Abſtand zweier Puncte fordert, iſt ſchon deßhalb unmöglich, weil ſowohl dieſe Puncte, als auch die Zirkelſpitzen ſtets eine gewiſſe Ausdehnung haben, und man nie ſicher iſt, daß der Mittelpunct der Spitze (eigentlich des ſtumpfen Kegels, den man für die Spitze hält) auf die Mitte der Puncte trifft; überdieß ſtehen die Spitzen an den gewöhnlichen Zirkeln ſchief; ſetzt man ſie auf eine Fläche ein, um die Größe eines beſtimmten Stückes abzumeſſen, ſo dringen ſie mehr oder weniger tief ein, und die Puncte, denen ſie an der Oberfläche entſprechen, haben eine geringere Diſtanz, als die Spitzen ſelbſt.

Weit ſicherer mißt man demnach die Diſtanz zweier Puncte oder Linien durch das zweite der oben angegebenen Mittel. Man kann mittelſt eines 30 mal vergrößernden Mikroſkopes bei gehöriger Sorgfalt zwei Linien ſo ſcharf zur Coincidenz bringen, daß der Fehler nie über 0.00004 Pariſer Zoll beträgt, wie Reichenbach verſichert, und erlangt demnach durch Meſſen die Entfernung zweier Linien von einander mittelſt Coincidenz derſelben mit zwei anderen, deren Entfernung bekannt iſt, eine Schärfe, auf welche man beim Übertragen mittelſt eines Zirkels verzichten muß.

38. Ich bediene mich zum Meſſen der Diſtanz zweier Puncte oder Linien ſtets eines eigens vom Mechanikus Werner eingerichteten Maßſtabes, den Fig. 1 und 2 vorſtellt. *AB* iſt ein hohler parallelepipediſcher Körper aus Holz, der $4\frac{1}{4}$ Fuß lang, 7 Zoll breit und eben ſo hoch iſt, und aus mehreren Holzſtücken beſteht, damit er nicht ſchwinde. Auf ſeiner oberen Fläche befindet ſich eine meſſingene, 4 Fuß 1 Zoll lange, $1\frac{3}{8}$ Zoll breite Schiene *ab*, welche aus drei auf einander geſchraubten, meſſingenen Linealen beſteht, von denen die zwei äußeren breiter ſind, als das mittlere und ſo der Länge nach eine Furche oder Nuth bilden. Das oberſte Lineal enthält die Theilung. Zur Seite dieſes und mit ihr parallel ſind zwei andere ähnliche Schienen *cd* und *ef* aus Meſſing eingeſetzt, die aber zum Theil in Holz eingelaſſen und mit dem Rücken aufwärts gekehrt ſind ſo, daß ſie eine Rinne *cdef* bilden, in welcher die Körper, deren Dimenſionen man beſtimmen (oder an denen man Linien von beſtimmter Entfernung ziehen) will, mittelſt hölzerner Keile befeſtiget werden. Der Maßſtab enthält eine zweifache Theilung, nämlich nach Wienerlinien und nach Millimetern; beide Theilungen haben einen gemeinſchaftlichen Nullpunct. In der erwähnten Nuth laſſen ſich zwei Meſſingplatten *g* und *h* verſchieben, die mit Querſtäben, welche über *ab* gehen, gleichſam zu einer Rahme verbunden ſind und die Nonien für beide Theilungen enthalten, wovon der zur franzöſiſchen Theilung gehörige $\frac{1}{100}$ Millimeter, der zur Wienertheilung gehörige hingegen $\frac{1}{144}$ Linie angibt. Damit die Oberfläche des Nonius beim Ableſen genau in der Ebene des Maßſtabes liege, läßt er ſich mittelſt eines Schraubenkopfes *m* und *n* an den Maßſtab andrücken. Beide Nonien ſtehen in feſter Verbindung mit einer Schraubenvorrichtung *l*, durch welche ſie an den Maßſtab feſt gemacht werden, die ſich aber auch lüften laſſen, damit man den ganzen Nonius und was damit in Verbindung ſteht,

längs des Maßſtabes verſchieben kann. Iſt die Schraube feſt angezogen, ſo kann man dem Nonius mittelſt der Mikrometerſchraube *k* eine feine Bewegung ertheilen.

39. Um mittelſt dieſer Vorrichtung eine Dimenſion beſtimmen zu können, iſt in *o* ein aus 2 Linſen beſtehendes Mikroſkop angebracht, das ſich heben und ſenken aber auch feſtſtellen läßt und im Brennpuncte einen mit einem Theilſtriche des Nonius parallelen feinen Faden hat. Befeſtiget man den Körper, auf dem eine beſtimmte Dimenſion gemeſſen werden ſoll, und ſchiebt die Rahme der Nonien dahin, daß der Faden mit einer Grenze zuſammenfällt, merkt den Stand auf dem Maßſtabe an, thut dann dasſelbe mit der zweiten Grenze, zieht beide Anzeigen am Maßſtabe von einander ab; ſo erhält man die geſuchte Größe. Daß man dabei weder den Maßſtab noch den zu meſſenden Körper mit der Hand berühren dürfe, iſt für ſich klar, weil dadurch partielle Ausdehnungen und mithin falſche Reſultate erzeugt werden.

Um mittelſt dieſer Vorrichtung Linien in beſtimmten Entfernungen ziehen zu können, hat man noch eine andere Vorrichtung angebracht, die aus Fig. 1 zu erſehen iſt und aus einer Art Schlitten beſteht, in welchen der Reißhaken eingeſetzt iſt.

40. Man kann zwar mit dieſem Maßſtabe auch kleine Dimenſionen genau beſtimmen, aber die Dicke dünner Drähte, feiner Metallplättchen, ja ſelbſt die Dicke eines gewöhnlichen Blechſtückes läßt ſich nicht damit ausmitteln. Um die Dicke feiner Drähte zu beſtimmen, braucht man am beſten einen Schraubenmikrometer an einem Mikroſkope, von dem in der Folge die Rede ſeyn wird. Um die Dicke von Blechen auszumitteln, bei denen nicht die größte Schärfe verlangt wird, thut ein Maßſtab gute Dienſte, der auf eine Glasplatte gezeichnet iſt. Wird der Maßſtab mit der Fläche, worauf ſich die Theilung befindet, nach abwärts gekehrt, auf das abzumeſſende Blechſtück gelegt, und der Rand des Bleches an eine Theilungslinie ſcharf angehalten; ſo ſieht man leicht von oben den Punct des Maßſtabes, dem die andere Grenze entſpricht. Man hüte ſich aber, den Maßſtab zu brauchen, wenn er nicht auf dem Bleche aufliegt, oder ſeine Theilung auf der von demſelben abgewendeten Fläche befindlich iſt, weil da wegen der Lichtbrechung und der Parallaxe Fehler unvermeidlich ſind.

41. Schärfere Reſultate erhält man mit Cauchoix's Sphärometer, das überdieß für die dünnſten Plättchen anwendbar iſt.

Dieſes Inſtrument iſt in Fig. 3 abgebildet, und gehört eigentlich in die Claſſe der Schraubenmikrometer. *AB* iſt eine, mit einem großen, am Umfange in 100 gleiche Theile getheilten Kopfe *a* verſehene, am unteren Ende abgerundete Schraube. Die runde Platte *cd* enthält die Schraubenmutter und ruht auf drei gleich hohen, unten ſtumpfen Füßen, deren Enden aus Stahl ſeyn müſſen. An der Seite der Scheibe befindet ſich ein verticales Metallſtück *e*, das als unbeweglicher Index für die Theilung des Schraubenkopfes dient, wohl auch ſelbſt der Länge nach in Linien oder noch kleinere Theile getheilt iſt, und gleichſam einen Maßſtab vorſtellt. g iſt ein flaches Poſtament, in welches eine vollkommen ebene Glasplatte eingelaſſen iſt, auf welche die Füße der Schraubenmutter zu ſtehen kommen. *hi* iſt eine zweite bewegliche gleichförmig dicke Glasplatte.

42. Wenn man dieſes Inſtrument zur Beſtimmung der Dicke eines Plättchens ꝛc. brauchen will, muß man den Werth eines Schraubenganges genau kennen. Bekanntlich erhält man dieſen, wenn man die Schraube mehrere Male umdreht, bis ſie ſich um eine beſtimmte Größe, welche man genau meſſen kann, z. B. um einen Zoll, vorwärts oder rückwärts geſchoben hat, und dieſe dann durch die Anzahl der Umdrehungen, Bruchtheile mit eingerechnet, dividirt. Beim Sphärometer des hieſigen Muſeums gehen auf einen Zoll 80 Umdrehungen, woraus als Werth eines Schraubenganges 0.15 Linie folgt. Kennt man dieſen Werth, ſo handelt es ſich noch um die Dicke des Plättchens *hi*. Dieſe beſtimmt man, indem man zuerſt die Schraube ſo weit herabſchraubt, daß ihr unteres Ende mit dem der drei Füße der Schraube genau in derſelben Ebene liegt. Man kann dieſes daraus mit ungemeiner Schärfe auf folgende Weiſe erkennen: Man ſtelle das Inſtrument auf die Bodenplatte und drücke mit den Fingern zwei Füße ſanft auf dieſelbe auf, um überzeugt zu ſeyn, daß ſie auf der Baſis feſt aufſtehen, klopfe dann ſanft auf den dritten Fuß von oben. So lange das Schraubenende über die Ebene der Endpuncte der drei Füße nur um ein Geringes hervorragt, hört man während des darauf Klopfens ein Klappern, das alſogleich in einen dumpfen Laut übergeht, ſobald man das Ende von *b* in die Ebene der drei Füße oder über dieſelbe hinaufgeſchraubt hat. Hat man es dahin gebracht, daß das mindeſte Vorwärtsſchieben der Schraubenſpindel obiges Klappern wieder erzeugt, ſo kann man wohl annehmen, das Schraubenende und die Endpuncte der drei Füße liegen in derſelben Ebene. Das Inſtrument des hieſigen Mu-

ſeum's iſt bis auf $\frac{1}{500}$ eines Schraubenganges empfindlich, daher kann damit höchſtens ein Fehler von $\frac{3}{10000}$ Linie begangen werden. Hat man nun der Schraube die hier beſprochene Stellung gegeben, ſo nimmt man ihren Stand an dem Maßſtabe und an dem Schraubenkopfe ab, zieht die Schraube zurück, legt die Platte hi auf fg, ſtellt ſie auf die Schraube, und ſchiebt ſie ſo lange zurück, bis das mindeſte Vorſchieben den Stand auf allen 3 Füßen aufhebt und obiges Klappern wieder hervorgebracht werden kann. Sieht man nun wieder auf den Schraubenkopf und auf die Scale e und berechnet den Unterſchied im Stande der Schraube in beiden Lagen, ſo erhält man die Dicke der Platte hi. Es iſt nothwendig dieſe Platte auf ihrer Baſis zu verſchieben und zu ſehen, ob ſie an allen Stellen gleich dick iſt.

Will man mit dieſem Apparate die Dicke eines Plättchens beſtimmen, ſo legt man es ſo auf die Baſis, daß es keine Falte macht, legt hi darauf, und verfährt ſo, wie vorhin bei der Beſtimmung der Dicke von hi geſchehen iſt, zieht aber nach der Hand von der gefundenen Dicke die der Platte hi ab. Im Nothfalle läßt ſich auch die Dicke feiner Drähte auf dieſem Wege beſtimmen, indem man 2 gleich dicke Stücke unter hi legt und dann wie vorhin verfährt.

43. Weil ſich die Länge der Maßſtäbe mit ihrer Temperatur ändert, ſo kann dieſelbe nur bei einem beſtimmten Wärmegrade richtig ſeyn, und man iſt genöthiget, die bei einer anderen Temperatur abgenommene Größe auf die Normaltemperatur zu reduciren, als welche man am beſten die des Eispunctes annimmt. Heißt demnach l_t die Länge eines Maßſtabes oder eines Stückes desſelben bei der Temperatur $t°\,C$, l_0 dieſelbe bei 0° C und iſt c die Größe der Ausdehnung des Stoffes, woraus der Maßſtab beſteht, bei einer Erwärmung von 1° C in Theilen der bei 0° C Statt findenden Dimenſion; ſo hat man $l_t = (1 + ct)\, l_0$ und daher

$$l_0 = \frac{l_t}{1 + ct}.$$

Die Maßſtäbe beſtehen meiſtens aus Eiſen, Meſſing oder Silber und für dieſe Stoffe hat man der Reihe nach

$$c = 0.0000122$$
$$0.0000188$$
$$0.0000190.$$

B. Prüfung eines Maßſtabes.

44. Es iſt ſehr wichtig, Maßſtäbe, die zu genauen Beſtimmungen dienen ſollen, vorläufig prüfen zu können, um ſo die conſtanten Theilungsfehler zu beſtimmen. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß hier von ſolchen Fehlern die Rede iſt, die ſich nicht auf den erſten Blick erkennen laſſen; denn Werkzeuge mit Fehlern, die ſchon der erſte Blick entdeckt, kann man wohl nicht anwenden, wo es ſich um genaue Reſultate handelt.

Hat man einen Maßſtab zur Hand, von deſſen Genauigkeit in der Theilung und abſoluten Länge man ſchon überzeugt iſt; ſo kann man leicht die Richtigkeit jedes anderen prüfen, indem man nur verſchiedene Dimenſionen nach beiden mit gleicher Sorgfalt zu meſſen braucht. Geben beide dasſelbe Reſultat, oder nur Abweichungen, die innerhalb der Grenzen der wahrſcheinlichen Beobachtungsfehler liegen, ſo kann man beide für richtig anſehen; finden aber größere Abweichungen Statt, ſo läßt ſich daraus der Fehler des einen berechnen.

45. Hat man keinen bereits als richtig erkannten Maßſtab zur Hand, ſo muß der zu prüfende einen guten Nonius haben, wenn eine genaue Prüfung möglich ſeyn ſoll. Mit dieſem wird die Unterſuchung vorgenommen. Man richtet nämlich den Nonius ſo, daß ſein Nullpunct mit dem des Maßſtabes zuſammenfällt. In dieſer Lage darf nur der letzte Theilſtrich des Nonius mit einem Theilſtriche des Maßſtabes zuſammenfallen, und die vom Nullpuncte des Nonius und dem mit ihm coincidirenden Theilſtrich des Maßſtabes um gleich viele Theilſtriche abſtehenden Linien müſſen einen deſto größeren Abſtand von einander haben, je weiter ſie vom Coincidenzpuncte entfernt ſind. Der Theilſtrich, bei welchem eine Abweichung von dieſer Regel eintritt, iſt fehlerhaft gezogen, und man kann meiſtens leicht durch bloßes Augenmaß erkennen, wie groß der Fehler iſt, der dann notirt werden muß.

Geſetzt man habe einen in Zoll und Linien eingetheilten Maßſtab mittelſt eines Nonius zu prüfen, der $\frac{1}{10}$ Linie angibt, und bei dem deßhalb 11 Linien in 10 gleiche Theile getheilt ſind. Beim Zuſammenfallen beider Nullpuncte muß der erſte Theilſtrich des Nonius vom erſten Theilſtrich des Maßſtabes um $\frac{1}{10}$ Linie, der 2. des Nonius vom 2. des Maßſtabes um $\frac{2}{10}$ Linie, der 3. des Nonius vom 3. des Maßſtabes um $\frac{3}{10}$, endlich der 9. des

Nonius vom 9. des Maßſtabes um $\frac{9}{10}$ Linie abſtehen. Betrüge die Entfernung des 7. d. N. vom 7. d. M. eben ſo viel wie die des 6. d. N. vom 6. d. M., ſo wäre die 7. Diſtanz d. M. vom 8. um $\frac{1}{10}$ zu groß, oder die des 6. vom 7. um $\frac{1}{10}$ zu klein. Hat man dieſes Geſchäft vollbracht, ſo ſchiebt man den Nonius um ſeine ganze Länge am Maßſtabe weiter, beginnt die Unterſuchung von Neuem, und fährt ſo durch die ganze Länge des Maßſtabes fort.

Wenn bei dieſer Prüfung die Fehler ſtets zwiſchen dieſelben Theilſtriche des Nonius fallen, ſo iſt die Theilung des letzteren verdächtig. Seine Prüfung geſchieht mit einem guten Maßſtabe eben ſo, wie der Maßſtab mittelſt eines guten Nonius beurtheilt wird.

46. Oft braucht man den Durchmeſſer eines cylindriſchen Röhrchens ſehr genau zu kennen. Ein directes Meſſen dieſer Größe iſt faſt immer ſehr unzuverläſſig, aber man kann ein ſehr ſcharfes Reſultat erhalten, wenn man auf den Durchmeſſer aus der Gewichtsmenge Queckſilber oder einer anderen Flüſſigkeit, die ein beſtimmtes Röhrenſtück faßt, einen Schluß macht. Zu dieſem Ende ſucht man durch Saugen oder durch Eintauchen des Röhrchens in die Flüſſigkeit eine hinreichend lange Säule davon hineinzubringen, mißt die Länge derſelben mit aller Genauigkeit, und beſtimmt das Gewicht der aufgenommenen Flüſſigkeit durch Abwägen. Beim Meſſen hat man vorzüglich darauf zu ſehen, daß man die Temperatur der flüſſigen Säule durch die Nähe des Körpers nicht ändere. Geſetzt man habe die Länge der Säule $= l$, das Gewicht der Flüſſigkeit, welche dieſe Säule bildet, $= P$ gefunden und die Temperatur $= t$, welche bei dieſem Verſuche herrſcht, beobachtet. Heißt der zu ſuchende Halbmeſſer bei 0° C $= a$, und die lineare Ausdehnung des Stoffes, woraus die Röhre beſteht, $= c$; ſo iſt $a(1+ct)$ dieſer Halbmeſſer bei der Temperatur t und $a^2(1+ct)^2\pi$ ein Querſchnitt der Öffnung des Röhrchens. Bezeichnet ferner p_0 das Gewicht eines Kubikcentimeters der gebrauchten Flüſſigkeit bei 0° C und d_t die Dichte derſelben bei t^0 nach dem Maße der Dichte, die bei 0° C Statt findet; ſo hat man

$$a^2(1+ct)^2 l\pi p_0 d^t = P$$

und daher

$$a = \sqrt{\frac{P}{(1+ct)^2 l\pi p_0 d_t}}$$

ſtatt deſſen man füglich

$$a = \sqrt{\frac{P}{(1+2ct)\,l\pi p_0 d_t}}$$

ſetzen kann.

Die Flüſſigkeit, deren man ſich faſt ausſchließlich bedient, iſt das Queckſilber. Für dieſes hat man

$$p_0 = 13.591213 \text{ Gramme } d_t = \frac{5550}{5550+t}.$$

C. Rauminhalt tropfbarer Körper und Capacität der Gefäße.

47. Die genaueſte Beſtimmung des Rauminhalts eines Körpers geſchieht offenbar dadurch, daß man ſein abſolutes Gewicht durch ſein ſpecifiſches theilt. Auch die Capacität eines Gefäßes findet man am beſten, wenn man die Gewichtsmenge einer Flüſſigkeit ſucht, welche es faßt, und ſie durch das ſpecifiſche Gewicht der Flüſſigkeit theilt. Allein es gibt Fälle, wo keine ſo große Schärfe nothwendig iſt, und wo man nicht ſo viel Zeit auf die Beſtimmung dieſer Größe verwenden kann, als dieſe Methode fordert. Nicht ſelten geſtattet die Größe und Beſchaffenheit des Gefäßes, worin ſich die flüſſige Maſſe befindet, keine genaue Abwägung.

48. Man hat zur ſchnellen Beſtimmung der Volumina tropfbar flüſſiger Körper eigene **Hohlmaße**. Die im bürgerlichen Leben vorkommenden ſind ſelten für wiſſenſchaftliche Beſtimmungen brauchbar. Da handelt es ſich meiſtens um Kubikfuß, Kubikzolle ꝛc., und deren aliquote Theile. Um dieſe zu beſtimmen, hat man gläſerne Gefäße von cylindriſcher oder coniſcher Geſtalt, die in gleiche Raumtheile von beſtimmter Größe eingetheilt ſind.

Soll mittelſt eines ſolchen Gefäßes ein Volumen beſtimmt werden, ſo ſtellt man es auf einen horizontalen Tiſch, gießt die Flüſſigkeit hinein, und ſieht an der ſeitwärts am Glaſe angebrachten Scale, durch wie viele Grade derſelben ſie ſich erſtreckt. Bruchtheile ſchätzt man durch das Augenmaß. Es iſt ſehr gut, wenn das Gefäß zwei gleiche, ſich entgegenſtehende Scalen hat, damit man ſtets ſehen kann, ob die Oberfläche der Flüſſigkeit in beiden demſelben Puncte entſpricht, daher das Maß den gehörigen verticalen Stand hat, und das Auge ſich in der gehörigen Horizontalebene befindet. Selten hat eine Flüſſigkeit, beſonders wenn das Maß nicht gar weit iſt, eine ebene Oberfläche, meiſtens iſt dieſe convex oder concav. In

beiden Fällen hält man ſich an die allgemeine Oberfläche, nicht an den erhöhten oder deprimirten Theil derſelben.

49. Noch ſchärfere Reſultate liefern Gefäße, die mit einem beſtimmten Volumen einer Flüſſigkeit gänzlich angefüllt ſind, oder die in einen engen Hals auslaufen. Bei letzteren iſt am Halſe ein Zeichen angebracht, bis zu welchem ſich ein beſtimmtes Volumen erſtreckt. Da erhält man ſelbſt bei nur mäßiger Schärfe im Beobachten ein genaues Reſultat, weil ein kleiner Fehler in der Beſtimmung der Oberfläche wegen der Enge des Halſes nicht von großem Belang ſeyn kann.

Kleine Mengen einer Flüſſigkeit erhält man ſtets von gleichem Volumen, wenn man ſie in ein Glasrohr einſchließt, das an einem Ende geſchloſſen, am anderen aber in eine feine Spitze ausgezogen iſt, die man mit einem Finger ſchließen kann.

Fig. 4 ſtellt ein graduirtes Gefäß vor, das ein beſtimmtes Volumen faßt, wenn es mit einem Glasſtöpſel geſchloſſen iſt, Fig. 5 ein ſolches, deſſen Capacität durch eine aufliegende Glasplatte genau beſtimmt wird. An dieſem iſt der Rand des Halſes eben abgeſchliffen, damit ſich die Glasplatte genau an denſelben anlegen kann. Es iſt gut, wenn ſie oben eine kleine Öffnung hat, durch welche der Theil der Flüſſigkeit hervordringen kann, den das Gefäß nach Auflegung der Platte nicht mehr zu faſſen vermag.

D. Graduiren der Gefäße.

50. Es iſt aus dem Vorhergehenden klar, daß man bei der Beſtimmung des Rauminhaltes einer Flüſſigkeit häufig Gefäße braucht, deren Inhalt in gleiche Raumtheile getheilt iſt. Die Abtheilung eines Gefäßes in ſolche Raumtheile wird ſtets auf folgende Weiſe bewerkſtelliget: Man wägt von einer Flüſſigkeit, und zwar faſt ausſchließend von Queckſilber oder reinem Waſſer, bei einer beſtimmten Temperatur eine gewiſſe Menge ab, die ein Volumen einnimmt, von der Größe, wie man es verlangt, gießt dieſe in das Gefäß und beſtimmt den Ort ihrer Oberfläche. Dabei muß man aber allerlei Vorſichten beobachten.

51. Ob man zum Graduiren eines Gefäßes Waſſer oder Queckſilber nehmen ſoll, hängt von der Größe der Einheit ab, die man einer ſolchen Eintheilung zum Grunde legt. Soll die Abtheilung nach ganzen Kubikzollen geſchehen, ſo wähle man Waſſer, ja ſelbſt

bei noch etwas kleineren Einheiten führt dieſelbe Flüſſigkeit zum Zweck; ſollen aber Zehntel= oder gar Hunderteltzoll angegeben werden, ſo wird Queckſilber gebraucht. Wenn man erſtere Flüſſigkeit anwendet, darf nicht überſehen werden, daß ſie ſich an die Wände des Gefäßes, worin man ſie abwägt, anhängt und daß ſelbſt, wenn man alles ausgegoſſen zu haben meint, noch ein Theil als dünner Wandüberzug im Gefäße zurückbleibt. Man vermeidet den daraus hervorgehenden Fehler, wenn man das leere Gefäß nicht in ganz trockenem Zuſtande abwägt, ſondern nachdem es inwendig befeuchtet worden, jedoch ſo, daß beim Umkehren kein Tropfen mehr heraus lauft. Auch ſoll dieſes Gefäß nicht viel mehr Waſſer faſſen können, als man abzuwägen gedenkt.

52. Will man das Graduiren beginnen, ſo zieht man mittelſt eines Feuerſteines oder eines Schriftdiamanten auf der Oberfläche des Glaſes nach der Länge desſelben eine oder zwei gerade Linien, je nachdem man eine oder zwei Scalen anbringen will. Die Diamanten, welche zum Schreiben dienen, unterſcheiden ſich von denen, welche das Glas ſchneiden. Selten leiſtet einer beide Dienſte zugleich. Erſtere ſind nur Splitter eines Diamantkryſtalls, letztere müſſen eine natürliche Kante haben, die härter iſt als jede künſtliche; erſtere verurſachen beim Hinfahren auf Glas ein mehr dumpfes, letztere ein mehr klirrendes Geräuſch, die gezogene Linie iſt bei erſterem matt, bei letzterem in der Tiefe glänzend.

Nachdem dieſe Linie gezogen iſt, welche die Anfangspuncte der Theilſtriche bezeichnet, ſchreitet man zur Beſtimmung der einzelnen Puncte der Volumenſcale. Geſetzt, das zwiſchen zwei Theilſtrichen der Scale enthaltene Volumen ſoll $\frac{1}{100}$ W. K. Z. betragen, und es ſey die Temperatur des Queckſilbers, das man zur Beſtimmung der Scale braucht, 0° C, ſo wäge man auf einer ſehr genauen Wage 34,07 Gran Queckſilber ab, denn ſo viel wiegt $\frac{1}{100}$ K. Z. desſelben, gieße es in das zu graduirende, genau vertical geſtellte Gefäß und merke darauf den Stand der Oberfläche desſelben an; wäge wieder eine gleiche Queckſilbermenge ab, gieße dieſe zur vorigen, merke wieder den Stand der Oberfläche an und wiederhole dieſes ſo oft, als es der Zweck fordert, oder es die Länge des Gefäßes erlaubt. Zur Controle ſoll man nach einigen beſonderen Beſtimmungen die ganze im Gefäße befindliche Queckſilbermenge auf einmal abwägen, und ſehen, ob ſie das Gewicht hat, welches die Rechnung fordert. Daß man bei einer anderen Temperatur eine andere

Queckſilbermenge wählen muß, verſteht ſich von ſelbſt. Man wird ſie leicht aus der Tafel IV. c. entnehmen können.

53. Die Oberfläche der Flüſſigkeit bezeichnet man vorläufig mittelſt eines feinen Fadens, den man etwa mit Wachs überzogen hat, damit er beſſer am Glaſe hafte; zweckmäßiger verrichtet man dieſes Geſchäft mit Siegellack, das in Weingeiſt aufgelöſet, aber nur zähe, nicht ganz flüſſig iſt. Nimmt man mittelſt eines Pinſels oder eines Stäbchens etwas davon und überträgt es auf das Gefäß ſo, daß der oberſte Rand dieſer Maſſe der Oberfläche der Flüſſigkeit entſpricht, ſo hat man ein unwandelbares Zeichen am Glaſe. Den unteren Rand mit der Oberfläche der Flüſſigkeit coincidiren zu machen, iſt nicht ganz ſicher, weil ſich die Maſſe durch ihr Gewicht etwas ſenken und dadurch das markirte Zeichen unkenntlich machen dürfte. Der obere Rand wird dadurch aber nicht unkenntlich verwiſcht. Es iſt ſehr zweckmäßig, jeden Punct an zwei einander gegenüberſtehenden Stellen anzumerken.

54. Bekanntlich iſt die Beſtimmung der Oberfläche einer Flüſſigkeit in einem engen Gefäße durch ihre Convexität oder Concavität ſehr erſchwert. Braucht man Queckſilber, ſo kann man durch Zuſatz einer ſehr geringen Zinnmenge, wodurch das ſpecifiſche Gewicht des Queckſilbers nicht merklich geändert wird, machen, daß die Convexität der Oberfläche ungemein abnimmt. Bleibt aber noch eine kleine Krümmung übrig, ſo muß man die allgemeine Fläche, nicht den höchſten oder niedrigſten Punct derſelben, zur Grenze annehmen. Bei einer Weite des Gefäßes von 8 L. hat ſelbſt das reine Queckſilber keine merkliche Convexität mehr.

55. Sind auf dieſe Art die Theilpuncte der Scale beſtimmt, ſo hat man immer noch die Linien mittelſt eines Diamantes, einer Feile oder eines Feuerſteines zu ziehen, und allenfalls auch die gehörigen Nummern dazu zu ſetzen. Es iſt leicht, ſich eine Vorrichtung auszudenken, welche dieſes Geſchäft erleichtert. Es iſt beſſer das Gefäß beweglich zu machen und den Diamant unbeweglich zu befeſtigen, als umgekehrt zu verfahren; durch bloßes Drehen eines cylindriſchen oder coniſchen Gefäßes um ſeine Axe laſſen ſich dann die Linien ziehen. Stehen die Theilſtriche, welche auf die genannte Weiſe beſtimmt wurden, einander ſo nahe, daß man den zwiſchen ihnen enthaltenen Theil des Glaſes für cylindriſch halten kann; ſo darf man dieſen Abſtand nur in eine beliebige Anzahl gleicher Theile

theilen, und dann ſehr kleine Bruchtheile des Rauminhaltes meſſen, ohne ſich auf das Augenmaß verlaſſen zu dürfen.

56. Wenn man die Capacität eines Gefäßes genau kennen lernen will, ſo bleibt nichts übrig, als ſie durch eine Flüſſigkeit von bekannter Dichte zu beſtimmen. Zu dieſem Ende wägt man dieſes Gefäß im leeren Zuſtande genau ab, füllt es dann mit Waſſer oder Queckſilber vollkommen an, wägt es wieder, zieht von dieſem Gewichte jenes ab, und erlangt ſo das Gewicht der Flüſſigkeit, welche das Gefäß bei der Beobachtungstemperatur zu faſſen vermag. Allein man muß bei dieſem Verfahren wohl bedenken, daß man beim Abwägen des ſogenannten leeren Gefäßes nur ein mit Luft gefülltes abwägt, und daß man eigentlich dabei das Gewicht findet, welches gleich iſt der Summe der Gewichte des Gefäßes und der darin enthaltenen Luft, weniger dem Gewichte der durch das Gefäß verdrängten Luftmaſſe. Die Rückſicht auf den Gewichtsverluſt des Gefäßes in der Luft kann man ſich wohl erlaſſen, weil dieſer bei beiden Abwägungen als gleich angenommen werden kann; (ſollte man ihn berückſichtigen wollen und überhaupt das gefundene Gewicht auf den leeren Raum reduciren wollen, ſo findet man im zweiten Kapitel die dazu nöthigen Formeln), auf den Luftgehalt des Gefäßes muß man aber die nöthige Rückſicht nehmen.

Geſetzt es ſey p_t das Gewicht der Flüſſigkeit, welche das Gefäß bei $t°$ faßt, p_0 dasſelbe bei $0°$ C, und γ die Ausdehnung der Flüſſigkeit von $0°$ bis $t°$, c die lineare Ausdehnung des Gefäßes für denſelben Temperaturwechſel. Unter dieſen Vorausſetzungen iſt

$$p_0 (1+3ct) = p_t (1+\gamma) \text{ und daher}$$

$$p_0 = \frac{(1+\gamma)p_t}{1+3ct}.$$

Da iſt p_t um ſo viel zu groß, als die Luft im Gefäße wiegt. Heißt daher n der Exponent des Verhältniſſes zwiſchen der Dichte der Flüſſigkeit und der Luft unter den beim Abwägen herrſchenden Umſtänden; ſo iſt das wahre Gewicht, welches das Gefäß bei $t°$ von der Flüſſigkeit faßt $=(1-n)p_t$, und wenn man dieſes $=q$ ſetzt, ſo iſt $p_t = \frac{q}{1-n}$. Wird dieſer Ausdruck in die vorhergehende Gleichung geſetzt; ſo erhält man

$$p_0 = \frac{(1+\gamma)q}{(1-n)(1+3ct)}$$

oder, wenn man die Diviſion zum Theile verrichtet:

$$p_o = (1+\gamma)q + \frac{q(1+\gamma)(n+3(n-1)ct)}{(1-n)(1+3ct)}.$$

Iſt nun S das ſpec. Gewicht der Flüſſigkeit bei o° C und v das Volumen des Gefäßes; ſo iſt

$$v = \frac{p_o}{S}.$$

E. Rauminhalt der Gaſe.

57. Beim Meſſen der Gasarten iſt die Kenntniß der Handgriffe, welche man beim Auffangen, Überfüllen, Aufbewahren und Austrocknen derſelben anwenden muß, unumgänglich nothwendig, daher auch hier vorläufig näher von dieſen Manipulationen geſprochen werden ſoll.

Gaſe werden gewöhnlich in Retorten oder Phiolen entwickelt, und von dieſen alſogleich in Flaſchen oder andere Gefäße aufgefangen. Dieſes geſchieht bekanntlich dadurch, daß man das Entwicklungsgefäß mit einer S förmig gebogenen Röhre verſieht, wovon ein Ende unter den Trichter der pneumatiſchen Wanne reicht, über welchem ſich das mit Waſſer oder Queckſilber gefüllte Gefäß befindet, welches zur Aufnahme des Gaſes beſtimmt iſt (Fig. 6).

Gewöhnlich enthält das Entwicklungsgefäß außer der Subſtanz, aus der man das Gas entwickelt, auch noch atmoſphäriſche Luft; dieſe muß vorerſt ausgetrieben werden, wenn man das Gas rein erhalten will. Zu dieſem Ende läßt man die erſte Gasportion fortgehen, ohne ſie in eine Flaſche zu ſammeln, bis man theils aus der Menge der bereits ſchon entwickelten Luft, theils aus anderen Umſtänden, die ſich nach der Natur des Gaſes richten, mit Recht vorausſetzen kann, daß alle atmoſphäriſche Luft entwichen ſey. Man will aber oft alles entwickelte Gas ſammeln, um die Menge desſelben kennen zu lernen. Darum fängt man auch die erſten weggehenden Luftblaſen mit einer Flaſche auf. Iſt eine Gasmenge aufgefangen worden, deren Volumen etwa dem doppelten der im Gefäße enthaltenen atmoſphäriſchen Luft gleicht, ſo nimmt man die Flaſche weg und erſetzt ſie durch eine neue. Kennt man das Volumen der Retorte, und das der in ihr enthaltenen feſten oder tropfbaren Maſſe, ſo iſt es ein Leichtes, das darin befindliche Quantum atmoſphäriſcher Luft

zu berechnen. Dieſes vom oben genannten aufgefangenen Luftvolumen abgezogen, gibt die Menge des reinen bereits entwickelten Gaſes. Wenn man aber auch ſchon guten Grund hat, das übergehende Gas für rein zu halten, ſo iſt es doch gut, die Flaſchen in der Ordnung, wie ſie nach einander gefüllt werden, zu nummeriren und ihren Inhalt nicht ohne vorläufige Unterſuchung mit einander zu vermengen.

Wenn es ſich darum handelt, alles Gas aufzufangen, ſo muß man ſehr darauf ſehen, daß nicht beim Wechſeln der Flaſchen ein Verluſt vor ſich gehe. Es hält ſchwer, eine weggenommene Flaſche ſo ſchnell durch eine andere zu erſetzen, daß nicht ein Luftbläschen entweicht, ſelbſt wenn man, wie es ſtets ſeyn ſoll, letztere Flaſche ſchon vorläufig mit Waſſer oder Queckſilber neben der anderen auf der Brücke der pneumatiſchen Wanne ſtehen hat. Leichter vermeidet man allen Verluſt, wenn die Brücke zwei Trichter hat, die nahe neben einander angebracht ſind. Da kann man ſtets auf der Öffnung eines jeden eine volle Flaſche ſtehen haben, und braucht nur, wenn eine mit Gas gefüllt iſt, das gebogene Rohr der Retorte eilig unter den zweiten Trichter zu verſetzen.

58. Die gefüllten Flaſchen werden, wie bekannt, mit der Mündung nach unten in ein anderes Gefäß geſtellt (Fig. 7), das Waſſer oder Queckſilber enthält, jedoch ſo, daß ſie tief genug in die Flüſſigkeit eingetaucht ſind. Man muß ſtets darauf bedacht ſeyn, daß mit der Zeit ein Theil dieſer Flüſſigkeit, beſonders wenn ſie Waſſer iſt, verdünſtet, und daß bei der Abnahme der Temperatur des Gaſes und bei der Zunahme des äußeren Luftdruckes ein Theil der Flüſſigkeit in die Flaſche hineingetrieben wird. Beſonders iſt dieſes zu beachten, wenn man das Gas bei hoher Temperatur gewinnt und es daher im heißen Zuſtande in einer Flaſche ſammelt.

Oft iſt es nothwendig, die Gläſer, welche das Gas enthalten, mit einem gut eingeriebenen Glasſtöpſel zu verſchließen, der überdieß noch mit Talg eingeſchmiert iſt. In einer ſolchen Flaſche, die wie vorher geſagt wurde, in Waſſer oder Queckſilber ſteht, kann man Gaſe Monate lang aufbewahren, beſonders wenn man ſie in einem dunklen gleichförmig warmen Orte ſtehen läßt.

59. Oft iſt es nöthig, ein ſchon bereitetes Gas von einem Gefäße in ein anderes überzufüllen. Zu dieſem Behufe ſtellt man das Gefäß, welches das Gas aufnehmen ſoll, mit Waſſer oder Queckſilber gefüllt, auf die Brücke der Wanne, hält das Gefäß mit dem

Gaſe unter den Trichter der Brücke und neigt es, damit es das Gas verlaſſe und dafür Waſſer oder Queckſilber hineindringe. Man darf nicht vergeſſen, daß in das neue Gefäß nur dann Gas aufſteigen kann, wenn das Waſſer oder Queckſilber daraus entweicht. Darum ſoll man das Gefäß mit Gas nicht zu ſehr neigen, damit nicht zu viel Gas auf einmal daraus entweiche (Fig. 8).

60. Das Überfüllen der Gaſe von einem Gefäße in ein anderes hat gar nichts Schwieriges, und kann leicht ohne den geringſten Verluſt vollbracht werden, wenn das zur Aufnahme beſtimmte Gefäß weiter iſt, als das, welches es bereits enthält. Schwerer iſt es, dieſes Geſchäft zweckmäßig zu verrichten, wenn das neue Gefäß eng iſt. Da ſtellt man es nicht über den Trichter der pneumatiſchen Wanne, ſondern taucht es ohne weiters in die Flüſſigkeit, hält es aber ſtets etwas ſchief, damit deſto leichter das Gas mit der Flüſſigkeit wechſeln könne, und bringt das Gefäß mit Gas an die Öffnung desſelben (Fig. 9). Manchmal gelangt man nur dann zum Zweck, wenn man an das zur Aufnahme des Gaſes beſtimmte Gefäß einen Trichter anſetzt, der es von außen luftdicht umſchließt.

61. Das Überfüllen eines Gaſes durch Queckſilber iſt in der Regel ſchwieriger, als das durch Waſſer. Die Undurchſichtigkeit des Queckſilbers läßt das Aufſteigen der einzelnen Blaſen nicht bemerken, ſein größeres ſpecifiſches Gewicht verurſacht ſchon bei einem mäßig hohen Gefäße einen ſehr ſtarken Druck, und der Mangel an Adhäſion an das Glas nebſt der ſtarken Anziehung der Queckſilbertheilchen unter einander erſchwert das Eindringen der Luftblaſen in die Queckſilbermaſſe und verurſacht, daß ſie ſich unter dem Trichter ſtark anhäufen und oft gar durch einen Seitenweg entweichen. Darum muß man ein ſolches Gefäß, das Gas aufnehmen ſoll, ſtets etwas neigen und durch ſanfte Stöße das Aufſteigen des Gaſes zu befördern ſuchen.

62. Um eine kleine Gasmenge, die über Queckſilber ſteht, herauszunehmen, und in ein eigenes Gefäß zu bringen, dazu dient beſonders ein von Pepys angegebenes Inſtrument (Fig. 10). Dieſes beſteht aus einer etwa $\frac{1}{2}$ Z. weiten, 5—6 Z. langen Glasröhre *a*, in der ſich ein luftdicht ſchließender Kolben befindet, welcher mittelſt einer Kolbenſtange ſich bewegen läßt. Dieſe Stange geht am Ende der Röhre durch eine gut ſchließende Lederbüchſe. Am unteren Ende befindet ſich eine engere gekrümmte Röhre *b*, die in ein weiteres Gefäß *c* übergeht, und mit einer haarröhrchenförmigen

Öffnung endet. Das ganze Gefäß iſt bis an den Kolben mit Queckſilber gefüllt. Will man mittelſt dieſes Inſtrumentes ein Gas überfüllen, ſo ſchiebt man den Kolben möglichſt weit hinab, taucht dann den Theil *c* in das Queckſilber, welches das Gas ſperrt, ſo daß die enge Öffnung über dasſelbe in das Gas reicht, und zieht dann den Kolben zurück. Das Queckſilber in dem Inſtrumente folgt dem Kolben, und das Gas dringt in den Raum ein, den dieſes vorhin einnahm. Iſt eine hinreichende Gasmenge hineingetreten, ſo taucht man das Inſtrument etwas tiefer in das Queckſilber, damit auch die enge Öffnung damit bedecket ſey, und zieht dann den Kolben noch ein wenig zurück, damit ein kleines Queckſilberſäulchen in das Haarröhrchen trete, und das Gefäß *c* ſchließe. Nun kann man ungeſcheut den Apparat aus dem Queckſilber herausziehen, und das Gas in ein anderes Gefäß überfüllen, indem man die Öffnung des Apparats hineinbringt, und dann den Kolben langſam herabdrückt. Hare hat einen ähnlichen Apparat (Fig. 11) angegeben, der zu demſelben Zwecke gebraucht werden kann, und ſich von dem hier beſchriebenen nur dadurch unterſcheidet, daß ſtatt der Capillaröffnung eine Klappe angebracht iſt, die ſich durch einen Druck in der Nähe von *a* öffnen läßt und ſich wieder ſchließt, wenn dieſer Druck nachläßt.

63. Man wendet oft zum Überfüllen der Gaſe Blaſen an. Dieſe ſind entweder von Kautſchouc oder gemeine Ochſenblaſen, wohl auch aus überfirnißtem Taffet verfertiget. Letztere halten aber die Luft nicht lange und ſind daher nicht zu empfehlen. Ochſenblaſen werden in ihrem natürlichen Zuſtande hart und brüchig, wenn ſie einige Zeit nicht benetzt wurden. Um ſie geſchmeidig zu machen, löſet man ſorgfältig alles Fett ab, und reibt ſie derb mit Kleien (am beſten Mandelkleien) ab, bewahrt ſie aber dann ſtets im aufgeblaſenen Zuſtande auf. Kautſchoucblaſen ſind zur Aufbewahrung der Gaſe vorzüglich geeignet, doch muß man ſie eigens zu dieſem Zwecke auswählen, weil nicht alle der verkäuflichen brauchbar ſind. Eine gute Blaſe der Art muß gleichförmig dick, ohne äußere Eindrücke und Hervorragungen ſeyn; die von lichterer Farbe ſind beſſer als die dunkleren. Wenn man ſie näher prüfen will, taucht man ſie in warmes Waſſer und walkt ſie, wenn ſie weich zu werden anfangen, mit den Fingern, worauf ſie eine ungemeine Dehnbarkeit und Geſchmeidigkeit bekommen; dann befeſtiget man ſie an eine Druckpumpe, und preßt mit Gewalt Luft in ſie hinein, damit ſie gehörig ausgedehnt

werde. Eine Blaſe, die im natürlichen Zuſtande 3 Z. Durchmeſſer und ½ Z. Dicke hat, läßt ſich ſo ſtark ausdehnen, daß ſie ½ K. Fuß faßt. Solche Blaſen ſollen nicht an einer Stelle mehr als an der anderen erwärmet werden, weil ſie ſonſt Riſſe bekommen.

64. Soll ein Gas von einem Recipienten in eine Blaſe, ſo muß ſowohl der Recipient als die Blaſe mit einem Hahn zu verſchließen ſeyn, und beide müſſen ſich durch Schrauben mit einander vereinigen laſſen. Vor dieſem Geſchäfte ſtellt man den Recipienten mit dem Gas auf die Brücke der pneumatiſchen Wanne, entleert die Blaſe möglichſt von aller Luft, ſchraubt ſie auf den Recipienten (Fig. 12), öffnet beide Hähne, und drückt dann den Recipienten vertical unter Waſſer, damit dieſes das Gas in die Blaſe treibe. Hat dieſe die gehörige Gasmenge aufgenommen, ſo ſchließt man wieder beide Hähne und ſchraubt dann die Blaſe ab. Von einer Blaſe füllt man ein Gas in einen Recipienten, indem man ſo verfährt, als wenn man es von einer Flaſche in eine andere überfüllen wollte, nur mit dem Unterſchiede, daß man die Luft aus der Blaſe bloß durch einen von Außen mit der Hand angebrachten Druck vertreibt.

65. Gaſe enthalten, beſonders wenn man ſie über Waſſer auffängt, häufig eine Menge Waſſerdunſt, den man wegſchaffen muß, wenn man das Gas zu einem Verſuche brauchen will, wozu Reinheit der Materialien erfordert wird. Den Waſſerdunſt entreißt man einem Gaſe, wenn man es einige Zeit mit gewiſſen, das Waſſer ſtark anziehenden Stoffen in Berührung läßt. Unter dieſen Stoffen ſind ſalzſaurer Kalk, Pottaſche und Schwefelſäure die vorzüglichſten.

66. Salzſaurer Kalk und Pottaſche müſſen eigens zubereitet werden, wenn man ſie zum Austrocknen der Gaſe anwenden will. Man ſchmilzt ſie nämlich in einem irdenen Schmelztiegel, gießt ſie dann auf eine Steinplatte aus, zerbricht ſie in kleine Stücke und bewahrt ſie in einer wohl verſtopften Flaſche auf. Will man damit ein Gas austrocknen, ſo nimmt man eine Glasröhre, die etwa 6 Z. — 2 F. lang und ¼—⅓ Z. weit iſt, füllt ſie mit größeren und kleineren Stücken von einer der erwähnten austrocknenden Subſtanzen an, bringt ein Ende derſelben mit dem Gefäße in genaue Verbindung, welches das Gas enthält, das andere mit dem, das es aufnehmen ſoll, und leitet es hierauf durch die Röhre. Je langſamer das Gas ſtreicht, deſto beſſer trocknet es aus. Iſt die Röhre 2 F. lang und ½ Z. weit, ſo kann man innerhalb 10 Minuten 100 K. Zoll Gas durchſtreichen laſſen und des völligen Austrocknens gewiß

ſeyn. Bei engeren oder kürzeren Röhren braucht man dazu mehr Zeit. Man kann oft denſelben auſtrocknenden Körper zu einer ferneren Operation benützen.

Statt ein Gas durch eine Röhre zu leiten, kann man es auch in einem Recipienten über der auſtrocknenden Subſtanz einige Zeit ſtehen laſſen; allein man braucht dazu mehr Zeit und erhält doch häufig ein etwas unſicheres Reſultat.

67. Beim Auſtrocknen eines Gaſes mittelſt concentrirter Schwefelſäure kann man auch auf zweifache Weiſe verfahren, und es entweder in einem Recipienten einige Zeit über derſelben ſtehen laſſen, oder es durch ein Glasrohr leiten, welches etwas Schwefelſäure enthält. Im letzteren Falle füllt man in eine etwas gebogene Glasröhre kleine Glasſtücke ein und gibt ſo viel Schwefelſäure dazu, als nöthig iſt, damit alle Glasſtücke davon befeuchtet werden, und das Gas noch Raum zum Durchſtreichen behält. Hierauf verfahrt man, als wenn man es mit Pottaſche oder ſalzſaurem Kalk zu thun hätte.

Man darf nicht bei jedem Gaſe daſſelbe Auſtrocknungsmittel anwenden, ſondern es muß dieſes ſeiner chemiſchen Natur angemeſſen ſeyn, damit nicht eine chemiſche Verbindung oder eine Zerſetzung vor ſich gehe. Saure Gaſe dürfen deßhalb nicht mit einem Alkali in Berührung kommen.

68. Wenn man aller hier genannten Operationen mächtig iſt, ſo hält es gar nicht ſchwer, das Volumen eines Gaſes zu beſtimmen. Man bedient ſich dazu ähnlicher in gleiche Raumtheile abgetheilter Gefäße, wie zu tropfbaren Flüſſigkeiten, und überfüllt in dieſe das zu meſſende Gas. Es iſt nur zu bemerken, daß die Zahlen an der Scale von Gefäßen, welche zum Meſſen tropfbarer Flüſſigkeiten beſtimmt ſind, vom Boden gegen die Öffnung hinſteigen, während ſie in den für Gaſe beſtimmten von der Öffnung gegen den Boden zunehmen. Es iſt gut, die Scale an einem ſolchen Gefäße mit aufſteigenden und abſteigenden Zahlen zu beziffern, um einen Recipienten ohne Rechnung für tropfbare Flüſſigkeiten und für Gaſe brauchen zu können. Zu manchem Zwecke hat man eigene Gasmaße, nämlich kleine gläſerne Gefäße (Fig. 13), die ſich mittelſt eines metallenen Schiebers ſchließen laſſen, ſo daß man zugleich in dieſen eine beſtimmte Gasmenge von einem Orte zum anderen übertragen kann. Sowohl Pepy's als Hare's oben erwähnte Inſtrumente (Fg. 10 und 11) laſſen ſich zugleich zum Gasmeſſen einrichten. Es

wird zu dieſem Ende die Kolbenſtange in gleiche Theile getheilt, und aus dem Theilſtriche, bis zu welchem der Kolben herausgezogen iſt, die Größe des von der Luft eingenommenen Raumes beurtheilt. Übrigens darf man bei allem dieſem nicht vergeſſen, daß das Volumen der Gaſe durch den Luftdruck und durch die Temperatur modificirt wird, und daher bei der Angabe desſelben ſtets angezeigt werden muß, unter welchem Drucke und bei welcher Temperatur dieſes Statt fand. Oft iſt es auch nöthig, es auf einen Normalluftdruck und eine Normaltemperatur zu reduciren.

Heißt t die Temperatur der Luft beim Abwägen, b der herrſchende Barometerſtand, v_t das unter dieſen Umſtänden gefundene Gasvolumen; ſo findet man das auf der Normaltemperatur und den Normalluftdruck reducirte Gasvolumen v_o durch die Gleichung

$$v_o = \frac{v_t\, b}{0.76\ (1 + 0.00375.\, t)}$$

Die Tafeln I enthalten die Zahlen, welche zur Vergleichung der in verſchiedenen Ländern üblichen Maße nöthig ſind.

Zweites Kapitel.

Beſtimmung des Gewichtes der Körper.

69. Das Gewicht der Körper wird bekanntlich mittelſt einer Wage beſtimmt. So einfach dieſe Beſtimmung auch für Fälle iſt, wo keine große Schärfe verlangt wird, ſo muß man doch, wenn ein genaues Reſultat erhalten werden ſoll, mit großer Ruhe, Umſicht und Sachkenntniß verfahren. Dazu iſt es unerläßlich, die Theorie der Wage, ihre Beſtandtheile, die Methode ſie zu prüfen und beſondere Vorſichtsregeln bei ihrem Gebrauche genau zu kennen.

A. Theorie der Wage.

70. Der Hauptbeſtandtheil einer Wage iſt der Wagebalken. Seine Einrichtung ergibt ſich aus der Beſtimmung der Wage, vermög welcher ſich an ihm zwei gleiche, übrigens beliebige Gewichte das Gleichgewicht halten ſollen. Iſt p das Gewicht des einen Armes des Balkens, p_1 das des anderen, a die Länge des erſteren, a_1 die des letzteren, ferner b und b_1 die Entfernung der Schwerpuncte der beiden Arme von der Drehungsaxe und P das Gewicht, welches auf

jede der zwei Wagſchalen gelegt wird; ſo hat man für den Zuſtand des Gleichgewichtes:

$$aP + bp = a_{,}P + b_{,}p_{,}$$

oder

$$bp - b_{,}p_{,} = (a_{,} - a)P.$$

Soll dieſe Gleichung für jeden Werth von P gelten, wie es der Zweck der Wage verlangt, ſo iſt

$$bp - b_{,}p_{,} = 0 \quad \text{und} \quad a_{,} - a = 0$$

oder

$$bp = b_{,}p_{,} \qquad \text{und} \quad a_{,} = a.$$

Demnach fordert die Natur einer richtigen Wage:

1) daß die beiden Arme des Wagebalkens gleiche Momente gegen die Drehungsaxe haben,

2) daß die Aufhängungspuncte der Wagſchalen von der Umdrehungsaxe gleichweit entfernt ſeyn. Iſt das Material des Wagebalkens allenthalben gleich dicht, ſo wird allen dieſen Forderungen Genüge geleiſtet ſeyn, wenn der Wagebalken zu beiden Seiten der Axe vollkommen ſymmetriſch gebaut iſt.

71. Iſt der Wagebalken richtig gebaut, ſo wird ſein Schwerpunct in eine auf der Ebene desſelben ſenkrechte durch die Axe gehende Ebene fallen, und daher er ſelbſt im unbelaſteten Zuſtande nur in horizontaler Lage ruhen. Dasſelbe wird der Fall ſeyn, wenn er auf beiden Seiten gleich belaſtet iſt. Allein ſo wie die Belaſtung auf einer Seite größer wird als auf der anderen, muß er ſich an der ſtärker belaſteten ſenken. Man verlangt, daß man aus dieſer Senkung die Größe des Übergewichtes der mehr belaſteten Seite zu erkennen im Stande iſt. Dieſes geſchieht, wenn der Schwerpunct des Balkens gegen ſeine Axe und die zwei Aufhängungspuncte der Schalen eine rechte Lage hat, die ſich übrigens nur auf mathematiſchem Wege ausmitteln läßt.

72. Es ſeyen A und B (Fig. 14) die Aufhängungspuncte der zwei Schalen, C die Axe und D der Schwerpunct des Wagebalkens, der an beiden Armen mit den gleichen Gewichten P belaſtet iſt, und ſelbſt das Gewicht Q hat. Wird die Laſt in A um die Größe p vermehrt, ſo ändert ſich die Lage des Balkens, A kommt nach a, B nach b, D nach d. Man nenne

$$ACH = \alpha, \; DCd = \varphi, \; AH = f,$$
$$CH = g, \; CD = h,$$

ſo daß man hat:

$$aF = aC.\sin(a-\varphi) = aC(\sin a\cos\varphi - \cos a\sin\varphi)$$
$$= f\cos\varphi - g\sin\varphi$$
$$bG = bC.\sin(a+\varphi) = bC(\sin a\cos\varphi + \cos a\sin\varphi)$$
$$= f.\cos\varphi + g.\sin\varphi$$
$$dk = h\sin\varphi.$$

Aus den Geſetzen des Gleichgewichtes iſt aber
$$(P+p)\,aF = P.bG + Q.dk$$
oder
$$(P+p)\,(f\cos\varphi - g.\sin\varphi) = P\,(f\cos\varphi + g\sin\varphi) + Qh\sin\varphi$$
und hieraus
$$\text{tang}\,\varphi = \frac{pf}{(2P+p)g + Q.h}.$$

Demnach iſt der Ausſchlagwinkel φ bei einerlei Werth von p deſto größer, je länger der Wagebalken, je kleiner die Belaſtung und das Gewicht des Balkens iſt, und je näher der Schwerpunct des Balkens und ſeine Axe der geraden Linie liegen, welche die Aufhängepuncte der beiden Schalen mit einander verbindet.

Für $g = 0$ iſt $\text{tang}\,\varphi = \frac{pf}{Qh}$,

mithin der Ausſchlagwinkel von der Belaſtung unabhängig.

Für $g = 0$ und $h = 0$ iſt $\text{tang}\,\varphi = \infty$, mithin für den Fall, wo die Axe und der Schwerpunct des Balkens in die Gerade fallen, welche die Aufhängepuncte der Schalen mit einander verbindet, nimmt der Wagebalken bei der geringſten Ungleichheit der Belaſtung eine verticale Stellung an, wenn er nicht durch ein Hinderniß in einer anderen Lage erhalten wird.

73. Die vorhergehende Rechnung über die Empfindlichkeit einer Wage ſetzt voraus, daß zwiſchen dem Zapfen und der Pfanne keine Reibung Statt findet. Findet da eine Reibung Statt, wie dieſes immer der Fall iſt, ſo fallt der Ausſchlagwinkel kleiner aus. Iſt r der Abſtand der Schneide des Zapfens, die auf der Pfanne ruht, vom Drehungsmittelpuncte, c der Reibungsexponent, p_1 das Gewicht, welches auf einer Wagſchale der Reibung das Gleichgewicht hält; ſo iſt $c\,(2P+Q+p_1)\,r = fp_1$, wo P, Q, f die vorhin angenommene Bedeutung haben; mithin
$$p_1 = (2P+Q)\,\frac{rc}{f-rc}.$$
c iſt in den meiſten Fällen $= 0.1$, oft auch geringer.

B. Einrichtung der Wage.

74. Die Eigenſchaften, welche die vorausgeſchickte Theorie von einer Wage fordert, begründen das Weſentliche ihrer Einrichtung und laſſen keine Modificationen zu. Deßungeachtet kann eine brauchbare, ja ſogar eine ſehr vortreffliche Wage in der mannigfaltigſten Form erſcheinen.

Der Wagebalken kann aus Eiſen, Stahl oder Meſſing verfertiget werden. Eiſen und Stahl haben den ſicheren Vorzug der größeren Feſtigkeit, Meſſing hingegen gewährt den Vortheil, daß es nicht magnetiſch wird. Man macht ihn häufig maſſiv und ſo, daß er höher als dick iſt und gegen beide Enden verjüngt zuläuft, um bei einem geringen Gewichte doch hinreichende Feſtigkeit zu haben. Manche Künſtler verfertigen Wagen mit hohlen Balken, die gleichſam zwei abgeſtumpfte, an ihrer Baſis zuſammengefügte Kegel vorſtellen; auch Balken aus ſtark gehämmertem, dicken durchbrochenen Meſſingbleche, thun gute Dienſte. Es gibt vortreffliche Wagen, deren Balken aus einem dünnen Stahlſtücke, wie aus einer Uhrfeder beſtehen, das aber, um jeder Krümmung vorzubeugen, mit einer oben der ganzen Länge nach darauf geſchraubten oder gelötheten ſchmäleren Stahlplatte verſehen iſt, ſo, daß ein ſolcher Balken im Querſchnitte wie ┬ ausſieht.

Mit der Länge des Balkens wächſt bei übrigens gleichen Umſtänden die Empfindlichkeit der Wage, jedoch nur bis zu einer gewiſſen Grenze; denn mit der Länge des Balkens nimmt zwar das Moment des Übergewichts, aber auch ſein Gewicht und die Reibung zu.

75. Am Wagebalken befindet ſich der Stift für die Drehungsaxe, der Aufhängepunct der Schalen und die Zunge. Der Stift für die Drehungsaxe wird ſtets aus Stahl gemacht und ſehr gut gehärtet. Man läßt ihn nach unten in eine ſehr ſcharfe Schneide auslaufen, die genau auf der Ebene des Balkens ſenkrecht ſteht. Die Pfannen, in denen er ſich bewegt, macht man eben oder etwas hohl, aus hartem Stahl oder noch beſſer als einem harten Stein, z. B. aus Achat.

Die Aufhängepuncte der Schalen ſind gewöhnlich mit eigenen, nach oben ſcharf zulaufenden Stiften bezeichnet, an welche die Schalen mittelſt krummer Haken gehängt werden, ſo daß ſie dem Zuge der Schwere folgen können.

Die Zunge ſoll auf dem Balken ſenkrecht ſtehen, und durch

die Linie, welche den Schwerpunct mit der Axe verbindet, genau in zwei ſymmetriſche Hälften getheilt werden. Meiſtens iſt ſie nach aufwärts gerichtet, und dann ſpielt ſie zwiſchen einer Scheere, die ſtets von ſelbſt vertical hängt und oft eine kleine verticale Gegenzunge hat, deren Übereinſtimmung mit der des Balkens auf die horizontale Lage des letzteren ſchließen läßt. Iſt die Zunge abwärts gekehrt, ſo ſpielt ſie über einem Bogen, der am Poſtamente der Wage angebracht iſt. Letzteres muß aber in dieſem Falle mit einer Libelle oder einem Senkblei in die gehörige Lage gebracht werden können. Es mag aber die Zunge abwärts oder aufwärts gekehrt ſeyn, ſo iſt an der ihr gegenüber ſtehenden Seite des Balkens ein Gegengewicht angebracht, um dem Schwerpunct des Ganzen die gehörige Lage zu geben; oft iſt dieſes Gewicht zum Verſchrauben eingerichtet, und kann dem Balken genähert oder von ihm entfernt werden, damit man ſo die Empfindlichkeit der Wage nach Belieben reguliren kann. Es gibt auch Wagen, an denen ein Arm des Balkens die Stelle der Zunge vertritt und auch neben einem Kreisbogen ſpielt. Sehr genaue Wagen werden meiſtens mit mehreren Schraubenvorrichtungen verſehen, durch welche man den Balken gleicharmig machen und den Schwerpunct jedes Armes in gleiche Entfernung von der Axe bringen kann.

76. Die Schalen müſſen ein gleiches Gewicht haben, und ganz frei am Balken hängen, ſich auch leicht wegnehmen und verwechſeln laſſen. Man hängt ſie mittelſt Schnüren, Ketten oder dicken Drähten auf. Letztere verdienen vor allen den Vorzug, weil man ihnen leicht ein beſtimmtes Gewicht geben und ſie dabei erhalten kann. Ketten ſind zu mühſam zu verfertigen und zu ſchwer zu putzen, Schnüre nehmen gar zu leicht Staub auf, und können nur mit großer Mühe davon befreit werden; einige wirken auch hygroſkopiſch und ändern durch das aus der Luft aufgenommene Waſſer ihr Gewicht. Die Schalen macht man am beſten flach, mit aufgebogenem Rande; tiefe Schalen geſtatten manchem abzuwiegenden Körper keinen ſicheren Stand, und werden deßhalb bei genauen Wagen ſelten gebraucht.

77. Eine empfindliche Wage ſoll ſtets ſo eingerichtet ſeyn, daß ſich der Balken ſammt den Pfannen, auf denen er ruht, heben und ſenken läßt, und in ſeinem tiefſten Stande auf eigenen Trägern ruht. Dieſen Stand ſoll er auch beibehalten, ſo lange er außer Dienſt iſt. Kein Inſtrument wird durch Staub, Rauch oder Dünſte ſo leicht

unbrauchbar gemacht, als eine Wage, keines fordert daher eine ſo ſorgfältige Aufbewahrung. Stets ſoll ſie in einem Glaskaſten eingeſchloſſen ſeyn, der ſich nur an einer Seite öffnen läßt, dieſer ſchützt vor Staub ꝛc., und hält beim Gebrauche der Wage den Luftzug ab und erleichtert und verkürzt dadurch die Arbeit.

78. Die Gewichte, welche zur Wage gehören, werden in der Regel aus Metall gemacht, und zwar aus Meſſing, Silber oder Platin. Letzteres würde ſich wegen ſeiner Unveränderlichkeit in der Luft, im Waſſer und ſelbſt in den meiſten Säuren am meiſten empfehlen, wenn bei größeren Stücken nicht der hohe Preis, bei gar kleinen das große ſpecifiſche Gewicht dieſes Metalls die Wahl eines anderen Stoffes räthlich machte. Indeß ſind doch Platingewichte von 1 Milligramme noch recht gut wahrzunehmen und ſogar noch leicht anzufaſſen, wenn ſie dünn genug ausgearbeitet ſind.

79. Die Geſtalt ſolcher Gewichte iſt verſchieden. Größere Stücke werden häufig in die Form eines hohlen, abgeſtumpften Kegels gebracht, deren einer in den anderen paßt, kleinere macht man cylindriſch oder würfelförmig, und die kleinſten, von 10 Gran oder 1 Gramme angefangen, bekommen meiſtens die Blechform. Sie ſollen ſich gut anfaſſen laſſen und keine Vertiefungen haben, die leicht Unreinigkeit aufnehmen; darum ſollen auch die Zahlen, welche den Werth jedes Stückes bezeichnen, nicht zu tief eingeſchlagen ſeyn. Gewichte, welche hohle Kegel vorſtellen und in einander paſſen, empfehlen ſich durch ihr geringes Volumen, doch hält es ſtets ſchwer, ſie rein zu erhalten.

80. Es iſt zwar wünſchenswerth, daß man einen hinlänglichen Vorrath genauer Gewichte habe, man kann aber auch mit wenigen Stücken weit reichen. Mit 4 Stücken, vom Werthe 1, 2, 3 und 4 reicht man bis 10; kommen dazu noch 8 Stücke von den Werthen 10, 20, 30, 40, 100, 200, 300 und 400, ſo kann man damit alle Gewichte von 1 — 1000 beſtimmen. Alle dieſe Gewichtsſtücke ſollen in Käſtchen eingeſchloſſen ſeyn; ſelbſt beim Gebrauche ſoll man ſie nicht unmittelbar mit der Hand, ſondern mit einem Zängelchen anfaſſen. Die Tafeln II enthalten das Materiale zur Vergleichung der in verſchiedenen Ländern üblichen Gewichte.

C. Prüfung der Wage und der Gewichte.

81. Bevor eine Wage zu einer genauen Unterſuchung gebraucht wird, muß man von ihrer Richtigkeit und Empfind-

lichkeit überzeugt ſeyn. Zu dieſer Überzeugung gelangt man durch eine vorläufige Prüfung derſelben.

82. Das erſte, welches bei einer Wage unterſucht werden muß, iſt die Beweglichkeit des Wagebalkens. Dieſe lernt man kennen, wenn man den Stand des Balkens, während er ſich im Gleichgewichte befindet, genau betrachtet, hierauf ihn mit der Hand etwas neigt und wieder frei läßt. Hat er die gehörige Beweglichkeit, ſo wird er eine Reihe Schwingungen von immer kleiner werdenden Schwingungsbögen machen, und endlich in derſelben Lage, von welcher er ausging, wieder in Ruhe kommen. Bleibt er in einer anderen Lage ſtehen, ſo kann er nicht als brauchbar angeſehen werden, weil es ihm an der freien Beweglichkeit fehlt. Man erkennt auch die Beweglichkeit eines Wagebalkens ſchon aus der Gleichheit der Ausſchlagwinkel, die er zu beiden Seiten der Lage, in welcher er ruhte, beim Oſcilliren macht.

Hat man den Balken von dieſer Seite brauchbar gefunden, ſo ſchreitet man zur weiteren Prüfung ſeines Baues. Man nimmt die Wagſchalen hinweg, und ſieht, ob er oder vielmehr die gerade Linie zwiſchen den Aufhängungspuncten der Schalen in horizontaler Lage im Gleichgewichte ſteht. Dieſe Lage erkennt man aus dem Übereinſtimmen der richtig geſtellten Zunge mit der an der Scheere angebrachten Gegenzunge, oder falls der Balken keine Zunge hat, aus der Coincidenz der Puncte, welche die beiden Zungen vertreten. Bleibt der Balken in horizontaler Lage ſtehen, ſo kann man gewiß ſeyn, daß die Momente ſeiner unbelaſteten Arme in Beziehung auf die Axe einander gleich ſeyen, wie es die Theorie für eine gute Wage fordert; kommt er aber außerhalb dieſer Lage ins Gleichgewicht, ſo ſind dieſe Momente ungleich oder es liegt der Schwerpunct des Balkens ſo nahe an der Axe, daß das Moment des Gewichtes des ganzen Balkens in Beziehung auf die Axe bei einer kleinen Abweichung von der horizontalen Lage zu klein iſt, als daß es die Reibung zu überwältigen vermöchte. Iſt der Schwerpunct des Balkens veränderlich, ſo kann man durch geringes Verrücken desſelben leicht erfahren, ob letzterer oder erſterer Urſache die Abweichung von der horizontalen Lage zugeſchrieben werden muß. Zur weiteren Unterſuchung bedarf man der Gewißheit, daß die Schalen ein vollkommen gleiches Gewicht haben. Um dieſes zu erlangen, hängt man ſie ein und beobachtet den Stand des Balkens, wenn er in Ruhe gekommen iſt. Man darf ſich dadurch nicht beirren laſſen, daß

der Balken vielleicht nicht mehr in horizontaler Lage ruht, wiewohl er im unbelaſteten Zuſtande in dieſer Lage im Gleichgewichte ſtand. Hierauf verwechſelt man die Schalen und beobachtet die Lage des ruhenden Balkens abermals. Stimmt dieſe mit der vorhergehenden genau überein, ſo haben beide Schalen genau dasſelbe Gewicht; iſt dieſes nicht der Fall, ſo muß man das Gewicht der ſchwereren vermindern, bis die Gleichheit hergeſtellt iſt.

Haben die Schalen ein gleiches Gewicht; ſo kann man den Balken weiter unterſuchen und finden, ob auch beide Arme, von der Schneide der Axe bis zum Aufhängepunct der Schalen gerechnet, genau gleich lang ſind. In manchem Falle kann man dieſe Länge unmittelbar mit einem Maßſtab meſſen, manchmal geht aber dieſes nicht an, und man muß zu folgendem Verfahren die Zuflucht nehmen, das aber ſelbſt dann als Controle dienen kann, wenn man auch dieſe Größen unmittelbar gemeſſen und gleich befunden hat: Man verſichert ſich zuerſt noch einmal davon, daß der ganz entlaſtete Balken in horizontaler Lage zur Ruhe kommt, hängt dann die Schalen ein und beobachtet ſeinen Stand neuerdings, wenn er zur Ruhe gekommen iſt. Dieſer wird wieder der horizontale ſeyn, wenn nicht die Arme ungleich lang ſind. Zur noch beſſeren Überzeugung legt man hierauf auf beide Schalen gleiche Gewichte und ſieht abermals auf den Stand des Balkens. Iſt er auch bei dieſer Probe horizontal geblieben, ſo iſt an der gleichen Länge der Balkenarme nicht zu zweifeln. Indeß thut man doch gut, die Gewichte zu verwechſeln und zu ſehen, ob auch dann noch der Balken in horizontaler Lage in Ruhe bleibt. Findet man bei dieſer Prüfung, daß die Arme des Wagebalkens nicht gleich lang ſind, ſo muß man denjenigen, deſſen Länge ſich ändern läßt, ſo lange verlängern oder verkürzen, bis er in der abermals vorgenommenen Probe Stich hält.

83. Eine Wage, die ſich bei allen dieſen Verſuchen bewährt hat, iſt richtig gebaut und man braucht nur noch den Grad ihrer Empfindlichkeit zu unterſuchen, um ſie in jeder Hinſicht zu kennen. Zu dieſem Ende werden beide Arme gleich und ſo ſtark belaſtet, als es die Stärke des Balkens ohne Biegung desſelben erlaubt und hierauf das kleinſte aller Gewichte ausgemittelt, durch deſſen Zugabe noch ein bemerkbarer Ausſchlag hervorgebracht wird. Der Quotient aus dieſem Gewichte und der ganzen Belaſtung des Balkens gibt die Zahl, welche als Maß der Empfindlichkeit der Wage angeſehen werden kann.

84. Zu einer guten Wage gehören auch richtige Gewichte. Dieſe prüft man, indem man ſie mit anerkannt richtigen vergleicht oder auch indem man zwei Parthien derſelben, die aus einer verſchiedenen Anzahl einzelner Stücke beſtehen, aber gleiche Totalwerthe haben ſollen, gegen einander hält und ſieht, ob ſie ein gleiches Gewicht haben. Dieſe Unterſuchung ſoll man nicht bloß mit ganz neuen, noch ungeprüften Gewichten vornehmen, ſondern auch mit ſchon gebrauchten, früher als richtig anerkannten, ſobald ſie in Verhältniſſe gekommen ſind, wo ihre Richtigkeit gelitten haben kann.

D. Gebrauch der Wage.

85. Es iſt bekannt, daß man ſelbſt der beſten Wage kein unbeſchränktes Zutrauen ſchenken darf, und in Fällen, wo es ſich um ſehr genaue Reſultate handelt, beim Abwägen ein Verfahren beobachten muß, bei welchem man die etwaigen Fehler im Bau des Wagebalken und die Reibung unſchädlich macht. Dieſes Verfahren wird als bekannt vorausgeſetzt (ſ. meine Naturlehre S. 82) und nur noch Folgendes bemerkt: Wenn man das Gewicht eines Körpers völlig genau finden will und das erwähnte (Borda'ſche) Verfahren nicht anwenden will, ſo muß man auf folgende Weiſe vorgehen. Man lege den abzuwägenden Körper A in eine Wagſchale und ſo viel Gewicht in die andere, als nöthig iſt, um den Balken in horizontaler Lage ins Gleichgewicht zu bringen. Es ſey P dieſes Gewicht und x das des abzuwägenden Körpers, und man wird haben

$$P : x = a : b$$

wo a und b zwei vom Bau des Balkens abhängige Größen ſind. Hierauf unterſtütze man den Balken, verwechsle, wenn dieſes geſchehen iſt, Laſt und Kraft, laſſe ihn dann wieder frei, und ändere, wenn es Noth thut, P ſo lange, bis auch unter dieſen Umſtänden der Balken in horizontaler Lage in Ruhe kommt. Iſt nun P in Q übergegangen, ſo hat man wieder

$$Q : x = b : a$$

und daher aus beiden Proportionen

$$PQ = x^2 \text{ und } x = \sqrt{PQ}.$$

86. Feſte Körper werden meiſtens unmittelbar in die Wagſchale gelegt, wenn ſie ſich nicht an dieſelbe anhängen; thun ſie dieſes, ſo legt man ſie zuerſt auf eine Unterlage, der ſie nicht adhäriren, und wiegt ſie mit dieſer ab, ſchlägt aber nach der Hand das Gewicht die-

ſer Unterlage vom Geſammtgewichte ab. Gepulverte Körper ſollen nie die Wagſchale berühren, weil es immer ſchwer hält, dieſelbe nach dem Abwägen ganz davon zu befreien, woraus für die Wage ein Nachtheil hervorgeht und auch die Frucht des Abwägens verloren geht, indem man ſtets einen Theil des Pulvers verliert. Darum wiegt man ſolche Körper in Uhrgläſern oder auf Glanzpapier ab.

Daß tropfbare Körper in eigenen Gefäßen abgewogen werden müſſen, verſteht ſich von ſelbſt. Um kleine Portionen derſelben zugeben oder wegnehmen zu können, wendet man Glasſtäbe an, falls ihnen die Flüſſigkeit adhärirt, die man mit einem Ende in die flüſſige Maſſe eintaucht und den daran hängenden Tropfen zugibt oder wegnimmt, je nachdem es der Zweck fordert. Für ſolche Flüſſigkeiten, die ſich nicht an das Glas anhängen, wie Queckſilber, bedient man ſich eines gläſernen Haarröhrchens, das eine kleine flüſſige Säule aufnimmt und das Übertragen derſelben geſtattet, beſonders wenn man es am anderen Ende mit einem Finger ſchließt.

87. Man muß bei jedem abzuwägenden Körper wohl bedenken, ob ſich während des Abwägens ſein Gewicht nicht ändert, und wenn dieſes der Fall iſt, dieſer Änderung vorbeugen. Flüchtige Körper, wie z. B. Äther, werden in wohl verſchloſſenen Gefäßen abgewogen, ſolche, die leicht Waſſer aus der Luft anziehen und die man nach dem Abwägen nicht mehr braucht, gibt man in eine abgewogene Portion Waſſer, und wiegt ſie mit dieſer.

Am ſchwerſten iſt es, das Gewicht eines heißen Körpers genau zu beſtimmen, weil dieſer auf den Wagebalken erwärmend wirkt, und ſo der Richtigkeit der Wage Abbruch thut. Darum darf man ſich auf Reſultate, die aus ſolchen Abwägungen geſchöpft ſind, nicht verlaſſen.

E. Zeigerwage.

88. Es kommen Fälle vor, wo man die ſucceſſiven Änderungen im Gewichte eines Körpers erfahren will, der ſich in einem geſchloſſenen Raume befindet, und nicht wohl vor Beendigung des Verſuches herausgenommen werden kann; wie z. B. wenn es ſich um das Fortſchreiten der Verdünſtung einer Flüſſigkeit im geſchloſſenen Raume handelt. Da kann man mit einer gewöhnlichen Wage nicht zum erwünſchten Ziele gelangen, weil bei dieſer die Größe einer Gewichtsänderung am Körper, der ſich an ihr im Gleichgewichte befindet, nur durch wirkliches Hinzugeben oder Wegnehmen der Gewichte beſtim-

men läßt. Man bedient ſich deßhalb in einem ſolchen Falle einer Zeigerwage. Bei dieſer gibt der Balken, wovon ein Arm über einem Gradbogen ſpielt, durch den Winkel, den er mit der fixen Linie macht, das Gewicht eines Körpers an. Zur näheren Kenntniß ſolcher Wagen führt folgende Betrachtung: Es ſey ACB (Fig. 15) ein Winkelhebel, deſſen Schwerpunct nach G fällt, der ſich um eine horizontale, durch C gehende Axe drehet und deſſen Arm AC über einem aus C beſchriebenen Kreisbogen DE ſpielt. In B iſt eine Wagſchale angehängt, auf welche der abzuwägende Körper zu liegen kömmt. So lange der Balken nicht belaſtet iſt, liegt AC in der Verticalen CE, ſo wie aber auf die Wagſchale eine Laſt wirkt, kommt dieſer Arm dahin, daß er mit der Verticalen den Winkel ACE macht, der ſich an der Gradtheilung des Bogens DE ableſen läßt.

Es ſey $ACB = a$, $ACE = \varphi$, $BCE = \varphi_1$ mithin

$$a = \varphi + \varphi_1.$$

Man ziehe die Horizontalen BF und GH, nenne $CG = A$, $CB = B$ die Laſt P und das Gewicht des ganzen Balkens Q, und man hat für den Fall des Gleichgewichtes

$$Q.GH = P.BF$$

oder

$$= QB \sin\varphi = PA \sin\varphi_1$$

das iſt

$$QB \sin\varphi = PA(\sin a \cos\varphi - \sin\varphi \cos a)$$

und

$$\tan\varphi = \frac{PA \sin a}{QB + PA \cos a}.$$

Man kann die Theilung am Bogen DE gleich nach dieſer Formel einrichten, damit der Hebelarm AC das aufgelegte Gewicht unmittelbar angebe. Auch iſt es klar, daß man für denſelben Bogen Hebel von verſchiedenem Gewicht anbringen, und daher größere und kleinere Laſten abwägen kann.

Fig. 16 ſtellt eine ſolche, vom Mechanikus Werner in Wien für das phyſikaliſche Muſeum verfertigte Wage vor, deren nähere Beſchreibung für den überflüſſig wäre, der die vorausgeſchickte Theorie verſteht. Der Kreisbogen hat 12 Zoll im Halbmeſſer, und der gibt das Gewicht der auf die Wagſchale gelegten Körper von 22 Gr. bis 1 Milligramm an.

F. Reduction der Abwägungen.

89. Wenn man ſich beim Abwägen eines Körpers auch der genaueſten Wage bedient, die beſte Abwägungsmethode anwendet, und in der Manipulation durchaus richtig verfährt; ſo erhält man doch das abſolute Gewicht des abzuwägenden Körpers nicht genau; denn dazu wäre erforderlich, daß die Abwägung im leeren Raume vor ſich ginge. Um nun das in der Luft erhaltene Reſultat auf den leeren Raum zu reduciren, ſey P das geſuchte abſolute Gewicht des Körpers, und S ſein ſpecifiſches Gewicht bei der Temperatur von 0° C. Sein Volumen wird demnach $\frac{P}{S}$ ſeyn. Dehnt ſich der Körper von 0° C bis zur herrſchenden Temperatur t, linear in dem Verhältniſſe $1 : c$ aus; ſo iſt ſein Volumen bei $t°$ C gleich $\frac{Pc^3}{S}$ und er verdrängt unter dieſen Umſtänden die Luftmaſſe $\frac{Pc^3 s}{S}$, wenn s das ſpecifiſche Gewicht der Luft bezeichnet. Demnach zieht er am Wagebalken mit der Kraft

$$P\left(1-\frac{c^3 s}{S}\right)$$

herab. Bezeichnen nun die Buchſtaben P_1 c_1 S_1 dasſelbe für die Gewichte, was $P\ c\ S$ für den abzuwägenden Körper bezeichnet haben; ſo zieht das Gewicht am anderen Arme des Wagebalkens mit der Kraft

$$P_1\left(1-\frac{c_1{}^3 s}{S_1}\right)$$

und wenn der Körper mit dem Gewichte im Gleichgewichte ſteht, hat man

$$P\left(1-\frac{c^3 s}{S}\right)=P_1\left(1-\frac{c_1{}^3 s}{S_1}\right)$$

und hieraus

$$P=\frac{P_1\left(1-\frac{c_1{}^3 s}{S_1}\right)}{1-\frac{c^3 s}{S}}.$$

Die Größe s iſt bekanntlich durch die Gleichung

$$s=\frac{s_0\, b}{0.76\,(1+0.00375\,t)}=\frac{b}{259581\,(1+0.00375\,t)}$$

wo b den Barometerſtand, s_0 das ſpecifiſche Gewicht der Luft bei 0° bezeichnet, oder wenn man

$$\frac{1}{259581\,(1+0.00375\,t)} = \alpha$$

ſetzt, $s = \alpha b$.

Zur leichteren Berechnung von s dient die Tafel II c, welche für die verſchiedenen Werthe von t den Logarithmus α angibt. Es läßt ſich auch zur Erleichterung der Berechnung von $\frac{c^3 s}{S_1}$ etwas thun. Da man ſich nämlich meiſtens meſſingener Gewichte bedient, deren ſpecifiſches Gewicht = 8.4 und deren Längenausdehnung für 1° C = 0.000018785 iſt, ſo hat man

$$\frac{c^3 s}{S_1} = \frac{(1+0.000018785)^3\,\alpha b}{8.4} = \beta\, b.$$

Zur Berechnung von β dient dieſelbe Tafel II c, indem ſie für mehrere Werthe von t den log β enthält.

90. Zum Beſchluß mag hier die Beſchreibung zweier vortrefflichen Wagen Platz finden, welche dem phyſikaliſchen Kabinet der Univerſität gehören, und in Fig. 17 und 18 dargeſtellt ſind.

Der Wagebalken der einen beſteht aus zwei hohlen, meſſingenen, abgeſtumpften, an ihren Baſen mit einander verbundenen Kegeln (Fig. 17), iſt 26 Zoll lang, hat in der Mitte 25 L., an jedem Ende $5\frac{1}{4}$ L. im Durchmeſſer und wiegt 22 Loth. Die Axe, um die er ſich dreht, ſowohl als die zwei Zapfen, welche zur Aufhängung der Schalen beſtimmt ſind, beſtehen aus glashartem Stahl und laufen in ungemein ſcharfe Schneiden aus. Die Stelle der Zunge vertritt ein Arm des Balkens. Dieſer iſt deßhalb am äußerſten Ende mit einem feinen coniſchen Stift verſehen, und ſpielt neben einem Gradbogen, den ein horizontaler Arm des Poſtamentes trägt. Um den Schwerpunct des Balkens ohne ſonſtige Verrückung heben und ſenken zu können, iſt unterhalb ſeiner Axe ein Gewicht angebracht, das an einer vollkommen geraden Schraube ſteckt und ſich an derſelben heben und ſenken läßt. Die Zapfen zur Aufnahme der Schalen ſind an den Balken mittelſt Schraubenvorrichtungen befeſtiget und laſſen ſich mittelſt dieſer Schrauben in die nöthige Lage bringen. An der Seite, wo ſich der Gradbogen befindet, iſt der Stift nur zum Heben und Senken eingerichtet, kann aber der Drehungsaxe weder genähert noch von ihr entfernt werden. Durch dieſe Einrichtung kann man es

dahin bringen, daß die gerade Linie, welche die Aufhängepuncte der Schalen verbindet, genau auf jener ſenkrecht ſteht, welche durch die Drehungsaxe und den Schwerpunct des Wagebalkens geht. Am entgegengeſetzten Ende des Balkens iſt der Stift für die Schale ſo eingerichtet, daß er der Drehungsaxe genähert und von ihr entfernt werden kann, ohne ſich zu heben oder zu ſenken. Dieſes iſt dadurch bewerkſtelliget, daß die mittlere der drei Schrauben, durch welche eine mit dem Tragſtift verbundene Platte an den Hebelarm befeſtiget iſt, am unteren Ende ein excentriſches Zäpfchen hat. Wird dieſe Schraube gedreht, ſo beſchreibt dieſes Zäpfchen einen kleinen Kreis um die Axe der Schraube und ſchiebt dadurch die mit dem Stift verbundene Platte und hiermit den Stift ſelbſt auswärts oder einwärts. Mittelſt dieſer Vorrichtung läßt ſich den beiden Armen des Balkens eine vollkommen gleiche Länge ertheilen. Um nun auch die Momente der beiden unbelaſteten Arme von gleicher Größe zu erhalten ohne die eigentliche Länge derſelben zu ändern, hat der Balken an dem Ende, wo die zuletzt beſprochene Vorrichtung angebracht iſt, eine cylindriſche Verlängerung, in welche eine Schraube eingeſchnitten iſt, an der ein kleines Gewichtchen ſteckt, das ſich ebenfalls von der Axe entfernen und ihr nähern läßt. Die Schalen werden nicht unmittelbar an die coniſchen Stifte gehängt, ſondern zuerſt in Stahlringe, die mit eigenen ſtählernen Haken an den Balken angehängt werden. Der ganze Wagebalken ruht auf einem feſten Poſtamente, welchen man mittelſt zweier Waſſerwagen, die am Fußgeſtell angebracht ſind, in einen verticalen Stand bringt. Mittelſt einer eigenen Vorrichtung läßt ſich eine im Poſtamente enthaltene gezähnte Stange, die oben in zwei Tragarme ausgeht, heben und ſenken; beim Heben faſſen die Arme den Balken zu beiden Seiten der Axe und unterſtützen ihn, beim Senken laſſen ſie ihn wieder frei.

Dieſe Wage trägt ohne Schaden für den Balken auf jeder Schale 3 Pfund, und iſt für $\frac{1}{1200000}$ dieſer ganzen Belaſtung (Laſt und Gewicht) empfindlich.

Fig. 18 ſtellt die andere Wage vollſtändig mit ihrem Zugehör vor. Ihre Einrichtung iſt im Ganzen mit der vorhergehenden übereinſtimmend, doch iſt der Balken aus Meſſingblech und durchbrochen. Sie trägt nur auf jeder Schale 1 Pfund und iſt für $\frac{1}{800000}$ empfindlich.

Drittes Kapitel.

Beſtimmung der Dichte der Körper.

91. Es iſt bekannt, daß verſchiedene Körper unter demſelben Volumen nicht gleich viel Maſſe enthalten und daß die Größe der unter dem Volumen = 1 enthaltenen Maſſe die Dichte, die Größe des unter demſelben Volumen vorhandenen Gewichtes, das ſpecifiſche Gewicht des Körpers bezeichnet. Auch iſt bekannt, daß man manchmal durch Verſuche die Dichte unmittelbar ſucht, und daraus das ſpecifiſche Gewicht berechnet, manchmal aber umgekehrt verfährt und zuerſt das ſpecifiſche Gewicht findet. Wie ſich aus der einen dieſer zwei Größen die andere ergibt, braucht wohl hier nicht erſt gezeigt zu werden.

92. Die Beſtimmung der Dichte oder des ſpecifiſchen Gewichtes, beſonders eines feſten oder tropfbaren Körpers, iſt keine ſchwere Arbeit, man mag ſie mit der hydroſtatiſchen Wage oder mit einem Areometer vollbringen, wenn man ſich mit einem nur beiläufig richtigen Reſultate begnügt; fordert man aber hierin eine große Schärfe, ſo iſt nicht blos eine große Aufmerkſamkeit bei der Manipulation, ſondern auch eine Reduction der gefundenen Reſultate auf einen beſtimmten, bei den Verſuchen ſelten oder nie vorhandenen Normalzuſtand nothwendig. Wir wollen hier zuerſt von der Beſtimmung des ſpecifiſchen Gewichtes mittelſt der hydroſtatiſchen Wage und nach dieſem von demſelben Geſchäfte, in ſo fern es mit dem Areometer vollzogen wird, ſprechen, in erſterer Beziehung aber die dazu nöthigen Apparate, die Manipulation und Art der Reduction der Reſultate beſonders vornehmen.

A. Apparate zur Beſtimmung der Dichte mit der Wage.

93. Zur Beſtimmung der Dichte eines Körpers braucht man in den meiſten Fällen eine genauere und empfindlichere Wage, als zur Ausmittelung des abſoluten Gewichtes, weil im erſteren Falle der abzuwägende Körper ſich in einer tropfbaren Flüſſigkeit befinden muß, wodurch der Empfindlichkeit der Wage ſtarker Abbruch gethan wird. Aber ſelbſt die empfindlichſte Wage muß zu dieſem Ende beſonders eingerichtet ſeyn und eine an ſehr kurzen Schnüren hän-

gende Schale haben, welche unten mit einem Haken verſehen iſt, um den abzuwägenden Körper an denſelben hängen zu können. Eine andere unerläßliche Vorrichtung iſt ein unter dieſer Wagſchale befindliches Poſtament, welches das Gefäß trägt, in dem ſich die beim Abwägen zu gebrauchende Flüſſigkeit befindet, und das ſich ſenken und erhöhen läßt, um ſo den abzuwägenden Körper in die Flüſſigkeit eintauchen und wieder herausnehmen zu können, ohne den Wagebalken tiefer oder höher ſtellen zu müſſen. Das übrige Zugehör eines hydroſtatiſchen Apparates zur Beſtimmung der Dichte der Körper iſt: 1) ein feines Menſchenhaar, ein einfacher Coconfaden und ein ſehr feiner Platinfaden, 2) ein abgerundeter, reiner maſſiver Glastropfen an einem ſehr feinen Faden hängend. 3) Eine metallene Federzange. 4) Ein an feinen Fäden hängendes gläſernes Schälchen. 5) Ein gläſerner weiter Becher. 6) Reines Wachs in einer Büchſe. 7) Ein Glasfläſchchen, mit einem unten eben abgeſchliffenen, gut ſchließenden Glasſtoppel oder einer ebenen Glasplatte verſchließbar. 8) Eine Pincette. 9) Ein Haarpinſel. 10) Gläſerne Rührſtäbchen. Die Vorrichtungen 2, 3 und 4 ſtellt die Figur 19 unter *a*, *b*, *c* vor. Man muß vorläufig ſchon mit dem abſoluten Gewichte jedes dieſer Hilfsapparate ſo wie mit ſeinem Gewichtsverluſte, wenn er bis zu einer beſtimmten Stelle in reines Waſſer geſenkt wird, bekannt ſeyn.

94. Man kann ſich manchmal, wo man ſchnell zum Ziele gelangen will und kein gar ſcharfes Reſultat verlangt, einer beſonderen Wage bedienen, welche die Dichte unmittelbar ohne Rechnung angibt. Dieſe Wage gehört in die Claſſe der mathematiſchen Schnellwagen, und beſteht daher aus einem ungleicharmigen Balken *acb* (Fig. 20), der in *c* ſeine Axe hat. Um die Einrichtung dieſer Wage und ihren Gebrauch deutlich einzuſehen, denke man ſich ein Gewichtchen, deſſen Werth unbekannt ſeyn darf, am äußerſten Puncte *b* des längeren Armes aufgehängt und den zu unterſuchenden Körper an einer Stelle *e* des kürzeren Armes, wo er mit jenem Gewichte im Gleichgewichte ſteht. Taucht man dieſen, während er an der Wage hängt, in Waſſer, und rückt das Gewicht von *b* näher an die Axe, z. B. nach *d*, bis wieder Gleichgewicht herrſcht; ſo kann man aus der Länge des Stückes *cd* im Verhältniß zu *cb* die Dichte der angehängten Maſſe finden. Es ſey das Gewicht des Körpers in der Luft $= P$, das im Waſſer $= Q$, der Werth des Gegengewichts $= q$. Man hat

$$P.ce = q.bc \text{ und } Q.ce = q.dc$$

das iſt

$$P = q.\frac{bc}{ce}, \quad Q = q.\frac{dc}{ce}.$$

Daher die Dichte des Körpers

$$\frac{P}{P-Q} = \frac{bc}{bc-cd}.$$

Iſt $bc=1$, $bd=m$, ſo iſt $\frac{P}{P-Q} = \frac{1}{m}$.

Iſt daher der Wagebalken cb von b nach c in 2, 3, 4 ꝛc. gleiche Theile getheilt und zu den Theilpuncten, welche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ ꝛc. entſprechen, ſtatt dieſer Zahlen 2, 3, $\frac{3}{2}$, 4, $\frac{4}{3}$ ꝛc. geſetzt; ſo gibt diejenige dieſer Zahlen, welche den Ort des Gegengewichtes bei der zweiten Abwägung (wo ſich der betreffende Körper im Waſſer befindet) bezeichnet, die Dichte desſelben unmittelbar an.

95. Für gepulverte Maſſen kann man mit großem Vortheil einen beſonderen Apparat brauchen, der das Volumen dieſer Maſſe nach Abſchlag der mit Luft gefüllten Zwiſchenräume genau kennen lernen hilft, und daher zur Kenntniß ihrer Dichte führt, wenn auch noch ihr abſolutes Gewicht mittelſt einer Wage gefunden iſt. Das Weſen dieſes Apparates, deſſen Kenntniß wir Say und Leslie verdanken, dürfte durch Folgendes verſtändlich werden.

Man denke ſich eine gewöhnliche, beiderſeits offene Barometerröhre ab (Fig. 21), deren oberer Theil etwas erweitert iſt, und mit dem unteren durch eine ſehr kleine, nur für die Luft durchgängige Öffnung in Communication ſteht. Man denke ſich dieſe Röhre bis zur Communicationsöffnung in Queckſilber getaucht, hierauf von oben luftdicht geſchloſſen und dann ſo weit aus dem Queckſilber herausgehoben, daß die in der Röhre ſchwebend erhaltene Queckſilberſäule halb ſo lang iſt, als die Queckſilberſäule im Barometer. Geſetzt es ſey dieſes der Fall, wenn die Oberfläche des Queckſilbers in der Röhre ſich in α befindet. Da nimmt nun die Luft, welche vorhin nur den oberen weiteren Theil erfüllte, dieſen und einen Theil der unteren Röhre bis α ein und ihr Volumen iſt offenbar verdoppelt. Öffnet man nun die Röhre wieder und taucht ſie abermals ſo tief in Queckſilber wie vorhin, gibt aber in den oberen Raum den gepulverten genau abgewogenen Körper, ſchließt das Gefäß von oben luftdicht und hebt die Röhre wieder heraus, bis die Queckſilberſäule in derſelben der halben Barometerhöhe gleicht; ſo wird

auch nun die Luft über dem Queckſilber das Doppelte des Volumens einnehmen, welches ſie erfüllte, ſo lange der ganze äußere Luftdruck darauf wirkte. Iſt z. B. dieſes der Fall, wenn das Queckſilber in der Röhre bis β reicht; ſo iſt offenbar α β das Volumen der in die Röhre eingefüllten gepulverten Maſſe nach Abſchlag der Zwiſchenräume, welche Luft enthalten.

96. Um dieſe ſinnreiche Methode leicht und genau anwenden zu können, wurde für das hieſige Muſeum vom Mechanikus Ekling die Vorrichtung conſtruirt, welche Fig. 22 verkleinert darſtellt. *A* iſt ein ſtählernes Gefäß, welches zur Aufnahme des gepulverten Körpers beſtimmt iſt, und $\frac{1}{2}$ Kubikzoll faßt. (*M'* ſtellt es im Durchſchnitte vor.) Dieſes ſteht mittelſt einer vom oberſten Rande ausgehenden und von da herablaufenden Bohrung mit der Glasröhre *C* in Communication, welche in das Gefäß eingekittet iſt. Der obere Rand des Gefäßes iſt eben abgeſchliffen und mit einer Deckelplatte verſehen, die ſich mittelſt einer Schraube heben und auch luftdicht an das Gefäß andrücken läßt. Die Glasröhre *C* iſt in gleiche Raumtheile getheilt, und eine mit Diamant eingeſchnittene Scale zeigt $\frac{1}{1000}$ Kubikzoll vom oberſten Punkte angefangen. Eine zweite Scale iſt an einem Eiſenſtängelchen *F* angebracht, das mit der Axe der Röhre parallel ſteht und ſich an der Glasröhre heben und ſenken läßt, ohne aber von ſelbſt ſeinen Platz zu verlaſſen. Es umfaßt die Glasröhre mit zwei Federklammern. Dieſe Scale iſt eine bloße Längenſcale in Linien getheilt, und dient zum Meſſen der in der Glasröhre ſchwebend erhaltenen Queckſilberſäule. Dieſer ganze Apparat iſt in eine Klammer *L* befeſtiget, die ſich an einer verticalen gezähnten Stange mittelſt eines Getriebes heben und ſenken läßt. Dabei befindet ſich die Meßröhre *C* in einer 1 Zoll weiten und 24 Zoll hohen Glashülſe *G*, die ſich oben trichterförmig erweitert und beim Verſuch mit Queckſilber gefüllt iſt. Ihr unteres geſchloſſenes Ende iſt in das Bodenſtück des Poſtamentes eingelaſſen. Dieſes Poſtament beſteht aus zwei, mittelſt drei Säulen verbundenen Holzplatten, wovon die untere, größere Stellſchrauben hat, um der Glasröhre die nöthige verticale Lage geben zu können. Die obere iſt tellerförmig vertieft, um das etwa ausfließende Queckſilber aufzunehmen, und hat eine kleine, mit einem hölzernen Stift verſchließbare Öffnung, um dieſes Queckſilber hindurchlaſſen und ſammeln zu können.

97. Aus dem Vorhergehenden iſt es leicht, den Gebrauch die-

ſes Inſtrumentes einzuſehen. Man ſenke die Röhre *C*, während die Deckelſchraube gelüftet iſt, ſo weit in die Hülſe *G*, daß ſie bis zum Nullpunct der Volumenſcale in Queckſilber getaucht iſt, ſchließe dann den Deckel des Stahlgefäßes und hebe die Röhre *C* mittelſt des Getriebes ſo weit aus dem Queckſilber, bis die in der Röhre ſchwebend erhaltene Säule ſo lang iſt, wie die Hälfte der Queckſilberſäule im Barometer, deſſen Stand dem Luftdrucke entſpricht. Zur Meſſung dieſer Säule dient die eiſerne verſchiebbare Scale. In dieſer Stellung ſehe man auf den Theilſtrich der Volumenſcale, welcher der Oberfläche des Queckſilbers in der Röhre entſpricht. Hierauf laſſe man die Röhre wieder in Queckſilber herabſteigen, bis dieſes von Innen den Nullpunct der Scale erreicht, öffne den Deckel, fülle in das Stahlgefäß den wohl abgewogenen gepulverten Körper, ſchließe den Deckel luftdicht, hebe die Röhre wieder wie vorhin aus dem Queckſilber und entnehme den Stand desſelben in ihr, ſobald die gehobene Säule wieder dem halben Luftdrucke entſpricht, an der Volumenſcale. Der vorhin gefundene Grad an dieſer Scale, von dem zuletzt gefundenen abgezogen, gibt das Volumen des Pulvers nach Abſchlag der mit Luft gefüllten Zwiſchenräume.

98. Bei dieſem Verſuche darf man mehrere Vorſichtsmaßregeln nicht außer Acht laſſen. Man wende ſtets ſolches Queckſilber an, das ſchon einmal gekocht und in einem gut verſchloſſenen Gefäße aufbewahrt wurde, und fülle es in die Glashülſe mit aller Vorſicht ein, damit es keine Luftblaſen enthalte. Dazu dient ein gläſerner Trichter, der bis auf den Boden der Hülſe reicht. Zur größeren Sicherheit muß man ſelbſt dann, wenn die Hülſe auf dieſe Art gefüllt worden iſt, ſie durch ſanfte Stöße erſchüttern, um die etwa daran haftenden Luftblaſen auszutreiben. Man nehme ſich ja in Acht, während des Verſuches die Wärme der Luft zu ändern und ſorge dafür, daß das Queckſilber, welches die Hülſe enthält, mit dem im Barometer einerlei Temperatur habe. Sollte dieſes nicht der Fall ſeyn, ſo reducire man beide Queckſilberſäulen auf einerlei Temperatur. Beim Meſſen der Queckſilberſäule mittelſt der eiſernen Scale hat man letztere ſtets ſo zu ſtellen, daß ein Theilſtrich derſelben mit der Oberfläche des Queckſilbers genau zuſammenfällt, und man nicht nöthig hat, dem Augenmaße viel zu trauen. Wenn man beſorgen muß, daß die in den Poren des Pulvers enthaltene Luft verdichtet ſey, ſoll man den Verſuch mehrere Male wiederholen,

jedoch ſo, daß man die gehobene Queckſilberſäule nicht immer dem halben Luftdrucke entſprechend macht, ſondern $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ꝛc. desſelben. Daß bei allen dieſen Verſuchen die Glasröhre eine verticale Stellung haben muß, verſteht ſich von ſelbſt.

B. Manipulation und Vorſichten bei der Beſtimmung der Dichte mittelſt der Wage.

99. Wenn einem auch die beſten Inſtrumente zur Ausmittelung der Dichte der Körper zu Gebote ſtehen, ſo darf man doch nur dann ein genaues Reſultat erwarten, wenn man die bei der Behandlung derſelben nöthigen Vorſichten kennt und gehörig anwendet.

Bei der Ausmittelung der Dichte eines feſten, compacten, im Waſſer unlöslichen Körpers hat man bekanntlich zuerſt das abſolute Gewicht desſelben in der Luft, und dann dasſelbe im Waſſer zu beſtimmen. Beim Abwägen in der Luft ſind alle jene Vorſichten anzuwenden, von denen beim Gebrauche der Wage die Rede war. Beim Abwägen im Waſſer bedarf es noch anderer Maßregeln. Die erſte Rückſicht verdient das Waſſer und das dasſelbe enthaltende Gefäß. Es iſt zu genauen Verſuchen unerläßlich, ganz reines Waſſer zu wählen und deſſen Temperatur genau zu beſtimmen. Das Gefäß, worin es enthalten iſt, ſoll ſo weit ſeyn, daß der darin ſchwebende Körper noch an jeder Seite $\frac{1}{2}$ Zoll von den Wänden desſelben abſtehe. Daß es die zur Aufnahme des ganzen Körpers nöthige Tiefe haben muß, iſt von ſelbſt klar.

100. Iſt der betreffende Körper dichter als Waſſer, ſo wird er mittelſt eines feinen Fadens an den Haken der kürzer gehängten Wagſchale befeſtiget. Dieſer Faden ſoll möglichſt dünn ſeyn. Je dicker ein Faden iſt, deſto mehr beträgt der Fehler, welcher aus dem beim Schwanken der Wage unvermeidlichen zu tiefen Einſinken desſelben hervorgeht, und deſto mehr wird das Reſultat der Abwägung von der durch Capillarität am Faden gehobenen Waſſerröhre afficirt. Iſt das abſolute Gewicht des betreffenden Körpers unter 1 Quentchen, ſo reicht man mit einem einfachen Coconfaden aus, bis zu einem Gewichte von 1 Loth thut ein Menſchenhaar ſehr gute Dienſte. Über dieſes Gewicht hinaus muß man ſchon zu Metallfäden ſeine Zuflucht nehmen. Platindrähte ſind vorzüglich zu empfehlen. Mehrere einfache Fäden zu einer Schnur zuſammengedreht oder ge=

flochten, ſollen nie gebraucht werden, weil ſie Waſſer auffaugen und dadurch das Reſultat unſicher machen.

Iſt das Gewicht des ſo aufgehängten Körpers beſtimmt, ſo wird von demſelben das Gewicht des Fadens, woran er beim Abwägen hing, abgezogen und der Reſt notirt. Hierauf wird der Körper, während er noch mit den Gegengewichten balancirt, in das Waſſer geſenkt. Dieſes bewerkſtelliget man dadurch, daß man das unter demſelben befindliche Waſſergefäß mittelſt einer beſonderen Vorrichtung ſanft hebt. Sobald der Körper ins Waſſer eintritt, wird das Gleichgewicht geſtört. Man ſtellt es dadurch wieder her, daß man auf die Schale, worunter der Körper hängt, Gewichte zulegt, nicht aber dadurch, daß man von der anderen Schale Gewichte wegnimmt, um nicht einem etwaigen Fehler der Wage einen ſchädlichen Einfluß zu geſtatten. Iſt die ganze Maſſe in das Waſſer getaucht und das Gleichgewicht hergeſtellt, ſo geben die Zuleggewichte den Gewichtsverluſt des Körpers und des mit ihm eingetauchten Fadenſtückes an; iſt demnach letzteres aus einem vorläufigen oder gleich darauf folgenden Verſuche bekannt, ſo läßt ſich leicht der Gewichtsverluſt der betreffenden Maſſe beſtimmen. Beim Abwägen im Waſſer zeigt ſich ſelbſt die empfindlichſte Wage minder empfindlich, und man begeht gar leicht einen ſehr einflußreichen Fehler. Deßhalb thut man gut, wenn man dieſe Operation noch einmal vornimmt, und ſchon vor dem Einſenken des Körpers in das Waſſer die Gewichte ſo zulegt, wie man ſie beim erſten Verſuch zur Herſtellung des Gleichgewichts für nöthig erkannt hat, auch den Körper anders an den Faden befeſtiget, damit ein anderer Theil desſelben nach abwärts gekehrt ſey, und er nicht in beiden Fällen einerlei Widerſtand erleide, ſondern dieſer in einem Falle beim Senken des Körpers, im anderen beim Steigen desſelben ausgiebiger ſey, und aus dieſen Abwägungsreſultaten den Mittelwerth nimmt.

101. Der im Waſſer ſchwebende Körper ſoll von allen Luftbläschen möglichſt frei ſeyn. Solche Körper, die ihrer Natur nach eine fette Oberfläche haben, oder die öfters durch die Hände gehen, nehmen nicht gleich das Waſſer an, und haben an ſolchen Stellen häufig kleine Bläschen. Man beugt dieſem Übel leicht vor, wenn man die Maſſe, nachdem ſie in der Luft abgewogen worden iſt, in Waſſer taucht, oder geradewegs mit Waſſer wäſcht, bis dieſes allenthalben angreift. Zeigen ſich aber doch noch Blaſen, wenn er

ſchon am Faden im Waſſer hängt, ſo muß man ſie mit einem feinen Haarpinſel wegnehmen. Dasſelbe ſoll mit jeder anderen etwa an der Oberfläche des Waſſers vorhandenen Luftblaſe geſchehen, damit man nicht beſorgen darf, ſie hänge ſich an den Faden, und verurſache eine Unrichtigkeit.

Körper, welche ſo porös ſind, daß ſich aus ihnen längere Zeit hindurch Luftblaſen entwickeln, wie z. B. einige Samen, Korkholz ꝛc. ſoll man füglich nur mit dem Leslie'ſchen Apparate unterſuchen, und vom Abwägen derſelben im Waſſer ganz abſtehen.

102. Bei der Unterſuchung von Körpern, die leichter ſind als Waſſer, und darum in die Zange, Fig. 19. *c*, eingeſpannt werden, oder bei Körnern, deren mehrere zuſammen auf der gläſernen Schale, Fig. 19. *b*, abgewogen werden, ja ſelbſt bei Maſſen, die im Waſſer auflöslich ſind und deßhalb in einer anderen Flüſſigkeit, wie z. B. in Alkohol, Terpentinöhl ꝛc. abgewogen werden müſſen, hat man dieſelben Regeln zu beobachten, wie vorhin. Nur wenn man im letzteren Falle es vorzieht, den im Waſſer löslichen Körper dadurch gegen dasſelbe zu ſchützen, daß man ihn mit Wachs umgibt, muß man die Aufmerkſamkeit auf etwaige Luftblaſen verdoppeln, und zwar nicht blos darauf ſehen, daß ſich von Außen keine derſelben anſetze, ſondern auch, daß ſich das Wachs allenthalben an den Körper anlege. Indeß wird man es da ſelbſt bei großer Aufmerkſamkeit ſchwerlich zu einem ſo richtigen Reſultat bringen, wie beim Abwägen in einer Flüſſigkeit, die den Körper nicht angreift, weil bei den vielen Größenbeſtimmungen, die da eintreten müſſen, ſelbſt kleine Fehler durch Zuſammenwirken eine große Unrichtigkeit verurſachen können.

Auch beim Abwägen tropfbarer Maſſen bedarf es keiner neuen Maßregeln. Beſtimmt man die Dichte einer Flüſſigkeit durch Abwägen eines kleinen mit derſelben gefüllten Fläſchchens, ſo hat man das zu beobachten, was beim Abwägen überhaupt gelehrt wurde; geſchieht dieſe Beſtimmung hingegen durch Abwägen eines feſten Körpers in dieſer Flüſſigkeit, ſo hat man den Fall, welcher vorhin beſprochen wurde.

103. Die Richtigkeit des Reſultates, welches man bei der Beſtimmung der Dichte der Körper mittelſt der Wage erhält, richtet ſich bei übrigens gleichen Umſtänden auch nach der Größe der unterſuchten Maſſe. Gar kleine Körper geſtatten keine große Genauigkeit, beſonders wenn ihre Dichte nicht groß iſt, weil jeder

Abwägungsfehler für ſich ſchon einen größeren Einfluß auf das Reſultat nimmt, und die Abwägung im Waſſer oder in einer anderen tropfbaren Flüſſigkeit mit deſto weniger Genauigkeit vollzogen werden kann, je geringer das Volumen und die Dichte eines Körpers iſt. Indeß darf man auch bei gar großen Maſſen nicht viel erwarten. Solche beſchweren die Wage zu ſehr, fordern eine zu große Waſſermaſſe, in welcher leicht Ungleichheiten der Temperatur eintreten können, es hält ſchwer, alle Luftblaſen zu bemerken, und ſie ſind in der Regel viel zu wenig homogen, als daß ſie irgend eine Varietät oder gar eine Species vorſtellen könnten. Sie enthalten häufig Höhlungen, fremde, beigemengte Stoffe ꝛc., und machen dadurch, daß man ſelbſt in dem Falle, wo man ihre Dichte genau genug beſtimmt hat, von derſelben nicht den ausgedehnten Gebrauch machen kann, welchen ſonſt die Natur der Sache geſtattet.

Wenn man auch alle dieſe Umſtände wohl berückſichtiget, ſo wird man doch die Dichte feſter und tropfbarer Körper auf die des reinen Waſſers bei ſeiner größten Dichte bezogen, kaum über die dritte Decimalſtelle mit Genauigkeit erhalten können. Ja ſelbſt dieſe wird nur dann Zutrauen verdienen, wenn man die nach dem Vorhergehenden beſtimmten Größen gehörig zu reduciren verſteht.

104. Wenn die Dichte gasförmiger Körper, beſtimmt werden ſoll, hat man die Reinheit des Gaſes und die Beſchaffenheit des Gefäßes, worin es abgewogen wird, vorzüglich zu berückſichtigen. Wie reine Gaſe bereitet und wie ein Gas auf ſeine Reinheit unterſucht wird, gehört in das Gebiet der Chemie; wie es von Feuchtigkeit befreit wird, iſt ſchon früher gezeigt worden; alſo erübriget noch einiges über die Beſchaffenheit des Gefäßes zu ſagen, worin man das Gas abwägt.

Man wählt zu dieſem Gefäße faſt ausſchließlich gläſerne Ballone. Ein ſolcher ſoll wenigſtens $\frac{1}{2}$ Kubikfuß Inhalt haben, um den Einfluß der unvermeidlichen Abwägungsfehler zu vermindern, aus reinem dünnen Glaſe beſtehen, damit ſein Gewicht nicht übermäßig groß ausfalle, und mit einer Metallfaſſung verſehen ſeyn, die ſich abſchrauben läßt. Letzteres iſt beſonders darum nothwendig, weil man den Ballon, um ſeine Capacität zu erfahren, mit Waſſer füllen und hierauf wieder völlig austrocknen muß, eine Arbeit, die langſam vor ſich geht und doch nur unvollkommen ausgeführt werden kann, wenn man nur durch eine kleine Öffnung, wie ſie Faſſungen, die mit Hähnen verſehen ſind, zu haben pflegen, ins

Innere gelangen kann. Aber ſelbſt wenn einem eine größere Öffnung zu Gebote ſteht, darf man ſich nicht auf das bloße Austropfen des Ballons verlaſſen, ſondern muß mit anderen Mitteln zu Hilfe kommen. Vorzüglich wirkſam iſt in dieſer Hinſicht, den Ballon, nachdem er vom tropfenden Waſſer befreit iſt, auf die Luftpumpe aufzuſchrauben, die Luft auszupumpen, ſie wieder zuzulaſſen und dieſes Verfahren öfters zu wiederhohlen. Iſt der Hals des Ballons ſo weit, daß man ohne Verunreinigung desſelben austrocknende Salze anwenden kann, ſo gelangt man um ſo ſicherer zum Ziele.

Was bei der Beſtimmung der Dichte der Dünſte zu berückſichtigen iſt, wird ſpäter abgehandelt werden.

C. Formeln zur Berechnung der Dichte.

105. Die Formeln, welche man zur Berechnung der Dichte der Körper braucht, wenn man den Einfluß der Temperatur, des Luftdruckes und des Gewichtsverluſtes der Körper in der Luft vernachläſſiget, ſind ohnehin bekannt; hier handelt es ſich aber um jene, welche den Einfluß aller dieſer Größen in ſich faſſen und daher ein völlig ſcharfes Reſultat geben, wenn nur die durch Erfahrung zu beſtimmenden Größen richtig angegeben ſind.

1. Formeln für feſte Körper.

106. Wenn ein feſter Körper die Maſſe P hat, und in der Luft mit dem Gewichte p an einer Wage im Gleichgewichte ſteht, s das ſpecifiſche Gewicht der Luft, S_1 das der Maſſe, woraus das Gewicht beſteht, S das des Körpers iſt, und ſich ſein Volumen vom Eispunct bis zur Temperatur des Verſuches im Verhältniſſe $1 : c$; das Gewicht hingegen im Verhältniſſe $1 : k$ ausdehnt: ſo hat man (89)

$$P = p \frac{\left(1 - \frac{k^3 s}{S_1}\right)}{1 - \frac{c^3 s}{S}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Wird dieſe Maſſe in Waſſer von bekannter Temperatur abgewogen, ſo mögen, weil die Temperatur desſelben von der der Luft verſchieden ſeyn kann, p_1, k_1, s_1 das bezeichnen, was vorhin p, k, s bedeuteten, σ aber das ſpecifiſche Gewicht des Waſſers. Da erhält man nach dem in (89) aus einander geſetzten Verfahren

$$P = p_1 \frac{1 - \frac{k_1^3 s_1}{S_1}}{1 - \frac{c_1^3 \sigma}{S}} \; \ldots\ldots\ldots \; (B).$$

Eliminirt man aus (A) und (B) die Größe P und ſetzt $\frac{k^3 s}{S} = a$, $\frac{k_1^3 s_1}{S_1} = a_1$; ſo wird

$$S = \frac{p c_1^3 \sigma (1 - a) - p_1 c^3 s (1 - a_1)}{p(1 - a) - p_1 (1 - a_1)},$$

oder wenn man nur die erſten Potenzen von a und a_1 berückſichtiget,

$$S = \frac{p}{p - p_1} \cdot c_1^3 \sigma - \frac{p_1}{p - p_1} \cdot c^3 s +$$

$$+ \frac{p p_1}{(p - p_1)^2} \cdot c^3 (a_1 - a) \ldots. \quad (C).$$

Sieht man den mit Luft erfüllten Raum als leer an und denket ſich beide Abwägungen bei der Normaltemperatur $= 0$ vollzogen; ſo hat man $c = c_1 = 1$, $s = 0$, $a_1 = a$ und dann iſt

$$S = \frac{p}{p - p_1} \sigma,$$

welches die gewöhnliche Formel iſt, die aber bei vielen Unterſuchungen zu wenig Genauigkeit gewährt.

2. Formeln für tropfbare Körper.

107. Wird das ſpeciſiſche Gewicht einer tropfbaren Flüſſigkeit hydroſtatiſch beſtimmt; ſo hat man drei Abwägungen, nämlich die des Hilfskörpers in der Luft, im Waſſer und in der zu unterſuchenden Flüſſigkeit. Behält man die vorher angenommenen Bedeutungen der Buchſtaben bei, ſo hat man für die Abwägung in der Luft die Gleichung (A), für die Abwägung im Waſſer die Gleichung (B) und für die Abwägung in der betreffenden Flüſſigkeit die Gleichung

$$P = p_2 \frac{1 - \frac{k_2^3 s_2}{S_1}}{1 - \frac{c_2^3 \sigma_1}{S}} \; \ldots\ldots\ldots \; (D)$$

wobei σ_1 das ſpeciſiſche Gewicht der zu unterſuchenden Flüſſigkeit iſt, p_2, k_2, s_2, c_2, aber ihre vorige Bedeutung in Bezug auf dieſe Abwägung haben. Durch Vergleichung der Gleichung B mit A

erhält man die Näherungsgleichung (C) und durch Vergleichung von D mit A die Gleichung

$$S = \frac{p}{p-p_2}\, c_2^{\,3}\, \sigma_1 - \frac{p_2}{p-p_2}\, c^3 s + $$
$$+ \frac{p\, p_2}{(p-p_2)^2}\, c^3 (a_2 - a) \;\ldots\ldots \quad (E)$$

und aus (C) und (E)

$$\sigma_1 = \frac{p-p_2}{p-p_1} \cdot \frac{c_1^{\,3}}{c_2^{\,3}}\, \sigma - \frac{p_1-p_2}{p-p_1} \cdot \frac{c^3}{c_2^{\,3}}\, s + $$
$$+ \frac{p-p_2}{(p-p_1)^2} \cdot \frac{c^3}{c_2^{\,3}} \cdot p_1 (a_1 - a) - \frac{p_2}{p-p_2} \cdot \frac{c^3}{c_2^{\,3}} \cdot (a_2 - a) + \ldots$$

Sucht man das Waſſer und die betreffende Flüſſigkeit bei einerlei Temperatur mit der Luft zu erhalten: ſo hat man $c = c_1 = c_2$, $a = a_1 = a_2$ und demnach

$$\sigma_1 = \frac{p-p_2}{p-p_1} \cdot \sigma - \frac{p-p_2}{p-p_1} \cdot s + \ldots\ldots \quad (F).$$

Sieht man endlich die in der Luft erfolgte Abwägung ſo an, als wäre ſie im leeren Raume erfolgt, ſo erhält man den gewöhnlichen abgekürzten Ausdruck, nämlich

$$\sigma_1 = \frac{p-p_2}{p-p_1}\, \sigma.$$

108. Wird das ſpecifiſche Gewicht einer Flüſſigkeit nicht aus dem Gewichtsverluſte eines feſten Körpers in ihr, ſondern mittelſt eines Fläſchchens beſtimmt, das ein beſtimmtes Volumen derſelben faßt; ſo geſchieht die Berechnung der geſuchten Größe auf folgende Weiſe: Es ſey wieder wie vorhin p_0 das Gewicht der Flüſſigkeit, welche das Gefäß bei 0° C faßt und c die kubiſche Ausdehnung des Gefäßes, β die der Flüſſigkeit von 0° bis zur Temperatur $t°$, bei welcher der Verſuch gemacht wurde, p_t die Gewichtsmenge dieſer Flüſſigkeit, welche das Gefäß bei $t°$ C faßt und π das Gewicht der Luft unter dieſem Volumen bei der Temperatur und dem Luftdruck des Verſuches. Man hat offenbar

$$\frac{p_0 (1 + c)}{1 + \beta} = p_t + \pi$$

und

$$p_0 = \frac{(p_t + \pi)(1 + \beta)}{1 + c}.$$

Iſt daher v das Volumen des Gefäßes, ſo iſt das Gewicht der Flüſſigkeit unter dem Volumen = 1 bei 0° C gleich

$$\frac{(p_{\iota}+\pi)\ (1+\beta)}{v.(1+\rho)}.$$

3. Formeln für Gaſe.

109. Es ſey das Gewicht des Ballons, den man zur Beſtimmung des ſpecifiſchen Gewichtes eines Gaſes braucht, im leeren Raume = P. Heißt ſeine Capacität bei 0° C v_0, ſo iſt dieſelbe bei t° C = $v_0\,(1+ct)$, wenn c der kubiſche Ausdehnungscoefficient des Gefäßes für 1° C iſt. Bezeichnet man das Gewicht der trockenen atmoſphäriſchen Luft, welche der Ballon bei 0° C und bei 0.76 Meter Luftdruck faßt, mithin das Gewicht der Luft unter dem Volumen v_0 mit p_0, ſo hat dieſe Luft bei t° C und dem Barometerſtande b das Volumen

$$v_0\,(1+\alpha t)\,\frac{0.76}{b}$$

wo $\alpha = 0.00375$ iſt, und dieſe Luft hat wieder das Gewicht p_0. Daher iſt das Gewicht des Volumen 1 gleich

$$\frac{p_0\,b}{v_0\,(1+\alpha t)\ 0.76}$$

und das Gewicht unter dem Volumen $v_0\,(1+ct)$ gleich

$$\frac{p_0\,(1+ct)\,b}{(1+\alpha t)\ 0.76}.$$

Schraubt man obigen Ballon auf eine Luftpumpe auf, und verdünnt darin die Luft ſo weit, daß die Barometerprobe noch den Druck δ zeigt, ſo hat die zurückgebliebene Luft das Gewicht

$$\frac{p_0\,(1+ct)\,\delta}{(1+\alpha t)\ 0.76}.$$

Wiegt man den Ballon ſammt ſeinem Inhalte ab, ſo findet man das Gewicht der Maſſe des Ballons P_1 und der darin zurückgebliebenen Luft, weniger der Luftmaſſe, die er verdrängt. Um letztere dem Gewichte nach zu finden, ſey e die Spannkraft der Waſſerdünſte in der Luft und daher das Gewicht der Dünſte unter dem inneren Volumen des Ballons vor der Luftverdünnung

$$\tfrac{5}{8}\,p_0\,\frac{(1+ct)\,e}{(1+\alpha t)\ 0.76}$$

und das Gewicht der durch ſie verdrängten Luftmaſſe

$$\frac{p_0 (1+ct)\, e}{(1+\alpha t)\, 0.76};$$

daher hat die reine dunſtfreie Luft unter dem inneren Volumen des Ballons das Gewicht

$$\frac{p_0 (1+ct)\, b}{(1+\alpha t)\, 0.76} - \frac{p_0 (1+ct)\, e}{(1+\alpha t)\, 0.76},$$

und dieſe Luft nebſt den Dünſten unter dieſem Volumen wiegt

$$\frac{p_0 (1+ct)\, (b-e+\frac{5}{8}e)}{(1+\alpha t)\, 0.76} = \frac{p_0 (1+ct)\, (b-\frac{3}{8}e)}{(1+\alpha t)\, 0.76}.$$

Heißt nun f das Gewicht der Luft unter dem Volumen der Maſſe des Ballons, ſeiner Faſſung ꝛc., ſo iſt ſein ganzer Gewichtsverluſt in der Luft

$$\frac{p_0 (1+ct)\, (b-\frac{3}{8}e)}{(1+\alpha t)\, 0.76} + f$$

und daher

$$P_1 = P + \frac{p_0 (1+ct)\, \delta}{(1+\alpha t)\, 0.76} - \frac{p_0 (1+ct)\, (b-\frac{3}{8}e)}{(1+\alpha t)\, 0.76} - f \,..\, (G).$$

Läßt man nun in dieſen Ballon bei der Temperatur t_1 und dem Luftdruck b_1 eine trockene Gasart eindringen, die ſich mit dem Rückſtande der atmoſphäriſchen Luft vermengt und mit dieſer vereint dem Druck b_1 das Gleichgewicht hält; ſo ſey q_0 die Gewichtsmenge dieſes Gaſes bei 0° und bei 0.76 M. Luftdruck, das der leere Ballon faſſen kann. Er faßt nun bei den obwaltenden Umſtänden das Gewicht

$$\frac{q_0 (1+ct_1)\, (b_1-\delta)}{(1+\alpha t_1)\, 0.76}$$

und das Gewicht der geſammten, im Ballon befindlichen Luft iſt

$$\frac{q_0 (1+ct_1)\, (b_1-\delta)}{(1+\alpha t_1)\, 0.76} + \frac{p_0 (1+ct)\, \delta}{(1+\alpha t)\, 0.76}.$$

Wägt man dieſen Ballon bei der Temperatur t_2 und dem Luftdrucke b_2 ab, und findet deſſen Gewicht P_2, ſo iſt dieſes Gewicht wieder um den ganzen Gewichtsverluſt in der Luft geringer als ſein abſolutes Gewicht im leeren Raume, das man zu wiſſen braucht. Da dieſer Verluſt

$$\frac{p_0 (1+ct_2)\, (b_2-\frac{3}{8}e_1)}{(1+\alpha t_2)\, 0.76}$$

beträgt, vorausgeſetzt, die Dünſte in der Luft haben die Spannkraft e_1; ſo wird wieder

$$P_2 = P + \frac{q_0 (1+ct_1)(b_1-\delta)}{(1+at_1)\,0.76} + \frac{p_0 (1+ct)\,\delta}{(1+at)\,0.76} - \\ - \frac{p_0 (1+ct_2)(b_2 - \frac{3}{8}e_1)}{(1+at_2)\,0.76} - f_1 \ldots. \quad (H)$$

wo f_1 einen mit f analogen Werth hat.

Zieht man die Gleichung (G) von (H) ab, und ſetzt, was ohne merklichen Fehler geſchehen kann, $f_1 = f$; ſo wird

$$P_2 - P_1 = \frac{q_0 (1+ct_1)(b_1-\delta)}{(1+at_1)\,0.76} - \frac{p_0 (1+ct_2)(b_2 - \frac{3}{8}e_1)}{(1+at_2)\,0.76} + \\ + \frac{p_0 (1+ct)(b - \frac{3}{8}e)}{(1+at)\,0.76} \ldots\ldots. \quad (I).$$

War die zweite Luftart wieder atmoſphäriſche Luft, ſo iſt $p_0 = q_0$ und man bekommt ſomit

$$p_0 = \frac{(P_2 - P_1)\,0.76}{\frac{(1+ct)(b-\frac{3}{8}e)}{1+at} + \frac{(1+ct_1)(b_1-\delta)}{1+at_1} - \frac{(1+ct_2)(b_2-\frac{3}{8}e_1)}{1+at_2}}.$$

Da nun p_0 bekannt iſt, ſo kann man ſeinen Werth in (I) ſubſtituiren und in folgender Gleichung q_0 als gegeben anſehen.

$$q_0 = \frac{(P_2-P_1)\,0.76 + \frac{p_0 (1+ct_2)(b_2-\frac{3}{8}e_1)}{1+at_2} - \frac{p_0(1+ct)(b-\frac{3}{8}e)}{1+at}}{\frac{(1+ct_1)(b_1-\delta)}{1+at_1}}.$$

Es iſt gut, den Ballon, nachdem man ihn mit dem Gas abgewogen hat, noch einmal auf die Luftpumpe zu bringen und dieſes Gas, ſo ſtark es angeht, zu verdünnen und das Ganze noch einmal abzuwägen. Geſchieht dieſes bei der Temperatur t_3 und dem Luftdrucke b_3 und findet man beim Abwägen das Gewicht P_3; ſo wird

$$q_0 = \frac{(P_3-P_2)\,0.76 + \frac{p_0 (1+ct_2)(b_2-\frac{3}{8}e_1)}{1+at_2} - \frac{p_0(1+ct_3)(b_3-\frac{3}{8}e_2)}{(1+at_3)}}{\frac{(1+ct_1)(b_1-\delta)}{1+at_1}}.$$

Addirt man beide Gleichungen für q_0, und nimmt b_2, t_2 als mittlere Proportionirte von b und b_3, t_1 und t_3 an, wozu man

berechtiget iſt, wenn der Luftdruck und die Temperatur im ſteten Wachſen oder Abnehmen begriffen ſind, ſo erhält man:

$$q_0 = \frac{\left(P_2 - \frac{(P+P_3)}{2}\right)(1+\alpha t_1)\, 0{.}76}{(1+c t_1)(b_1-\delta)}$$

Kennt man die Werthe p_0 und q_0 und zugleich das innere Volumen v des Ballons bei 0°, ſo findet man leicht das Gewicht einer Luftmaſſe unter dem Volumen = 1, und die Dichte der verſchiedenen Gaſe gegen die der atmoſphäriſchen Luft und des Waſſers.

110. Dieſes Verfahren iſt aber nur auf Gaſe anwendbar, die das Metall der Luftpumpe nicht angreifen. Wo dieſes eintritt, muß man die Anwendung ſowohl der Pumpe als metallener Hähne vermeiden. Man braucht erſtere auch nicht, wenn man einmal das Volumen eines Ballons und das Gewicht der atmoſphäriſchen Luft, die er faßt, kennt. Wägt man nämlich einen ſolchen Ballon mit der atmoſphäriſchen Luft, die er enthält, und hierauf mit Waſſer oder Queckſilber gefüllt ab, ſo kann man daraus das Gewicht des leeren Ballons im leeren Raume berechnen. Füllt man dann die trockene Luftart z. B. Chlorgas ein, und wägt den Ballon wieder, ſo erkennt man leicht das Gewicht dieſes Gaſes, welches im Ballon enthalten iſt, und berechnet leicht auch das unter dem Volumen = 1.

In vielen Fällen berechnet man die Dichte eines Gaſes nach ſeinen chemiſchen Beſtandtheilen, wie in Naturl. S. 145 gezeigt wurde.

D. Beſtimmung der Dichte mittelſt Aräometer.

111. Man erleichtert ſich die Beſtimmung der Dichte der Körper ungemein, wenn man ſich dazu der Aräometer bedient, muß aber immer darauf gefaßt ſeyn, die Erſparung an Zeit und Mühe durch einen weniger genauen Erfolg zu erkaufen. Um dieſe Arbeit gehörig vornehmen zu können, iſt es nothwendig, von den Aräometern ſelbſt eine genaue Kenntniß zu beſitzen, und darum ſoll hier von dieſen Inſtrumenten ausführlicher die Rede ſeyn.

1. Theorie der Aräometer.

112. Sowohl die Aräometer mit Scalen als die mit Gewichten beruhen auf hydroſtatiſchen Geſetzen, die man in jedem Elemen-

tarwerke über Phyſik bewieſen findet. Aus dieſen Geſetzen läßt ſich die Theorie dieſer Inſtrumente ableiten.

Auf folgende Weiſe ergibt ſich die Theorie der Scalenaräometer:

Es ſenke ſich ein ſolches Aräometer, deſſen abſolutes Gewicht $= p$ iſt, in eine Flüſſigkeit, deren Dichte s iſt, um das körperliche Stück v ein; ſoll ſich dieſes Inſtrument im Waſſer, deſſen Dichte σ heißt, eben ſo weit einſenken, ſo muß man ſein Gewicht dahin abändern, daß es in p_1 übergeht und man die Proportion hat

$$p : p_1 = s : \sigma \text{ mithin } p_1 = p \cdot \frac{\sigma}{s}.$$

Die Gewichtsänderung beträgt daher

$$p_1 - p = p \, \frac{(\sigma - s)}{s}.$$

Bedeuten für eine zweite Flüſſigkeit die Buchſtaben p_2 s_1 daſſelbe, was bei der erſten p_1 und s vorſtellen, ſo iſt

$$p_2 - p = p \, \frac{(\sigma - s_1)}{s_1}$$

und aus beiden Gleichungen

$$p_1 - p_2 = p \, \frac{(s_1 - s)}{s s_1} \, \sigma.$$

113. Es ſey nun l die Entfernung zweier Theilſtriche der Scale des Aräometers, a der Durchmeſſer des cylindriſchen Halſes, an dem die Scale verzeichnet iſt, und π das bekannte Kreisverhältniß, und es hat demnach das Halsſtück zwiſchen den beiden Strichen das Volumen $\frac{l a^2 \pi}{4}$ und ein gleich großer Waſſerkörper hat das Gewicht $\rho \frac{l a^2 \pi}{4}$, wenn ρ das ſpec. Gewicht des Waſſers iſt.

Man hat daher

$$\rho \, \frac{l a^2 \pi}{4} = \frac{p (s_1 - s) \sigma}{s s_1}$$

und

$$l = \frac{4 p (s_1 - s) \sigma}{\rho a^2 s s_1 \pi}$$

Iſt v das in reines Waſſer getauchte Volumen des Aräometers, ſo hat man

$$p = v\rho$$

und deßhalb

$$l = \frac{4v(s_1 - s)\sigma}{a^2 s s_1 \pi}$$

oder wenn man $\frac{4\sigma}{\pi} = \mu$ ſetzt,

$$l = \frac{\mu v(s_1 - s)}{a^2 s s_1}$$

Hieraus erſieht man, daß der Abſtand zweier Theilſtriche der Scale, welcher demſelben Dichtigkeitsunterſchiede entſpricht, deſto größer, mithin das Inſtrument deſto empfindlicher iſt, je größer das Volumen des in reines Waſſer getauchten Stückes iſt, und einen je geringeren Durchmeſſer der Hals hat. Selbſt an demſelben Inſtrumente iſt der Abſtand zweier ſolcher Theilſtriche deſto größer, je kleiner die Dichten ſind, denen die Striche entſprechen. Darum iſt ein Aräometer für geringere Dichten empfindlicher als für größere, und die Entfernung der Theilungsſtriche wächſt von unten nach oben, wenn ſie auch gleiche Unterſchiede der Dichten angeben.

114. Um auf gleiche Weiſe die Theorie der Gewichtsaräometer entwickeln zu können, ſey wieder p das Gewicht eines ſolchen Inſtrumentes, wenn es ſich bis zum Zeichen am Halſe in reines Waſſer einſenkt, v das Volumen desſelben bis zum genannten Zeichen und ρ das ſpec. Gewicht des Waſſers, da iſt wieder wie vorher

$$p = v\rho.$$

Iſt p_1 das Gewicht des Inſtrumentes, das ſich in einer Flüſſigkeit von der Dichte s auf die rechte Tiefe einſenkt, ſo iſt

$$p_1 = v\rho s \text{ und } s = \frac{p_1}{p}$$

Setzt man dem Inſtrumente das Gewichtchen q zu, ſo wird es für eine andere Flüſſigkeit von der Dichte s_1, gehörig belaſtet ſeyn und man hat

$$s_1 = \frac{p_1 + q}{p} = \frac{p_1}{p} + \frac{q}{p}$$

mithin

$$s_1 - s = \frac{q}{p} \text{ und } q = p(s_1 - s) = v\rho(s_1 - s)$$

Demnach iſt das Inſtrument deſto empfindlicher, je kleiner p und je kleiner v iſt.

Heißt a der Durchmeſſer des Halſes, l die Länge des Stückes, um das der Hals durch Zuſatz von q weiter in Waſſer getrieben wird, ſo hat man:

$$\frac{a^2 l \pi \rho}{4} = q$$

und

$$l = \frac{4q}{a^2 \rho \pi} = \frac{4v(s_1 - s)}{a^2 \pi}.$$

115. Nach dieſen Formeln kann man leicht die Empfindlichkeit der Aräometer mit Scalen und Gewichten mit einander vergleichen. An beiden Inſtrumenten wird ein gleich langes Stück des Halſes gleich gut wahrnehmbar ſeyn, mithin wird l in beiden für die Grenze der Wahrnehmbarkeit einerlei Werth haben. Setzt man auch v in beiden einander gleich, in welchem Falle aber ein Scalenaräometer eine faſt um das Doppelte weiter greifende Scale haben kann, als ein Gewichtsaräometer, und bezeichnet die Größe $s_1 - s$ im erſteren mit Δs, im zweiten mit $\Delta_1 s$, die Halsdicke des erſterm mit a, des zweiten mit a_1; ſo hat man nach Hinweglaſſung der gleichen Größen

$$\frac{\Delta s}{a^2 s s_1} = \frac{\Delta_1 s}{a_1^2}$$

Da s_1 von s für jeden Fall nur wenig verſchieden ſeyn kann, ſo darf man ſich wohl erlauben $s s_1 = s^2$ zu ſetzen, wodurch dieſe Gleichung in

$$\frac{\Delta s}{a^2 s^2} = \frac{\Delta_1 s}{a_1^2}$$

übergeht. Der Hals des Gewichtsaräometers kann füglich $\frac{1}{4}$ L. dick ſeyn, während der eines Scalenaräometers kaum unter 1 L. ſeyn darf. Setzt man dieſe Werthe für a und a_1 in obigen Ausdruck (12), ſo hat man:

$$\frac{\Delta s}{s^2} = \frac{\Delta_1 s}{\frac{1}{16}} \text{ oder } \frac{16 \Delta s}{s^2} = \Delta_1 s$$

woraus man erſieht, daß das Verhältniß der Empfindlichkeit der beiden Inſtrumente von dem ſpec. Gewichte abhängt, welches angezeigt werden ſoll. Für $s = 1.5$ wird

$$\Delta_1 s = \frac{16}{2.25} \cdot \Delta s = 7 \Delta s$$

oder das Gewichtsaräometer beinahe 7mal empfindlicher als das Scalenaräometer.

2. Conſtruction der Aräometer.

116. Man verfertiget die Aräometer aus Glas, Meſſing- oder Silberblech. Aräometer von Metall bekommen leicht Eindrücke, taugen nur für wenige Flüſſigkeiten, werden leicht ſchmutzig und verlieren beim Reinigen gar leicht etwas von ihrem Gewichte. Gläſerne Aräometer ſind zwar gebrechlicher, aber ſie nehmen keine Eindrücke an, und laſſen ſich ohne Gefahr eines Gewichtsverluſtes wohl reinigen. Beim öffentlichen Verkehr, wo Aräometer den Rang einer Wage haben, ſollen billig nur gläſerne geſtattet ſeyn. Unter den Aräometern ſind die Scalenaräometer am ſchwerſten zu verfertigen, während Gewichtsaräometer faſt immer richtig ſind, wenn man nur genaue Gewichte braucht. Hier ſoll zuerſt von Scalenaräometern die Rede ſeyn.

117. Das Weſentliche in der Geſtalt eines Aräometers iſt, daß es in der Lage, wo die Scalenröhre vertical ſteht, ſtabil ſchwimmt. Dieſes iſt der Fall, wenn man ihm eine der Formen *a*, *b*, *c*, (Fig. 23) gibt. Die erſte derſelben empfiehlt ſich vorzüglich durch ihre Einfachheit und iſt in jedem Falle zu wählen, wo die Empfindlichkeit des Inſtrumentes nicht gar groß zu ſeyn braucht, und man mit einer kleinen Portion der abzuwägenden Flüſſigkeit ausreichen will. Für empfindlichere Inſtrumente wählt man die Formen *b*, *c*. Je größer der Körper *A* und je dünner der Hals *B* iſt, deſto empfindlicher wird das Inſtrument. Je größer der Umfang der Scale werden ſoll, deſto länger oder deſto dicker muß der Hals ſeyn. Doch wird deſſen Länge ſtets durch die für das Aräometer nöthige Stabilität beſchränkt.

118. Die meiſte Aufmerkſamkeit bedarf man bei der Conſtruction der Scale eines Aräometers. Manche Künſtler verrichten dieſe Arbeit dadurch, daß ſie den Körper des zu verfertigenden Aräometers in mehrere Flüſſigkeiten von bekannter Dichte ſenken und die Einſenkungspuncte als Theilpuncte der neuen Scale betrachten. Allein dieſe Arbeit führt ſelten zu einem richtigen Reſultate, weil bei der Beſtimmung der Dichte der Flüſſigkeiten meiſtens Fehler begangen werden, die nicht überſehen werden dürfen, um ſo mehr, als dieſe Beſtimmung ſelbſt, wenn die Arbeit nicht übermäßig langwierig ausfallen ſoll, meiſtens mit einem Scalenaräometer vorgenommen wird, und daher ein richtiges Inſtrument dieſer Art vorausſetzt.

Für den rationellen Künſtler gibt es zwei Methoden die Scale

zu beſtimmen: bei einer derſelben werden alle Hauptpuncte der Scale unmittelbar durch einen Verſuch beſtimmt, bei der anderen braucht man nur die zwei äußerſten Puncte durch einen Verſuch zu beſtimmen, die übrigen findet man durch zweckmäßige Abtheilung ihres Abſtandes; jene iſt anwendbar, der Hals des Aräometers mag was immer für eine Geſtalt haben, dieſe nur für einen cylindriſchen oder prismatiſchen Hals.

119. Das Weſen der erſteren Methode rührt von Briſſon her, und beſteht darin, daß man um einen Theilpunct der Scale zu finden, das Gewicht des Inſtruments ſo abändert, daß es in reinem Waſſer bis zu der Stelle einſinkt, wohin es ſich ohne Änderung des Gewichtes in jener Flüſſigkeit einſenken würde, welche die dieſem Theilſtriche entſprechende Dichte hat. Um die hierzu nöthige Gewichtsänderung des Inſtrumentes zu finden, dient die Formel (112)

$$p_1 - p = p\,\frac{(\sigma - s)}{s}$$

wo p das bleibende Gewicht des Inſtruments iſt, welches wir das Normalgewicht nennen wollen; p_1 dasjenige, welches das Inſtrument haben muß, damit es ſich im Waſſer, deſſen Dichte $= \sigma = 1$ iſt, eben ſo weit einſenke, wie unter dem Normalgewichte in die Flüſſigkeit, deren Dichte s heißt. Iſt $\sigma > s$, ſo iſt $p_1 - p$ poſitiv, und man muß um die Scalenpuncte zu finden, das Gewicht des Inſtrumentes vermehren, iſt aber $\sigma < s$, ſo wird $p_1 - p$ negativ, d. h. das Gewicht des Inſtrumentes muß vermindert werden. Man kann die Arbeit bedeutend abkürzen, wenn man für die gewöhnlichen Werthe von s vorläufig den Bruch $\frac{\sigma - s}{s}$ berechnet, und die gefundenen Zahlen in eine Tabelle bringt, wie dieſes in der Folge geſchehen wird.

120. Die zweite der oben genannten Methoden verdanken wir dem verdienſtvollen Gelehrten, Profeſſor Schmidt in Gießen. Um ſie deutlich zu machen, ſey Fig. 24 ein Aräometer, deſſen Hals ab mit einer Scale verſehen werden ſoll, ſo daß, z. B. das Inſtrument in reinem Waſſer von beſtimmter Temperatur bis a einſinke. Man ſuche das Gewicht des Inſtrumentes p und das Zulegegewicht p_1, welches nothwendig iſt, um die Einſenkung bis b zu bewirken.

Man errichte hierauf links und rechts auf ab die zwei ſenkrechten Linien ad und bc, die ſich zu einander verhalten, wie p zu

$p+p_{,}$ ſo, daß man hat $ad : bc = p : p+p_{,}$. Nun theile man ſowohl ad als bc in ſo viele gleiche Theile, als Striche der Scale zwiſchen a und b fallen ſollen, und verbinde zwei ſo zuſammengehörige Theilpuncte durch eine gerade Linie mit einander. Da wo dieſe Verbindungslinien ab treffen, bezeichnen ſie die Stellen der Scalentheilung, die den um gleiche Differenzen wachſenden Dichten entſprechen. Daß dieſes Verfahren richtig ſey, zeigt ſich durch folgende Betrachtung. Es ſey o ein Punct der Scale, welcher der Dichte $s_{,}$ entſpricht, während zu den Puncten a und b die Dichten 1 und s gehören. Da hat man nun

$$Aa : ab = s : 1-s \text{ , oder } ab = Aa \cdot \frac{1-s}{s}$$

$$Aa : ao = s_{,} : 1-s_{,}, \text{ oder } ao = Aa \cdot \frac{1-s_{,}}{s_{,}}$$

und deßhalb

$$ob = ab - ao = Aa \left(\frac{s_{,}-s}{s\,s_{,}}\right).$$

Es findet daher die Proportion Statt:

$$ao : ob = 1-s_{,} : \frac{s_{,}-s}{s}.$$

Sucht man nach der vorhergehenden Conſtruction den Punct $s_{,}$, ſo findet man ihn dadurch, daß man $ad : bc = s : 1$, d. h. $bc = \frac{ad}{s}$ macht, ad ſowohl als bc in $1-s$ gleiche Theile theilt und in erſterer e, in letzterer Linie f ſo nimmt, daß $ae = ad \cdot \frac{1-s_{,}}{1-s}$ und $bf = bc\,\frac{s-s_{,}}{1-s} = \frac{ad}{s} \cdot \frac{s-s_{,}}{1-s}$ wird. Es iſt alſo auch hier wegen $ae : bf = ao : ob$ das Verhältniß der letzteren Größen wie oben.

121. Die Briſſon'ſche Methode iſt zwar allgemein anwendbar, fordert aber viel Arbeit. Man verringert dieſe bedeutend, ohne der Richtigkeit des Reſultates nahe zu treten, wenn man nur ſo viele Scalenpuncte nach der Briſſon'ſchen Methode beſtimmt, als nöthig ſind, um die zwiſchen je zweien derſelben liegenden Halsſtücke als cylindriſch anſehen zu können, und die weitere Abtheilung der Scale nach Schmidt ausführt. Wie man ſowohl dieſe als auch die ſonſt noch bei der Einrichtung eines Scalenaräo=

meters nothwendigen Arbeiten zu verrichten hat, wird hier in Kürze angegeben werden.

122. Wenn man den Aräometerkörper gewählt hat, belaſtet man ihn im unteren Theile mit Queckſilber oder Bleiſchrott, bis er ſich ſo weit in Waſſer einſenkt, daß der Einſenkungspunct der unterſte Punct der Scale werden kann und merkt ſein Gewicht an. Hierauf vermehrt man ſein Gewicht, bis er nur etwa $\frac{1}{2}$ Zoll aus dem Waſſer herausragt und notirt deſſen Gewicht wieder. Das Verhältniß dieſer zwei Gewichte gibt bekanntlich das der Dichten, welche den zwei äußerſten Scalenpuncten entſprechen. Hierauf zeichnet man auf feines Papier eine beliebig eingetheilte und bezifferte Scale, rollt ſie zuſammen und ſchiebt ſie in den Hals des Aräometers, damit ſie einſtweilen den Dienſt der eigentlichen Scale leiſte und die Einſenkungspuncte bei der eigentlichen Scalenbeſtimmung leicht erkannt werden können, wenn man das Inſtrument aus dem Waſſer genommen hat, und gibt dem Inſtrumente genau das Normalgewicht. Bevor man weiter geht, iſt es nothwendig, die zur Beſtimmung der Scalenpuncte nach Briſſon nöthigen Gewichte, der Formel $p_{,}-p=p\left(\frac{\sigma-s}{s}\right)$ gemäß, vorläufig zu berechnen. Es iſt genug, wenn man s ſtets um 0.1 wachſen läßt, und die Zwiſchenpuncte der Schmidt'ſchen Methode überläßt. Zur Erleichterung der Rechnung braucht man mit Vortheil folgende Tafel, welche den Bruch $\frac{\sigma-s}{s}$ oder wegen $\sigma=1$ den Werth $\frac{1-s}{s}$ ein für allemal angibt.

s	$\frac{1-s}{s}$	s	$\frac{1-s}{s}$
0.700	+ 0.42857	1.400	— 0.28571
0.800	+ 0.25000	1.500	— 0.33333
0.900	+ 0.11111	1.600	— 0.37500
1.000	0.00000	1.700	— 0.41176
1.100	— 0.09091	1.800	— 0.4444
1.200	— 0.16667	1.900	— 0.47368
1.300	— 0.23077	2.000	— 0.50000

Wird nun das Normalgewicht p mit jedem dieſer Brüche multiplicirt, ſo erhält man das Gewicht, welches zugeſetzt oder weggenommen werden muß, um die Scalenpuncte zu finden, welche den

obigen Werthen von s entſprechen, ſo weit dieſe in die Scale fallen.

123. Zur weiteren Ausführung wird das Aräometer an eine Wage ſo befeſtiget, daß deſſen Hals vertical ſteht, bis zu dem Puncte, der dem ſpecifiſchen Gewichte des reinen Waſſers entſpricht, bei 14° Réaumur in dasſelbe getaucht und an der Wage ins Gleichgewicht geſtellt. Iſt dieſes geſchehen, ſo gibt man das Gewicht, welches nach obiger Formel zur weiteren Beſtimmung der Scale nothwendig iſt, entweder auf die Wagſchale der Seite, wo das Aräometer hängt, oder auf die andere, jenachdem $s < 1$ oder $s > 1$ iſt, ſenkt oder hebt die Wage, bis ihre Zunge gehörig einſpielt, und notirt ſich, bis zu welchem Puncte der Hilfsſcale die Einſenkung erfolgt, und verfährt ſo für alle zu beſtimmenden Puncte. Iſt dieſe Arbeit vollendet, ſo ſchreitet man zur weiteren Abtheilung der Scale nach Schmidt. Zu dieſem Ende überträgt man die Länge der ganzen Scale auf ein aufgeſpanntes Zeichenpapier, und errichtet die den Linien ad und bc (Fig. 24) entſprechenden Senkrechten, zieht cax, bdx und durch jeden bereits ſchon beſtimmten Punct e, g der Scale und durch x eine Gerade, ef, gh, theilt hierauf die Linien ag, ge ꝛc. und bf, fh ꝛc. in ſo viele gleiche Theile, als neue Scalenpuncte zwiſchen zwei ſchon beſtimmte fallen ſollen, verbindet die zuſammengehörigen Puncte der Linien ad und bc durch Gerade und findet ſo die weiteren Puncte der Scale. Nun braucht man daher nur mehr die Scale auszuzeichnen, zu beziffern, abzuſchneiden, der bisher gebrauchten am Gewichte gleich zu machen, zuſammenzurollen, in den Hals des Inſtrumentes zu ſtecken, ſie ſo zu ſtellen, daß der Einſenkungspunct in reinem Waſſer mit dem an der Scale bezeichneten zuſammenfalle, die Scale mit einem Siegellackkörnchen an das Glas zu befeſtigen, und den Apparat zuzuſchmelzen.

124. Bei der Verfertigung der Procentenaräometer wird anfangs eine gewöhnliche Scale für die Dichten nach dem vorhergehenden Verfahren mit Bleiſtift verzeichnet und dann ihr zur Seite die wahre Procentenſcale nach dem aus Verſuchen bekannten Zuſammenhange zwiſchen den Dichten und den Gehaltsprocenten entworfen. Dieſen Zuſammenhang kann man aus der am Ende enthaltenen Tabelle der Dichte der Körper entnehmen.

125. Leider werden noch hie und da Beaumé'ſche Aräometer gebraucht, deren Scale nur in Grade von gleicher Größe getheilt

6 *

iſt. Damit ihre Anwendung zu einem verſtändlichen Reſultate führe, muß man das ſpecifiſche Gewicht kennen, welches jedem einzelnen Grade dieſes Inſtrumentes entſpricht.

Dieſe Bedeutung beſtimmter Aräometergrade findet man am leichteſten dadurch, wenn man das Aräometer in verticaler Stellung wie in 123 an eine Wage befeſtiget, es in reines Waſſer taucht und an einer oder der anderen Seite der Wage, je nachdem die Aräometergrade ſich auf Dichten unter oder über der des reinen Waſſers beziehen, ſo lange Gewichte zulegt, bis ſich das Inſtrument, während die Zunge der Wage gehörig einſpielt, zu dem fraglichen Grade eintaucht. Heißt p das Normalgewicht, p_1 das neue Gewicht des Aräometers und s das dem betreffenden Grade entſprechende ſpecifiſche Gewicht; ſo iſt

$$p_1 - p = p\left(\frac{1-s}{s}\right)$$

und hieraus

$$s = \frac{p}{p_1}.$$

126. Aräometer mit Gewichten ſind in ihrem Baue ſo einfach, daß nicht viel darüber zu ſagen iſt und jeder dieſes Inſtrument hinreichend kennt, wenn er mit den verſchiedenen Formen, unter denen es vorkommt, vertraut iſt. Dieſe Inſtrumente werden faſt ausſchließlich aus Metall verfertiget. Gläſerne Inſtrumente dieſer Art haben meiſtens einen zu dicken Hals und ſind darum minder empfindlich, als es das Weſen dieſer Inſtrumente fordert und geſtattet. Faſt immer haben ſie die Nicholſon'ſche, zur Abwägung feſter Körper geeignete Geſtalt, und ſind daher mit zwei Schalen verſehen. Die obere iſt faſt immer auf gleiche Weiſe eingerichtet, die untere hingegen iſt bald am unterſten Ende an einem maſſiven Kegel angebracht, bald wird ſie durch einen Korb gebildet (Fig. 25), den man umwenden und mit der Wölbung aufwärts drehen kann, damit er zugleich zur Feſthaltung von Stoffen diene, die leichter ſind als Waſſer und daher in demſelben aufſteigen. Sehr zweckmäßig iſt die von Mohs zuerſt gebrauchte Einrichtung (Fig. 26), wo dieſe Schale gleich unmittelbar unter dem Halſe ſich befindet, und wo man den abzuwägenden Körper in dieſe Schale bringen und wieder wegnehmen kann, ohne das ganze Inſtrument aus dem Waſſer zu heben, und daher der Sorge enthoben iſt, das Adhäriren der Luft an den Körper des Inſtrumentes, welches

beim Gebrauche ſo nachtheilig iſt und bei jedem neuen Einſenken eintritt, wegzuſchaffen. Jedoch muß der Körper des Inſtrumentes ziemlich groß ſeyn und ein bedeutendes Gewicht haben, um der nöthigen Stabilität theilhaftig werden zu können.

Der Hals ſoll zwar dünn ſeyn und einen gut erkennbaren Strich haben, bis zu welchem die Einſenkung erfolgen muß. Ein zu dicker Hals macht das Inſtrument aus früher angegebenen Gründen unempfindlich, aber auch ein zu dünner thut dasſelbe, weil er die Adhäſion des Waſſers zu ſehr begünſtiget und macht, daß das Inſtrument, an welchem er angebracht iſt, bei derſelben Belaſtung zu tief oder minder tief eingetaucht bleibt. Häufig wird dieſer Strich in das Metall des Halſes eingravirt, aber am beſten iſt es, wenn man die Marke ohne Vertiefung anbringen kann, um nicht durch die Vertiefung der Adhäſion einen Vortheil einzuräumen. Dieſes geht bei einem ſtählernen Halſe ſehr leicht an, man braucht ihn nur blau anlaufen zu laſſen und dann den oberen Theil bis zur Einſenkungsgrenze wieder zu poliren.

Die obere Schale des Inſtrumentes iſt in der Regel zum Wegnehmen eingerichtet, oft auch mit Armen verſehen, mit denen ſie ſich an dem Waſſergefäße fängt, wenn man die Belaſtung über Gebühr vermehrt hat. Alle ſolche Künſteleien ſind überflüſſig, und man kann die obere Schale an den Hals vollkommen feſt machen, wenn man bei den Verſuchen ein Waſſergefäß wählt, deſſen Tiefe nicht zuläßt, daß ſich das Inſtrument bis zur oberen Schale einſenke.

3. Gebrauch der Aräometer.

127. Was man beim Gebrauche der Aräometer zu beobachten hat, läßt ſich auf wenige Puncte reduciren, die überdieß für ſich Jedermann einleuchten, der das Weſen eines Aräometers kennt.

Bevor man den Verſuch mit einem Aräometer macht, muß man die Temperatur der Flüſſigkeit, worein es getaucht werden ſoll, ausmitteln und ſo lange ändern, bis ſie jener gleich geworden iſt, für welche das Inſtrument verfertiget iſt. Dieſe Temperatur iſt in der Regel an der Scale der Aräometer angemerkt. Wollte man bei einer anderen Temperatur Beobachtungen machen, ſo müßte man ſie durch eine, oft ziemlich mühſame Rechnung auf die dem Aräometer entſprechende reduciren. Bei der Beſtimmung der Temperatur der Flüſſigkeit hat man den Umſtand wohl zu berück-

ſichtigen, daß ſie nicht in allen Horizontalſchichten dieſelbe iſt, und darum die flüſſige Maſſe vor dem Einſenken des Thermometers mit einem Glasſtabe wohl umzurühren.

128. Iſt die Temperatur der Flüſſigkeit auf die rechte Größe gebracht, ſo wird das Inſtrument eingeſenkt, nachdem es wohl gereinigt worden iſt. Dabei ſoll es vertical in der Flüſſigkeit ſchweben, frei von allen Luftblaſen ſeyn und ſich nicht an die Seitenwände des Gefäßes anlehnen. Bei Spindelaräometern beſteht oft das Glasgefäß nur aus einer engen Glashülſe, bei deren Gebrauch es faſt unmöglich iſt, das Inſtrument ganz vollkommen frei zu erhalten. Ein ſolches Inſtrument ſoll auch immer nur in jener Hülſe gebraucht werden, in welcher es ſich bei der Beſtimmung der Scale befand, und wenn man genöthigt iſt, eine andere anzuwenden, ſo ſoll man eine dieſer möglichſt gleiche wählen. Beim Einſenken ſollen ſtarke Stöße, jedes etwaige Nachdrücken mit der Hand und alles vermieden werden, wodurch das Inſtrument in ſtarke Schwankungen verſetzt wird. Dadurch wird es zu weit hinauf benetzt und darum zu ſchwer und unrichtig. Beim Ableſen hat man die höchſte von der Flüſſigkeit bezeichnete Stelle, nicht etwa die allgemeine Oberfläche derſelben zu nehmen, und dabei dem Auge die Stellung zu geben, wodurch jede Parallaxe vermieden wird.

129. Nicholſon'ſche Aräometer, die zur Beſtimmung der Dichte feſter Körper gebraucht werden und auf deren Angabe man oft ein großes Gewicht legt, ſollen mit beſonderer Vorſicht behandelt werden. Da ſie meiſtens aus Metall beſtehen und in Waſſer geſenkt werden, hat man ſtete Sorge zu tragen, daß ſie keine mit Fett überzogenen Stellen haben und überall leicht vom Waſſer benetzt werden; darum ſoll man ſie nicht in die bloße Hand nehmen und vor jedem Gebrauche mit einem trockenen Tuche leicht abwiſchen. Sie mit Weingeiſt zu waſchen iſt nicht rathſam. Sehr weſentlich iſt endlich noch eine Rückſicht, die bei metallenen Aräometern, ſie mögen mit einer Scale oder mit Gewichten verſehen ſeyn, eintreten muß. Bei dieſen Inſtrumenten geſchieht es nämlich oft, daß ſie an den Löthſtellen kleine Öffnungen bekommen, durch welche die Luft entweicht und dafür das Waſſer eindringt. Das Daſeyn ſolcher Stellen, die natürlich zu großen Unrichtigkeiten führen, erforſcht man am beſten dadurch, daß man das Inſtrument im belaſteten Zuſtande, wenn es ein Gewichtsaräometer iſt, einige Zeit im Waſſer ſchweben läßt und nachſieht, ob es nicht immer tiefer einſinkt. Fin=

det dieſes Statt, ſo iſt am Vorhandenſeyn einer ſolchen Stelle nicht zu zweifeln und das Inſtrument einer Reparatur zu unterwerfen. Siehe hierüber: Biot traité de Phys. math. et exp. Tom. I. p. 347. Beſſel in Schumachers aſtronom. Nachrichten Nr. 163. Gehlers Wörterbuch der Phyſik. Art. Aräometer.

Viertes Kapitel.

Änderung der Abmeſſungen und der Dichte durch die Wärme.

130. Die Einwirkung der Wärme auf die Körper iſt zwar ſchon im vorhergehenden Kapitel zum Behufe der Beſtimmungen der Dichte der Körper benützt worden, aber die Formeln, welche die Größe dieſer Wirkung ausdrücken, enthalten Coefficienten, zu deren Kenntniß man nur durch beſondere Verſuche gelangt. Wie dieſe anzuſtellen ſeyen und wie man aus ihnen den Werth jener Coefficienten ableitet, ſoll hier gezeigt werden.

A. Für feſte Körper.

131. Die Ausdehnung feſter Körper haben Laplace und Lavoiſier mit großer Genauigkeit und mit einem eigenen Apparate beſtimmt. Fig. 27 ſtellt den Apparat vor. AB iſt die Stange, deren Verlängerung durch die Wärme unterſucht werden ſoll; ſie hatte bei den wirklich angeſtellten Verſuchen eine Länge von 6 Fuß, lag genau horizontal auf gläſernen Rollen, die ſich zwiſchen den Glasſtreifen a und b befanden und konnte leicht auf denſelben hingleiten. In A war ſie an ein verticales gläſernes Lineal CD befeſtiget, welches für die Kraft, womit die Stange darauf drückte, als unbiegſam angeſehen werden konnte; in B berührte ſie ein gleiches gläſernes Lineal, das ſich um eine horizontale Axe drehte, wenn ſich die Stange verlängerte und dadurch den Hebelarm GH bewegte. Um jede zufällige Verſchiebung der Stange zu vermeiden, wurden ihre beiden Enden mit einem gabelförmig gebogenen dünnen biegſamen Kupferſtreifen umgeben und mittelſt dieſes an jedes der Glaslineale befeſtiget. Jedes Lineal ſtand mit einem eiſernen Querſtück IK in Verbindung und alle ruhten auf maſſiven viereckigen ſteinernen Pfeilern, deren jeder 2 Fuß lang und 1 Fuß breit war. Sie hat-

ten eine Entfernung von 3 Fuß von einander und enthielten zwiſchen ſich den Ofen, der zum Erwärmen der Stange gebraucht wurde, und ein Gefäß, in welchem das Badwaſſer für die Stange enthalten war.

Um die bei der Erwärmung der Stange Statt findende Verlängerung meſſen zu können, bewegte der Hebel *GH* ein Fernrohr *M* von 6 Fuß Länge, welches auf eine in Zoll und Linien getheilte Scale gerichtet war, deren Entfernung von der Drehungsaxe bei den meiſten Verſuchen 100 Toiſen betrug und mittelſt deſſen ſich eine Verlängerung von $\frac{1}{744}$ Linie noch leicht erkennen ließ. Man verſuchte wohl auch ein Ziel von 200 Toiſen Entfernung, es erſchien aber in dieſem Falle die Scale ſo undeutlich, daß dadurch mehr an Genauigkeit verloren ging, als man durch die ſtärkere Vergrößerung der Scale gewann.

Die Temperatur des Bades, worin ſich die Stange befand, wurde mittelſt Thermometer beſtimmt, die 2 Linien große Grade hatten, wovon alſo jeder leicht durch bloßes Augenmaß in 10 gleiche Theile getheilt werden konnte. Sie wurden mit aller Sorgfalt verfertiget, zur größeren Sicherheit noch überdieß mit einem Normalinſtrumente verglichen und für ſie eine eigene Correctionstafel conſtruirt. Die Verſuche erſtreckten ſich von 0° — 100° C. Zur Erzeugung der Temperatur 0° C füllte man zuerſt den Badbehälter mit klein zerſtoßenem Eiſe, allein man bemerkte bald, daß ſich unter der Stange ein leerer Raum bildete und daß das Gewicht der auf der Stange liegenden Eisſtücke ſie biege und ſo eine von der Temperaturerhöhung unabhängige Variation ihrer Dimenſionen bewirke; deßhalb wurde das Gefäß blos mit Waſſer gefüllt und ſo lange Eis hineingegeben, als dieſes noch geſchmolzen wurde. Sobald die Thermometer, die an verſchiedenen Stellen im Waſſer angebracht waren, auf den Eispunct zeigten und ſich nicht weiter änderten, ſah man durch das Fernrohr auf die Scale und bemerkte den Punct derſelben, der den Faden im Geſichtsfelde des Rohres traf.

Die Erwärmung des Waſſers wurde anfänglich mittelſt eines darunter befindlichen Ofens bewerkſtelliget; allein man bemerkte bald, daß nicht alle Thermometer ſtets dieſelbe Temperatur zeigten und ſich beim Sinken der Temperatur langſamer abkühlten als die Stange; auch war zu beſorgen, daß durch die Hitze die verticalen gläſernen Stützen afficirt würden. Deßhalb wurde lieber von einem nahe ſtehenden Behälter mittelſt eines Rohres ſiedendes Waſſer in

den Waſſerbehälter geleitet. Obwohl dieſes beim Überfüllen ſtets um 0°.3—0°.4 unter 100° C ſank, und daher die Verſuche nicht im ſtrengſten Sinne bei der Siedhitze des Waſſers angeſtellt wurden; ſo war doch die dabei Statt findende Abweichung von dem der Siedhitze entſprechenden Reſultate ſo gering, daß man ſie füglich übergehen konnte. Man erreichte aber den Vortheil, daß man die Temperatur des Waſſers durch Zugabe eines neuen erhitzten Antheils ſehr ſchnell erhöhen und ſo in kurzer Zeit mehrere ſich gegenſeitig controlirende Verſuche anſtellen konnte.

132. Es läßt ſich ohne ſo viel Aufwand ein eben ſo genaues, ja vielleicht ein noch genaueres Reſultat finden, wenn man ſich der Vorrichtung bedient, womit Hällſtröm die Ausdehnung mehrerer feſter Körper unterſuchte. Dieſe beſteht aus einem horizontalen hölzernen Trog, in welchem die etwa 4 Fuß langen zu unterſuchenden Stäbe in horizontaler Richtung an Drähten aufgehängt werden können. Ein Ende des Stabes geht durch die ſchmälere Seitenwand des Troges und ſtützt ſich an eine feſte Säule, in der Nähe des anderen Endes iſt ein kleiner Bügel befeſtiget, der einen ſehr feinen horizontalen, auf der Axe der Stange ſenkrechten Strich hat, auf welchen man während der Beobachtung durch ein eigens dazu angebrachtes Mikroſkop ſieht. Dieſes Mikroſkop iſt mit einem Mikrometer verſehen, und geſtattet, ſehr kleine Verrückungen des genannten Striches ſcharf zu meſſen.

133. Das ſchwierigſte bei ſolchen Unterſuchungen entſteht aus der Nothwendigkeit, ein Ende des zu unterſuchenden Körpers völlig unbeweglich zu befeſtigen. Wenn es ſich nur darum handelt, die Ausdehnungsgeſetze feſter Körper zu erfahren und man auf die Kenntniß der abſoluten Vergrößerung der Abmeſſungen eines Körpers durch die Wärme verzichten will, ſo kann man dieſe Schwierigkeit umgehen, indem man nur den Ausdehnungsunterſchied zweier feſter Körper unterſucht, wie Borda, Petit und Dulong gethan haben. Letztere haben dieſe Unterſuchungen mit ſehr großer Aufmerkſamkeit und Umſicht angeſtellt. Sie nahmen die zwei Körper, um deren Ausdehnungsunterſchied es ſich handelte und befeſtigten ſie an einem ihrer Enden möglichſt gut mittelſt Schrauben an einander. Am anderen Ende bekam jeder ein meſſingenes Stäbchen, das zuerſt vertical aufſtieg und dann horizontal umgebogen war. Eines derſelben trug eine in Fünftel Millimeter getheilte Scale, das andere einen Nonius, der $\frac{1}{10}$ der Eintheilung der erſteren angab, und ſo, da

jeder Körper 1.2 Meter lang war, die Verlängerung bis auf $\frac{1}{120000}$ maß.

134. Um das Geſetz zu finden, nach welchem die durch Temperaturerhöhung bewirkte Ausdehnung mit dieſer Temperatur, ſo wie ſie ein gewöhnliches Queckſilber- oder Luftthermometer angibt, zuſammenhängt, ſey t die Temperatur, für welche die Verlängerung Δl eintritt und man nehme an, es ſey

$$\Delta l = at + bt^2 + ct^3 + \ldots\ldots$$

wo a, b, c Coefficienten ſind, welche durch Verſuche beſtimmt werden müſſen und für denſelben Stoff denſelben Werth beibehalten, bei verſchiedenen Stoffen aber verſchieden ſind. Zum Behufe dieſer Beſtimmung benütze man wenigſtens ſo viele bei verſchiedenen Temperaturen angeſtellte Meſſungen der Größe Δl, als conſtante Größen zu beſtimmen ſind, wodurch man eben ſo viele Gleichungen erhält, aus denen ſich dann a, b, c ꝛc. beſtimmen laſſen. Hat man mehr Gleichungen, als unbekannte Größen, ſo wende man die Methode der kleinſten Quadratſumme an, und man gelangt deſto beſſer zum Ziele.

Auf dieſem Wege findet Hällſtröm für Eiſen

$$\Delta l = 0.00000994\,t + 0.000000024\,t^2 + 0.0000000002\,t^3.$$

Zwiſchen $t = 0$ und $t = 100$ kann man ſich mit dem erſten Gliede dieſer Reihe begnügen, und demnach die Ausdehnung der Temperatur proportional ſetzen.

Für Glas findet derſelbe

$$\Delta l = 0.00000196\,t + 0.000000105\,t^2$$

und man kann wieder, ſo lange t nicht gar groß iſt, die Ausdehnung der Größe t proportional annehmen.

B. Für tropfbare Körper.

135. Die Zunahme des Volumens tropfbarer Flüſſigkeiten bei der Erwärmung läßt ſich bekanntlich dadurch beſtimmen, daß man die Volumina derſelben tropfbaren Maſſe, oder die Gewichtsmenge, die ein Gefäß bei verſchiedenen Temperaturen davon zu faſſen vermag, oder endlich den Gewichtsverluſt eines feſten Körpers in einer Flüſſigkeit bei verſchiedenen Wärmegraden ausmittelt. Später wird auch noch von einer anderen Beſtimmungsweiſe die Rede ſeyn. Allein durch die erſten zwei Mittel erfährt man nur den Unterſchied zwiſchen der Ausdehnung des Gefäßes und der Flüſſigkeit, und man

kann nur durch eine Correction zur Kenntniß der wahren Ausdehnung gelangen. Wie dieſe zu finden ſey, ſoll hier gezeigt werden.

136. Wird die Ausdehnung der Flüſſigkeit nach dem bei verſchiedenen Temperaturen beobachteten Volumen geſchätzt, ſo ſey v ihr Volumen bei 0° C, v_t ihr ſcheinbares Volumen bei $t°$, Δv die Ausdehnung derſelben für eine Temperaturerhöhung von 0° — $t°$, c die kubiſche Ausdehnung des Gefäßes für 1°, mithin ct dieſelbe für $t°$. Es iſt daher $v_t\,(1+ct)$ das innere Volumen des Gefäßes, ſo weit es die Flüſſigkeit bei $t°$ füllt, $v\,(1+\Delta v)$ das Volumen der Flüſſigkeit und

$$v_t\,(1+ct) = v\,(1+\Delta v)$$

mithin

$$\Delta v = \frac{v_t - v}{v} + ct\,.\,\frac{v_t}{v}.$$

$\frac{v_t - v}{v}$ iſt die ſcheinbare Ausdehnung der Flüſſigkeit, $ct\,.\,\frac{v_t}{v}$ die wegen der Ausdehnung des Gefäßes nöthige Correction.

137. Beſtimmt man die Ausdehnung der Flüſſigkeit durch die Gewichtsmenge, welche ein Gefäß bei verſchiedenen Temperaturen zu faſſen vermag; ſo ſetze man, es faſſe das Gefäß bei 0° C die Gewichtsmenge p, hingegen bei der Temperatur t die Gewichtsmenge p_t und es ſey v das Volumen der flüſſigen Maſſe bei 0° C, v_1 das Volumen der Flüſſigkeit vom Gewichte p_t bei 0° C. Da iſt

$$v_1 = \frac{p_t}{p}\,v.$$

Haben c und Δv die vorhin angenommene Bedeutung, ſo hat man

$$v\,(1+ct) = v_1\,(1+\Delta v)$$

und für v_1 obiger Werth geſetzt

$$1+ct = (1+\Delta v)\,\frac{p_t}{p}$$

oder

$$\Delta v = \frac{p - p_t}{p_t} + \frac{p}{p_t}\,.\,ct$$

wo wieder der letzte Theil des zweiten Gliedes der Gleichung die wegen der Ausdehnung des Gefäßes nöthige Correction enthält.

Für die dritte oben angegebene Verſuchsmethode braucht man keine andere Correction, als die, welche bereits ſchon bei der Beſtimmung der Dichte der Körper (106) angegeben wurde.

138. Wenn man das Geſetz kennt, nach welchem ſich die ſcheinbare Ausdehnung einer Flüſſigkeit bei wachſenden Temperaturen richtet, ſo iſt es leicht, daraus das Geſetz der wahren Ausdehnung abzuleiten. Behalten t, v, v_t, c und Δv ihre vorhin angenommene Bedeutung; ſo hat man

$$v_t (1 + ct) = v (1 + \Delta v)$$

und hieraus

$$v_t = \frac{v (1 + \Delta v)}{1 + ct} = v + \frac{v (\Delta v - ct)}{1 + ct}$$

woraus man erſieht, daß der zweite Factor des letzten Gliedes die ſcheinbare Ausdehnung bezeichnet. Setzt man dieſe $= \gamma$, das iſt

$$\gamma = \frac{\Delta v - ct}{1 + ct}$$

und vernachläſſiget die höheren Potenzen von c, ſo wird

$$\gamma = \Delta v - ct.$$

139. Die Ausdehnung tropfbarer Körper läßt ſich wieder durch die Formel

$$\Delta v = at + bt^2 + ct^3 + \ldots\ldots$$

ausdrücken, wo Δv, a, b, c, t, die vorhin angenommene Bedeutung haben und auch die Größen a, b, c ſo beſtimmt werden, wie gezeigt wurde.

Viele Flüſſigkeiten nehmen bei einer beſtimmten Temperatur ein Maximum der Dichte an. Dieſe Temperatur muß ſich aus obiger Formel beſtimmen laſſen, falls ſie überhaupt das Geſetz der Ausdehnung richtig angibt, wenn man ſie nach t differenziirt und das Differenziale $= 0$ ſetzt.

140. Unter allen Flüſſigkeiten ſind das Waſſer und das Queckſilber für den Phyſiker am wichtigſten, darum ſoll auch von ihrer Ausdehnung insbeſondere die Rede ſeyn.

Die Ausdehnung des Waſſers ſcheint am genaueſten von Hällſtröm unterſucht worden zu ſeyn. Er beſtimmte ſie dadurch, daß er eine gläſerne Kugel im Waſſer bei verſchiedenen Temperaturen genau abwog, die erhaltenen Gewichte mit denen der Kugel im leeren Raume verglich, mithin ihren Gewichtsverluſt im Waſſer fand und daraus auf die Dichte des letzteren ſchloß. Aus 64 Verſuchen, die ſich von 0°.8 — 32°.5 erſtreckten, fand er mittelſt der Methode der kleinſten Quadratſumme die Gleichung für das ſpecifiſche Gewicht σ des Waſſers

$$\sigma = 1 + 0.0000529\,39\,t - 0.0000065322\,t^2 + 0.00000001445\,t^3.$$

Daraus findet man

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0.000052939 - 0.0000130644\,t + 0.00000004335\,t^2 = 0$$

und daher für die Temperatur der größten Dichte

$$t = 4°.108\ C.$$

Andere Gelehrte haben für die größte Dichte eine andere Temperatur gefunden, theils weil ihre Verſuche nicht durchaus denſelben Grad von Genauigkeit beſaßen, theils weil ſie bei der Berechnung derſelben verſchiedene Wege einſchlugen. Hier folgen die von verſchiedenen Gelehrten erhaltenen Reſultate:

Beobachter	Berechner	Reſultat
Deluc	Biot	3.42 C.
——	Ekſtrand	3.60
——	Pauker	1.76
——	Hällſtröm	1.76
Dalton	Dalton	2.22
——	Biot	4.35
Gilpin	Young	3.89
——	Biot	3.89
——	Eytelwein	2.59
——	Walbeck	0.44
——	Hällſtröm	3.82
Schmidt	Eytelwein	2.91
——	Hällſtröm	8.63
Charles	Biot	3.99
——	Pauker	3.88
Lefevre Gineau	Lefevre Gineau	4.44
Hällſtröm	Hällſtröm	4.35
Biſchof	Biſchof	4.06
Rumford	Rumford	4.38
Tralles	Tralles	4.35
Hope	Hope	3.33
——	——	3.88
——	——	4.16
Ekſtrand	Ekſtrand	3.60
Muncke	Muncke	3.78

Eine vollſtändige Tafel über die Dichte des Waſſers bei verſchiedenen Temperaturen kommt am Ende unter Nr. IV. b vor.

141. Die genaueſten Verſuche über die Ausdehnung des Queckſilbers rühren von Dulong und Petit her. Sie beſtimmten dieſelbe durch Meſſung der Höhe zweier Queckſilberſäulen in den Schenkeln eines communicirenden Gefäßes bei einem beſtimmten Temperaturunterſchiede derſelben. Der Apparat, deſſen ſie ſich bedienten, iſt in Fig. 28 abgebildet. AB und $A_1 B_1$ ſind zwei Glasröhren, die durch eine dritte BB_1 mit einander communiciren. Letztere wird durch eine eiſerne Unterlage in horizontaler Lage erhalten, um erſteren die verticale Richtung zu ſichern. Das Stattfinden dieſer Richtung erkennt man aus dem Stande zweier Waſſerwagen, die unter einem rechten Winkel gegen einander geſtellt ſind. Die horizontale Röhre iſt eng, die verticalen hingegen ſind ſo weit, daß die Capillarität das Reſultat nicht ſtören kann. AB iſt von einem kupfernen hohlen Cylinder umgeben, der mit Eis gefüllt iſt, eigene Thermometer enthält, die das Stattfinden der Temperatur = 0 nachweiſen und endlich einen kleinen Ausſchnitt hat, durch den man den Stand der Queckſilberoberfläche erkennen kann. Den zweiten Arm $A_1 B_1$ umgibt ein anderes Gefäß mit fixem Öhle, das mittelſt eines aufgeſchraubten Deckels völlig geſchloſſen iſt. Es koſtete den Erfindern dieſes Apparates viele Mühe, alle Theile desſelben öhldicht zu ſchließen. Man ſorgte dafür, daß ſtets das ganze Gefäß mit Öhl gefüllt war und im Augenblicke der Beobachtung das Queckſilber nicht weit aus dem Gefäße hervorragte. Die Temperatur des Öhles gab ein Thermometer an. Dieſes beſtand aus einer Glasröhre ab, die mit ausgekochtem luftleeren Queckſilber ganz angefüllt war und am oberen Ende eine haarröhrchenförmige Verlängerung hatte, die in einen kleinen Behälter ragte. So wie die Temperatur des Öhles mithin auch die des Queckſilbers ſtieg, wurde ein Theil des letzteren herausgetrieben, der gewogen werden konnte und die Temperaturerhöhung angab. Die Empfindlichkeit dieſes Inſtrumentes war ſo groß, daß eine Erwärmung von 1° eine Queckſilbermaſſe von 1.3714 Gran aus der Röhre trieb. Da dieſe Röhre eben ſo tief im Bade ſtand, wie die Queckſilberſäule $A_1 B_1$, ſo mußte wohl erſtere genau die mittlere Temperatur der letzteren angeben. Es wurde deßungeachtet noch eine zweite, bloß atmoſphäriſche Luft enthaltende Röhre cd in das Öhlbad gebracht, um zugleich die Übereinſtimmung zwiſchen den Angaben des Queckſilber- und Luftthermometers prüfen zu können.

Das Öhl wurde mittelſt eines eigenen Ofens erhitzt. Hatte es die beabſichtigte Temperatur erreicht, wurde dieſer Ofen geſchloſſen, dieſe Temperatur einige Zeit erhalten, und die Höhe der beiden Queckſilberſäulen gemeſſen. Das Meßinſtrument beſtand aus einem verticalen Maßſtabe mit einem Nonius, der $\frac{1}{50}$ Mll. angab und mit einem Fernrohr verbunden war, in deſſen Geſichtsfeld die Queckſilberoberfläche in einem, und dann die im anderen Schenkel gebracht werden konnte.

Sind h und h_1 die Höhen der zwei Queckſilberſäulen, d und d_1 die ihnen entſprechenden Dichten; ſo iſt

$$h\,d = h_1\,d_1 \text{ und } d = \frac{h_1}{h} \cdot d_1.$$

Heißen ferner v und v_1 die Volumina, welche den Dichten d und d_1 entſprechen, t und t_1 die Temperaturen, bei denen ſie Statt finden, ſo wird

$$v_1 = \frac{d}{d_1}\, v = \frac{h_1}{h} \cdot v$$

und demnach die Größe der Ausdehnung für die Temperaturerhöhung von 1° C gleich

$$\frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{h_1 - h}{(t_1 - t)}.$$

Dieſe Formel auf die vorher erwähnten Verſuche angewendet, gab folgende Reſultate:

Temperatur nach dem Queckſilberthermometer	nach dem Luftthermometer	Abſolute Ausdehnung des Queckſilbers für 1° C
0°	0	0
100°	100	$\frac{1}{5550}$
204.61	200	$\frac{1}{5425}$
314.15	300	$\frac{1}{5300}$.

142. Dieſe Reſultate weichen von denen anderer Experimentatoren nicht bedeutend ab. Um dieſes beſſer würdigen zu können, folgt hier eine Tabelle, welche die Ergebniſſe aller angeſtellten Verſuche enthält:

Name des Experimentators	Ausdehnung in Theilen des Volumens bei 0°
Dulong und Petit	$\frac{1}{55.50}$
Dalton	$\frac{1}{50}$
Cavendiſh	$\frac{1}{53}$
Shuckburgh	$\frac{1}{54}$
Laplace und Lavoiſier	$\frac{1}{54}$
Hällſtröm	$\frac{1}{55}$
Deluc	$\frac{1}{56}$
Roy	$\frac{1}{59}$
Lalande und Delisle	$\frac{1}{66}$
Carbois	$\frac{1}{67}$
Fahrenheit	$\frac{1}{51}$
Deloigne	$\frac{1}{63}$
Muſſchenbroek	$\frac{1}{71}$
Martin	$\frac{1}{61}$
Roſenthal	$\frac{1}{58}$
Luz	$\frac{1}{57}$
Herbert	$\frac{1}{64}$
Cavallo	$\frac{1}{67}$
Cotte	$\frac{1}{65}$

143. Nimmt man an, daß die Ausdehnung des Queckſilbers für die Temperaturen innerhalb der Wärmeextreme unſerer Atmoſphäre dem Zunehmen der Temperaturen, ſo wie ſie unſere Thermometer angeben, proportionirt ſind, und ſetzt das Dulong'ſche Reſultat als das der Wahrheit am nächſten kommende voraus, nach welchem die Ausdehnung für 1° gleich $\frac{1}{55.50}$ des Volumens bei 0° iſt; ſo hat man für den Ausdruck eines Queckſilbervolumens $v_{,}$, das bei 0° $= v_0$ iſt, bei der Temperatur t

$$v_t = v_0 \left(1 + \frac{t}{5550}\right) = v_0 \, (1 + 0.00018\,t)$$

$$\text{und } v_0 = \frac{v_t}{1 + 0.00018\,t}.$$

Iſt p_0 das Gewicht eines Queckſilberkörpers von beſtimmtem Volumen bei 0°, p_t das Gewicht eines ſolchen Körpers von eben ſo großem Volumen bei $t°$; ſo iſt

$$p_t = \frac{p_0}{1 + 0.00018\,t} \text{ und } p_0 = p_t\,(1 + 0.00018\,t)$$

oder wenn d_0 die Dichte des Queckſilbers bei 0°, d_t dieſelbe bei t iſt,

$$d_t = \frac{d_0}{1 + 0.00018\,t} \text{ und } d_0 = d_t\,(1 + 0.00018\,t).$$

Handelt es ſich nicht um die abſolute Ausdehnung des Queckſilbers, ſondern um die, wie ſie in Queckſilber erſcheint, das ſich in einem Gefäße befindet, welches auch von der Wärme erweitert wird, ſo muß man in erſterer Formel den Coefficienten 0.00018 um ſo viel vermindern, als die räumliche Ausdehnung des Gefäßes für 1° beträgt. Iſt das Gefäß von Glas, deſſen kubiſche Ausdehnung für 1° nahe 0.00002673 des Volumens bei 0° iſt, ſo muß man ſtatt 0.00018 ſetzen 0.00018 — 0.00002673 oder nahe 0.00015, wodurch man erhält

$$v_t = v_0\,(1 + 0.00015\,t).$$

144. Man kennt nicht blos die Größe der Ausdehnung des Waſſers und des Queckſilbers, ſondern auch die vieler anderer tropfbarer Flüſſigkeiten ſo genau, daß ſogar der Werth der Coefficienten a b c der Formel, welche das Geſetz ihrer Ausdehnung angibt, ausgemittelt iſt. Man hat nämlich

1. Für Schwefeläther von der Dichte 0.733 bei 12°.5 C.

$$\Delta v = 0.0015026847\,t + 0.0000022552\,14\,t^2 - 0.000000015783\,08\,t^3 + 0.0000000004146\,6\,t^4.$$

Sucht man aus $\frac{d\,\Delta v}{dt} = 0$ die Größe t, ſo findet man $t = -36°$ C.

2. Für rectificirtes Steinöhl von der Dichte 0.78125 bei 12°.5 C.

$$\Delta v = 0.0009885588\,t + 0.00000212046\,t^2 - 0.0000000267639\,9\,t^3 + 0.0000000000195067\,7\,t^4.$$

Aus $\frac{d\,\Delta v}{dt} = 0$ ergibt ſich $t = -71°$ C.

3. Für tropfbares Ammoniak von der Dichte 0.9465 bei 12°.5 C.

$$\Delta v = 0.000285586\,t + 0.0000026001\,99\,t^2 + 0.0000000064163\,38\,t^3 + 0.000000000104698\,t^4.$$

Man findet hier keine größte Dichte.

4. Für Salzſäure von der Dichte 1.1978 bei 12°.5 C.

$$\Delta v = 0.000566237\,t - 0.000000829895\,t^2 + 0.0000000370847 59\,t^3 - 0.000000000472156\,t^4.$$

Auch hier gibt es kein Maximum der Dichte.

5. Für Salpeterſäure von der Dichte 1.4405 bei 12°.5 C.

$$\Delta v = 0.0010661285\,t - 0.000001646108\,t^2 + 0.0000000448 9136\,t^3 - 0.000000000198 2409\,t^4.$$

Es gibt kein Maximum der Dichte.

6. Für Schwefelſäure von der Dichte 1.836 bei 12°.5 C.

$$\Delta v = 0.0005279835\,t + 0.00000287180238\,t^2 - 0.000000051224035\,t^3 + 0.0000000002832 4437\,t^4.$$

$$\frac{d\Delta v}{dt} = 0 \text{ gibt } t = -39°.2 \text{ C.}$$

7. Für Mandelöhl

$$\Delta v = 0.0007445475\,t + 0.000000313437 9\,t^2 + 0.0000000002750899\,t^3 - 0.0000000000159750 79\,t^4.$$

Es gibt kein Maximum der Dichte.

8. Für Olivenöhl

$$\Delta v = 0.760537\,t + 0.000480\,t^2 - 0.000000853\,t^3.$$

9. Für Camillenöhl

$$\Delta v = 0.726354\,t + 0.0008358\,t^2 - 0.000001991\,t^3.$$

10. Für Serpoletöhl

$$\Delta v = 0.759468\,t - 0.0001066\,t^2 + 0.000005120\,t^3.$$

11. Für geſättigte Kochſalzlöſung

$$\Delta v = 0.656005\,t + 0.0012976\,t^2 + 0.000001421\,t^3.$$

12. Für ſehr rectificirten Alkohol

$$\Delta v = 0.627200\,t + 0.00133120\,t^2 + 0.000003968\,t^3.$$

13. Für ein Gemiſch aus 1 Th. Alkohol und 1 Th. Waſſer

$$\Delta v = 0.5642664\,t + 0.0017600\,t^2 + 0.000005973\,t^3.$$

14. Für ein Gemiſch aus 1 Th. Alkohol und 3 Th. Waſſer

$$\Delta v = 0.008266\,t + 0.0099477\,t^2 - 0.000020195\,t^3.$$

Die Tafel (IV. c) enthält die Ausdehnung und Dichte des Queckſilbers bei verſchiedenen Temperaturen.

C. Für Gaſe.

145. Wiewohl die Ausdehnung der Gaſe durch die Wärme von Gay-Luſſac mit großer Genauigkeit unterſucht ward, ſo darf doch die Arbeit Dulongs und Petits über denſelben Gegenſtand

darum nicht übergangen werden, weil ſie ſich auf einen viel größeren Temperaturunterſchied erſtrecken als alle früheren Verſuche.

Dulong und Petit bedienten ſich zu dieſen Verſuchen einer rechtwinkeligen, 0.7 Meter langen, 0.1 Meter breiten und eben ſo tiefen Wanne, die über einem Ofen ſtand oder vielmehr in ihn eingelaſſen war, durch welchen man ſie gleichförmig erwärmen konnte. Sie wurde mit fixem Öhl gefüllt und hatte an der ſchmälern Seitenwand ein genau horizontal ſtehendes Thermometer und dieſem gegenüber eine gut ausgetrocknete horizontale Glasröhre, welche die zu prüfende auch wohl getrocknete Luft enthielt. Dieſe Röhre war am inneren Ende geſchloſſen, an dem aus dem Kaſten hervorragenden hingegen in ein feines Haarröhrchen ausgezogen und offen. Den Inhalt dieſes Röhrchens konnte man zwar nicht wie den übrigen im Öhl befindlichen Theil erwärmen, weil er aber gegen den der ganzen Röhre ſehr klein war (er betrug nur 0.0005 derſelben), ſo konnte man ihn wohl als gar nicht vorhanden anſehen. Am Deckel der Wanne befanden ſich mehrere Öffnungen; einige derſelben dienten zur Aufnahme vertical ſtehender Thermometer, andere zur Befeſtigung eigener Windflügel, durch die man die Öhlmaſſe umrühren und ſo die gleichförmige Vertheilung der Wärme befördern konnte.

146. Beim Verſuche erhitzte man das Öhl bis nahe an den Punct, bei dem man experimentiren wollte, und ſchloß hierauf alle Öffnungen des Ofens. Da erwärmte ſich das Öhl noch um einige Grade, erreichte bald die Temperatur, welche man beabſichtigte, und behielt ſie wegen ſeiner großen Maſſe lang genug, um ſie genau am horizontalen Thermometer beſtimmen zu können. Im Augenblick, wo dieſe Temperatur gemeſſen war, ſchmolz man mit einer Stichflamme die Glasröhre, welche die Luft enthielt, zu und beobachtete den in dieſem Momente Statt findenden Luftdruck. Hierauf nahm man die Röhre aus der Wanne, brachte ſie in ein eigenes Zimmer, deſſen Temperatur ſehr beſtändig war, ſtellte ſie vertical, mit dem ausgezogenen Ende in reines trockenes Queckſilber getaucht, und brach die feine Spitze ab. Das Queckſilber ſtieg in die Röhre hinauf, bis zwiſchen dem äußeren Luftdrucke, der inneren Queckſilberſäule und der in der Röhre befindlichen Luft Gleichgewicht herrſchte. In dieſer Stellung blieb die Röhre, bis man vorausſetzen konnte, ſie habe völlig die Temperatur des Zimmers angenommen, die ein ſehr empfindliches Thermometer angab. Sobald dieſes der Fall war, maß man die Länge der in der Röhre enthaltenen Queck-

ſilberſäule und beobachtete zugleich den Luftdruck am Barometer. Aus dem Unterſchiede beider Stände und der herrſchenden Temperatur konnte man auf die Spannkraft der Luft in der Röhre ſchließen. Hierauf wurde die Röhre ſammt ihrem Inhalte vorſichtig aus dem Queckſilber gehoben, gewogen, ausgeleert, wieder gewogen, ganz mit reinem Queckſilber gefüllt und ihr Gewicht neuerdings beſtimmt. Hierdurch erfuhr man das Gewicht des Queckſilbers, deſſen Volumen dem der erwärmten und dem der kalten Luft gleich iſt.

147. Es ſei nun t die Temperatur der Luft in der Röhre, nach dem Queckſilberthermometer, im Augenblicke, wo ſie zugeſchmolzen wurde, $t_{,}$ die des Zimmers, worin man ſie öffnet. Iſt p die Queckſilbermaſſe, welche die Röhre bei $t^{\circ}_{,}$ faßt, ſo iſt $p\,[1 + c\,(t - t_{,})]$, die Queckſilbermaſſe, deren Volumen dem der erwärmten Luft gleich kommt, wenn c die kubiſche Vergrößerung des Glaſes für die Wärmedifferenz $t - t_{,}$ in Theilen des urſprünglichen Volumens iſt. Iſt ferner $p_{,}$ die Queckſilbermaſſe unter dem Volumen der Luft bei $t_{,}$, ſo iſt dieſe Maſſe unter dem Volumen der Luft von 0° gleich $\frac{p_{,}}{1 + 0.00375\,t_{,}}$. Allein dieſe Luft ſteht unter dem Drucke $h_{,}$, während die warme Luft unter dem ganzen Luftdrucke h ſteht. Reducirt man erſtere auf den Druck h, ſo erhält man die Queckſilbermaſſe vom Volumen der Luft bei 0° $= \frac{h_{,}\,p_{,}}{h\,(1 + 0.00375\,t_{,})}$. Iſt nun v das Volumen der Luft bei $t_{,}$, das bei 0° hingegen gleich 1, ſo iſt

$$v : 1 = p\,[1 + c\,(t - t_{,})] : \frac{h_{,}\,p_{,}}{h\,(1 + 0.00375\,t_{,})}$$

und

$$v = \frac{h\,p\,[1 + c\,(t - t_{,})]\,(1 + 0.00375\,t_{,})}{h_{,}\,p_{,}}.$$

Bezeichnet l die Grade des hundertheiligen, von der Glasausdehnung unabhängigen Luftthermometers, welche den am Queckſilberthermometer gemeſſenen Graden t entſprechen, ſo hat man

$$v : 1 = 1000 + 3.75\,l : 1000$$

oder

$$l = 266.67\,v - 266.67.$$

Setzt man aber für v obigen Werth, ſo wird

$$l = \frac{hp}{h_{,}\,p_{,}}\,[1 + c\,(t - t_{,})]\,(266.67 + t_{,}) - 266.67.$$

Auf dieſem Wege erhielt man folgende Reſultate:

Temperatur nach dem Queckſilberthermometer	Temperatur nach dem Luftthermometer	Volumen der Luft
— 36°	— 36°	0.8650
0	0	1.0000
+100	+ 100	1.3750
150	148.70	1.5576
200	197.05	1.7389
250	245.05	1.9189
300	292.70	2.097
360	350.00	2.3125

Man ſieht hieraus zugleich, daß man das Queckſilberthermometer nicht über 100° als ſicheres Meſſungsmittel der Temperatur anſehen dürfe. Für Temperaturen unter dem Eispuncte läßt es ſich bis auf 36° mit völliger Sicherheit anwenden, ſo daß deſſen völlig ſichere Scale von —36° bis 100° reicht. In der Folge wird von der Correction die Rede ſeyn, die man den höheren Graden des Queckſilberthermometers beifügen muß, um ſie auf wahre Wärmegrade zu reduciren.

148. Nimmt man für v_0, v_t, p_0, p_t, d_0, d_t dieſelben Bedeutungen in Betreff der Luftarten an, welche in (143) für flüſſige Körper aufgeſtellt wurden, ſo gelten für Gaſe die Formeln

$$v_t = v_0\,(1 + 0.00375\,t)$$

$$p_t = \frac{p_0}{1 + 0.00375\,t}$$

und

$$d_t = \frac{d_0}{1 + 0.00375\,t}.$$

Ein Luftvolumen V, das bei t_1 beſtimmt wurde, wird zuerſt auf 0° und von dieſem Punct auf die Temperatur t reducirt, ſo daß man hat

$$v_t = \frac{V(1 + 0.00375\,t)}{1 + 0.00375\,t_1},$$

ſtatt deſſen man auch ohne erheblichen Fehler ſetzen kann:

$$v_t = V\,[1 + 0.00375\,(t - t_1)].$$

Auf gleiche Weiſe erhält man für das Gewicht unter beſtimmten Volumen und die Dichte nach einer analogen Bezeichnung:

$$p_t = \frac{P\,(1 + 0.00375\,t_1)}{1 + 0.00375\,t}$$

$$d_t = \frac{D\,(1 + 0.00375\,t_1)}{1 + 0.00375\,t}$$

oder wieder annäherungsweiſe:

$$p_t = P\,(1 + 0.00375\,(t_1 - t))$$

$$d_t = D\,(1 + 0.00375\,(t_1 - t)).$$

Die Tafel (IV. d) gibt das Volumen und die Dichte der Gaſe bei verſchiedenen Temperaturen an.

Quellen hierüber ſind: Biot traité de physique exp. et math. Tom. I. 146. Dulong und Petit im Journal de l'école polytechnique II. Handbuch der Naturlehre von Muncke. Heidelberg 1829. I. 411.

Fünftes Kapitel.

Thermometer.

149. Die in den vorhergehenden Kapiteln behandelten Gegenſtände forderten eine genaue Kenntniß der Temperatur. Da man zu dieſer nur mittelſt eines genauen Thermometers gelangt, ſo ſoll hier die Verfertigung und der Gebrauch dieſes Inſtrumentes ausführlich gelehrt werden.

A. Conſtruction der Thermometer.

150. Da Queckſilber- und Weingeiſtthermometer faſt auf einerlei Weiſe verfertiget werden und nur in wenigen Puncten von einander abweichen, ſo wird hier zuerſt nur von der Conſtruction der erſteren geſprochen und erſt am Ende das angegeben, was bei Weingeiſtthermometern beſonders zu beachten iſt.

1) Queckſilberthermometer.

151. Bei der Verfertigung eines Queckſilberthermometers hat man zuerſt die Glasröhre recht zu wählen und bei dieſer Wahl auf die Beſchaffenheit des Glaſes und auf die Dimenſionen der Röhre Rückſicht zu nehmen.

Die Künſtler lieben zwar in der Regel Röhren aus weichem Glaſe, das man aus der grünlichen ins Blaue ſpielenden Farbe erkennt, weil es ſich leichter im Feuer erweichen läßt; allein dieſes hat die nachtheilige Eigenſchaft, entweder ſchon beim Auskochen des

Queckſilbers, oder wenn auch dieſes nicht der Fall iſt, mit der Zeit in der gewöhnlichen Temperatur, eine Art Zerſetzung zu erleiden ſo, daß ſich das Queckſilber daran hängt und ihm die Durchſichtigkeit benimmt. Deßhalb ſoll man ſich lieber an das weiße, wenn auch härtere Glas halten.

Die Glasdicke iſt wohl im Allgemeinen gleichgültig, nur verunglücken dicke Röhren beim Auskochen leichter als dünne, ſind aber in manchem Falle, z. B. wenn man die Scale gleich auf die Röhre verzeichnen will, bequemer als die mit dünnen Wänden.

Die Größe der Öffnung wählt man nach der Empfindlichkeit, welche das werdende Inſtrument haben ſoll. Eine weite Röhre gibt immer ein faules Thermometer, weil ſie zu viel Queckſilber enthalten muß, wenn die Grade auch nur eine mäßige Größe bekommen ſollen. An engen Röhren iſt zwar der Stand der Queckſilberſäule ſchwerer zu erkennen; allein ein geübtes Auge weiß ſich auch bei der feinſten Röhre zu Recht zu finden, beſonders wenn man das Inſtrument ſo ſtellt, daß der Hintergrund gegen das Queckſilber ſtark abſticht. Auch kann man recht empfindliche Thermometer bekommen, an denen die Queckſilberſäule ſelbſt für ein ungeübtes Auge leicht erkennbar iſt, wenn man eine Röhre wählt, deren Öffnung einen Cylinder mit ovaler Baſis vorſtellt, und die in einem auf ihre Axe ſenkrechten Querſchnitt ausſieht wie Fig. 29 zeigt. Steht das Auge in der Richtung der kleineren Axe der Öffnung, ſo hat es die Queckſilberſäule nach ihrer breiteren Seite vor ſich, die ſelbſt bei einer ſehr geringen Capacität der Röhre bedeutend ſeyn kann.

Das Röhrenſtück, welches man zu einem Thermometer wählt, muß gerade ſeyn, weil man ſonſt die Scale nach der Röhre krümmen müßte, welches nicht ohne Schwierigkeit geſchehen und der Richtigkeit des Inſtrumentes Abbruch thun könnte.

Am wichtigſten iſt es aber, daß dieſe Röhre allenthalben dieſelbe Weite, d. i. dasſelbe Caliber habe. Röhren, welche von Außen coniſch zulaufen, ſind auch inwendig nicht gleichweit, dieſe erkennt man daher leicht als unbrauchbar; allein ſelbſt ſolche, an denen man von Außen keine Abweichung von der Cylinderform erkennt, haben im Innern nicht immer durchaus dieſelbe Weite.

152. Um zu erkennen, ob eine Röhre inwendig durchaus gleich weit ſey oder nicht, bringt man eine kleine Queckſilberſäule hinein, ſchiebt ſie durch Neigen der Röhre, oder falls dieſe gar eng iſt, durch Aufſtoßen auf eine Unterlage von einem Ende zum anderen, und

mißt von Stelle zu Stelle ihre Länge. Findet man dieſe unveränderlich, ſo iſt die Öffnung der Röhre cylindriſch, wo nicht, ſo hat ſie eine andere Geſtalt. Je länger dieſe Queckſilberſäule iſt, deſto merklicher wird jede kleine Abweichung von der cylindriſchen Geſtalt ihrer Öffnung, allein deſto leichter überſieht man nahe an einander liegende Abwechſelungen im Durchmeſſer, deren es oft ſehr viele gibt. Man ſoll daher, wenn man es recht genau nehmen will, jede Röhre, die man mit einer (2—3 Zoll) langen Queckſilberſäule als cylindriſch befunden hat, noch einmal mit einer kürzeren (etwa 1 Zoll langen) Säule prüfen. Bei dieſer Arbeit kommt es ſehr darauf an, daß man die Queckſilberſäule ohne Saugen in die Röhre bringe; denn durch das Saugen kommt immer etwas Feuchtigkeit hinein, welche die ferneren Arbeiten erſchwert und oft das Inſtrument unbrauchbar macht. Man verfährt am beſten, wenn man die offene Röhre (3—6 Zoll) tief in reines Queckſilber taucht, hierauf das hervorſtehende Ende mit einem Finger ſchließt und ſie herauszieht, in welchem Falle ſie gewiß eine hinreichend lange Queckſilberſäule enthalten wird, die man vor der Calibrirung noch nach Belieben durch Herauslaſſen eines Theiles der Flüſſigkeit bis zur rechten Länge verkürzen kann.

Das Meſſen der Queckſilberſäule an verſchiedenen Stellen der Röhre verrichtet man mit einem Zirkel, oder genauer mittelſt einer feinen ſchwarzen Scale, die auf einem Streifen Papier oder Elfenbein verzeichnet iſt.

153. An die wohl calibrirte Röhre wird nun eine Kugel angeblaſen oder ein Cylinder angeſchmolzen. Die Größe beider richtet ſich nach dem inneren Durchmeſſer der Röhre und nach der Größe der Grade, die das Inſtrument erhalten ſoll. Künſtler, welche viele Thermometer verfertigen, haben ſchon eine hinreichende Fertigkeit, um alle Kugeln nahe gleich dick zu machen, ſie brauchen daher auch nur auf ihre äußere Abmeſſung zu ſehen. Um dieſe von rechter Größe zu bekommen, haben ſie an einem dünnen Bret eine Reihe runder Löcher von verſchiedener Größe, die ſie als Lehre brauchen, indem ſie die Kugel ſo groß machen, daß ſie gerade noch durch eines dieſer Löcher geht, von welchem ſie aus Erfahrung wiſſen, daß es bei einem gewiſſen Durchmeſſer der Röhre Grade von beſtimmter Größe gibt. Man kann dieſe Größe der Kugel auch durch Rechnung beſtimmen. Allein nicht die Rechnung, ſondern die Verfertigung der Kugel, wie ſie die Rechnung gibt, iſt die eigentliche Aufgabe.

Selten nimmt man zu dieſem Mittel die Zuflucht, weil auch ſelten die Größe der Grade ſo genau vorgeſchrieben iſt. Für ſolche Thermometer, die man zur Beſtimmung der mittleren Temperatur einer Flüſſigkeit braucht, welche in verſchiedenen horizontalen Schichten auch verſchiedene Temperaturen hat, oder bei denen die Kugel gar zu groß ausfiele, wählt man ein cylindriſches Gefäß, das von einer dünnen Glasröhre abgeſchnitten und dann an die Thermometerröhre angeſchmolzen wird. Beide Glasſtücke müſſen einerlei Miſchung haben, wenn ſie beim Auskühlen nicht wieder aus einander gehen ſollen. Man muß bei Cylinderthermometern ſtets auf große Empfindlichkeit verzichten, weil der Cylinder ſtets dickere Wände hat, als eine Kugel.

Man mag nun das Thermometer mit einem kugelförmigen oder cylindriſchen Gefäße verſehen, ſo iſt es nöthig, Luft in die Röhre zu treiben, ja eine Kugel wird einzig nur durch Luft aufgetrieben; bei einem Cylinder verhütet man durch Einblaſen von Luft das Zuſammenſinken der Röhre dort, wo der Cylinder daran ſtoßet. In keinem Falle ſoll die Luft mit dem Munde hineingeblaſen werden, weil es ſehr ſchwer hält, die Feuchtigkeit, welche dadurch in die Röhre kommt, wieder zu vertreiben, und eine enge Röhre durch eine kleine Waſſerſäule bald völlig geſperrt wird. Nicht viel beſſer iſt es, jene Künſtler nachzuahmen, die eine Schweinsblaſe am Halſe mit einem Glasrohr verſehen, ſie mit dem Munde aufblaſen, hierauf die Thermometerröhre daran kitten, und durch Drücken der Blaſe Luft in die Röhre treiben, weil auch dieſe ſtets feucht iſt. Am zweckmäßigſten wendet man eine kleine weiche Blaſe aus Cautſchouc an, an deren Hals man eine Glasröhre feſt anbindet, die ſo weit iſt, daß ſie jede Thermometerröhre leicht aufnehmen kann. Gut iſt es, wenn die Röhre am hervorſtehenden Ende eine kleine, trichterförmige Erweiterung hat, wie Fig. 30 zeigt. Eine ſolche Blaſe dehnt ſich nach jedem Druck von ſelbſt wieder völlig aus und ſchöpfet ſo die Luft unmittelbar aus der Atmoſphäre. Wickelt man um die Thermometerröhre, welche die Kugel bekommen ſoll, weiche Papierſtreifen, bis ſie nur ſchwer in die Röhre an der Blaſe geſchoben werden kann, hält hierauf das andere Ende der Röhre in eine gute Stichflamme, ſo erzeugt ein mäßiger Druck auf die Blaſe ſchon eine ziemlich große Kugel. Körner (Anleitung zur Verfertigung übereinſtimmender Thermometer. Jena 1824.) empfiehlt zu demſelben Zwecke eine kleine Spritze, in deren Mündung die Glas-

röhre luftdicht eingekittet wird, und aus welcher man mittelſt des Kolbens Luft in die Röhre treibt. Indeß dürfte ein Künſtler, der an eine ſo ſchwere Vorrichtung nicht gewöhnt iſt, ungerne damit arbeiten, und die viel leichtere Cautſchoucblaſe vorziehen.

154. Nun kommt die Reihe an das Füllen des Thermometers. Dazu muß vor allem reines Queckſilber vorbereitet ſeyn. Als rein kann man es anſehen, wenn es ſich nicht an das Glas anhängt und nach etwa dreimaligem Durchlaufen durch einen engen Trichter aus geleimtem, ſcharf abgeſchnittenen Papier keine Unreinigkeit mehr an demſelben zurückläßt. Reines Queckſilber erhält ſich auch an der Luft lange mit blanker Oberfläche, unreines wird ſehr bald matt und überzieht ſich mit einem Orydhäutchen. Wird es bei dieſer Probe als unrein erkannt, ſo muß es gereiniget werden, bevor man es zum Füllen eines Thermometers braucht. Davon wird im VI. Kapitel mehr geſprochen.

Hat man reines Queckſilber bei der Hand, ſo ſteckt man auf die Thermometerröhre, nachdem ſie am offenen Ende mit etwas Papier umwunden worden iſt, einen reinen gläſernen Trichter, ſchüttet Queckſilber hinein, hält die Kugel über glühende Kohlen oder über eine Weingeiſtflamme (weil dieſe die Kugel nicht berußt), treibt ſo einen Theil Luft heraus, und zieht ſie zurück, damit ein Theil Queckſilber durch den äußeren Luftdruck in die Kugel getrieben werde. Dieſes Queckſilber bringt man durch abermaliges Annähern an die Flamme zum Kochen, damit die Luft gänzlich ausgetrieben und die ganze Kugel, nachdem ſie vom Feuer entfernt worden, mit Queckſilber gefüllt werde. So lange das hineinfallende Queckſilber nicht bis zum letzten Augenblick an das Glas ſchlägt, als wenn Metall an Metall ſtieße, iſt noch eine Luftblaſe in der Kugel, und zwar gewöhnlich am Halſe derſelben; man ſieht ſie aber oft nicht. Wenn dieſes der Fall iſt, muß das Kochen des Queckſilbers erneuert werden. Nicht ſelten geſchieht es, daß die Luftblaſe, die vertrieben werden ſoll, beim Erhitzen des Queckſilbers zwar mit dieſem in den Trichter gelangt, aber es auch wieder beim Zurückkehren begleitet. In dieſem Falle hilft oft eine kleine Erſchütterung, die zur Zeit, wo die Luft im Trichter iſt, an demſelben angebracht wird, oder ein reiner Eiſendraht, den man in den Trichter ſteckt, bevor man die Luftblaſe hinauftreibt und ihn herauszieht, ſobald man glaubt, dieſelbe ſey in ſeiner Nähe. Übrigens hat man beim Geſchäfte des Füllens vorzüglich zwei Puncte zu berückſichtigen,

1) ſoll man es immer an einem warmen Orte vornehmen, damit das in den Trichter hinaufgetriebene Queckſilber nicht ſo ſchnell auskühle und beim Zurückkehren in die Kugel nicht die Röhre durch zu ſchnelles Erkalten in Stücke gehe; 2) ſoll man ſtets ſo viel Queckſilber im Trichter zu erhalten ſuchen, daß nie die letzten Tropfen in die Röhre kommen; denn dieſe befanden ſich an der Oberfläche, wo ſich ſtets etwas Staub anhäuft, und würden denſelben in die Röhre mitnehmen und ſie ſo verunreinigen.

Iſt die Röhre mit Queckſilber gefüllt, ſo ſtellt man ſie zur Seite, ohne den Trichter abzunehmen, damit beim Auskühlen des Queckſilbers immer noch neues von oben nachrücken könne und die Röhre ſelbſt bei der gewöhnlichen Temperatur voll davon ſey.

155. Nach dieſem Verfahren enthält höchſtens nur die Kugel gut gekochtes, ganz luftleeres Queckſilber, das in der Röhre hingegen iſt noch nicht gekocht. Bei ſehr genauen Inſtrumenten ſoll auch dieſes luftleer ſeyn. Um dieſes zu bewirken, faßt man die Kugel oder den Cylinder mit einer hölzernen Zange, hält ſie damit feſt, und bewegt die Röhre über glühenden Kohlen ſo lange hin und her, bis das Queckſilber beinahe die Siedhitze erlangt hat. Dabei wird man finden, daß ſich oft namhafte Luftblaſen zeigen und nach und nach herausgehen. Meiſtens entfernt ſich mit ihnen auch etwas Queckſilber, das man nach der Hand wieder nachfüllen muß, wenn es nothwendig ſeyn ſollte. Wiewohl dieſes nicht gekochtes Queckſilber iſt, ſo iſt doch der Zweck erreicht, weil durch das Erhitzen der Röhre die Luft vertrieben iſt, die ſo ſtark an den Glaswänden haftet.

156. Nach dieſem Geſchäfte wird die Queckſilbermenge beſtimmt, welche das Inſtrument enthalten darf, um noch den höchſten Grad, bis zu dem die Scale reichen ſoll, an demſelben anbringen zu können. Zu dieſem Behufe wird die bereits abgekühlte Röhre wieder zur Hand genommen, der Trichter entfernt und die Kugel oder der Cylinder des Thermometers in eine Temperatur gebracht, welche dem höchſten Punct der Scale dieſes Inſtrumentes entſpricht, und in dieſer ſo lange gelaſſen, bis kein Queckſilber mehr aus der Röhre herausgetrieben wird. Gewöhnliche Thermometer, deren Scale nur bis zum Siedpuncte des Waſſers reicht, werden in ſiedendes Waſſer getaucht. Weil aber nach dieſer Behandlung der höchſte Punct der Scale an das Ende der Röhre zu ſtehen käme, ſo muß man nach der Hand noch einige Queckſilbertropfen durch Erhitzen heraustreiben.

157. Auf dieſe Operation folgt das Luftleermachen und Schließen der Röhre, wenn man übrigens geneigt iſt, ein luftleeres Thermometer zu verfertigen. Zu dieſem Zwecke zieht man die Röhre am offenen Ende in eine ſehr feine Spitze aus, bedient ſich nebſt der zum Erweichen des Glaſes beſtimmten Stichflamme noch einer kleinen Weingeiſtflamme, hält dieſe an das Thermometergefäß, bis das Queckſilber die äußerſte Spitze erreicht hat. In dem Augenblicke, wo dieſes Statt findet, entfernt man die Weingeiſtflamme und fährt mit der Spitze der Röhre in die Stichflamme, die alſogleich die Röhre ſchließt, und, falls man ſie länger darein hält, auch das ganze ausgezogene Röhrchen in eine kleine Kugel zuſammenlaufen macht, wiewohl letzteres leichter mittelſt der Stichflamme bewirkt wird. Man hat bei dieſer Arbeit vorzüglich darauf zu ſehen, daß ja beim Ausziehen der Röhre die Öffnung nicht verloren gehe. Enge Röhren ſchmelzen leicht ganz zu, wenn man ſie ins Feuer bringt, um ſie in eine feine Spitze auszuziehen und werden dann durch die Ausdehnung des Queckſilbers zerriſſen. Man beugt dieſem Übel leicht vor, wenn man die Röhre nicht eher in eine Spitze auszieht, als bis ſie oben geſchloſſen iſt; allein dann muß man nach der Hand von dieſer Spitze ein kleines Stückchen abbrechen, um wieder eine Öffnung zu bekommen.

158. Nun kommt die Reihe an die Beſtimmung des Fundamentalabſtandes oder des Eis- und Siedpunctes. Den Eispunct beſtimmt man entweder mittelſt Eis oder Schnee. Letzterer verdient vor erſterem den Vorzug, iſt aber nicht immer zu haben. Iſt man genöthiget Eis zu wählen, ſo muß man es durch Zerſtoßen der Schneeform näher bringen und dadurch brauchbar machen. Aber ſowohl Schnee als Eis haben nur in dem Zuſtande eine conſtante, mithin zur Beſtimmung des Eispunctes brauchbare Temperatur, wo ſie anfangen zu ſchmelzen, und zwar bis zu dem Zeitpunct, wo ſie mit Waſſer durchzogen ſind. In einem Zimmer, deſſen Temperatur nur 5—6° über dem Eispuncte liegt, braucht es eine geraume Zeit, bis der Schnee oder das Eis die genannte Metamorphoſe erlitten hat und man kann innerhalb derſelben leicht mehrere Thermometer beſtimmen; bei einer höheren Temperatur geht dieſes ſchneller vor ſich. Die Natur des Gefäßes, die Eis- oder Schneemaſſe, der Barometerſtand, die Temperatur des Arbeitsortes haben auf den Eispunct keinen Einfluß. Bei der Beſtimmung des Eispunctes hängt man nun das Thermometer in Schnee oder Eis und läßt es

ſo lange darin, bis ſich die Queckſilberſäule nicht mehr ändert und der Schnee die zur beabſichtigten Wirkung geeignete Beſchaffenheit hat. Sobald ſeine Schmelzung bis zur Thermometerkugel vorgerückt iſt, welches man am leichteſten aus dem Durchſcheinendwerden der Eiskörner in der Nähe derſelben erkennt, muß die Beobachtung eingeſtellt werden.

159. Bei der Beſtimmung des Siedpunctes hat man alle Umſtände zu berückſichtigen, die auf ihn Einfluß haben, nämlich die Reinheit des Waſſers, den Luftdruck, die Natur des Gefäßes und die Tiefe der ſiedenden Waſſerſchichte unter der Oberfläche, wo ſich die Kugel befindet. Ich bediene mich mit Vortheil eines Gefäßes von der Geſtalt (Fig. 31). *A* iſt ein blecherner Tiegel, *B* eine Röhre, die mit der Axe des Tiegels einen etwas ſtumpfen Winkel bildet. Füllt man, nachdem das Thermometer in *A* mit der Kugel und in *B* mit der Röhre gelegt, und in letzterer mittelſt eines Korkſtoppels C luftdicht befeſtiget worden iſt, ſo viel deſtillirtes Waſſer nach *A*, daß etwas mehr als die halbe Kugel des Thermometers darein getaucht iſt, ſo iſt alles am rechten Platze, indem immer ungefähr die eine Hälfte der Kugel im kochenden Waſſer, die andere in Waſſerdampf getaucht iſt, ſie mag groß oder klein ſeyn, und der ganze übrige Theil der Röhre, beinahe ſo weit das Queckſilber reicht, von Dämpfen umgeben iſt, die erſt gegen das Ende der Röhre *B* durch einen verticalen, röhrenförmigen Anſatz ihren Ausgang finden. Übrigens darf man nicht glauben, daß man durch eine einzige Beobachtung die Lage des Siedpunctes ſcharf genug findet, ſondern es iſt dazu eine Reihe ſolcher ſchnell hinter einander folgender Beobachtungen nöthig, aus denen, wenn ſie eine Verſchiedenheit im Reſultate geben, das Mittel genommen werden muß. Man braucht dasſelbe Gefäß, womit man den Siedpunct beſtimmt, auch mit Vortheil zur Beſtimmung des Eispunctes und hat da nicht zu beſorgen, daß er zu hoch zu ſtehen komme, wie es bei dem gewöhnlichen Verfahren geſchieht, wo ſtets ein Theil der Queckſilberſäule ſich außerhalb der Eiſes befindet und daher eine zu hohe Temperatur hat. Es iſt klar, daß man, falls obiges Gefäß auch zu dieſem Zwecke gebraucht wird, nicht blos den Tiegel *A*, ſondern auch die Röhre *B* mit klein zerſtoßenem Eis anfüllen muß.

Man thut übrigens gut, wenn man zuerſt den Siedpunct und hierauf aber ſogleich den Eispunct beſtimmt und jeden vorläufig mit etwas Tuſch oder mit in Weingeiſt aufgelöſtem Siegellack an-

merkt. Die Bezeichnung mittelſt eines feinen Fadens, wie ſie gewöhnlich zu geſchehen pflegt, iſt nicht anzurathen, theils weil der Faden leicht verſchoben wird, theils weil er bei dem Hin- und Herſchieben, das er erleiden muß, bis er an den rechten Platz kommt, leicht eine gegen die Axe der Röhre ſchiefe Lage erhält und daher Irrthum veranlaßt, theils weil er wegen ſeiner ſelten ganz gleichförmigen Dicke keine ſcharfe Beſtimmung eines Punctes geſtattet. Manche Künſtler merken die Fundamentalpuncte mittelſt eines Feilſtriches an. Allein ſo ſehr man auch dadurch gegen eine etwaige Verrückung geſichert iſt, ſo iſt dieſe Methode doch bei Thermometern nicht anzurathen, die einem ſtarken Wechſel der Temperatur ſchnell ausgeſetzt werden müſſen, weil ſie an den ſo bezeichneten Stellen gar leicht abſpringen. Bei Inſtrumenten, welche zu ſehr genauen Unterſuchungen tauglich ſeyn ſollen, geben aber alle dieſe Mittel keine hinreichende Genauigkeit. Da iſt es unerläßlich an der Thermometerröhre, eine in ſehr kleine, übrigens in beliebige Theile abgetheilte Silberſcale vorläufig zu befeſtigen und an ihr den Stand des Queckſilbers ſowohl bei der Beſtimmung des Sied- als des Eispunctes abzuleſen.

160. Man hat in neuerer Zeit vielfach den Punct beſprochen, ob ein luftleeres Thermometer nicht durch den äußeren Luftdruck eine Änderung der inneren Capacität erleide, wodurch die Fundamentalpuncte verrückt und die Anzeige ſolcher Inſtrumente unrichtig würden. Bellani hat zuerſt gefunden, daß der möglichſt genau beſtimmte Eispunct nach etwa einem Jahre dem Siedpuncte näher gerückt erſcheine, und glaubte die Urſache dieſer Erſcheinung in der gewaltſamen Ausdehnung des Glaſes zu finden, die es beim Füllen des Thermometers erleidet, welche Ausdehnung ſich erſt nach Langem wieder verliert und das natürliche Volumen zurückkehren läßt. Flaugerques fand aber, daß nur luftleere und geſchloſſene Inſtrumente dieſer Veränderung unterliegen, woraus zugleich folgt, daß Bellani's Anſicht irrig ſey. Mehrere deutſche und franzöſiſche Phyſiker, wie Yelin, Marcet und La Rive haben daſſelbe gefunden. Neueſtens hat R. von Bürg an den von ihm ſelbſt mit beſonderer Sorgfalt verfertigten, ungemein empfindlichen Thermometern die Eispuncte, welche vor 10—12 Jahren beſtimmt worden waren, unterſucht, und ſie ohne Ausnahme um $\frac{1}{4}°$—$\frac{1}{3}°$ Réaumur zu hoch gefunden, bis auf ein Inſtrument, das nicht luftleer war, an welchem auch der Eispunct am rechten Platze ſich be-

fand. (Zeitſch. 3. 18.) Die Urſache dieſer Verrückung des Eispunctes liegt alſo ohne Zweifel darin, daß durch den äußeren Luftdruck die Capacität der Kugel vermindert wird. Anfangs wirkt dieſem die Elaſticität des Glaſes entgegen, allein mit der Zeit vermindert ſich dieſe Kraft und die Wirkung des Luftdruckes tritt ſichtbar ein. Darum ſoll man genaue Thermometer entweder gar nicht luftleer machen, oder ihren Eispunct von Zeit zu Zeit wieder beſtimmen. Da ſich in offenen Thermometern das Queckſilber leicht oxydirt, oder von Staub verunreiniget wird, ja ein ſolches bei weitem nicht ſo leicht ohne Schaden transportirt werden kann, als ein geſchloſſenes; ſo iſt es immer räthlicher, das zweite Mittel zu wählen, und es insbeſondere vor jeder genauen Unterſuchung, die man mittelſt des Thermometers anſtellen will, anzuwenden. Egen hat bei einer ſehr genauen Unterſuchung über Thermometer noch eine andere Verrückung des Eispunctes entdeckt, welche eintritt, ſo oft man das Inſtrument ſtark erhitzt und die in einer Depreſſion des Eispunctes beſteht, mithin bei der Beſtimmung des Siedpunctes ſtets eintritt. Dieſe Verrückung iſt bei verſchiedenen Inſtrumenten und einerlei Erhitzung verſchieden, ſie betrug bei Egen's Verſuchen im Maximo 0°.203, im Minimo 0°.007. Oftmaliges, ſchnell hinter einander erfolgendes Erhitzen wirkt auch ſtärker als einmaliges, jedoch beträgt die Verrückung bei jeder folgenden Erhitzung immer weniger. Längere oder kürzere Dauer der Erwärmung macht keinen Unterſchied in dieſer Wirkung, bei langſamen Erkalten iſt die Verrückung des Eispunctes ſehr gering. Auf dieſe Verrückung muß man bei der Beſtimmung des Siedpunctes ſtets Rückſicht nehmen.

161. Sind die Fundamentalpuncte eines Thermometers richtig beſtimmt, ſo kommt die Reihe an die Verfertigung und Theilung der Scale. Zur letzteren Arbeit bedient man ſich meiſtens einer Theilmaſchine. Wiewohl es deren ſehr viele gibt, ſo dürfte wohl doch keine bequemer ſeyn, und ſchneller eine ſo richtige Abtheilung bewirken, als die in Fig. 32 abgebildete. *AB* iſt ein 2 Fuß langes, 2 Zoll breites und etwa $\frac{1}{2}$ Zoll dickes vierkantiges Bret, wie ein Lineal, das zu beiden Seiten links und rechts Meſſingplatten hat. Auf einer Seite befinden ſich Schrauben *a* und *b*, um ein meſſingenes Lineal, das eine in beliebige, aber gleich große Theile getheilte Scale trägt, und das man auf *AB* legt und an den hervorſtehenden Rand *cd* anſtemmt, feſtklemmen zu können. Die genannte Scale iſt gleichſam der Etalon, nach welchem alle anderen getheilt

werden, und es iſt gut, deren mehrere mit größeren und kleineren Abtheilungen in Bereitſchaft zu haben. In *B* iſt *AB* mittelſt einer Charniere mit einem anderen Lineale *BC* verbunden. Der Winkel *ABC* läßt ſich vergrößern und verkleinern und in jeder Größe mittelſt des Bogens *D* unverändert erhalten, welcher Bogen mit *AB* feſt vereiniget iſt, auf dem *BC* ſich verſchieben läßt und der mittelſt einer an der unteren Seite von *BC* angebrachten Stellſchraube befeſtiget werden kann. Beide Lineale ruhen auf 3 etwa 2 Z. hohen Füßchen. Außer den bereits genannten Stücken gehört zu dieſem Theilapparate auch noch eine Art Winkelhaken *EFG* mit veränderlichem Winkel. Der Schenkel *EF* hat an der unteren Fläche der Länge nach einen Einſchnitt, in welchen der hervorragende Rand *cd* des Stückes *AB* genau paßt, und in welchem *EF* längs *AB* verſchoben werden kann, ohne eine Seitenbewegung annehmen zu können, dann ein hervorſtehendes Plättchen *H* mit einer feinen auf *EF* ſenkrechten Linie. Das Lineal *G* muß wenigſtens 30 Z. lang ſeyn, es ragt daher weit über *BC* hinaus, wenn *EF* auf *cd* gelegt iſt. Damit es ſich nicht biege, hat es am Ende einen kleinen Fuß mit einer leicht beweglichen Frictionsrolle.

162. Will man nun mit dieſem Inſtrumente eine Thermometerſcale theilen, ſo befeſtige man das Scalen-Material mit bezeichneten Fundamentalpuncten auf *BC*, lege *EF* auf *AB* ſo, daß die Fuge auf den Rand *cd* paſſet, und ändere den Winkel, welchen *IG* mit *CF* macht, ſo, daß *IG* auf *CB* ſenkrecht ſteht, verſchiebe *CF*, bis *IG* dem einen Fundamentalpunct der Scale entſpricht, lege eine Hilfsſcale auf *AB* ſo, daß ihr oter Theilſtrich mit der Linie *H* zuſammenfällt, und klemme ſie dann mittelſt der Schrauben *ab* feſt. Hierauf verſchiebe man *EF*, bis *IG* den zweiten Fundamentalpunct abſchneidet, und ſehe, welcher Punct der Hilfsſcale der Linie *H* entſpricht. Trifft es ſich, daß dieſes gerade der 80ſte, oder 100ſte oder *m*te Theilſtrich iſt, ſo iſt alles in Ordnung, falls man den Fundamentalabſtand in 80, 100 oder *m* Theile theilen will. Man braucht dann nur *EF* um ſo viel weiter zu rücken, daß *H* von Theilſtrich zu Theilſtrich geht, und bei jedem Stande, wo *H* einem Striche der Hilfsſcale entſpricht, mittelſt eines Inſtrumentes auf der abzutheilenden Scale längs *IG* einen Theilſtrich zu ziehen. Findet aber obige Übereinſtimmung nicht Statt, ſo muß man den Winkel *ABC* ſo lange ändern und immer wieder *IG* ſenkrecht auf *CB* ſtellen, bis ſie erreicht iſt. Ein etwas geübter Künſt-

ler vollendet dieſe Arbeit nebſt der Theilung bei einem gewöhnlichen Thermometer in weniger als einer Stunde.

163. Das hier angegebene Verfahren ſetzt voraus, daß der Siedpunct durch eine Reihe von Beobachtungen beſtimmt worden iſt, bei denen der Normalluftdruck Statt gefunden hat, als welchen man am zweckmäßigſten nach Egens Vorſchlag und der Beiſtimmung mehrerer achtbarer Gelehrten 0.76 Meter nimmt. Herrſcht bei der Beſtimmung dieſes Punctes ein anderer Luftdruck, ſo muß man den Fundamentalabſtand vor der wirklichen Theilung corrigiren. Bei Thermometern, die keine beſondere Genauigkeit haben dürfen, geſchieht dieſes dadurch, daß man den Fundamentalabſtand für jeden Millimeter, um welchen das Barometer über 0.76 *M* ſteht, um 0.000352 vermindert, oder wenn er ſich darunter befindet, vermehrt. Soll eine große Schärfe erlangt werden, ſo muß man bei jedem Thermometer die Verrückung des Siedpunctes, die eine beſtimmte Änderung des Luftdruckes erzeugt, dadurch beſtimmen, daß man die Lage des Siedpunctes durch mehrere bei verſchiedenem Luftdrucke Statt habende Beobachtungsreihen ausmittelt. Hat man dieſe Veränderung gefunden, ſo kann man die deßhalb nothwendige Correction des Fundamentalabſtandes mit derſelben Theilmaſchine anbringen, von welcher vorhin die Rede war. Man verfährt nämlich mit dem unmittelbar gefundenen Fundamentalabſtande ſo, als wollte man ihn in 100 gleiche Theile theilen, und findet ſo $\frac{1}{100}$ desſelben. Dieſe Größe theilt man mittelſt des Augenmaßes oder mittelſt eines Zirkels leicht in ſo viele Theile, als die Correction fordert, und beſtimmt ſo das Stück dieſes Abſtandes, um das er vergrößert oder verkleinert werden muß. Hat man den corrigirten Siedpunct gefunden, ſo beginnt man das Geſchäft der Theilung von Neuem, wie vorhin gelehrt wurde.

Wie die Scale weiter ausgefertiget und mit dem Inſtrumente zu einem Ganzen verbunden wird, ſieht ohnehin Jedermann leicht ein. Es iſt darum gar nicht nöthig, mehr darüber zu ſagen.

164. Die bisher beſprochene Weiſe, Thermometer zu verfertigen, ſetzt Röhren voraus, welche der ganzen Länge nach gleich weit ſind; man iſt aber manchmal gezwungen, ungleich weite Röhren zu Thermometern zu verwenden, und muß deßhalb einige Puncte im bisher angegebenen Verfahren abändern und ſich einer ziemlich mühſamen Arbeit unterziehen, für die man aber dadurch reichlich belohnt wird, daß man beſonders gute Inſtrumente erhält. Dieſe

Arbeit beſteht in der Beſtimmung der Länge ſolcher Röhrenſtücke, die bei ungleicher Weite doch ein gleiches inneres Volumen haben, und wird nach der von Gay-Luſſac zuerſt angegebenen, von Körner vereinfachten Methode folgender Maßen vollzogen:

Man verfertige ſich einen Maßſtab *AB* (Fig. 33), der in beliebige aber gleich große Theile getheilt iſt und einen Nonius hat, der noch Theile von etwa $\frac{1}{1000}$ Z. genau mißt, befeſtige ihn an ein Bret und bringe daneben die Glasröhre *CD* an, deren innerer Raum in Theile von gleichem Inhalte getheilt werden ſoll. An dieſe Röhre wird eine kleine Pumpe *E* luftdicht befeſtiget, die mit einem Wechſelhahne *C* verſehen iſt. Man bringe durch Zurückziehen des Kolbens der Pumpe eine Queckſilberſäule *ab* in die Röhre, deren Länge ſo gering iſt, daß man ſie für cylindriſch halten kann, bezeichne das Ende *a* derſelben mit einem feinen Feilenſtriche oder auf irgend eine andere Weiſe, meſſe *ab* ſehr genau mittelſt des Nonius und verzeichne dieſe Länge in einem eigenen Regiſter. Hierauf ziehe man den Pumpenkolben von Neuem zurück, damit die Queckſilberſäule genau um ihre ganze Länge fortrücke und der Punct *a* nach *b* falle. Geſetzt, ſie habe hier die Länge *bc*, die von *ab* verſchieden ſeyn kann. Man meſſe nun *bc*, notire den gefundenen Werth, verſchiebe den Pumpenkolben von Neuem, damit das Queckſilber von *bc* in die Lage *cd* verſetzt werde, meſſe *cd* wieder und fahre ſo fort, bis die Säule durch ein Röhrenſtück getrieben worden iſt, deſſen Länge dem zu verfertigenden Thermometer gleich iſt. Kommt man in der Zwiſchenzeit mit dem Kolben ans Ende, ſo dreht man den Wechſelhahn, damit die in der Pumpe enthaltene Luft mit der äußeren communicire, drückt den Kolben hinab, damit die Luft ausgetrieben werde, und ſtellt wieder die erſte Communication her. Iſt dieſe Operation durch die ganze Röhre vollzogen, ſo bläſt man die Kugel an die Röhre ſo, daß *a* nahe an ihr lieget, füllet ſie ꝛc., beſtimmt den Eis- und Siedpunct und merkt jeden derſelben an der Röhre an. Hierauf zeichnet man eine Scale genau ſo, daß ihre Theilſtriche mit den früher an der Röhre beſtimmten Puncten *a*, *b*, *c*, *d* ꝛc. zuſammenfallen, bezeichnet *a* mit 0, die folgenden aber mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ꝛc., ohne auf den Eis- oder Siedpunct Rückſicht zu nehmen, und bringt dieſe Scale an der Röhre gehörig an. Kommen die Theilſtriche weit genug von einander zu ſtehen, ſo kann man jeden Grad in mehrere gleiche Theile theilen, und allenfalls jeden ſolchen Theil als Ganzes gelten laſſen,

ſo daß, wenn z. B. ab in 5 Theile getheilt würde, zu b die Zahl 5 zu ſtehen käme.

Man ſieht leicht ein, daß man auf dieſe Weiſe den Fundamentalabſtand nicht nach einer der bekannten Scalen abgetheilt erhält, ſondern daß dieſes eine ganz beſondere Scale iſt, die man erſt auf die Celſiſche, Réaumur'ſche ꝛc. reduciren muß. Die Reduction wird wie jede andere vollzogen. Man ſieht nämlich, wie viele Grade der künſtlichen Scale zwiſchen den Eis- und Siedpunct fallen, wobei natürlich auch Bruchtheile von Graden vorkommen können, und vergleicht ſie mit der Anzahl Grade, die von einer der gewöhnlichen Scalen in den Fundamentalabſtand fallen. Hat man z. B. an der künſtlichen Scale zwiſchen dem Eis- und Siedpuncte N Grade, ſo entſprechen n ſolche Grade $\frac{100\,n}{N}$ der Celſiſchen Scale.

Es iſt klar, daß man ſich die Grade ſolcher Scalen ein für allemal berechnen und wohl auch die Scale ſo bezeichnen kann, daß keine weitere Reduction mehr nöthig iſt. Ich kürze mir dieſe ganze Arbeit bedeutend ab, indem ich ſtatt des vorher erwähnten Körner'ſchen Apparates den (38) beſchriebenen Comparator anwende, wobei die an deſſen Nonius angebrachte Loupe beſonders gute Dienſte leiſtet.

Bringt man längs des Maßſtabes die Röhre mit der Pumpe an, und neben dieſer die zur Scale beſtimmte Meſſingſchiene oder den Papierſtreifen, ſo kann man alſogleich, ſo wie der Faden der Loupe dem Endpuncte der Queckſilberſäule entſpricht, mit dem Reißer auf der Schiene oder dem Papier eine Linie ziehen, und ſo unter einem die Scale verzeichnen, ohne die Länge der Queckſilberſäule an verſchiedenen Stellen am Maßſtabe abzuleſen.

165. Bei ſehr delicaten Wärmemeſſungen an Flüſſigkeiten thun enge Cylinder aus dünnem Glaſe ſehr gute Dienſte, die an einem Ende zugeſchmolzen, am anderen aber in eine enge lange, am beſten abwärts gebogene Spitze ausgezogen ſind. Wägt man einen ſolchen Cylinder, wenn er leer iſt, füllt ihn dann bei 0° C mit reinem Queckſilber und wägt ihn wieder, ſo weiß man aus dem Gewichtsunterſchiede die Menge dieſer Flüſſigkeit, welche er bei der genannten Temperatur faßt. Soll nun eine Flüſſigkeit unterſucht werden, deren Temperatur höher iſt, als die dieſes Cylinders und des darin enthaltenen Queckſilbers (0° C), ſo ſenkt man ihn in dieſelbe und läßt ihn ſo lange darin, bis kein Queckſilber mehr heraus

getrieben wird, und wägt hierauf den Cylinder mit dem Queckſilber. Iſt die zu prüfende Temperatur minder als die des Queckſilbers im Cylinder, ſo ſenkt man letzteren auch in die Flüſſigkeit, um deren Temperatur es ſich handelt, taucht aber zugleich die Spitze des Cylinders in Queckſilber, läßt es ſo, bis ſich die Temperaturen ausgeglichen haben, und wägt hierauf den vollen Cylinder abermals. Zieht man in beiden Fällen von dieſem Gewichte das des leeren Glaſes ab, ſo weiß man das Gewicht des Queckſilbers, das der Cylinder bei der Temperatur faßte, welcher er ausgeſetzt war, und daraus läßt ſich dieſe Temperatur annäherungsweiſe ſehr leicht berechnen nach der Formel

$$\frac{p_o - p_t}{p_t \beta - p_o c} = t$$

wo t die verlangte Temperatur nach Celſius bezeichnet, $\beta = \frac{1}{5550}$ $= 0{,}00018$, c die kubiſche Ausdehnung des Glaſes, meiſtens $= 0.00002673$, p_o das Gewicht des Queckſilbers bei 0° C und p_t dasſelbe bei t° C. Der Grund, aus dem dieſe Formel abgeleitet wurde, iſt aus 137 klar.

2. Weingeiſtthermometer.

166. Bei der Verfertigung der Weingeiſtthermometer wird im Allgemeinen ſo verfahren wie bei Queckſilberthermometern; nur in Wenigem weichen beide Verfahren von einander ab. Schon bei der Auswahl der Röhren muß man wiſſen, daß ſich Weingeiſt bei demſelben Temperaturwechſel ſtärker ausdehnt als Queckſilber, und daß daher für dieſelbe Empfindlichkeit weitere Röhren gebraucht werden können, ohne ihnen größere Gefäße geben zu dürfen. Ferner muß der Weingeiſt, der ſtets hinreichend concentrirt ſeyn ſoll, gefärbt werden, damit man ſeinen Stand deſto leichter wahrnehmen kann. Am dauerhafteſten geſchieht dieſes mit Safran, wiewohl man dadurch keine beſonders ſchöne Farbe zu Stande bringt. Die Färbung mit Ochſenzunge iſt nicht zu empfehlen, weil dieſe Farbe im Sonnenlicht ſchwarz wird. Für jeden Fall iſt es nothwendig, darauf zu ſehen, daß man nicht friſch gefärbten Weingeiſt wählt, weil dieſer meiſtens noch etwas in der Kugel oder Röhre abſetzt.

Das Füllen mit Weingeiſt geht leichter vor ſich, als das mit Queckſilber, allein wenn man die Röhre luftleer gemacht hat, ſo ſteigen oft lange Zeit hindurch noch aus dem Weingeiſte Blaſen auf,

die entfernt werden ſollen. Darum muß man manchmal die Röhre wieder öffnen, und ſie von Neuem luftleer machen.

Bei der Beſtimmung des Eispunctes muß man recht wohl darauf ſehen, daß man ihn nicht zu tief anmerke. Dieſes geſchieht gar leicht, wenn man zur Beſtimmung desſelben ſchreitet, ohne zuvor das Thermometer in einer dem Eispuncte nahen Temperatur in aufrechter Stellung einige Stunden ſtehen zu laſſen. Vernachläſſiget man nämlich letztere Vorſicht und tauchet die Röhre ſchnell in Eis, ſo bleibt hinter der ſinkenden Weingeiſtſäule etwas Flüſſigkeit an der Röhrenwand hängen, und fehlt dann an der Länge der Säule. Ein luftleeres Weingeiſtthermometer erträgt oft die Siedhitze des Waſſers, weil ſich im luftleeren Raum oberhalb des Weingeiſtes Dünſte erzeugen, die durch ihren Druck den Siedpunct des Weingeiſtes erhöhen.

167. Ein Weingeiſtthermometer kann nur an den zwei unmittelbar beſtimmten Puncten mit einem Queckſilberthermometer übereinſtimmen, in den anderen Theilen der Scale weichen beide von einander ab, weil ſich nicht beide Flüſſigkeiten nach demſelben Geſetze ausdehnen. Wildt, de Luc, Luz ꝛc. haben dieſe beiden Inſtrumente mit einander verglichen und die Reſultate gefunden, welche die nachfolgende Tabelle enthält.

Grade des Queckſilbertherm.	Übereinſtimmende Grade des Weingeiſttherm.			Grade des Queckſilbertherm.	Übereinſtimmende Grade des Weingeiſttherm.		
	nach Wildt	nach de Luc	nach Luz		nach Wildt	nach de Luc	nach Luz
80	80.00	—	80.00	15	12.14	12.20	12.20
75	73.90	73.80	73.80	10	7.95	7.90	7.90
70	67.95	67.80	67.80	5	3.90	3.90	3.90
65	62.14	61.90	61.90	0	0.00	0.00	0.00
60	56.48	56.20	56.10	— 5	3.75	—	3.9
55	50.97	50.70	50.40	10	7.36	—	7.6
50	45.60	45.30	44.90	15	10.82	—	11.2
45	40.38	40.20	39.60	20	14.13	—	14.5
40	35.31	35.10	34.70	25	17.30	—	—
35	30.38	30.30	29.90	30	20.32	—	—
30	25.60	25.60	25.30	35	23.19	—	—
25	20.97	21.00	20.90	40	25.92	—	—
20	16.48	16.50	16.50	45	28.50	—	—

Nach dieſem Reſultate iſt die am Ende enthaltene Reductionstabelle V. d. berechnet.

3. Maximum- und Minimum- Thermometer.

168. Es iſt in vielen Fällen nothwendig, die größte und kleinſte Temperatur zu kennen, welche innerhalb einer gewiſſen Zeit eintritt. Zu dieſem Zwecke hat man eigene Inſtrumente, die entweder ſowohl das Maximum als das Minimum oder nur eines der beiden angeben.

169. Zur Beſtimmung des Minimum und Maximum hat Gay-Luſſac ein Inſtrument angegeben, das in Fig. 34 abgebildet iſt. Es beſteht aus einer dünnen Glaskugel *A*, deren Hals bis auf eine ſehr kleine Öffnung geſchloſſen iſt; auf dieſe Kugel iſt eine Glasröhre *B* aufgekittet. Die ganze Kugel iſt mit Waſſer oder Alkohol bei einer beſtimmten Temperatur, z. B. bei 0° C ganz angefüllt, die Röhre *B* hingegen enthält Queckſilber. So wie die Temperatur ſinkt, entſteht in der Kugel ein leerer Raum, und der äußere Luftdruck preßt ſo viel Queckſilber hinein, als nöthig iſt, dieſe Leere auszufüllen. Aus der Menge dieſes Queckſilbers erkennt man die mindeſte Temperatur, welche ſeit der letzten Beobachtung Statt gefunden hat. Zur genauen Beſtimmung derſelben ſucht man das in der Kugel befindliche Queckſilber wieder herauszubringen und deſſen Volumen zu meſſen. Zu dieſem Ende kehrt man die Kugel um, ſo daß das Queckſilber auf die kleine Öffnung im Halſe derſelben zu liegen kömmt, und erwärmt ſie mit der Hand. Die dadurch bewirkte Ausdehnung der Flüſſigkeit treibt das Queckſilber heraus. Gießt man es in eine eigens dazu beſtimmte, graduirte Glasröhre, ſo erkennt man aus deſſen Volumen bei einer beſtimmten Temperatur das Minimum, dem der Glasballon ausgeſetzt war.

Steigt die Temperatur, ſtatt zu ſinken, ſo kommt ein Theil des im Ballon enthaltenen Waſſers oder Weingeiſtes in die Röhre *B*. Um das Maximum der Temperatur zu erkennen, braucht man hierauf nur den Ballon in jene Temperatur zu verſetzen, in welcher die Kugel ganz mit der Flüſſigkeit erfüllt war, und die Queckſilbermenge zu beſtimmen, welche da in die Kugel getrieben wird.

170. Ein anderes in ſeinem Gebrauche viel einfacheres Inſtrument zu demſelben Zwecke hat Rutherford angegeben. Es beſteht aus zwei an derſelben Faſſung befeſtigten horizontal liegenden Thermometern *a* und *b* (Fig. 35), deren eines Queckſilber, das andere

Weingeiſt enthält. In der Röhre des Queckſilberthermometers befindet ſich ein kleiner Cylinder von Eiſen oder Stahl, der ſich ohne merkliche Reibung in derſelben bewegen kann. Dieſen treibt die Queckſilberſäule vor ſich hin und läßt ihn an dem höchſten Puncte der Scale liegen, zeigt demnach das Maximum der Temperatur an. In der Röhre des Weingeiſtthermometers hingegen iſt ein ſolcher Cylinder aus Glas oder Email angebracht, der im Weingeiſt ganz eingetaucht, ſchwimmt. Zieht ſich der Weingeiſt zuſammen, ſo nimmt er dieſen Zeiger mit ſich fort, weil dieſer die Oberfläche der flüſſigen Säule als nicht ſo beweglich in ihren Theilen gleichſam nicht durchbohren kann; ſo wie aber die Weingeiſtſäule ſich verlängert, geht die Flüſſigkeit an den Seiten des Cylinders vorbei und er bleibt an der Stelle, an welcher er ſich beim tiefſten Stande dieſer Säule befand. Dieſer zeigt demnach das Minimum der Temperatur an. Es iſt gut, jedes der zwei Glasröhren, welche zur Conſtruction dieſes Inſtrumentes gebraucht werden, in der Nähe der Kugel etwas zuſammenzuziehen, damit die Marke nicht in die Kugel gelangen kann. Die Stahlmarke ſoll überdieß an der dem Queckſilber zugewendeten Seite ſpitzig zulaufen, damit ſie, wenn ſie etwa durch einen Stoß zu tief in das Queckſilber eingeſunken iſt, leichter wieder herausgebracht werden kann. Übrigens muß man ſich wohl hüten, dieſe Marke hoch und ſchnell auf das Queckſilber fallen zu laſſen, um dieſes Verſinken zu vermeiden.

171. Es iſt weſentlich, daß dieſes Inſtrument einen nahe horizontalen Stand habe, bei einem verticalen hört es auf, das Maximum und Minimum anzuzeigen. Dieſen Umſtand hat Blackadder benützt, um mittelſt dieſes Inſtrumentes die Temperatur zu jeder Stunde, ſelbſt in Abweſenheit des Beobachters, zu erkennen. Wird das Weingeiſtthermometer umgekehrt aufgeſtellt, ſo bleibt die Glasmarke in der Flüſſigkeit ſchwebend und folgt dieſer beim Steigen und Sinken; wird es in eine horizontale Lage gebracht, ſo bleibt die Marke an der Stelle liegen, die ſie im Augenblicke des Umſchlagens einnahm, falls die Weingeiſtſäule nicht weiter ſinkt; in dieſem Falle allein würde nach dem Vorhergehenden die Marke auch ihren Platz ändern. Es muß daher das Sinken des Thermometers nach dem Umſchlagen verhütet werden. Dieſem gemäß ſtellt Blackadder das umgekehrte Weingeiſtthermometer über einem Kaſten auf, in welchem die Luft mittelſt einer Lampe fortwährend wärmer erhalten wird, als die äußere Luft. Nimmt

das Thermometer zu einer beſtimmten Stunde einen horizontalen Stand an, ſo geräth deſſen Kugel in die erwärmte Luft des Kaſtens, jedes Sinken der Temperatur hört auf, und der Glascylinder bleibt an der Stelle, die er im Augenblicke des Umſchlagens einnahm.

Es iſt wohl kaum nöthig zu erinnern, daß ein ſolches Thermometer nach jeder Beobachtung nach der Seite der Queckſilberkugel geneigt werden muß, damit beide Marken an die Oberfläche ihrer Flüſſigkeit gelangen. Sind beide Thermometer auf einem Brete befeſtiget, ſo müſſen die Kugeln derſelben nach entgegengeſetzten Richtungen ſtehen, damit man beide Marken durch eine Neigung zugleich an den gehörigen Platz bringe, und nicht während der Regulirung der einen die andere wieder verſchoben werde.

172. Ein anderes Inſtrument zur Beſtimmung der Wärmeextreme hat Six angegeben und Bellani hat es verbeſſert. Es iſt in Fig. 36 vorgeſtellt und beſteht aus einer dreiſchenkeligen Glasröhre *abe*, die an beiden Enden in ein weiteres Gefäß *c* und *d* übergeht. Das Gefäß *c* iſt mit Weingeiſt gefüllt, die Röhre *aeb* enthält Queckſilber und das Stück über *e* nebſt einem Theil des Gefäßes *d* wieder Weingeiſt. Über der Queckſilberſäule befinden ſich kleine eiſerne Marken, die mit einem Haare umwickelt ſind, welches eine Art Feder bildet, mittelſt der ſich jede Marke an die Glaswände anſtemmt, und zwar vom Queckſilber gehoben werden kann, aber nicht von ſelbſt zu ſinken im Stande iſt. So wie die Temperatur ſteigt, ſinkt vermöge der ſtärkeren Ausdehnung des Weingeiſtes in *c* die Queckſilberſäule in *a* und hebt ſich in *e*, letztere nimmt die Marke mit ſich und läßt ſie an der höchſten Stelle ſtehen. Sinkt aber die Temperatur, ſo ſteigt das Queckſilber in *a*, hebt die Marke und läßt ſie wieder am höchſten Punct, den ſie erreicht hat, beim Sinken zurück. Demnach zeigt die Marke in *e* das Maximum, die in *a* das Minimum der Temperatur. Mittelſt eines Magnetes kann man nach jeder Beobachtung die Marken wieder auf die Oberfläche des Queckſilbers zurückführen.

Wie ein Metallthermometer zum Anzeigen des Maximum und Minimum eingerichtet wird, iſt in meiner Naturlehre geſagt worden.

B. Prüfung und Berichtigung eines Thermometers.

173. Ein Thermometer, in welchem die Queckſilberſäule durch Luftblaſen getrennt iſt, oder welches in der Kugel eine Luftblaſe enthält, iſt verwerflich; denn ſolche Luftblaſen verbleiben nicht im-

mer an einem und demſelben Orte, ſondern begeben ſich oft, beſonders beim Umkehren oder Neigen des Inſtrumentes, in den Raum ober der thermometriſchen Flüſſigkeit. Wenn daher auch die Ausdehnung der Luft bei der Beſtimmung der Fundamentalpuncte mitgewirkt hat und demnach das Thermometer von dieſer Seite nicht unrichtig wäre, ſo hört doch dieſes auf, wenn ſie den Raum über dem Queckſilber einnimmt. In dieſem Raume ſoll ſich überhaupt ſo wenig als möglich Luft befinden, wenn das Inſtrument oben geſchloſſen iſt. Man pflegt darum auch ein Thermometer zu neigen und umzukehren, um zu ſehen, ob die Queckſilberſäule bis nahe an das Ende der Röhre hinabſinkt. Geſchieht dieſes, ſo kann man ſicher ſeyn, daß ſich ober dem Queckſilber keine Luft befindet, es müßte nur die Röhre gar eng ſeyn, denn in dieſem Falle ſinkt ſelbſt in luftleeren Inſtrumenten das Queckſilber nicht ganz hinab und kann höchſtens durch mehrere Stöße dahin gebracht werden. Bei dieſem Umkehren des Thermometers ſieht man auch am beſten, ob irgendwo ein Luftbläschen verſteckt ſey. In größeren Thermometern ſinkt die ganze Queckſilberſäule ohne abzureißen hinab, und es entſteht in der Kugel ein leerer Raum, der aber beim Aufſtellen des Inſtrumentes wieder verſchwindet, ohne die mindeſte Spur zurückzulaſſen. Trennt ſich die Queckſilberſäule, ſo befindet ſich an der Trennungsſtelle gewiß etwas Luft oder eine Unreinigkeit. Übrigens ſind Bläschen in der Kugel minder zu ſcheuen als in der Röhre, weil dieſe ſelten über den Hals der Kugel hinaufſteigen.

174. Iſt ein Thermometer von dieſer Seite richtig befunden worden, ſo hat man auf die Scale zu ſehen. Das Materiale derſelben ſoll nie eine hygroſcopiſche Subſtanz, wie z. B. Elfenbein, unlackirtes Holz ſeyn, weil dieſes ſich beſtändig ändert; die Theilſtriche müſſen unter der Röhre ganz durchgezogen erſcheinen und nicht zu dick, wenigſtens nicht ungleich dick ſeyn. Daß die Scale gut getheilt ſeyn muß, verſteht ſich von ſelbſt.

Ein Hauptaugenmerk verdienen die zwei Fundamentalpuncte. Dieſe werden gar häufig unrichtig beſtimmt, und erleiden ſelbſt mit der Zeit eine Veränderung (160). Darum ſoll man an jedem Inſtrumente, das man zu genauen Arbeiten brauchen will, vorläufig dieſe Puncte beſtimmen.

175. Wenn ſich auch ein Thermometer bei allen dieſen Prüfungen bewährt hat, ſo kann es doch noch manchen Unrichtigkeiten unterworfen ſeyn, weil vielleicht die Röhre nicht vollkommen cylin-

driſch iſt, und doch die Scale für eine cylindriſche Röhre getheilt wurde. Um dieſes auszumitteln, ſucht man die Queckſilberſäule an einer Stelle zu trennen. Dieſes erreicht man dadurch, daß man die Röhre an der Stelle, wo die Trennung erfolgen ſoll, über einer Weingeiſtflamme erhitzt. Mit der getrennten Säule verfährt man ſo, als wollte man damit die Röhre calibriren; man ſchiebt ſie längs der Scale hin, ſoweit dieſes angeht und ſieht zu, ob ſie überall durch gleichviele Grade der Scale reicht. Nach dieſer Operation vereinigt man das getrennte Stück wieder mit der Queckſilberſäule, indem man durch Neigen der Röhre die Säule zu dem Reſte des Queckſilbers hinabgleiten läßt und im Nothfalle noch mit einigen Erſchütterungen zu Hilfe kömmt.

176. Man kann auch ein Thermometer im Allgemeinen dadurch prüfen, daß man ſeinen Stand mit dem eines anderen anerkannt richtigen in verſchiedenen Puncten der Scale unter denſelben Verhältniſſen vergleicht. Hierbei darf man aber ja nicht vergeſſen, daß zwei Inſtrumente, deren Kugeln nicht ganz gleiche Durchmeſſer oder Wanddicken haben, einen verſchiedenen Grad der Empfindlichkeit beſitzen, und muß daher die Zeit gehörig abwarten, wo beide die Temperatur des Mittels, in dem ſie ſich befinden, ganz angenommen haben, und auch dieſe Temperatur möglichſt lange zu unterhalten ſuchen.

177. Wenn man die vorhergehenden Prüfungsregeln mit Schärfe anwendet, ſo wird man ſich überzeugen, daß kein Thermometer ganz vollkommen iſt. Ein Inſtrument, das eine hygroſcopiſche Scale hat, deſſen Theilung ſchlecht gemacht iſt, deſſen Röhre ſprungweiſe gehende Unregelmäßigkeiten hat, wird nie durch Berichtigung auf einen erträglichen Grad der Genauigkeit gebracht werden können. Zeigen ſich aber nur ſtufenweiſe erfolgende Abweichungen der Röhre von der cylindriſchen Geſtalt, oder ſind die Fundamentalpuncte unrichtig beſtimmt, ſo kann man die Größe der daraus entſpringenden Fehler kennen lernen, und ſie beim Gebrauche in Rechnung bringen. Wie man zu dieſer Kenntniß gelangt, ſoll hier nach der von Beſſel angegebenen vortrefflichen Methode (Pogg. Annal. 6. 287) gezeigt werden.

178. An jedem Thermometer hat man für jeden Grad x der Scale die Correction φx und dann noch überdieß den Eis- und Siedpunct auszumitteln. Bezeichnet man den Ort des Eis- und Siedpunctes auf der Scale mit e und s und ihre Correction mit

φe und φs, ſo findet man an einem hunderttheiligen Inſtrumente den wahren Grad, welcher dem Puncte x der Scale entſpricht, durch die Proportion

$$s + \varphi s - (e + \varphi e) : 100 = x + \varphi x - (e + \varphi e) : f$$

woraus man erhält

$$f = \frac{x + \varphi x - (e + \varphi e)}{s + \varphi s - (e + \varphi e)} \cdot 100$$

Es handelt ſich demnach darum, φx, φe und φs zu beſtimmen. Die Beſtimmung von φx iſt am umſtändlichſten; von ihr ſoll daher zuerſt die Rede ſeyn.

178. Die Operation, wodurch man die zur Beſtimmung von φx nöthigen Werthe findet, beſtehet darin, daß man von der Queckſilberſäule hinter einander Stücke von verſchiedener Länge abtrennt, und mit jedem derſelben den Theil der Scale, durch den es ſich ſchieben läßt, calibrirt, indem man das eine Ende der Säule auf einen mit einer runden Zahl bezeichneten Theilſtrich der Scale ſtellt und ſieht, wohin das andere Ende reicht. Man muß aber beim Trennen der Säule durch das vorhin angegebene Mittel vorſichtig zu Werke gehen, um das Glas nicht zu beſchädigen. Die Länge dieſer Fäden iſt zwar willkührlich, doch ſoll der erſte über die halbe Scale des Thermometers ſich erſtrecken, die man berichtigen will, und jeder folgende etwa um 10° kürzer ſeyn. Die Länge des letzteren ſoll aber kleiner ſeyn, als die halbe Länge des erſteren. Je mehr Fäden man braucht, deſto ſicherer laſſen ſich die beabſichtigten Correctionen ausmitteln. Ich habe bei der Prüfung eines Thermometers, das von Weilhöfer in Wien verfertiget iſt und ſehr kleine Unregelmäßigkeiten zeigte, nach dieſer Methode folgende Werthe erhalten:

Unteres Ende des Fadens	Oberes Ende des Fadens			
	I	II	III	IV
— 20	20.3	—	—	—
— 10	30.4	24.7	—	—
0	40.5	34.8	24.5	11.1
+ 10	50.6	44.9	34.55	21.1
20	60.6	54.9	44.55	31.1
30	70.5	64.8	54.50	41.05
40	—	74.7	64.4	51.0
50	—	—	74.3	61.0
60	—	—	—	71.0

(*A*).

180. Um aus dieſen Daten die jedem Werthe x entſprechende Correction φx zu finden, drücke man alle Queckſilberfäden in einem gleichen aber an ſich willkührlichen Maße aus, und denke ſich jeden derſelben an die Stelle der vorher gebrauchten Fäden gebracht, ſo daß ſein unteres Ende auf den Grad fällt, auf welchen der wirklich gebrauchte Faden fiel. Vergleicht man nun die Stelle ſeines oberen Endes mit der, welche der Faden in der Länge, wie er im Thermometer erſcheint, einnimmt, ſo gibt der Unterſchied eine Correction für den Punct, auf welchen das untere Ende fällt. Daher iſt das untere Ende durch das obere beſtimmt, und da dieſes mit jedem Faden geſchieht, ſo erhält man ſo viele Beſtimmungen deſſelben Scalenpunctes, als man Fäden gebraucht hat, und das Mittel derſelben gibt die Correction, wenn man die Verbeſſerung für das andere Ende des Fadens vernachläſſiget. Dieſes Verfahren wird eine wirkliche Berechnung aus den vorher angeführten Daten mehr ins Licht ſetzen.

Man drücke die Länge jedes Fadens nahe ſo aus, wie er am unteren Theile der Scale erſcheint, ſetze aber allen, den erſten ausgenommen, eine Correction bei, damit ſich alle, ungeachtet der etwaigen Ungleichheiten der Röhre auf das Maß beziehen, worin der erſte ausgedrückt iſt. Für unſeren Fall iſt

Die Länge des Fadens $\mathrm{I} = 40.5$
$\mathrm{II} = 34.8 + c_1$
$\mathrm{III} = 24.4 + c_2$
$\mathrm{IV} = 11.1 + c_3$

Nun hat man für die Werthe obiger Tafel *(A)*, welche mit 30 in derſelben horizontalen Linie liegen:

$$\begin{aligned}
70.5 + \varphi(70.5) - (30 + \varphi 30) &= 40.5 \\
64.8 + \varphi(64.8) - (30 + \varphi 30) &= 34.8 + c_1 \\
54.5 + \varphi(54.5) - (30 + \varphi 30) &= 24.4 + c_2 \\
41.1 + \varphi(41.1) - (30 + \varphi 30) &= 11.1 + c_3
\end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
30 + \varphi 30 &= 30 + \varphi 70.5 \\
&= 30 + \varphi 64.8 - c_1 \\
&= 30.1 + \varphi 54.5 - c_2 \\
&= 30 + \varphi 41.1 - c_3
\end{aligned}$$

Nimmt man hiervon das arithmetiſche Mittel und ſetzt das Mittel aus den Correctionen des oberen Theiles der Scale $= 0$, ſo erhält man:

$$30 + \varphi 30 = 30.02 - \tfrac{1}{4}(c_1 + c_2 + c_3)$$

oder wenn man $\frac{1}{4}(c_1 + c_2 + c_3) = C$ ſetzt:

$$\varphi 30 = 0.02 - C.$$

Auf dieſelbe Weiſe findet man mittelſt der Zahlen, die in obiger Tafel mit 20, 10, 0 in derſelben horizontalen Reihe ſtehen:

$$\begin{aligned}
\varphi 20 &= 0.08 - C \\
\varphi 10 &= 0.08 - C \\
\varphi\ 0 &= 0.00 - C.
\end{aligned}$$

Setzt man nun zu dieſen Werthen die Fadenlängen, und vergleicht das Ergebniß dieſer Summirung mit dem, was die Beobachtungstabelle liefert; ſo erhält man die Correctionen für jene Stellen der Scale, wo ſich das obere Ende des Fadens befand, während das untere Ende mit 0, 10, 20, 30 coincidirte. Man hat nämlich:

$$0 + \varphi 0 = 0.00 - C$$

dazu den Faden I $\quad = 40.5$

$$40.5 + \varphi 40.5 = 40.5 - C$$

mithin $\quad \varphi 40.5 = 0.00 - C$

Ebenſo wird $\quad 10 + \varphi 10 = 10.08 - C.$

dazu den Faden I $\quad = 40.50$

$$50.6 + \varphi 50.6 = 50.58 - C$$

d. i. $\quad \varphi 50.6 = -0.02 - C$

und auf ähnliche Weiſe:

$$\begin{aligned}
\varphi 60.6 &= -0.01 - C. \\
\varphi 70.5 &= 0.02 - C.
\end{aligned}$$

Eben ſo erhält man durch den Faden II

$$\varphi 34.8 = \quad 0.00 - C + c_1 \;;$$
$$\varphi 44.9 = - 0.01 - C + c_1$$
$$\varphi 54.9 = - 0.02 - C + c_1$$
$$\varphi 64.8 = \quad 0.02 - C + c_1$$

durch den Faden III

$$\varphi 24.5 = - 0.01 - C + c_2$$
$$\varphi 34.55 = - 0.07 - C + c_2$$
$$\varphi 44.55 = - 0.07 - C + c_2$$
$$\varphi 54.5 = - 0.08 - C + c_2$$

durch den Faden IV

$$\varphi 11.1 = 0.00 - C + c_3$$
$$\varphi 21.1 = 0.08 - C + c_3$$
$$\varphi 31.1 = 0.08 - C + c_3$$
$$\varphi 41.1 = 0.02 - C + c_3$$

Allen dieſen Correctionen hängen noch die Werthe von c an. Um ſie davon zu befreien, nehme man aus allen mittelſt desſelben Fadens erhaltenen Reſultaten das arithmetiſche Mittel und ſetze das Mittel der Correctionen wieder = o. Da wird

$$0 = - 0.01 - 4\,C \qquad \text{mithin} \qquad C = 0.00$$
$$0 = - 0.01 - 4\,C + 4c_1 \qquad c_1 = 0.00$$
$$0 = - 0.23 - 4\,C + 4c_2 \qquad c_2 = 0.06$$
$$0 = - 0.18 - 4\,C + 4c_3 \qquad c_3 = - 0.05.$$

Werden durch dieſe Werthe obige Correctionen von c befreit, ſo wird für die Ergebniſſe, die mittelſt des dritten und vierten Fadens erhalten wurden:

$$\varphi\, 24.5 = \quad 0.05 - C \qquad \varphi 11.1 = - 0.05 - C$$
$$\varphi\, 34.55 = - 0.01 - C \qquad \varphi 21.1 = \quad 0.03 - C$$
$$\varphi\, 44.55 = - 0.01 - C \qquad \varphi 31.1 = \quad 0.03 - C$$
$$\varphi\, 54.5 = - 0.02 - C \qquad \varphi 41.1 = - 0.03 - C.$$

Die übrigen Verbeſſerungen ſind ohnehin von c frei, weil dieſe Größe bei den Ergebniſſen mit dem erſten Faden nicht vorkommt, in den mit dem zweiten Faden erhaltenen aber $c_1 = 0$ iſt.

Es wäre leicht, alle dieſe Correctionen von C zu befreien, da deſſen Werth bekannt iſt, aber man kann es ganz weglaſſen, weil dadurch alle Scalenpuncte um gleichviel verrückt werden, und ohnehin nach der Hand die Feſtſtellung der Scale durch Ausmittlung des Eispunctes vor ſich geht. Die hier gefundenen Correctionen beziehen ſich auf Scalenpuncte, denen Brüche angehängt ſind, und die

nicht durch runde Zahlen ausgedrückt ſind. Da es ſich beſonders um Beſtimmung der Correctionen für die runden Zahlen handelt, ſo muß man dieſe von jenen herleiten. Zu dieſem Behufe bringt man alle oberen beobachteten Scalenpuncte in natürlicher Ordnung in eine Tabelle, und ſetzt denen, wofür die Correction ſchon gefunden iſt, dieſe bei. Hierauf vereinigt man jene Zahlen, die nahe an einer zu ſuchenden runden Zahl liegen, zu einem arithmetiſchen Mittel und ſucht endlich die Correction für jene runden Zahlen durch Interpoliren.

Folgende Tabellen enthalten die Grade, für welche die Correction ſchon gefunden iſt, nebſt dieſen Correctionen. Jene Grade, welche ſich zu einem arithmetiſchen Mittel vereinigen laſſen, ſtehen zwiſchen zwei Strichen:

x	φx	x	φx
11.1	— 0.05	41.1	— 0.03
21.1	+ 0.03	44.55	— 0.01
24.5	+ 0.05	44.9	— 0.01
31.1	+ 0.03	50.6	— 0.02
34.5	— 0.01	54.5	— 0.02
34.8	+ 0.00	54.9	— 0.02
40.5	+ 0.00	60.8	— 0.01
		64.8	0.02
		70.5	0.02

Hieraus findet man folgende arithmetiſche Mittel und ihre Verbeſſerungen:

x	φx	x	φx
25.56	+ 0.03	56.65	— 0.01
39.9	+ 0.00	67.65	— 0.01,
45.41	0.00		

und aus allen Verbeſſerungen zuſammen durch Interpoliren:

$\varphi\,0 = 0.00$	$\varphi\,40 = 0.00$
$\varphi\,10 = 0.08$	$\varphi\,50 = 0.02$
$\varphi\,20 = 0.08$	$\varphi\,60 = -\,0.01$
$\varphi\,30 = 0.02$	

Zur Beſtimmung der Correctionen von — 10°, — 20° braucht

man die wahre Fadenlänge zu kennen. Dieſe wird bekannt, wenn man ſie von den anhängenden c befreit, und man bekommt:

$$\text{I} = 40.5\,,\quad \text{II} = 34.8\,,\quad \text{III} = 24.46\,,\quad \text{IV} = 11.05.$$

Nun nimmt man aus der erſten Tabelle jene Ergebniſſe, bei denen das untere Fadenende auf — 20 — 10 ꝛc. ſtand, ſetzt dem oberen Ende die aus dem Vorhergehenden ſich entſprechenden Verbeſſerungen zu, und zieht dann die Fadenlänge, auf welche ſich dieſes bezieht, ab, ſo erhält man $\varphi - 20$, $\varphi - 10$ ꝛc. Es iſt nämlich für unſeren Fall:

$$20.3 + \varphi\,20.3 = 20.80$$

davon den Faden I $= 40.50$

gibt $\varphi(-20) = -0.3$

ebenſo wird $\varphi(-10) = -0.06.$

Man kann alle nun gefundenen Verbeſſerungen dazu brauchen, um die oberen Fadenenden in der erſten Tabelle dadurch zu corrigiren, mit ſo erhaltener neuen verbeſſerten Tabelle das ganze Verfahren wieder von neuem vornehmen, um noch genauere Werthe von φ zu finden. In unſerem Falle ſind die Verbeſſerungen ohnehin ſehr klein, und man kann ſich dieſe Arbeit wohl erlaſſen.

181. Um nun das Thermometer in Betreff der fixen Puncte zu berichtigen, muß man den Eis- und Siedpunct beſtimmen für $s + \varphi s$, $e + \varphi e$ die Werthe in der Formel (145) ſetzen, und daraus $f - x$ ſuchen. Bei dem hier in Rede ſtehenden Thermometer fiel der Eispunct auf 0.2, der Siedpunct aber auf 100.1. Man hat daher $e + \varphi e = -0.2$, $s + \varphi s = 100.1$ und

$$f = (x + \varphi x)\;1.001 + 0.02$$

und daher die Correction für jeden einzelnen Grad

$$f - x = 0.001\,x + 1.001\,\varphi\,x - 0.02.$$

182. Eine andere, und wie es ſcheint, ſehr zuverläſſige Berichtigungsmethode empfiehlt Egen. Er verſieht zuerſt das Thermometer mit einer Scale von ſo feiner aber übrigens willkührlicher Theilung, daß je zwei Theilſtriche nur etwa um 0.07 L. von einander abſtehen, trennt von der Queckſilberſäule einen Faden, deſſen Länge etwa 30° der Thermometerſcale beträgt, und beobachtet die Länge dieſes Fadens, indem er ſein unteres Ende von 200 — 200 Th. der willkührlichen Scale verſchiebt, bis ſein oberes Ende den höchſten Punct der Thermometerröhre erreicht hat. Dieſe Beobachtung wird mit einer Loupe vorgenommen, etwa 3mal wiederholt, und im Falle ſich Differenzen zeigen, aus allen 3 Werthen das Mittel

genommen. Da der Raum, welchen der Faden unten verläßt, offenbar dem gleichet, um welchen ſein oberes Ende hinaufrückt, ſo lernt man dadurch das Verhältniß der Räume kennen, die innerhalb 200, 400, 600, 800 ꝛc. Th. der Scale liegen, und um die ganze Fadenlänge von einander entfernt ſind. Um auch den innerhalb der Fadenlänge enthaltenen Raum unterſuchen zu können, wird ein Faden von etwa 10° Länge abgetrennt und mit demſelben ein Stück der Röhre unterſucht, das ſich bei der vorhergehenden Prüfung am regelmäßigſten gezeigt hat und deſſen Länge der vorhin gebrauchten Fadenlänge (30°) gleicht. Nun ſind die Verhältniſſe der Räume der Röhre bekannt bis auf ein Stück von der Länge des letzteren Fadens. Kann man der Natur der Röhre nach annehmen, daß 10° lange Stücke allenthalben gleich weit ſind, ſo kann man die Unterſuchung für beendigt halten, iſt dieſes aber nicht der Fall, ſo muß man noch einen dritten Faden von etwa 3° Länge anwenden und mit dieſem ein 10° langes Röhrenſtück in der Gegend, wo ſich vorhin die größte Regelmäßigkeit zeigte, unterſuchen.

Nun legt man ein Röhrenſtück, wo möglich, aus der Mitte der Röhre von 200 Th. Länge zum Grunde und berechnet den räumlichen Inhalt der anderen Stücke von derſelben Länge nach dem Geſetze, daß ſich dieſe Rauminhalte verkehrt wie die Längen der Queckſilberſäulen verhalten. Iſt nun an dem Thermometer der Eis- und Siedpunct genau beſtimmt, mithin auch bekannt, welche Raumtheile innerhalb den Fundamentalſtand fallen, ſo iſt der Werth jedes Grades der Thermometerſcale in Theilen der angebrachten Hilfsſcale gegeben. Daß ein ſolches Thermometer keine andere Scale mehr braucht, iſt für ſich klar, ſo wie, daß durch Anwendung der willkürlich getheilten Scale die Sache nicht verwickelter wird, indem man eben ſo nur dieſe Scale und eine ſie erklärende Tabelle braucht, wie man bei den gewöhnlichen berichtigten Thermometern die eigentliche Thermometerſcale und die Correctionstabelle zur Hand haben muß.

C. Gebrauch des Thermometers.

183. Wiewohl der Gebrauch des Thermometers im Allgemeinen allenthalben bekannt iſt, ſo dürfte es doch nicht überflüſſig ſeyn, hier einige Worte über die dabei zu beobachtenden Vorſichten zu ſagen, denn es iſt nicht gleichgiltig, in welcher Stellung ein Ther-

mometer beobachtet wird, wie es mit dem Stoffe, um deſſen Temperatur es ſich handelt, in Verbindung zu ſetzen ſey, mit welchen Vorſichten man deſſen Anzeigen abzuleſen, und wie man die etwa nicht zu beſeitigenden widrig wirkenden Umſtände in Rechnung zu bringen habe.

184. Das Erſte, worauf man beim Gebrauch eines Thermometers zu ſehen hat, iſt die Stellung desſelben. Es haben ſich zwar bewährte Kenner dieſes Inſtrumentes, wie z. B. Luz entſchieden ausgeſprochen, daß es gleichgiltig ſey, ob man dem Thermometer eine verticale oder eine horizontale Stellung gebe, indeß ſcheint die Sache doch mehr Aufmerkſamkeit zu verdienen, als man auf den erſten Blick glauben möchte.

Thermometer mit kleinen Graden und kurzen Queckſilberſäulen mögen immerhin nach Belieben in horizontaler oder verticaler Lage gebraucht werden, weil das Glas bei letzterer Stellung des Inſtrumentes durch den Druck der Queckſilberſäule wohl nicht ſo ſehr afficirt werden wird, daß daraus ein merklicher Unterſchied im Stande der Queckſilberſäule hervorgehen kann; aber an langen Thermometern erleidet das Glas durch den Druck der Queckſilberſäule eine Ausdehnung und es entſpricht bei verticaler Stellung dieſes Inſtrumentes demſelben Wärmegrade eine kürzere Queckſilberſäule als bei horizontaler. Das hieſige Muſum beſitzt ein 3 Fuß langes Thermometer von Weilhöfer, das vorzüglich gut conſtruirt iſt. Der ganze Fundamentalſtand hat eine Länge von $22\frac{1}{2}$ Zoll und jeder Grad iſt in 5 gleiche Theile unmittelbar getheilt. Dieſes Inſtrument gibt beim Übergang von der verticalen Stellung in die horizontale eine Differenz von nahe $\frac{1}{10}$ Grad. Solche Thermometer müſſen daher immer in einerlei Stellung und zwar in derjenigen beobachtet werden, in welcher die Fundamentalpuncte, beſonders der Siedpunct, beſtimmt worden ſind. Aber ſtets wird man ſicherer daran ſeyn, wenn letztere Beſtimmung in horizontaler Lage der Röhre gemacht worden iſt, weil man ſonſt nicht mit Gewißheit weiß, ob ſich das Glas in der Siedhitze eben ſo durch einen Druck ausdehnt wie bei gewöhnlichen Temperaturen. Doch muß man ja darauf ſehen, daß Thermometer, die in horizontaler Stellung beobachtet werden, nicht etwa zwiſchen dem Queckſilber ein Luftbläschen enthalten, weil dieſes bei Ermanglung eines Druckes die Queckſilberſäule hebt und dadurch einen Irrthum bei der Beobachtung der Temperatur veranlaßt.

185. Das Thermometer muß mit der Maſſe, um deren Temperatur es ſich handelt, ſo weit in unmittelbare Berührung gebracht werden, als die Queckſilberſäule reicht, damit die durch ſie verurſachte Erwärmung oder Erkältung auf alles Queckſilber des Inſtrumentes wirke. Wenn einem von der zu unterſuchenden Maſſe nicht die nöthige Quantität zu Gebote ſteht, um die volle Einſenkung des Thermometers bewerkſtelligen zu können und man dem Beobachtungsreſultate doch nichts von der größten Schärfe erlaſſen kann; ſo muß man zu einer Correction ſeine Zuflucht nehmen. Geſetzt ein hunderttheiliges Thermometer gebe die Temperatur eines Körpers mit t° an, und es ſey nicht möglich, die ganze Queckſilberſäule in die Maſſe zu tauchen, ſondern es rage eine Säule λ° aus dieſer Maſſe in die Luft oder in ein anderes Mittel hervor, deſſen Temperatur τ iſt; ſo kann man annehmen, daß auch die hervorragende Queckſilberſäule die Temperatur τ habe, mithin durch Temperaturveränderung von $t - \tau^\circ$ um $\frac{t-\tau}{5550} \cdot \lambda^\circ$ länger werde. Darum wird letztere Größe die Correction ſeyn, welche man mit ihrem Zeichen zur beobachteten Temperatur t zu ſetzen hat, um die erſte Annäherung zu erhalten. Die ſo gefundene Temperatur kann man wieder für t ſetzen, wieder die Correction und mittelſt dieſer eine zweite Annäherung erhalten. Man wird es aber in den wenigſten Fällen nothwendig finden, über die erſte Annäherung hinauszugehen.

186. Wenn es ſich darum handelt, die Temperatur flüſſiger Stoffe zu unterſuchen, ſo darf man ja nicht vergeſſen, daß dieſe in verſchiedenen Horizontalſchichten verſchieden ſeyn kann und muß deßhalb die Temperatur einer beſonderen Schichte unterſuchen, oder aus den Reſultaten der Unterſuchung mehrerer Schichten das Mittel nehmen. Wenn man aber bei der Temperaturbeſtimmung einer Schichte ein reines Reſultat haben will, ſo iſt die horizontale Lage des Thermometers unerläßlich. Überdieß muß man aber da, wo es ſich um beſonders ſcharfe Reſultate handelt, den Umſtand wohl berückſichtigen, daß das Queckſilbergefäß eines Thermometers in tief liegenden Schichten eine Compreſſion erleidet und darum die Temperatur zu hoch erſcheint. Daſſelbe iſt der Fall, wenn man die Temperatur eines comprimirten Gaſes, beſonders mit einem luftleeren Thermometer unterſucht. Um ſowohl in dieſem als in jenem Falle die Wirkung der Compreſſion zu erfahren, iſt es gut, vorläufig den Verſuch mit einer Flüſſigkeit zu machen, welche die Temperatur der

Atmoſphäre hat und die daher den Stand des hineingebrachten Thermometers, das ſich in der Luft befand, nur vermöge der Compreſſion des Queckſilbergefäßes zu ändern vermag. Auf dieſe Wirkung muß man bei der Beſtimmung des Endreſultates Rückſicht nehmen.

Soll durch ein Thermometer die Temperatur der Luft ausgemittelt werden, ſo muß man es an einen Ort bringen, zu welchem zwar die Luft von allen Seiten Zutritt hat, der aber doch gegen Regen, Wind ꝛc. und ſowohl gegen das directe Sonnenlicht als gegen ſtrahlende Wärme möglichſt geſchützt iſt. Darum darf ein ſolches Inſtrument nur an der Nordſeite eines Gebäudes aufgeſtellt werden, muß hinreichend von der Mauer entfernt ſeyn, und ſich in einem von oben und ſeitwärts geſchützten, am beſten blechernen durchlöcherten Kaſten befinden. Nur wenn es dem Beobachter darum zu thun iſt, die während einer Nacht durch Ausſtrahlen der Wärme hervorgebrachte Erkaltung kennen zu lernen, muß das Thermometer von der Decke befreit und dem freien Himmel ausgeſetzt werden. Thermometer mit hölzernen, die Wärme langſam leitenden Scalen ſind zu dieſem Ende nicht wohl zu brauchen, weil ihr Gang ſtets hinter der Temperatur der Atmoſphäre um vieles zurückbleibt. Übrigens wird man bei aller Sorgfalt nicht erwarten dürfen, daß man bei Beobachtungen der Luftwärme ein vollkommen richtiges Reſultat erhalte, denn der Thermometerſtand iſt ſo veränderlich, daß man ſelbſt bei jeder von ſchnell auf einander folgenden Beobachtungen ein anderes Reſultat finden wird, welches theils vom Wechſel kälterer und wärmerer Luftſchichten, theils von der größeren oder minderen Einwirkung der Meteore und der ſtrahlenden Wärme abhängt, und es bleibt dem Beobachter nichts übrig, als mit dem Schlag der Stunde, die man zum Beobachten beſtimmt hat, an die Arbeit zu gehen und etwa einige Minuten darnach noch einen Blick auf das Thermometer zu werfen, um etwa die Natur der die ſchnellen Veränderungen erzeugenden Urſachen leichter ausmitteln zu können. Über die zweckmäßigſten Beobachtungsſtunden handelt ausführlich genug die Naturlehre.

187. Bei der Beobachtung des Thermometerſtandes hat man mit gehöriger Eile zu verfahren, um den Stand der Queckſilberſäule nicht durch die Körperwärme zu ändern und muß ſorgen, daß das Auge in derſelben horizontalen Ebene ſteht, in welcher ſich die Oberfläche der Queckſilberſäule und der betreffende Theilſtrich der Scale befindet. Man hat Thermometer, bei denen die Scale an

den zwei einander gegenüberſtehenden Seiten unmittelbar in Glas eingeſchnitten iſt. Bei dieſen iſt es leicht, den rechten Ort für das Auge zu finden, weil man weiß, er befinde ſich in der Höhe jenes Scalenſtriches, der den gleichbedeutenden der anderen Seite zu decken ſcheint. Indeß kann man auch bei Thermometern mit einer einfachen Scale dieſen Ort ohne beſondere Mühe finden, denn derjenige Theilſtrich der Scale, der mit dem Auge in derſelben Horizontalebene liegt, erſcheint, wenn er hinter der Röhre durchgezogen iſt, gerade, während die darunter oder die darüber liegenden ſich gekrümmt zeigen.

188. Das Queckſilberthermometer, deſſen man ſich faſt ausſchließlich bedient, iſt bekanntlich nur bis 100° C ein richtiger Wärmemeſſer; über dieſe Grenze hinaus muß man eine Correction anwenden, um aus ſeinen Anzeigen den wahren Wärmegrad zu erkennen. Dieſe Correction hat Auguſt aus den von Dulong und Petit angeſtellten Verſuchen, die Vergleichung des Queckſilber- und Luftthermometers betreffend (147), abgeleitet, indem er ſich überzeugte, daß die derſelben Temperatur entſprechenden Grade beider Thermometer, Unterſchiede geben, deren zweite Differenzen (= 0.35) conſtant ſind. Dadurch wurde er auf die Formel

$$\delta = \frac{1}{4}\,(0.09\,\tau + 0.00028\,\tau^2)$$

geleitet, wo τ die Anzahl der über 100° liegenden Grade des hundertheiligen Queckſilberthermometers und δ die zu ſuchende Correction bedeutet. Heißt nun der wahre Wärmegrad t_w, der Grad des Queckſilberthermometers t_q, ſo iſt

$$\delta = t_q - t_w$$

und daher

$$t_w = t_q - \frac{1}{4}\tau\,(0.09 - 0.00028\,\tau).$$

Dieſe Formel gibt aber nur bis 300° genaue Reſultate, weiter aufwärts wird t_w wohl etwas zu klein, doch iſt die Abweichung im Ganzen ſo gering, daß man die Formel bis zum Siedpunct des Queckſilbers benützen kann.

Die Tafeln V. enthalten die zur Reduction der Thermometergrade nöthigen Zahlen.

Sechſtes Kapitel.

Das Barometer.

189. Die vorhergehenden Beſtimmungen fordern häufig eine genaue Kenntniß des Luftdruckes, mithin den Gebrauch eines guten Barometers. So einfach auch die Einrichtung eines gewöhnlichen Barometers iſt, und ſo wenig Mühe es auch koſtet, ein ſolches Inſtrument überhaupt zu behandeln; ſo fordert doch die Conſtruction, Beurtheilung und der Gebrauch desſelben, wenn es auf eine große Schärfe des Reſultates ankommt, mehr, als man in Elementarwerken über Phyſik vortragen kann, und ſetzt eine ſehr genaue Kenntniß der einzelnen Beſtandtheile dieſes durch ſeine Wichtigkeit ſo allgemein verbreiteten Inſtrumentes voraus und endlich auch noch manche Correction, um das beobachtete Ergebniß auf einen Normalzuſtand zurückzuführen. Davon wird gegenwärtiges Kapitel handeln.

A. Conſtruction des Barometers.

190. Die weſentlichen Beſtandtheile eines Barometers ſind bekanntlich das Queckſilber, die zur Aufnahme des Queckſilbers beſtimmte Röhre, das zu demſelben Zweck vorhandene Gefäß, und endlich die Scale. Jeder dieſer Beſtandtheile muß ſo beſchaffen ſeyn, wie er zur Erreichung der Beſtimmung dieſes Inſtrumentes am geeignetſten iſt.

191. Vom Queckſilber wird erfordert, daß es vollkommen rein, trocken, luftleer und von allen chemiſchen Beimiſchungen frei ſey. Reines Queckſilber hat, wenn es durch einen engen, aus Schreibpapier geformten Trichter gelaufen iſt, eine rein ſpiegelnde Oberfläche und behält ſie auch bei, wenn nicht etwa Staub dem Glanze Abbruch thut, es hängt ſich weder an Glas, noch an das Papier an und hinterläßt auf letzterem keine metalliſchen Streifen, ſondern höchſtens Spuren von Staub oder mechaniſch anhängenden Unreinigkeiten. Das ſpecifiſche Gewicht iſt keineswegs ein ſo gutes Mittel, die Reinheit des Queckſilbers zu erkennen, wie die genannten. Ich habe öfters Queckſilber mit aller Sorgfalt aus rothem Queckſilberoxyd reducirt, und ein reines Metall erhalten. Wenn ich aber zu einem Pfund desſelben nur einen Gran Zinn gab, bekam die Miſchung plötzlich eine beinahe aſchgraue faltige Haut an der Oberfläche, und hing ſich an das Glas, ja ſogar an die Finger an, trug alſo alle Spuren

der chemiſchen Verunreinigung deutlich an ſich und doch würde wohl der beſte Experimentator mit der vorzüglichſten Wage nicht im Stande ſeyn, dieſe Beimiſchung aus einer Änderung des ſpecifiſchen Gewichtes zu erkennen. Ich glaube daher, und meine Erfahrungen beſtätigen dieſes vollkommen, daß, wenn Queckſilber die oben angegebenen Kennzeichen ſeiner Reinheit beſitzt, man es ohne Scheu zu Barometern verwenden kann und daß man nicht nothwendig habe, es erſt aus dem rothen Oxyde herzuſtellen. Wenn einige Gelehrte Queckſilber durch wiederholtes Deſtilliren immer dichter gefunden haben, je öfter ſie die Deſtillation vorgenommen haben, ſo mag dieſes wohl nur davon herrühren, daß ſie zur erſteren Deſtillation ſehr unreines Queckſilber gewählt oder bei der Beſtimmung der Dichte nicht mit der nöthigen Umſicht verfahren ſind. Ich würde ſelbſt, wenn mir kein völlig reines Queckſilber zu Gebote ſtünde, nicht immer zur Reduction aus dem rothen Oxyde meine Zuflucht nehmen, ſondern das unreine Queckſilber lieber in Schwefelſäure auflöſen, das ſchwefelſaure Queckſilber mit Ätzkalk mengen, erhitzen und das freiwerdende Queckſilber auffangen. Durch bloßes Deſtilliren kommt man faſt nie zum Ziele, indem mit dem Queckſilber auch beigemiſchte Stoffe übergehen.

192. Die zur Aufnahme des Queckſilbers beſtimmte Röhre beſteht in der Regel ganz aus Glas, nur in beſonderen Fällen, z. B. bei Schiffsbarometern, laßt man den unteren Theil aus Eiſen beſtehen. Aber ſelbſt in dem Falle, wo man Glas wählt, iſt weder die Beſchaffenheit desſelben noch die Dimenſion der Röhre gleichgiltig. Man ſoll ſtets hartes Glas wählen, um nicht beſorgen zu müſſen, daß während des Auskochens eine Zerſetzung eintritt, wie dieſes mit mehreren Glasſorten, die in Öſterreich verfertiget werden, der Fall iſt. Aber gar zu hartes Glas iſt auch nicht brauchbar, weil es im Feuer zu leicht Sprünge bekommt. Röhren aus ſolchem Glaſe haben oft ſchon von Anbeginn, wenn ihre Wände nur einigermaßen dick ſind, ungemein feine mit der Axe des Rohres parallel laufende Sprünge, die das Anſehen feiner Linien beſitzen. Derlei Röhren ſoll man nicht wählen.

Eine brauchbare Röhre muß überdieß auch noch die rechte Wanddicke, Länge und Weite haben. Die Glaswand ſoll nicht über $\frac{1}{2}$ Linie dick ſeyn, wenn man nicht Gefahr laufen will, daß das Inſtrument beim Auskochen verunglückt, ja wenn es einem nicht darum zu thun iſt, daß die Scale unmittelbar auf das Glas

gezeichnet werde, ſo iſt es ſogar beſſer, eine geringere Dicke zu wählen. Röhren von ſo dünnen Wänden, wie ſie zu Aräometern verwendet werden, ſind aber auch zu dieſem Zwecke nicht brauchbar, weil ſie gar zu leicht vom Queckſilber zerſtoßen werden. Zu einem gewöhnlichen Gefäßbarometer darf die Röhre nicht über 32 Zoll lang ſeyn. Bei einer längeren Röhre hat man freilich den Vortheil, daß ein in den leeren Raum hinaufſteigendes Luftbläschen keine ſo ſtarke Depreſſion hervorbringt, wie bei einer kürzeren, weil dieſer Raum bei jener größer ausfällt als bei dieſer, aber dafür wird man ein Aufſteigen ſolcher Bläschen um ſo eher befürchten müſſen, weil beim Umkehren langer Röhren deſto mehr Queckſilber aus dem Gefäße in dieſelbe treten muß, das mit Luft in Berührung war und ſie mit ſich führt.

Die Weite der Röhre ſoll nicht unter $1\frac{1}{2}$ Linie betragen. Röhren unter dieſem Caliber laſſen kein reines Auskochen des Queckſilbers zu, über demſelben ſind ſie wohl ſehr brauchbar und zwar deſto mehr, je weiter die Röhre iſt, bis etwa zu einer Weite von 4—5 Linien; allein ſolche Röhren, deren Weite 2—3 Linien überſteigt, ſind zu Reiſebarometern nicht mehr recht zu brauchen, weil ſie zu ſchwer werden und die Gefahr des Luftfangens zu groß iſt. Zu einem Gefäßbarometer, das nicht transportirt zu werden beſtimmt iſt, ſoll man, wenn es ſich um genaue Angabe des Luftdruckes handelt, ſtets eine Röhre wählen, deren Durchmeſſer 4—5 Linien beträgt, um den Einfluß der Capillarität und die Wirkung der Reibung des Queckſilbers am Glaſe nicht befürchten zu dürfen. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß eine ſolche Röhre gerade, möglichſt gleichweit, ohne Kiesknöpfe und matte Stellen ſey. Am zugeſchmolzenen Ende darf ſie nicht in eine Spitze auslaufen, ſondern muß mit einer Wölbung geſchloſſen ſeyn, damit man ſicher alle Luft daraus vertreiben könne, welches bei einem ſpitzigen Auslaufen nicht der Fall iſt.

193. Die beſte Röhre gibt mit dem reinſten Queckſilber gefüllt doch noch kein brauchbares Barometer, wenn man nicht dafür ſorgt, daß der Raum über der Queckſilberſäule vollkommen luftleer ſey. Dieſes zu erreichen iſt bei weitem die ſchwierigſte Arbeit eines Künſtlers, der ſich mit dem Verfertigen von Barometern befaßt. Soll ſie gelingen, ſo muß man gleich beim Einfüllen des Queckſilbers die nöthige Vorſicht beobachten. Dieſes ſoll immer zuerſt gereiniget werden, indem man es durch einen papierenen Trichter ſo oft laufen läßt, bis es am Papier keine Unreinigkeit zurückläßt. Am beſten

thut man, wenn man es in einer gläſernen Phiole über ein heißes Blech oder auf einen heißen Ofen ſtellt, bis das Glas mit feinen Queckſilbertropfen überzogen zu werden anfängt. Dann nimmt man es weg, läßt es aber vor dem Einfüllen in die Röhre auskühlen. Füllt man es warm ein, ſo beſchlägt die Röhre mit einem feinen Thau und man lauft Gefahr, daß ſich Feuchtigkeit dem Queckſilber beimenge, die wegzuſchaffen, viel Mühe koſtet. Selbſt beim Einfüllen hat man zu ſorgen, daß das Queckſilber nicht zu hoch durch die Luft falle, weil es ſonſt feinen, in der Luft ſchwebenden Staub aufnimmt. Endlich ſoll man die Röhre anfänglich nur etwa zur Hälfte anfüllen und ſie dann alſogleich auskochen. Zu dieſem Behuf dient eine gewöhnliche Räucherpfanne mit einem an der Seitenwand angebrachten Ausſchnitt, der zur Aufnahme der Glasröhre beſtimmt iſt. Man legt in dieſe Pfanne bereits ſchon glühende Kohlen, ſorgt aber dafür, daß in der Nähe des Ausſchnittes eine große flache Kohle auf den Boden zu liegen komme und zu beiden Seiten derſelben die Kohlen aufgethürmt ſeyen, aber nach der der Spalte entgegengeſetzten Seite zu immer abnehmen, zugleich aber auch, daß zwiſchen dieſen Kohlen gleichſam eine Rinne zur Aufnahme der Glasröhre übrig bleibe. Nun wird die Glasröhre zuerſt mit dem geſchloſſenen Ende den glühenden Kohlen ſorgfältig genähert, damit ſie ſich langſam erhitze, endlich gar in die Kohlenſpalte geſenkt und dabei immer um ihre Axe gedreht, während man ſie in einer ſchiefen Richtung, etwa 25—30° gegen den Horizont geneigt hält. Bald wird man bemerken, daß das Glas faſt matt wird, mithin ſich Luftblaſen entwickeln, die immer größer und größer werden, und endlich längs der Glaswand in die Höhe ſteigen, wobei ſie ihren Weg durch einen beſonderen Glanz des Queckſilbers bezeichnen, zum Beweiſe, daß ſie die meiſte Luft mitgenommen haben. Man thut gut, die Stelle, von wo aus ſich die Blaſen auf dieſe Weiſe entwickelt haben, durch Vorſchieben der Röhre aus dem Feuer zu bringen, damit eine andere Stelle dahin gelange und dieſe Operation bis zum Ende des Queckſilbers fortgeſetzt werde. Bei der zweiten und den folgenden ſo zu behandelnden Stellen wird man nicht lange auf die Blaſenentwickelung warten dürfen, weil ſie ſchon erhitzt in den eigentlichen Feuerraum kommen. Hat man auf dieſe Weiſe den größten Antheil Luft aus dem Glaſe vertrieben, ſo beginnt man die Arbeit wieder von Neuem und läßt dabei das Queckſilber in ſtarkes Sieden kommen. Man braucht dazu nur wie bei der

vorhergehenden Arbeit zu verfahren, mit dem Unterſchiede, daß man jede einzelne Glasſtelle nicht eher vorſchiebt, als bis das Queckſilber heftig kocht und ſich an der Stelle, wo dieſes geſchieht, noch weniger aber unterhalb noch Luftblaſen zeigen. Wenn man der Glasröhre nur eine ſanfte Neigung gegen den Horizont gibt und ſie langſam um ihre Axe dreht, wird man leicht jedes Bläschen bemerken, und es bald vertreiben, wenn man nur die Stelle unterhalb desſelben dem ſtärkſten Feuer ausſetzt. Hat man auf dieſe Weiſe das ganze bereits eingefüllte Queckſilber ausgekocht, ſo läßt man es auskühlen und füllt dann die ganze Röhre mit friſchem Queckſilber bis etwa auf ein 1 — 1½ Z. langes Stück an, und verfährt dann mit dieſem wie vorhin. Man ſoll ja nicht kaltes Queckſilber auf warmes nachfüllen, weil ſich jenes als das dichtere ſenkt und wieder Luft in den unteren, ſchon ausgekochten Theil bringt. Übrigens iſt nicht daran zu denken, daß ein Barometer ſchon vollkommen luftleer ſey, wenn man es einmal ausgekocht hat; es iſt nothwendig, dieſe Arbeit zwei-, dreimal und öfter zu wiederhohlen, bis man endlich gar keine Luftblaſe mehr bemerkt. Nur das oberſte Stück, das man beim erſteren Proceſſe immer leer laſſen mußte, um für die durch Erhitzung bewirkte Ausdehnung des Queckſilbers Raum zu haben, braucht man nur einmal gut durchzukochen.

Man hört gar häufig ſelbſt von geübten Künſtlern die Klage, daß bei dieſer Arbeit ſo viele Inſtrumente zu Grunde gehen. Daran iſt aber, wenn man überhaupt bei der Wahl des Glaſes mit gehöriger Vorſicht verfuhr, meiſtens ihr zweckwidriges Verfahren Schuld. Sie bringen das Glas in zu heftiges Feuer, laſſen eine zu lange Queckſilberſäule auf einmal kochen und halten dabei die Röhre völlig vertical. Nie ſoll eine über 1 Zoll lange Säule auf einmal kochen und wenn dieſes zu heftig iſt, und insbeſondere wenn ſich das Queckſilber theilt, ſoll man die Röhre ſachte zurückziehen, damit ſie einer geringeren Hitze ausgeſetzt werde. Es rathen zwar bewährte Kenner, die ganze Queckſilberſäule auf einmal zum Kochen zu bringen, um alle Luft aus der Röhre zu entfernen, und meinen, beim ſtückweiſen Kochen ſenke ſich das obere kältere, lufthaltige Queckſilber in das heiße, bereits gekochte, und theile dieſem wieder Luft mit. Allein man kann dieſem Übel vorbeugen, ohne die Röhre einer ſo großen Gefahr auszuſetzen; man braucht nur die Hitze ſo zu leiten, daß ſtets ein Theil Queckſilber im Kochen begriffen iſt und dabei die Röhre nur wenig gegen den Horizont zu neigen. Bei

einer geringen Neigung iſt das Beſtreben des kälteren Queckſilbers, zu ſinken, geringer als bei einem verticalen Stande der Säule, und bei einem ununterbrochenen Kochen wird das luftführende Queckſilber eher erhitzt und von der Luft befreit, als es in das bereits gekochte ſich ſenken kann.

194. Der mit der Röhre in engſter Verbindung ſtehende Theil eines Barometers iſt das Queckſilbergefäß. Bei Heberbarometern iſt ein ſolches gar nicht vorhanden, wenn man nicht etwa den kürzeren offenen Schenkel der Röhre als ſolches anſehen will. Es iſt ohnehin bekannt, daß dieſer mit der eigentlichen Röhre da, wo das Queckſilber ſpielt, möglichſt gleich weit und mit ihr parallel ſeyn, übrigens eine deſto größere Länge haben müſſe, je tiefere Barometerſtände man damit beobachten will. An den ſogenannten Birnbarometern iſt das Gefäß eine unmittelbar an die Röhre angeſchmolzene offene Glaskugel, deren Durchmeſſer ſich zu dem der Röhre wie 10 : 1 verhalten ſoll, ſelbſt wenn das Inſtrument nur als Zimmerbarometer gebraucht wird, damit die Veränderungen des Queckſilberſtandes in derſelben, ſo klein ausfallen, daß man ſie für den gewöhnlichen meteorologiſchen Gebrauch vernachläſſigen kann. Ein eigentliches Queckſilbergefäß kommt nur bei jenen Barometern vor, die davon den Namen Gefäßbarometer führen. Ein ſolches Gefäß beſteht aus Glas, Eiſen, Bein oder Holz und zwar im letzteren Falle meiſtens aus Buxholz. Gläſerne Gefäße braucht man nur in dem Falle, wo man die Oberfläche des Queckſilbers durch ein im Inneren des Gefäßes vorhandenes Merkzeichen reguliren will; eiſerne, wenn das Inſtrument beſondere Feſtigkeit beſitzen ſoll, und man der Luft durch eine eigene Öffnung Zutritt geſtatten will; hölzerne Gefäße ſind von allen die brauchbarſten, ſie laſſen, wenn auch die Wände ½ Zoll dick ſind, ohne beſonders angebrachte Öffnung ſchnell Luft, aber nicht Queckſilber durch, beſitzen eine Feſtigkeit, vermöge welcher ſie ſelbſt ſtarken äußeren Einwirkungen widerſtehen, und ſind leicht von jeder beliebigen Größe zu erhalten. Beinerne Gefäße mögen wohl zierlich ausſehen, taugen aber wegen ihrer hygroſcopiſchen Beſchaffenheit und dem ſo leicht erfolgenden Schwinden nicht viel. Die Form dieſer Gefäße iſt immer cylindriſch, und die untere Hälfte iſt mit einem ledernen (am beſten aus Hundsleder) Sack verſehen, der nur mit den Rändern am Umfange des Cylinders luftdicht haftet. Am oberen Deckel iſt die Glasröhre eingekittet oder beſſer eingeleimt, der untere iſt mit einer Schraube ver-

ſehen, wodurch der Boden des Sackes, der das Queckſilber enthält, gehoben oder geſenkt wird.

195. Ein anderer und zwar der Haupttheil eines Barometers iſt die Scale. Daß dieſe nicht ein willkürliches Maß, ſondern ein genaues Längenmaß enthalten muß, über deſſen Größe keine Zweifel herrſchen, daß man dazu ein Materiale wählen ſoll, das ſich durch Feuchtigkeit gar nicht, durch die Wärme nur wenig, oder doch regelmäßig ändert, verſteht ſich von ſelbſt. Ich ziehe die Theilung in Millimeter allen übrigen vor, weil die Länge eines Meters ſehr genau beſtimmt iſt, ſeine Decimaleintheilung viele Bequemlichkeit mit ſich führt, und dieſes Maß mir am meiſten geeignet zu ſeyn ſcheint, wenigſtens in der Wiſſenſchaft allgemein eingeführt werden zu können. Gewöhnlich wählt der Künſtler das Längenmaß des Landes, wo er arbeitet, doch kommt die Theilung in Pariſer Linien oder in Millimeter am öfteſten vor. Es wäre zu wünſchen, daß man allenthalben, wenigſtens, wo es ſich um wiſſenſchaftliche Gegenſtände handelt, die Theilung in Millimeter wählen möchte. Einige Künſtler zeichnen die Scale unmittelbar auf Glas und dieſes iſt ohne Widerrede das beſte und einfachſte, und hat nur den Nachtheil, daß mit dem Zerbrechen der Röhre auch die Scale vernichtet iſt. Die Parallaxe wird dadurch nicht größer, wie Piſtor meint, als wenn man die Scale auf untergelegtes Metall zeichnet, denn man kann ja die Röhre ſo kehren, daß die Scale an ihrer Rückſeite erſcheint, und dann hat man wohl gewiß denſelben Fall, als wenn die Scale unter der Röhre läge. Gewöhnlich zeichnet man die Theilung auf Meſſing, und befeſtiget dieſes am Brete, worauf die Röhre haftet, oder an der Glasröhre ſelbſt. Allein dieſes Verfahren iſt fehlerhaft. Stets ſoll die ganze Scale vom Nullpunct an bis zum äußerſten Ende auf demſelben Materiale verzeichnet ſeyn, und man ſoll ein ſolches Materiale dazu wählen, deſſen pyrometriſche Ausdehnung man genau kennt, und mit aller Schärfe in Rechnung zu bringen weiß. Papierne oder beinerne Scalen ſind abſolut verwerflich. Die Scale ſoll bei einem Barometer, das auf Genauigkeit Anſpruch macht, auch mit einem Nonius verſehen ſeyn, der $\frac{1}{50}$ L. oder $\frac{1}{10}$ Mill. angibt, und es ſoll dabei die Vorrichtung nicht fehlen, durch welche dem Auge der rechte Platz zur Vermeidung der Parallaxe angewieſen wird, wozu am beſten, ein die Glasröhre umfaſſender Ring paßt. Einige Künſtler verſehen dieſen Nonius auch noch mit einem Microſcope, um die Einſtellung

recht ſcharf bewerkſtelligen zu können, allein dieſes Mittel dürfte wohl überflüſſig ſeyn und das Inſtrument vertheuern, ohne deſſen Güte zu heben, indem anderweitige unvermeidliche in der Natur des Barometers liegende Quellen von Fehlern nicht die große Schärfe erzielen laſſen, welche man durch ein Microſcop erreichen will. Es ſcheint mir ſehr zweckmäßig, den Nonius und das Abſehen von oben herab zu führen, und jenen Stand für den richtigen zu halten, wo die Lichtlinie zwiſchen dem Abſehen und der convexeſten Stelle der Queckſilberſäule gerade verſchwunden iſt.

196. Die große Mannigfaltigkeit, welche man in der Einrichtung verſchiedener Barometer bemerkt, rührt davon her, daß man ſeit der Erfindung dieſes wichtigen Inſtrumentes unaufhörlich bemüht war, es empfindlich, transportabel zu machen, oder das Aufſteigen von Luftblaſen zu verhindern, oder doch zu erſchweren, die Queckſilberſäule im Gefäße von den Veränderungen der Länge der Säule unabhängig zu machen, und ſie zu meſſen, ohne die Einfachheit ſeines Baues zu verletzen. Leider beſchränken ſich viele dieſer Eigenſchaften gegenſeitig, und was man an einer gewinnt, verliert man häufig an der anderen. Wir wollen die vorzüglichſten zu jedem der genannten Zwecke vorgeſchlagenen, und meiſtens auch ausgeführten Einrichtungen kurz betrachten.

197. Zur Erhöhung der Empfindlichkeit der Barometer hat man Winkelbarometer, Doppelbarometer, Radbarometer und Wagbarometer gebaut.

Winkelbarometer haben eine ſehr lange, unter einem nicht ſtark von einem rechten differirenden Winkel gebogene Röhre (Fig. 37). Heißt dieſer Winkel $abc = \varphi$, ſo ändert ſich der Stand dieſes Inſtrumentes, wenn die Scale eines gewöhnlichen um a L. ſteigt oder ſinkt, um $a \cos. \varphi$. Da ein ſolches Inſtrument viel Raum einnimmt, ſo wird es oft auch in der Geſtalt Fig. 38 verfertiget. In beiden Fällen erkauft man aber die Empfindlichkeit auf Koſten der Richtigkeit, alſo um zu hohen Preis. Denn wenn man den Schenkel ba der horizontalen Lage gar nahe bringt, wie es der Zweck fordert, wenn man eine große Empfindlichkeit erreichen will, ſo fließt das Queckſilber am Ende der Säule aus einander, und es iſt ſchwer, den rechten Punct beim Meſſen zu treffen; die Krümmung der Röhre iſt der freien Bewegung des Queckſilbers ſtets hinderlich und man muß vor jeder Beobachtung wiederholt an die Röhre klopfen, um dem Queckſilber einen dem Luftdrucke nahe entſprechen-

den Stand zu geben, doch darf man wohl nicht hoffen, je den rechten Stand zu erfahren, weil ſich dieſer bei jeder Erſchütterung des Inſtrumentes etwas ändert. Dieſes gilt beſonders bei den nach Fig. 38 verfertigten Barometern. Es hält auch ſchwer, eine ſo lange Queckſilberſäule ganz luftleer auszukochen.

Ein Doppelbarometer ſtellt Fig. 39 vor. Es iſt in dieſer Form von Huyghens vorgeſchlagen worden, und beſteht aus einer zweiſchenklichen Röhre *ABC*, welche in *A* und *B* zwei cylindriſche Erweiterungen hat, von *A* bis *B* mit Queckſilber angefüllt iſt, und über *B* eine Säule von gefärbtem Weingeiſt hat. Die Wirkung dieſes Inſtrumentes iſt wohl für ſich klar, denn wenn z. B. der Luftdruck geringer wird, ſo ſinkt das Queckſilber in *A*, ſteigt in *B*, und die Weingeiſtſäule in *C* ändert ſich wegen des geringen ſpec. Gewichtes des Weingeiſtes in einem größeren Verhältniſſe, als die Queckſilberſäule. Gegen die Einrichtung dieſes Inſtrumentes ſpricht der Umſtand, daß die Wirkung der Wärme auf die zwei darin enthaltenen Flüſſigkeiten viel complicirter iſt, als bei dem gewöhnlichen Barometer, daß die Weingeiſtſäule durch Verdünſtung leicht vermindert wird, und daß bei der geringſten Transportirung gar leicht etwas Weingeiſt in den Hals der Röhre gelangt, und bei nächſter Gelegenheit gar in den leeren Raum des Barometers hinaufſteigt. Es gibt noch mehrere Arten ſolcher Inſtrumente, aber ſie verdienen nicht empfohlen zu werden. (Schmidt in Gilb. Annalen 14. 199).

Das Radbarometer iſt in Fig. 40 abgebildet. Es iſt eine Art Heberbarometer, deſſen längerer Schenkel zur Erhöhung der Empfindlichkeit oben eine ſtarke Erweiterung hat. Auf dem Queckſilber des offenen Schenkels ſchwimmt ein an einem Faden hängendes Gewichtchen, der Faden iſt um eine Rolle geſchlungen, und nimmt dieſe mit ſich fort, wenn bei einer Änderung des Luftdruckes das Gewichtchen ſteigt oder ſinkt. Damit dieſes unter allen Umſtänden erfolge, wird die Rolle auch noch durch ein anderes Gewichtchen nach der entgegengeſetzten Richtung gezogen. An der Axe dieſer Rolle ſteckt ein Zeiger, der über einer getheilten Kreisſcheibe ſpielt, und die Bewegung der Rolle mithin dadurch die des Queckſilbers auf derſelben anzeigt. Dieſe Barometer ſind zu genauen Unterſuchungen wegen ihrer zu ſtarken Zuſammenſetzung völlig unbrauchbar und können höchſtens die Stelle eines gemeinen Zimmerbarometers vertreten.

Ein Wagbarometer (Fig. 41) iſt ein Heberbarometer, deſſen horizontaler Schenkel an einem Wagebalken befeſtiget iſt, und das durch den Stand des letzteren die Vertheilung des Queckſilbers in beide Schenkel, mithin den Luftdruck anzeigt. So große Dienſte ein ſolches Barometer auch auf den erſten Blick verſpricht, ſo iſt es doch wegen des unaufhörlichen Schwankens und der Abhängigkeit von allem, was auf die Wage Einfluß nimmt, faſt unbrauchbar.

Das Inſtrument, welches einen gehörigen Grad von Empfindlichkeit mit Richtigkeit und allen anderen guten Eigenſchaften verbindet, bleibt daher immer noch ein gewöhnliches Barometer mit einer 4—5 L. weiten Röhre. In dieſer ſteigt und ſinkt das Queckſilber dem Luftdrucke gemäß, und will man ſeine Änderungen vergrößert ſehen, ſo bediene man ſich einer ſtark vergrößernden Loupe, und man hat ſeinen Zweck erreicht, ohne einen anderen Nachtheil herbeigeführt zu haben. An ſolchen Inſtrumenten kann auch die Reibung nicht viel bewirken, denn nach Bohnenberger ändert ſich der Stand eines Barometers, deſſen Röhre 4 P. Linien weit iſt, durch Klopfen nur um 0.03—0.05 L., die eines ſolchen, deſſen Röhre 5 Linien weit iſt, gar nicht mehr.

198. Um ein Barometer transportabel zu machen, und dabei es gegen das Eindringen der Luft in das Queckſilber zu ſchützen, hat man viele ſehr ſinnreiche Einrichtungen vorgeſchlagen. Transportabel wird ein Barometer, wenn man es ſo ſperren kann, daß dem Queckſilber keine Bewegung frei bleibt. Heberbarometer ſucht man mittelſt eines Hahnes, welcher am kürzeren Schenkel in der Nähe der Biegung angebracht iſt, oder mittelſt eines weichen, meiſtens geliederten oder mit Seide umwundenen Stöpſels, der an einer Fiſchbeinſtange befeſtiget iſt, und mittelſt dieſer bewegt werden kann, zu ſperren. Allein durch keines dieſer Mittel erreicht man ſeinen Zweck vollſtändig. Eine Sperre ſoll nicht blos das Queckſilber bei der Temperatur, wo die Sperre angebracht wird, vollkommen einſchließen, ſondern auch ſo viel Elaſticität beſitzen, daß die Sperrung ſelbſt bei minderer Temperatur vollkommen bleibt, und bei höherer nachgibt, und den Druck auf die Röhre nicht zu einer gefährlichen Größe anwachſen läßt. Dieſes aber fehlt bei der Sperre mit Hähnen ganz, bei der Sperre mit Stöpſeln zum Theile. Es iſt kaum möglich, ein Heberbarometer auf eine einfachere Weiſe transportabel zu machen, als dieſes Gay-Luſſac gethan hat.

Sein Barometer ſtellt Fig. 42 dar. Der untere Theil der heberförmigen Röhre beſteht aus einer Thermometerröhre, der kürzere Schenkel iſt oben zugeſchmolzen (oder beſſer blos mittelſt einer Schraube verſchloſſen, um ihn öffnen und reinigen zu können) und hat nur ſeitwärts am oberen Theile eine kleine Öffnung, durch welche wohl die Luft eindringen, aber nicht das Queckſilber herausfließen kann. Will man dieſes Inſtrument weiter transportiren, ſo kehrt man es um. Das Queckſilber, welches im längeren Schenkel enthalten iſt, bleibt in demſelben vor Luft geſichert, weil dieſe nicht in der Thermometerröhre beim Queckſilber vorbeizugehen vermag. Das Queckſilber im kürzeren fällt in den weiteren geſchloſſenen Schenkel hinab und erhält ſich daſelbſt, und ſo iſt ohne weitere Sperre das Inſtrument geſichert und leicht zu transportiren. Will man die Sicherheit noch weiter treiben, ſo kann man Buntens Vorſchlag folgen, und das Inſtrument conſtruiren, wie Fig. 43 zeigt. Da iſt die eigentliche Barometerröhre zweimal mittelſt eines Haarröhrchens unterbrochen, das obere Röhrchen reicht mit dem unteren Ende in das weitere hinein, damit die etwa in dieſen Schenkel gelangende Luft zwiſchen beiden Glaswänden eingeſchloſſen bleibe, und nicht in den leeren Raum eindringen kann. Dieſe Barometer haben den einzigen Nachtheil, daß ſie an der Stelle, wo die ungleich weiten Röhren zuſammengeſchmolzen ſind, leicht brechen, und beim Füllen und Auskochen etwas mehr Gewandtheit fordern, als ein gewöhnliches Heberbarometer. Man kann ſie nur über Feuer, wie ein Thermometer füllen. Das hieſige Muſeum beſitzt zwei nach Gay=Luſſac eingerichtete Barometer, deren jedes ſich in einer nur 6 L. weiten Meſſingröhre befindet, auf welcher die Scale aufgetragen iſt. Solche Barometer geben aber den Luftdruck leicht fehlerhaft an, wenn die Röhre nicht wenigſtens 3 L. weit iſt, weil ſich die Convexität der Säule im offenen Schenkel mit der Temperatur und Feuchtigkeit ändert, und dadurch auch die Gleichheit des Einfluſſes der Capillarität in beiden Schenkeln aufgehoben wird.

Gefäßbarometer werden mittelſt einer am Boden des Gefäßes angebrachten Schraube geſperrt, die ein ledernes Kiſſen hebt, und es an die unten flach abgeſchliffene Röhre ſtark andrückt. Damit ſie beſonders bei weiten Röhren nicht ſo leicht Luft fangen, wird oft die Röhre am unteren Rande etwas zuſammengezogen. Alex. Humboldt hat den unteren Theil der Röhre des Gefäßbarometers aus Eiſen gewählt, in deſſen unterſtes Ende eine Schrau=

benmutter eingedreht, ſo daß ſie ſich mit einer Schraube mit viereckigem Kopf verſchließen läßt. Beim Gebrauche ſenkt man dieſen Theil mit der Schraube zu unterſt gekehrt in ein mit Queckſilber gefülltes Gefäß, welches den Schraubenkopf beim Umdrehen der Röhre feſthält, und ſo das Öffnen der letzteren erleichtert.

199. Nun erübriget noch zu zeigen, auf welche Weiſe man den Stand des Queckſilbers im Gefäße am beſten erkennen, reguliren oder gar von den Bewegungen der Säule in der Röhre unabhängig machen kann. Bei gut eingerichteten Heberbarometern wäre die Bewegung des Queckſilbers im offenen Schenkel der im verſchloſſenen gleich und entgegengeſetzt, wenn beide Schenkel einen gleichen Durchmeſſer hätten, und man würde von den Bewegungen im erſteren ganz abſehen können, und dafür blos die Veränderungen im Stande der Queckſilberſäule im längeren Schenkel doppelt zu nehmen brauchen, wenn es möglich wäre, ſolche Schenkel von vollkommen gleichem Caliber zu erhalten. In Ermanglung ſolcher bleibt nichts übrig, als entweder ſowohl am offenen als am geſchloſſenen Schenkel eine Scale anzubringen, ſo daß beide von demſelben Nullpuncte ausgehen und letztere aufwärts, erſtere abwärts läuft, oder falls man nur eine Scale anwendet, die Röhre oder die Scale zum Verſchieben einzurichten, damit man die Oberfläche des Queckſilbers im kürzeren Schenkel ſtets auf den Nullpunct bringen könne.

Bei Gefäßbarometern hat man mehrere ſehr brauchbare Mittel, den Queckſilberſtand im Gefäß zu reguliren. Das einfachſte beſteht darin, ſeitwärts am Gefäße eine kleine, mit einer Schraube verſchließbare Öffnung anzubringen, und jedesmal, wenn beobachtet werden ſoll und das Barometer bereits ſeinen ruhigen verticalen Stand eingenommen hat, dieſe Schraube zu lüften. Steht das Queckſilber über der Öffnung, ſo wird ſo viel herausfließen, bis es an den unteren Rand der Öffnung reicht; ſteht es unterhalb derſelben, ſo gießt man durch eine andere Öffnung neues Queckſilber nach, bis der Zweck erreicht iſt.

Ein anderes und zwar bequemeres und ſehr genaues Mittel liefert ein coniſcher, vom oberen Deckel des Gefäßes gegen das Queckſilber gewendeter Stift, der mit der Spitze das Queckſilber berühren muß, wenn es den rechten Stand hat. Mittelſt der Sperrſchraube kann man immer den Boden des Gefäßes ſo weit heben oder ſenken, bis dieſes Statt findet. Dieſes Mittel liefert ein

ſehr ſicheres Reſultat, weil man das Stattfinden der Berührung des Queckſilbers an der ſpiegelnden Oberfläche desſelben ſehr genau erkennen kann; leider iſt es nur anwendbar, wenn das Barometer ein gläſernes Gefäß hat, deſſen Gebrechlichkeit in mancher Beziehung Bedenklichkeiten erreget.

Ein anderes bequemes Mittel geben die ſogenannten Schwimmer ab, d. h. cylindriſche mit einem verticalen Stift verſehene Scheibchen, die auf der Queckſilberoberfläche ſchwimmen und aus einem am hervorragenden Stift angebrachten Zeichen den rechten Queckſilberſtand erkennen laſſen. Gegen die Anwendung dieſer Schwimmer iſt zu bemerken, daß ſie beſonders, wenn ſie lange in Queckſilber getaucht ſind und dasſelbe darauf drückt, wie es in geſperrten Inſtrumenten ſtets geſchieht, leicht etwas davon aufnehmen, dadurch ſchwerer werden, und ſich dann weiter einſenken als früher. Für ein Barometer, das einen fixen Stand hat, gibt es gewiß kein beſſeres Regulirungsmittel als den vorher erwähnten coniſchen Stift, für tragbare Gefäßbarometer dürfte es aber wohl am gerathenſten ſeyn, das Queckſilbergefäß genau cylindriſch zu machen, einen gewiſſen Queckſilberſtand als Normalſtand anzunehmen, und für jede ſcheinbare Barometerhöhe die nöthige Correction durch Rechnung zu finden.

Es gibt zwar noch mehrere nicht unwichtige Puncte, auf welche man bei der Einrichtung des Barometers zu ſehen hat, wie z. B. die Mittel, es aufzuhängen oder feſtzuſtellen und den verticalen Stand desſelben zu erkennen, die Queckſilberſäule genau zu meſſen ꝛc.; allein dieſe hat das Barometer mit ſehr vielen Inſtrumenten gemein, und ſie ſind ohnehin Jedermann bekannt, darum iſt auch hier davon nicht die Rede.

B. Gebrauch des Barometers.

200. Wenn man auch am beſten Barometer die Länge der Queckſilberſäule richtig abgeleſen hat, ſo iſt man dadurch doch noch nicht in Kenntniß des Luftdruckes, weil jene Länge auch von der Temperatur und von der Capillarität abhängt, und der Einfluß beider erſt mittelſt einer beſonderen Correction weggeſchafft werden muß. Zuerſt kommt die Reihe an den Einfluß der Capillarität. Dieſen findet man am beſten aus der von Schleiermacher und Eckhart nach Laplace's Formel berechneten Tafel, die man unter Nr. VI. a findet. Die horizontale obere Zeile enthält die Höhe

der Chorde des Meniskus an der Queckſilberoberfläche, die erſte links ſtehende verticale Zeile die Halbmeſſer der Röhre, und die Werthe, auf welche man trifft, wenn man in verticaler und horizontaler Richtung von einem beſtimmten Halbmeſſer und einer beſtimmten Chordenhöhe ausgeht, geben die betreffende Depreſſion der Queckſilberſäule. Eine andere minder genaue Tabelle rührt von Laplace und eine dritte von Bouvard her. Bei dieſen wird aber auf die Chordenhöhe keine Rückſicht genommen. Auch dieſe enthält die Tafel (VI. b)

Bei einem Gefäßbarometer bezieht ſich die Correction wegen der Capillarität nur auf die Scale in der Röhre, bei Heberbarometern muß aber ſowohl die längere als die kürzere Scale corrigirt werden, weil in der Regel jede auf eine andere Weiſe von der Capillarität afficirt wird.

201. Die Correction, wegen der Temperatur des Queckſilbers, wird nach dem Werthe der Formel

$$\frac{b\,t}{5550}$$

veranſtaltet, wo b die beobachtete Barometerhöhe, t die Temperatur des Queckſilbers iſt. Zur Erleichterung der Rechnung folgt unter Nr. VII. die Tabelle, welche dieſe Formel gibt. In der erſten verticalen Spalte ſteht der Wärmegrad, den das Queckſilber im Barometer hat, in der oberſten horizontalen Spalte befinden ſich die Barometerſtände in Millimetern, und zwar von 2 — 2 Millimeter. Die Correction für die in dieſer Tafel nicht vorkommenden Barometerhöhen kann man leicht durch Interpoliren finden, man wird aber auch ſelbſt, wenn eine ſehr hohe Genauigkeit gefordert wird, zum Ziele gelangen, wenn man diejenige Correction nimmt, welche dem Barometerſtande entſpricht, der dem beobachteten am nächſten kommt.

Bei ſehr genauen Beobachtungen des Luftdruckes muß man auch wegen der Ausdehnung der Scale eine Correction anbringen. Man berechnet ſie nach 43. Die Temperatur der Scale gibt ein daran befeſtigtes Thermometer an; ſie iſt von der des Queckſilbers oft verſchieden. Die Temperatur des letzteren gibt nur ein darein getauchtes Thermometer richtig an.

202. Iſt man auch im Beſitze eines in jeder Hinſicht guten Barometers, ſo wird man doch nur dann brauchbare Beobachtungs-

reſultate erhalten, wenn man das Inſtrument gehörig zu behandeln weiß. Vor allem muß man zum Aufſtellen desſelben einen hellen Ort wählen, deſſen Temperatur den wenigſten Veränderungen unterliegt und der keiner Erſchütterung ausgeſetzt iſt. An der Oſt- oder Südſeite wird es daher beſſer ſtationirt ſeyn, als an der Nord- oder Weſtſeite, weil von letzteren die heftigſten Stürme kommen, welche die Queckſilberſäule in beſtändigen Schwankungen erhalten. Der verticale Stand des Inſtrumentes iſt das zweite weſentliche Erforderniß zur Erlangung eines genauen Reſultates. Die meiſten Barometer verſetzen ſich von ſelbſt in dieſe Lage, wenn man ſie frei aufhängt; wo dieſes nicht der Fall iſt, muß ein Bleiloth dieſen Stand finden helfen. Vor jeder Beobachtung ſoll man an die Röhre klopfen, um das Queckſilber in den Stand zu ſetzen, die Adhäſion an das Glas zu überwinden, nur Barometer aus weiten Röhren (mit 5 P. L. Durchmeſſer) können ohne dieſe vorläufige Rectification gebraucht werden.

Siebentes Kapitel.

Das Manometer.

203. Das Manometer hat die Beſtimmung, die jedesmalige Dichte der atmoſphäriſchen Luft anzugeben. Es wirkt wie ein Barometer und Thermometer zugleich, und kann daher das Barometer vertreten, wenn die Lufttemperatur, und das Thermometer, wenn der Luftdruck gegeben iſt. Man kann dieſes Inſtrument auf mehrere Arten einrichten, hier ſoll vom gemeinen, vom Gerſtner'ſchen Manometer und von Prechtl's Baroſcop die Rede ſeyn.

204. Das gemeine Manometer beſteht aus einer wohl calibrirten oder in gleiche Raumtheile getheilten offenen Glasröhre, an deren einem Ende eine hinreichend große Kugel angeblaſen iſt, deren Capacität man kennt. Die Kugel und der untere Theil der Röhre enthalten trockene atmoſphäriſche Luft, und dieſe iſt von der äußeren Luft durch eine leicht verſchiebbare etwa 1 L. lange Queckſilberſäule abgeſperrt. Die eingeſchloſſene Luft ſteht immer, beſonders wenn die Röhre eine horizontale Lage hat, mit der äußeren Luft im Gleichgewichte und ſowohl eine Änderung im Luftdrucke als in der Temperatur bringt eine Änderung im Volumen dieſer Luft,

mithin auch in ihrer Dichte hervor. Nimmt man das Luftvolumen bei 0° C und 0.76 M Luftdruck als Einheit an, und verſieht die Röhre mit einer Scale, aus der ſich das jedesmalige Volumen der Luft abnehmen läßt, ſo hat man leichte Arbeit, um die Dichte der Luft zu finden. Man kann ſtatt der Volumenſcale auch unmittelbar die Dichtenſcale anbringen. Heißt nämlich v_0 das Volumen der Luft im Normalzuſtande, v dasſelbe bei $t°$ und dem Barometerſtande b, ſo iſt bekanntlich

$$v = v_0 \, (1 + 0.00375\, t) \, \frac{0.76}{b}$$

Iſt nun die Dichte, welche dem Volumen v_0 entſpricht, $= 1$, die dem Volumen v entſprechende $= d$, ſo hat man $d = \frac{v_0}{v}$

205. Gerſtners Manometer beſteht aus einem gleicharmigen in gleich ſchwere und ſymmetriſche Theile abgetheilten Wagebalken AB (Fig. 44), der an einem Ende A eine große luftdicht verſchloſſene Glaskugel, am anderen B aber ein metallenes Gegengewicht trägt und mit einem Laufgewichte F verſehen iſt, durch welches man ihn bei jeder Luftdichte in den horizontalen Stand bringt. Dieſer Stand wird durch eine aufgeſetzte Waſſerwage DE angezeigt, der die beſondere Belaſtung G entgegenwirkt, um den Schwerpunct des ganzen Balkens unter ſeine Drehungsaxe zu bringen. Bei Beobachtungen in freier Luft wird das ganze Inſtrument in einen Glaskaſten geſtellt. Hat man ein beſtimmtes Laufgewicht gewählt, ſo handelt es ſich darum, den Werth der Abtheilungen des Balkens kennen zu lernen; hat man aber den Abtheilungen ſchon einen beſtimmten durch die Natur der Wage zuläſſigen Werth beigelegt, ſo muß man vorläufig die Größe des Laufgewichtes beſtimmen. Am zweckmäßigſten dürfte erſteres ſeyn. Um nun zum Ziele zu gelangen, ſey v der Unterſchied zwiſchen dem Volumen der Glaskugel und dem ihres Gegengewichtes, und es ſtehe der Balken horizontal, wenn die Luft die Dichte d hat und kein Laufgewicht auf dem Balken angebracht iſt, oder was dasſelbe bedeutet, wenn das Laufgewicht über der Drehungsaxe ſteht. Bedeutet nun p das Gewicht einer Luftmaſſe unter dem Volumen $= 1$, bei der Normaltemperatur und dem Normalluftdruck, ſo iſt vpd die Differenz der abſoluten Belaſtung der beiden Balkenarme. Geht die Dichte d in d_1 über, ſo beträgt dieſe Differenz vpd_1 und man muß durch das Laufgewicht q der Laſt $vp\,(d_1 - d)$ das Gleichgewicht halten. Iſt die ganze Länge

eines Balkenarmes A, die Entfernung des Laufgewichtes von der Axe a, ſo hat man für den Fall des Gleichgewichtes

$$Avp\,(d_1 - d) = qa$$

und daher

$$a = \frac{Avp}{q}\,(d_1 - d).$$

Setzt man nun für d_1 verſchiedene numeriſche Werthe, ſo erhält man a für dieſelben, und kennt demnach den Werth der Theilung des Balkens. Daß man aus der bekannten Stellung des Laufgewichtes auf d_1, oder wenn man es vorzieht, auf das Gewicht eines Kubikzolls Luft ſchließen kann, iſt für ſich klar. Gerſtner beſtimmt an ſeinem Manometer unmittelbar die Größe dieſes Gewichtes, indem er die Theilung ſeines Wagebalkens ſo ausmittelt: Es ſey das Gewicht eines Kubikzolls Queckſilber bei einem beſtimmten Zuſtande π. Man mißt nun eine Höhe von etwa 100 — 300 Klafter, und beobachtet einigemal an beiden Endpuncten die Barometerhöhe B und b und den Stand des Laufgewichtes auf das genaueſte, heißt die gemeſſene Höhe h, die mittlere Entfernung des Laufgewichtes von der Axe an beiden Endpuncten der gemeſſenen Höhe c; ſo iſt das Gewicht eines Kubikzolls Luft in der Station, wo der Laufer die Stelle c einnimmt, gleich $\frac{B-b}{h}\pi$. Beobachtet man unter anderen Umſtänden die Luftdichte, und findet die Entfernung des Laufgewichtes von der Axe $= c_1$, ſo muß der Luftraum v um $\frac{c_1 - c}{A}q$ mehr oder weniger wiegen als vorhin, und das Gewicht P eines Kubikzolls Luft von $\frac{B-b}{h}\pi$ um die Größe $\frac{c_1 - c}{A} \cdot \frac{q}{v}$ differiren; man hat daher

$$P = \frac{B-b}{h}\pi + \frac{c_1 - c}{A} \cdot \frac{q}{v}.$$

Bei Gerſtners Wage war

$v = 22.05$ K. Z. $c = 53\frac{1}{3}$ L. $\pi = 4195\frac{1}{4}$ Gr.
$h = 350\frac{1}{2}$ Kft. $q = 5\frac{1}{3}$ Lth. $A = 192$ L.

$B - b = 24.6$ L. $= \frac{41}{1440}$ Kft., und daher

$$P = \frac{41.4195\frac{1}{4}}{1440.350\frac{1}{2}} + \frac{c_1 - 53\frac{1}{3}}{192} \cdot \frac{5\frac{1}{3}}{22.05} = 0.274 - \frac{c_1}{794}$$

Setzt man nun für c_1 die Werthe der einzelnen Abtheilungen des Balkens, ſo erhält man die entſprechenden Werthe von P, und

kann demnach eine Tabelle conſtruiren, welche den Werth jeder Stellung des Laufers angibt.

206. Prechtl hat ein auf dem Princip 204 beruhendes und zu demſelben Zwecke führendes Inſtrument Baroſcop genannt. Dieſes beſteht aus einem gläſernen Cylinder (Fig. 45) *ab*, an deſſen Seite ſich ein mit cylindriſchem Gefäße verſehenes, ſehr empfindliches Thermometer befindet. Der gläſerne Cylinder iſt in *b* verſchloſſen, und lauft in *a* in eine engere (0.1 Z. weite) Röhre aus, die mittelſt eines Hahnes verſchloſſen werden kann. Der Cylinder enthält trockene Luft, und dieſe iſt durch die Queckſilberſäule *cd* geſperrt. Das Ganze ruht auf einem Bretchen, das ſich mittelſt Libellen in die horizontale Lage bringen läßt. Auf der Glasröhre iſt die Scale angebracht, die unmittelbar das Volumen der eingeſchloſſenen Luft angibt, von dem man auf ihre Dichte ſchließen kann. Prechtl benützt dieſes Inſtrument zu Höhenmeſſungen ſtatt eines Barometers, indem er das Luftvolumen durch Rechnung auf die Normaltemperatur zurückführt, und aus der Größe dieſes ſo reducirten Volumens den herrſchenden Luftdruck abnimmt.

Siehe hierüber Jahrbücher des polytechniſchen Inſtitutes in Wien 5. 284.

Achtes Kapitel.

Die Luftpumpe.

207. Wiewohl die Einrichtung und der Gebrauch einer Luftpumpe in der Regel jedem bekannt iſt, der ſich nur die erſten Elemente der Phyſik eigen gemacht hat, ſo glaube ich doch jenen, welche dieſes für den Phyſiker ſo wichtige Inſtrument genau kennen lernen wollen, einige practiſche Winke geben zu müſſen.

Die weſentlichen Beſtandtheile einer Luftpumpe ſind bekanntlich der Stiefel, der Kolben, der Hahn oder die Ventile, der Teller und die Communicationsröhren.

208. Der Stiefel wird gewöhnlich aus Metall, ſeltener aus Glas gemacht. Metallene Stiefel beſtehen aus Meſſing, minder gut und auch nur bei den älteſten Pumpen aus Eiſen. Sie werden gegoſſen und dann ausgedreht und ausgeſchliffen; man kann aber auch aus ſehr dicht gezogenen etwa 2 L. dicken Meſſingröhren brauchbare Pumpenſtiefel erhalten. Metallene Stiefel ſind in der Regel minder koſtſpielig als gläſerne, beſonders weil ſie viel leich-

ter zu bearbeiten ſind, dafür ſtehen ſie aber auch erſteren bei weitem nach. Bei gläſernen Stiefeln iſt man der Continuität der Maſſe gewiß, wenigſtens ſieht man jede Stelle, wo ſich etwa eine Blaſe befindet und beim Ausſchleifen eine die Cylinderform ſtörende Erweiterung eintreten kann, ja ſelbſt wenn man bereits den Kolben eingeſetzt hat, ſo erkennt man leicht, ob ſich zwiſchen ihm und dem Stiefel Luft durchzuziehen vermag oder nicht; denn das kleinſte da befindliche Luftbläschen zeigt ſich von außen als glänzender Streifen, der gegen die übrige Farbe des meiſt dunklen Kolbens ſtark abſticht. Bei metallenen Stiefeln kann man nur aus der bereits hervorgebrachten Wirkung auf ihre Güte ſchließen, und muß oft, wenn dieſe gering ausfällt, mühſame Unterſuchungen anſtellen, um das eigentliche Gebrechen des Stiefels aufzufinden. Sie haben häufig Gußlöcher, die, wenn ſie auch vom Künſtler, wie es oft geſchieht, mit Zinn ausgegoſſen werden, nie unterlaſſen, wenigſtens mit der Zeit einen ſchädlichen Einfluß auszuüben. Beſonders hat man von jenen Metallſtiefeln viel zu beſorgen, welche gleich urſprünglich mit ihrer gehörigen Höhe und beinahe mit vollem inneren Durchmeſſer gegoſſen werden. Das gegoſſene Metall iſt nämlich ſtets nur in der Mitte ſeiner Höhe völlig gleichartig und gleichdicht, oben und unten weicht es aber vom Mittelſtücke ab, beſonders wenn die Form vor dem Guß nicht ſehr gut ausgewärmt wurde. Dieſes hat zur Folge, daß ſich ein ſolcher Stiefel oben und unten anders ausſchleift als in der Mitte, und daher ſehr bald unbrauchbar wird, wenn er auch im neuen Zuſtande eine gute Wirkung hervorbrachte. Darum ſoll ein Stiefel ſtets mit doppelter oder gar dreifacher Höhe und mit geringer Hohlung gegoſſen, vom Guſſe aber das Mittelſtück zur Benützung herausgeſchnitten werden.

Sowohl metallene, als gläſerne Stiefel werden ganz offen als Röhren verfertiget und hierauf an das eigens zubereitete mit einer männlichen Schraube verſehene Bodenſtück angeſchraubt. Daß dieſe Schraube wenigſtens 6 tiefe Gewinde haben müſſe und mit dem flachen Rande nicht blos aufgeſchliffen ſeyn dürfe, iſt leicht einzuſehen. Man legt ſtets zwiſchen beide Flächen, die an einander gepreßt werden ſollen, einen Ring aus Leder (Schafleder), den man vorläufig in warmem Öhl und Talg getränkt hat. Die obere Mündung des Stiefels wird meiſtens, bis auf eine kleine Öffnung, durch die Faſſung verſchloſſen, welche das zur Bewegung der Kolbenſtange nöthige Rad und das Getriebe enthält. Sollte dieſes nicht der Fall

ſeyn, ſo muß ein beſonderer Deckel den Schluß des Stiefels bewirken, um ſein Inneres gegen Staub und zu ſtarkes Austrocknen des Öhls zu ſchützen.

209. Der Kolben wird meiſtens aus Leder, ſeltener aus Metall verfertiget. In letzterem Falle wählt man ſtets ein Metall, das gegen den Stoff des Stiefels wenigſtens einigermaßen heterogen iſt, wie z. B. bei Stiefeln aus gelbem Meſſing einen Kolben aus rothem Meſſing, ſetzt den Kolben aus mehreren Lagen einzelner Segmente zuſammen ſo, daß die Fuge zweier Segmente durch ein darauf liegendes ſtets gedeckt wird. Man überzieht ihn gerne mit einem Ledersack (Manſchette) und bewirkt den vollen Schluß, falls er ſich ausgeſchliffen haben ſollte, durch Unterlegung von feinem Papier. Lederne Kolben werden aus Scheiben von Juften, deren man 10 — 20 über einander legt, nachdem ſie mit Öhl und Talg getränkt worden ſind, zuſammengeſetzt. Dieſe Scheiben werden zwiſchen zwei Metallplatten, deren eine mit einer Schraubenſpindel, die andere mit einer Schraubenmutter verſehen iſt, ſtark zuſammengepreßt. Man thut gut, wenn man die Spindel, welche die beiden Platten mit einander verbindet, aus zwei abgeſtumpften Kegeln beſtehen läßt, wie Fig. 46 zeigt. Geht der Kolben zu leicht, ſo braucht man die zwei Platten nur einander zu nähern, und es werden die Lederſcheiben mehr auswärts gedrückt werden. Beſondere Aufmerkſamkeit fordert die Form der Bodenplatte des Kolbens, weil von derſelben die Größe des ſchädlichen Raumes der Hahnluftpumpen abhängt. Einige rathen dieſe Platte nach unten convex oder kegelförmig zu machen, und dem Boden des Stiefels die entſprechende Vertiefung zu geben, und glauben dadurch mit Recht das Anſchließen des Kolbens an den Hahn zu befördern, ohne die zwiſchen dem Hahn und dem Kolben befindlichen Metallſtärke zu ſehr zu ſchwächen. Allein dieſer Vortheil wird durch einen Nachtheil bei weitem überwogen, welcher daraus hervorgeht, daß alles Öhl, das ſo oft abgeriebene Kolbentheile enthält, in die Vertiefung dieſer Bodenhöhlung zuſammenlauft und gar leicht den Hahn ritzt. Darum möchte ich den Künſtlern eher empfehlen, die untere Kolbenplatte zwar convex und den Boden des Stiefels concav zu machen, aber an die Öffnung des Stiefelbodens eine kleine Erhöhung, die gleichſam einen Wall um dieſe Öffnung bildet, und eben ſo am convexen Kolbenſtück eine dieſer Erhöhung entſprechende Vertiefung anzubringen.

210. Mit beſonderer Aufmerkſamkeit müſſen der Hahn oder

die Ventile verfertiget werden. Nie ſoll der Hahn aus demſelben Materiale beſtehen, aus welchem die Baſis des Stiefels beſteht, man darf auch ſeinen Durchmeſſer nicht zu ſehr verkleinern, damit ſeine Bohrungen durch eine ziemlich dicke Metallwand von einander getrennt ſind und kleine Ritze, die gar ſo oft an ſeiner Oberfläche entſtehen, nicht ſo leicht von einem Loch zum anderen reichen.

Ventile werden aus geöhltem Seidenzeug verfertiget und möglichſt leicht gemacht, damit ſie durch eine ſehr geringe Kraft gehoben werden können.

211. Bei der Einrichtung der Verbindungsſtücke zwiſchen dem Stiefel und dem Teller hat man vorzüglich auf gehörige Stärke des Materials zu ſehen. Viele Künſtler glauben, weil eine kleine Bohrung für ſolche Röhren hinreicht, ſo dürfen auch ihre Wände nur ſchwach ſeyn und wählen dazu gar Gußſtücke von mäßiger Dicke; dieſe haben aber meiſtens Gußlöcher, durch welche die Luft eindringt. Es iſt rathſam, ſtets geſchlagenes Metall zu dieſen Stücken zu nehmen, die Wände wenigſtens 3 L. dick zu laſſen und ſie nur im äußerſten Falle aus mehreren Theilen zuſammenzuſchrauben. Immer müſſen an mehreren Stellen Hähne angebracht ſeyn, damit man den Recipienten und die Barometerprobe von dem Stiefel ganz abſperren kann. Dieſe Hähne ſollen ſehr feſt angezogen ſeyn und müſſen, um ſie ohne gar zu große Schwierigkeit drehen zu können, ungewöhnlich lange Lappen bekommen. Daß der Teller mit einer plangeſchliffenen Glasplatte gedeckt ſeyn muß und daß man nur Recipienten mit abgeſchliffenem Rande und mit wenigſtens $1\frac{1}{2}$ L. dicken Wänden brauchen darf, wenn man ohne Lederunterlage eine ſtarke anhaltende Verdünnung der Luft erzielen will, iſt für ſich klar.

212. Bei der Prüfung einer Luftpumpe hat man nebſt der Einfachheit des Baues und der Feſtigkeit desſelben vorzüglich auf die Stärke der Verdünnung und auf die Zeit, durch welche ſie ſich erhalten läßt, zu ſehen. Von einer guten Luftpumpe fordert man, daß das Queckſilber der Barometerprobe auf $\frac{1}{4}$ L. herabgebracht und ſo wenigſtens 24 Stunden lang erhalten werden kann. Läßt ſich die Queckſilberſäule nicht ſo weit herabbringen, ſo iſt entweder der ſchädliche Raum zu groß, oder es hat ſchon während des Verdünnens ein Luftzutritt in den Recipienten Statt gefunden. Ob erſteres oder letzteres der Fall ſey oder ob gar beide Urſachen zuſammenwirken, erſieht man am beſten daraus, ob das Queckſilber nach vollendeter Arbeit ſtehen bleibt oder nicht. Bemerkt man kein ſchnelles Steigen

der Queckſilberſäule, ſo liegt der Grund der geringen Leiſtung der Luftpumpe ohne Zweifel in der Größe des ſchädlichen Raumes. Hat man ſich die Überzeugung verſchafft, daß die Theile der Pumpe nicht luftdicht genug ſchließen, ſo iſt noch zu entſcheiden, wo der Fehler liege. Dieſer Punct macht den Künſtlern oft viel zu ſchaffen und läßt ſich nur dadurch erörtern, daß man einen Theil nach dem andern vom Stiefel und der Barometerprobe abſperrt und die Wirkung auf letztere wieder unterſucht. Zuerſt ſchließt man den Hahn, welcher die Barometerprobe mit dem Recipienten und dem Stiefel in Communication ſetzt, nachdem man die größtmögliche Verdünnung hervorgebracht hat, und beobachtet den Stand der Queckſilberſäule von Zeit zu Zeit. Erhält er ſich unverändert, ſo liegt am Schluſſe dieſes Theils der Luftpumpe kein Fehler, ſteigt er aber, ſo fehlt es entweder am Hahn oder an der Faſſung oder gar an beiden. Durch ſtärkeres Anziehen der Faſſungsſchraube, durch beſſeres Verkitten, das vorläufig nur mit Wachs geſchehen kann und abermaliges Verſuchen erlangt man bald die Überzeugung, an welchen Theil der Alternative man ſich halten müſſe. Oft gibt ſchon der Anblick des Hahnes, an dem man feine Ritze von einer Öffnung zur anderen bemerkt, die nöthige Aufklärung. Hat man die Barometerprobe fehlerfrei gefunden; ſo wird der Recipient nach vollbrachter Luftverdünnung abgeſperrt und wieder die Barometerprobe beobachtet. Hält ſich letztere feſt auf ihrem tiefſten Stand, ſo fehlt es am Rande des Recipienten oder an der Tellerplatte. Durch Unterlegen von Leder, durch Verwechslung des Recipienten mit einem anderen anerkannt beſſeren kommt man dem Fehler bald auf die Spur. Iſt auch dieſer Theil fehlerfrei befunden worden und doch ein Steigen der Barometerprobe bemerklich, ſo kann der Fehler nur am Stiefelkolben oder an der Communicationsröhre liegen. Man ſperre nach möglichſter Luftverdünnung den Stiefel von der Bodenröhre ab, entweder mittelſt eines eigenen Hahnes, oder durch geringes Drehen des Wechſelhahnes und beobachte den Effect wieder, und man wird aus der nun ſich ergebenden Erſcheinung an der Barometerprobe leicht den Schluß ziehen können, ob es an der Communicationsröhre fehle oder nicht. Haben alle dieſe Proben gelehrt, daß der Fehler am Stiefel liege, ſo bleibt nichts übrig, als die Pumpe in Waſſer zu ſtellen, die Luft im Stiefel ſtark zu verdichten und genau nachzuſehen, wo ſich Luftblaſen zeigen. Sind Verbindungsſtellen verdächtig, ſo kann man ſie auch dadurch prü-

fen, daß man ſie mit einer dünnen Lage Öhl überzieht, die Luft verdichtet und darauf achtet, ob ſich daſelbſt Luftblaſen zeigen oder nicht. Statt des Öhles kann man auch Seifenwaſſer nehmen.

Oft geſchieht es, daß bei einer Pumpe bald nach der Luftverdünnung ein merkliches Steigen der Barometerprobe eintritt, das aber unterbleibt, wenn man durch ein Paar Kolbenzüge die hinzugetretene Luft wieder entfernt. Daran ſind poröſe, in der verdünnten Luft befindliche Subſtanzen z. B. Holz, Schuld, welche die in ihren Zwiſchenräumen enthaltene Luft ſehr langſam fahren laſſen und deren Gebrauch daher ſorgfältigſt vermieden werden muß.

Wenn man unterhalb des Recipienten Waſſer oder noch mehr, wenn man Schwefeläther oder eine andere flüchtige Subſtanz verdünſten ließ, ſo kann man oft mit der beſten Pumpe nicht mehr die Verdünnung hervorbringen, welche ſie ſonſt erlaubt. Allein dadurch darf man ſich nicht beirren laſſen, denn nach einiger Zeit kehrt die vorige Kraft der Pumpe wieder zurück, man kann aber dieſe Rückkehr dadurch beſchleunigen, daß man unter den Recipienten in verdünnte Luft eine Subſtanz gibt, welche die Dünſte, deren Wirkung ſo hinderlich iſt, abſorbirt.

213. Zum Beſchluß mag die Beſchreibung einer Luftpumpe folgen, welche ſich durch ihren Bau und ihre Leiſtung beſonders auszeichnet. Sie iſt eine einfache Hahnluftpumpe, welche für das hieſige Muſeum in der Werkſtatt des Univerſitätsmechanikers Hanaczik verfertiget wurde, und in Fig. 47 *A*, *B*, *C* perſpectiviſch und im zweifachen Durchſchnitt dargeſtellt iſt. Sie hat einen gläſernen Cylinder von 12 Zoll Höhe, einen inneren Durchmeſſer von 4 Zoll und eine Wanddicke von 3 L. Der Kolben iſt aus zwei Metallplatten und 12 Juftenſcheiben zuſammengeſetzt; die Kurbel dient zugleich zur Bewegung des Kolbens und des Hahnes, ohne dazu einer beſonderen Vorrichtung zu bedürfen. Der Teller iſt mit einer ebenen Glasplatte belegt und hat 10 Zoll im Durchmeſſer. Alle Metallſtücke beſtehen aus Meſſing mit Ausnahme der Schrauben und der Welle mit dem Getriebe, welche aus Eiſen verfertiget ſind. Dieſe Luftpumpe verbindet mit einem ſehr eleganten Äußeren eine ungemeine Einfachheit und Güte. Es iſt mir ſchon gelungen, das Queckſilber in der Barometerprobe auf $\frac{1}{4}$ L. herabzubringen und es ſo durch 24 St. zu erhalten.

Zweiter Abſchnitt.

Gleichgewicht der Kräfte an Körpern.

Erſtes Kapitel.

Zuſammenſetzung und Zerlegung der Kräfte.

1. Es ſeyen X, Y, Z (Fig. 48) drei Kräfte, deren Richtungen auf einander ſenkrecht ſtehen und drei rechtwinkeligen Coordinatenaxen parallel ſind. Heißt man ihre Reſultirende R, und die Winkel, welche ſie der Ordnung nach mit den Richtungen von X, Y, Z macht, A, B, C; ſo iſt offenbar R die Diagonale des Parallelepipeds, welches in demſelben Sinn das Kräftenparallelepiped heißen kann, wie ſonſt der Ausdruck Kräftenparallelogram gebraucht wird.

Iſt nämlich O der Angriffspunct der drei Kräfte und zugleich der Anfangspunct der Coordinaten, Ox die Richtung und Größe der X, Oy und Oz die der Y und Z, und man conſtruirt das Parallelogramm $AOzB$; ſo iſt OB die Reſultirende von X, Y, Z und zugleich die Diagonale des Parallelepipeds $OxAyzB$, weil

$$OA^2 = Ox^2 + Oy^2;\ OB^2 = OA^2 + Oz^2$$

und darum

$$OB^2 = Ox^2 + Oy^2 + Oz^2 \text{ oder } R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

iſt. Auch hat man:

$$\cos A = \frac{X}{R},\ \cos B = \frac{Y}{R},\ \cos C = \frac{Z}{R}.$$

Es iſt alſo R der Richtung und Größe nach gegeben.

Man ſieht leicht ein, daß man durch ein umgekehrtes Verfahren eben ſo jede Kraft R in drei rechtwinkelige X, Y, Z zerlegen kann, indem man ſie als Diagonale eines Kräftenparallelepipeds betrachtet. Die Seiten desſelben geben dann die Partialkräfte an.

2. Sucht man die Reſultirende mehrerer Kräfte, die einerlei Angriffspunct haben und nicht in derſelben Ebene liegen, ſo denket man ſich jede derſelben in drei andere zerlegt, die den

drei rechtwinkeligen Coordinatenaxen parallel ſind. Dadurch erhält man drei Syſteme von Kräften, wovon die zu demſelben Syſteme gehörigen parallele Richtungen haben, deren Reſultirende ihrer algebraiſchen Summe gleich iſt. Auf dieſe Weiſe werden alle Kräfte auf drei reducirt, welche auf einander ſenkrecht ſtehen und deren Reſultirende nach (1) beſtimmt wird.

Sind die gegebenen Kräfte P, P_1, P_2 ꝛc. die Winkel, welche ſie mit der Axe der x einſchließen, der Ordnung nach a, a_1, a_2, die, welche ſie mit den Axen der y und z bilden, b, b_1, b_2 ꝛc. c, c_1, c_2 ꝛc.; ſo iſt klar, daß P in $P\cos a$, $P\cos b$, $P\cos c$ zerfällt. Eben ſo zerfallen P_1, P_2 ꝛc. in die Partialkräfte $P_1 \cos a_1$, $P_1 \cos b_1$, $P_1 \cos c_1$; $P_2 \cos a_2$, $P_2 \cos b_2$, $P_2 \cos c_2$ ꝛc. Heißt X die Reſultirende aller mit x parallelen und eben ſo Y und Z die Reſultirende der mit y und z parallelen Kräfte, ſo erhält man:

$$X = P\cos a + P_1 \cos a_1 + P_2 \cos a_2 \ldots\ldots$$
$$Y = P\cos b + P_1 \cos b_1 + P_2 \cos b_2 \ldots\ldots$$
$$Z = P\cos c + P_1 \cos c_1 + P_2 \cos c_2 \ldots\ldots$$

und für die Reſultirende R aller dieſer Kräfte

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$$

3. Das bisherige Verfahren, wodurch man zur Kenntniß der Reſultirenden einer endlichen Anzahl von Kräften gelangt, kann man auch auf den Fall anwenden, wo unendlich viele Kräfte, deren Angriffspuncte ſtetig neben einander liegen, gegeben ſind. Der einzige Unterſchied, welcher da gegen vorhin eintritt, iſt, daß man ſtatt der bisher gebrauchten Summen Integralien anwenden muß. Auf dieſem Wege berechnet man die Größe der Anziehung, welche ein Körper auf einen außerhalb oder innerhalb ſeines äußeren Umfanges liegenden Punct ausübt, oder die Größe der Anziehung, mit der zwei Körper auf einander wirken.

Man nehme im anziehenden Körper (Fig. 49) einen Punct m an, deſſen rechtwinkelige, auf die Axen Ox, Oy, Oz bezogenen Coordinaten x, y, z ſind. Läßt man x in $x + dx$ und eben ſo y und z in $y + dy$, $z + dz$ übergehen und denkt ſich durch x, y, z und eben ſo durch den von $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ beſtimmten Punct mit den Coordinatenaxen parallele Ebenen gezogen; ſo ſchließen dieſe ein Element des Körpers ein, deſſen Volumen $dx\,dy\,dz$ und deſſen Maſſe $dm = \sigma\,dx\,dy\,dz$ iſt, wenn man ſeine Dichte σ nennt. Nimmt man aber dieſe Dichte als Ein-

heit an, ſo iſt $dxdydz$ zugleich die Maſſe des beſchriebenen Elementes.

Heiße nun ε die Kraft, womit die Maſſe $=1$ in einen Punct vereinigt gedacht, auf den angezogenen Punct B wirkt, ſo iſt die anziehende Kraft der Maſſe dm gleich εdm. Die Richtung dieſer Kraft iſt durch die gerade Linie v gegeben, die vom angezogenen Punct zur ziehenden Maſſe dm geführt wird. Sind α, β, γ die rechtwinkeligen Coordinaten des angezogenen Punctes, ſo iſt

$$v = \sqrt{[(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2]}.$$

Obige Kräfte εdm laſſen ſich in drei andere mit den Coordinatenaxen parallele zerlegen, wofür man Ausdrücke erhält, wenn man εdm mit den Coſinuſſen der Winkel multiplicirt, welche die Richtung der Hauptkraft mit α, β, γ macht. Dieſe Coſinuſſe ſind aber der Ordnung nach

$$\frac{\alpha - x}{v}, \quad \frac{\beta - y}{v}, \quad \frac{\gamma - z}{v} \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{d\alpha}, \quad \frac{dv}{d\beta}, \quad \frac{dv}{d\gamma}$$

und daher die Partialkräfte

$$\varepsilon dm \, \frac{(\alpha - x)}{v}, \quad \varepsilon dm \, \frac{(\beta - y)}{v}, \quad \varepsilon dm \, \frac{(\gamma - z)}{v}$$

oder

$$\varepsilon dm \, \frac{dv}{d\alpha}, \quad \varepsilon dm \, \frac{dv}{d\beta}, \quad \varepsilon dm \, \frac{dv}{d\gamma}.$$

Drückt man die Anziehung, welche der ganze Körper auf B ausübt, nach der Richtung jeder der drei Coordinatenaxen durch X, Y, Z aus; ſo hat man:

$$X = \iiint \varepsilon dm \, \frac{dv}{d\alpha}, \quad Y = \iiint \varepsilon dm \, \frac{dv}{d\beta},$$
$$Z = \iiint \varepsilon dm \, \frac{dv}{d\gamma},$$

wo ſich eines der Integralzeichen auf x, das andere auf y, das dritte auf z bezieht und alle drei Integrationen auf die ganze Maſſe m auszudehnen ſind. Kennt man einmal X, Y, Z, ſo läßt ſich ihre Reſultirende leicht beſtimmen.

4. Die bekannten **Naturkräfte** ſind ohne Ausnahme Functionen des Abſtandes v des angezogenen Punctes vom anziehenden. Setzt man demnach allgemein $\varepsilon = \varphi(v)$, wo φ die Function bezeichnet, welche für jede einzelne Kraft insbeſondere beſtimmt werden muß, ſo hat man

$$X = \iiint dm\ \varphi(v)\ \frac{dv}{d\alpha}$$

$$Y = \iiint dm\ \varphi(v)\ \frac{dv}{d\gamma}$$

$$Z = \iiint dm\ \varphi(v)\ \frac{dv}{d\gamma}$$

oder wenn man

$\int \varphi(v)\, dv = \varphi_1(v)$ und $\iiint dm\, \varphi_1(v) = V$ ſetzt:

$$X = \frac{dV}{d\alpha},\ Y = \frac{dV}{d\beta},\ Z = \frac{dV}{d\gamma} \ldots\ldots (A).$$

Es iſt demnach die Anziehung nach einer der drei Coordinatenaxen gleich dem partiellen Differenzialquotienten der Größe V.

5. Oft wird die Auflöſung eines Attractionsproblemes durch Einführung von **Polarcoordinaten** bedeutend erleichtert. Da wir es mit ſolchen Problemen in der Folge zu thun haben werden, ſo wollen wir die Anziehung einer homogenen Kugel durch Polarcoordinaten ausdrücken.

Es ſey O (Fig. 50) der Mittelpunct dieſer Kugel, und zugleich der Anfangspunct der Coordinaten, B ein anziehender, A ein angezogener Punct, $OA = \rho$, $OB = r$, $BA = v$, ferner heiße der Winkel AOB, welchen ρ mit r macht, δ, und der Winkel, welchen die Ebene BOA mit einer fixen Ebene z. B. mit der vorigen Ebene xy macht, ω. Gehen nun r, δ, ω in $r + dr$, $\delta + d\delta$, $\omega + d\omega$ über, ſo liegt zwiſchen den Puncten, welche r, δ, ω, und $r + dr$, $\delta + d\delta$, $\omega + d\omega$ begrenzen, ein Körperſtück, das als rechtwinkeliges Parallelepiped angeſehen werden kann. Die Dimenſionen dieſes Elementes ſind 1) die Größe dr, 2) ein Kreisbogen, welcher zwiſchen den Schenkeln des Winkels $d\delta$ liegt und aus O mit dem Radius r beſchrieben iſt, mithin die Größe $r\,d\delta$ hat, 3) ein Kreisbogen $d\omega$, welcher $r \sin\delta$ zum Halbmeſſer hat, mithin gleich $r \sin\delta\, d\omega$ iſt. Man hat daher, wenn man die Dichte dieſes Elementes wieder zur Einheit nimmt,

$$dm = dr \,.\, r\,d\delta \,.\, r\sin\delta\, d\omega = r^2 \sin\delta\, d\delta\, dr\, d\omega,$$

mithin, wenn man die ganze Anziehung, welche von O nach A gerichtet iſt, R nennt,

$$R = \iiint r^2 \sin\delta\, dr\, d\delta\, d\omega \,.\, \varphi(v)\, \frac{dv}{d\rho} \ldots\ldots (B).$$

Die Größe $\frac{dv}{d\rho}$ iſt aus der Gleichung

$$v^2 = \rho^2 - 2r\rho\cos\delta + r^2$$

leicht zu beſtimmen und es wird

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{\rho - r\cos\delta}{v}.$$

6. Will man nach dieſer Formel einen Ausdruck für die anziehende Kraft R finden, welche eine gleichförmig dichte Kugel auf einen außerhalb oder innerhalb ihrer Grenzen liegenden Punct ausübt, ſo braucht man nur die Integration des obigen Werthes von R von $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$, von $\delta = 0$ bis $\delta = \pi$ und von $r = 0$ bis $r = r$, vorausgeſetzt, daß r der Halbmeſſer der Kugel iſt, auszudehnen. Setzt man $\varphi(v)\frac{dv}{d\rho} = \frac{d\varphi_1(v)}{d\rho}$, ſo hat man

$$R = d.\iiint r^2 \sin\delta\, dr\, d\delta\, d\omega\, \frac{\varphi_1(v)}{d\rho},$$

oder wenn man nach ω integrirt,

$$R = 2\pi d \iint r^2 \sin\delta\, dr\, d\delta\, \frac{\varphi_1(v)}{d\rho}.$$

Aus obigem Werthe von v^2 erhält man durch Differenziiren nach δ, $\frac{v\,dv}{d\delta} = r\rho\sin\delta$ oder $r\sin\delta = \frac{v\,dv}{\rho\, d\delta}$. Setzt man dieſen Werth in die vorhergehende Gleichung, und bedenket, daß ρ von r, ω, δ unabhängig iſt, ſo erhält man

$$R = 2\pi\, \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\iint r\,dr\,v\,\varphi_1(v)\frac{dv}{d\delta}\,d\delta\right)}{d\rho}.$$

Setzt man wieder

$$\int v\varphi_1(v)\,dv = \varphi_2(v) \text{ oder } v\,\varphi_1(v)\,\frac{dv}{d\delta} = \frac{d\varphi_2(v)}{d\delta}$$

ſo hat man

$$R = 2\pi\, \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\iint r\,dr\,.\,\frac{d\varphi_2(v)}{d\delta}\,d\delta\right)}{d\rho}.$$

Integrirt man nun nach δ und bedenkt, daß man für $\delta = 0$ und einen außerhalb der Kugel liegenden Punct $v = \rho - r$, für einen innerhalb derſelben liegenden Punct aber $v = r - \rho$, und für $\delta = \pi$, in beiden Fällen $v = \rho + r$ hat; ſo findet man

$$R = 2\pi \,. \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\int r\,dr\,[\varphi_2(\rho+r) - \varphi_2(\pm\rho\mp r)]\right)}{d\rho} \;.. \; (C)$$

wo die oberen Zeichen für einen äußeren, die unteren für einen inneren Punct gelten. Man kann demnach ſagen, die Anziehung einer Kugelſchale werde ausgedrückt durch das mit $d\rho$ getheilte nach der Variablen ρ genommene Differenzial von

$$\frac{2\pi r\,dr}{\rho}\,[\varphi_2(\rho+r) - \varphi_2(\pm\rho\mp r)].$$

Wird in dieſer Gleichung $\int d\rho\,\varphi_2(\rho) = \psi(\rho)$ und $\int d\rho\,\psi(\rho) = \psi_1(\rho)$ geſetzt, ſo erhält man für einen außer oder inner der Kugel liegenden Punct

$$R = \frac{2\pi r}{\rho} \cdot \frac{d^2}{dr}\left(\frac{\psi_1(\rho+r) - \psi_1(\pm\rho\mp r)}{d\rho}\right),$$

oder was daſſelbe iſt,

$$R = 2\pi r^2 \frac{d^2}{dr\,d\rho}\left(\frac{\psi_1(\rho+r) - \psi_1(\pm\rho\mp r)}{\rho r}\right).$$

7. Bei allen Naturkräften, für welche man $\varphi(v)$ kennt, hat man

$$\varphi(v) = \frac{1}{v^2}.$$

Für dieſe Vorausſetzung erhält man:

$$\varphi_1(v) = \int\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{v},\ \varphi_2(v) = -\int dv = -v$$

und daher

$$\varphi_2(\rho+r) - \varphi_2(\rho-r) \quad = -(\rho+r) + (\rho-r) = -2r$$
$$\varphi_2(\rho+r) - \varphi_2(-\rho+r) = -(\rho+r) - (\rho-r) = -2\rho$$

mithin für einen äußeren Punct

$$R = \frac{4r^3\pi}{3\rho^2}.$$

Wird die Integration innerhalb der Grenzen $r = r_1$, $r = r_2$ vorgenommen, ſo bekommt man die Anziehung für eine Hohlkugel, deren innerer Halbmeſſer r_1, deren äußerer r_2 iſt, den Ausdruck

$$R = \frac{4\pi}{3\rho^2}\,(r_2^3 - r_1^3).$$

$\frac{4\pi r^3}{3}$ iſt die Maſſe einer Kugel vom Halbmeſſer r und der Dichte $= 1$. Sucht man die Anziehung einer ſolchen Maſſe in einen Punct ver-

eint gedacht, auf einen materiellen Punct in der Entfernung ρ, ſo findet man denſelben Ausdruck wie oben, zum Beweis, daß eine Kugel in der Vorausſetzung des vorhin angenommenen Attractionsgeſetzes auf einen außer ihr liegenden Punct ſo wirkt, als wenn ihre ganze Maſſe in ihrem Centrum vereint wäre.

8. Richtet man die in (4) gefundenen Werthe von X, Y, Z (A) für den Fall ein, daß $\varphi(v) = \frac{1}{v^2}$ iſt, ſo erhält man

$$X = \frac{dV}{d\alpha} = \iiint dm\, \frac{(\alpha - x)}{v^3}$$

$$Y = \frac{dV}{d\beta} = \iiint dm\, \frac{(\beta - y)}{v^3}$$

$$Z = \frac{dV}{d\gamma} = \iiint dm\, \frac{(\gamma - \alpha)}{v^3},$$

folglich auch

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \iiint dm \left(\frac{1}{v^3} - \frac{3\,(a - x)^2}{v^5}\right)$$

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = \iiint dm \left(\frac{1}{v^3} - \frac{3\,(\beta - y)^2}{v^5}\right)$$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = \iiint dm \left(\frac{1}{v^3} - \frac{3\,(\gamma - z)^2}{v^5}\right)$$

und wenn man alle drei Werthe addirt:

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0 \;.\;.\;.\;.\; (D).$$

Dieſe Gleichung läßt ſich wieder durch Einführung von Polarcoordinaten umſtalten. Es ſey ρ die Axe, δ der Winkel, welchen ſie mit x macht, ω derjenige, den die Ebene von ρ, x mit der Ebene xy bildet, und man hat

$$\alpha = \rho\cos\delta, \quad \beta = \rho\sin\delta\cos\omega, \quad \gamma = \rho\sin\delta\sin\omega$$

$$\rho = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}, \; \cos\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}},$$

$$\text{tang}\,\omega = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Weil V eine Function von α, β, γ und dadurch auch von x, δ, ω iſt, ſo hat man:

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{dV}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{d\alpha} + \frac{dV}{d\delta}\cdot\frac{d\delta}{d\alpha} + \frac{dV}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\alpha}.$$

Es iſt aber auch

$$\frac{d\rho}{d\alpha}=\frac{\alpha}{\rho}=\cos\delta,\ \frac{d\delta}{d\alpha}=-\frac{\sin\delta}{\rho},\ \frac{d\omega}{d\alpha}=0$$

und daher

$$\frac{d^2\rho}{d\alpha^2}=\frac{\sin\delta^2}{\rho},\ \frac{d^2\delta}{d\alpha^2}=\frac{2\sin\delta\cos\delta}{\rho^2},\ \frac{d^2\omega}{d\alpha^2}=0.$$

Durch weiteres Differenziiren dieſer Gleichung erhält man:

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}=\frac{d^2V}{d\rho^2}\cos\delta^2+\frac{d^2V}{d\delta^2}\cdot\frac{\sin\delta^2}{\rho^2}-\frac{2d^2V}{d\rho d\delta}\cdot\frac{\cos\delta\sin\delta}{\rho}$$
$$+\frac{dV}{d\rho}\cdot\frac{\sin\delta^2}{\rho}+\frac{2dV}{d\delta}\cdot\frac{\sin\delta\cos\delta}{\rho^2}.$$

Sucht man auf gleiche Weiſe $\frac{d^2V}{d\beta^2}$, $\frac{d^2V}{d\gamma^2}$ und ſubſtituirt alle drei Werthe in (D), ſo erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\frac{d^2V}{d\rho^2}\cdot\rho^2+\frac{d^2V}{d\delta^2}+\frac{d^2V}{d\omega^2}\cdot\frac{1}{\sin\delta^2}+\frac{dV}{d\rho}2\rho+\frac{dV}{d\delta}\cdot\frac{\cos\delta}{\sin\delta}=0\ (a).$$

Es iſt aber $\frac{d^2V}{d\rho^2}\rho^2+\frac{dV}{d\rho}\cdot 2\rho=\rho\frac{d^2.rV}{d\rho^2}$, ferner wenn man $\cos\delta=\mu$ ſetzt, $\frac{d\mu}{d\delta}=-\sin\delta=-\sqrt{(1-\mu^2)}$, $\frac{d^2\mu}{d\delta^2}=-\mu$,

$$\frac{dV}{d\delta}=\frac{dV}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\delta}=-\frac{dV}{d\mu}\cdot\sqrt{(1-\mu^2)} \text{ und daher}$$

$$\frac{d^2V}{d\delta^2}=\frac{d^2V}{d\mu^2}\frac{d\mu^2}{d\delta^2}+\frac{dV}{d\mu}\cdot\frac{d^2\mu}{d\delta^2}=\frac{d^2V}{d\mu^2}(1-\mu^2)-\frac{dV}{d\mu}\cdot\mu$$

mithin

$$\frac{d^2V}{d\delta^2}+\frac{dV}{d\delta}\cdot\frac{\cos\delta}{\sin\delta}=\frac{d^2V}{d\mu^2}(1-\mu^2)-\frac{dV}{d\delta}\cdot 2\mu=$$
$$=\frac{d\left((1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu}\right)}{d\mu},$$

mithin aus (a)

$$\frac{d\left((1-\mu^2)\frac{dV}{d\delta}\right)}{d\mu}+\frac{\frac{d^2V}{d\omega^2}}{1-\mu^2}+\rho\frac{d^2.\rho V}{d\rho^2}=0\ \ldots\ (E).$$

9. Beſtimmt man den Werth von $V=dm\,\varphi_1(v)$ nach der Vorausſetzung $\varphi(v)=\frac{1}{v^2}$, ſo erhält man wegen $\varphi_1 v=-\frac{1}{v}$

$$V = -\iiint \frac{dm}{v}$$

oder weil $v^2 = \rho^2 - 2x\rho\cos\delta + x^2$ iſt,

$$V = -\iiint \frac{dm}{\sqrt{(\rho^2 - 2x\rho\cos\delta + x^2)}}.$$

Hieraus iſt zu entnehmen, daß man auch für v eine Gleichung von der Form (E) bekommen muß, und daß man hat:

$$\frac{d\left((1-\mu^2)\frac{dv}{d\delta}\right)}{d\mu} + \frac{\frac{d^2 v}{d\omega^2}}{1-\mu^2} + x\,\frac{d^2 x v}{dx^2} = 0 \ldots (F).$$

10. Die Größe $\frac{1}{\sqrt{(\rho^2 + x^2 - 2x\rho\cos\delta)}}$ läßt ſich bekanntlich in eine Reihe auflöſen, deren Glieder Functionen von δ ſind.

Es ſey nun

$$\frac{1}{v} = \frac{U_0}{x} + \rho\,\frac{U_1}{x^2} + \rho^2\,\frac{U_2}{x^3} \;\ldots\; \rho^n\,\frac{U_n}{x^{n+1}}.$$

Sucht man hieraus $\frac{dv}{d\delta}$, $\frac{d^2 v}{d\omega^2}$, $\frac{d^2 x v}{dx^2}$, ſubſtituirt dieſe Werthe in die Gleichung (F), ſo erhält man:

$$\frac{d\,(1-\mu^2)\,\frac{dU_n}{d\mu}}{d\mu} + \frac{\frac{d^2 U_n}{d\omega^2}}{1-\mu^2} + n\,(n+1)\,U_n = 0.$$

Es gilt daher die Gleichung von der Form (F) nicht blos von v, ſondern auch von den Coefficienten obiger Reihe, welche die Laplace'ſchen Coefficienten genannt werden. Setzt man $\cos\delta = \gamma$, ſo wird $v^2 = \rho^2 - 2x\rho\gamma + x^2$ und man erhält zugleich:

$$\frac{d.\frac{1}{v}}{dx} = -\frac{(x-\gamma\rho)}{v^3}, \quad \frac{d.\frac{1}{v}}{d\gamma} = \frac{x\rho}{v^3}$$

$$\frac{d^2.\frac{1}{v}}{dx\,d\rho} = \frac{3\,(x-\gamma\rho)\,(\rho-\gamma x) + \gamma v^2}{v^5}$$

$$\frac{d\,(1-\gamma^2)\,\frac{d.\frac{1}{v}}{d\gamma}}{d\gamma} = x\rho\,.\,\frac{3\,(1-\gamma^2)\,x\rho - 2\gamma v^2}{v^5}$$

woraus man ſieht, daß man hat:

$$x\rho \cdot \frac{d^2 \cdot \frac{1}{\nu}}{dx\,d\rho} - \frac{d(1-\gamma^2)\frac{d\frac{1}{\nu}}{d\gamma}}{d\gamma} = 0 \;\ldots\ldots\; (G).$$

Sucht man die Werthe von $\frac{d\cdot\frac{1}{\nu}}{d\gamma}$ ꝛc., indem man $\frac{1}{\nu}$ durch obige Reihe ausdrückt, und ſubſtituirt ſie in den vorhergehenden Ausdruck, ſo erhält man:

$$\frac{d(1-\gamma^2)\frac{dU_n}{d\gamma}}{d\gamma} + n(n+1)\,U_n = 0.$$

11. Sind U_n und U_m Glieder von Reihen, wie die, wodurch $\frac{1}{\nu}$ ausgedrückt wurde; ſo iſt

$$\frac{d\left((1-\mu^2)\frac{dU_n}{d\mu}\right)}{d\mu} + n(n+1)\,U_n = 0$$

$$\frac{d\left((1-\mu^2)\frac{dU_m}{d\mu}\right)}{d\mu} + m(m+1)\,U_m = 0$$

Sucht man aus der erſteren Gleichung U_n, multiplicirt ſie durch $U_m\,d\mu$ und integrirt hierauf theilweiſe; ſo wird:

$$\int U_n U_m\,d\mu = -\frac{1}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dU_n}{d\mu}\,U_m + \\ + \frac{1}{n(n+1)}\int(1-\mu^2)\frac{dU_n}{d\mu}\cdot\frac{dU_m}{d\mu}\,d\mu$$

oder durch noch weiter fortgeſetztes Integriren

$$\int U_n U_m\,d\mu = -\frac{1}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dU_n}{d\mu}\cdot U_m + \\ + \frac{1}{n(n+1)}(1-\mu^2)\frac{dU_m}{d\mu}\,U_n \\ - \frac{1}{n(n+1)}\int\frac{d(1-\mu^2)\frac{dU_m}{d\mu}}{d\mu}\,U_n\,d\mu.$$

Aber nach der zweiten der obigen Gleichungen hat man:

$$\int \frac{d\,(1-\mu^2)\,\frac{dU_m}{d\mu}}{d\mu}\,U_n\,d\mu = -m(m+1)\int U_m\,U_n\,d\mu;$$

ferner verſchwinden die zwei erſten Theile des zweiten Gliedes, wenn die Integration innerhalb der Grenzen $\mu = -1$ und $\mu = 1$ vollzogen wird, und daher iſt

$$\int U_n\,U_m\,d\mu = \frac{m(m+1)}{n(n+1)}\int U_n\,U_m\,d\mu,$$

woraus hervorgeht, daß dieſes Integrale $= 0$ ſeyn muß; ſobald man nicht hat $m = n$.

12. Bei allen dieſen Sätzen wird ein phyſiſcher Körper als ein Continuum betrachtet und auf den Abſtand ſeiner Theile von einander gar keine Rückſicht genommen. So lange man es mit Kräften zu thun hat, die außer einer ſolchen Maſſe ihren Sitz haben, mag dieſe Art, die Sache zu betrachten, zu Geſetzen führen, die ſich wirklich in der Erfahrung nachweiſen laſſen, weil man ſich eine Maſſe bei dieſer Vorausſetzung wohl auch ſo vorſtellen kann, daß ſie den Raum, welchen ſie einzunehmen ſcheint, wirklich ſtettig erfüllt, aber mit einer Intenſität, die ihrer Dichte angemeſſen iſt. Sobald es ſich aber um die Kräfte handelt, mit denen die Theile der Körper auf einander wirken, darf man ſie nicht mehr als Continuum betrachten. Deßhalb werden auch alle bisherigen Formeln, bei denen von der Wirkung eines Elementes auf die Wirkung des Ganzen unmittelbar durch Integriren geſchloſſen wurde, mehr oder weniger mangelhaft ſeyn, ſondern man wird von einem Elemente durch endliche Summen auf das Ganze übergehen und dann erſt ſuchen müſſen, dieſe auf Integralien zu reduciren. Dieſe wichtige Arbeit hat zuerſt Poiſſon unternommen, und in einem ſehr ausführlichen Mémoire (Mém. de l'Acad. des sciences Tom. VIII. Paris 1829) die Formeln entwickelt, welche die aus der Mollecularwirkung entſpringenden Kräfte darſtellen, und zugleich daraus die Geſetze des Gleichgewichts und der Bewegung der kleinſten Theile feſter Körper abgeleitet. Von dieſer ungemein ſcharfſinnigen Arbeit iſt das Folgende entlehnt.

13. Man nehme an, der Abſtand der kleinſten Theile eines Körpers ſey nach allen Seiten gleich groß und dieſe Theile wirken vermöge der ihnen inwohnenden Anziehungskraft oder mittelſt der abſtoßenden Kraft der Wärme auf einander ſo, daß ſich die Wirkung

jedes Theilchens auf mehrere andere erſtreckt (d. i. daß der Halbmeſſer ſeiner Wirkungsſphäre viel größer iſt, als der Abſtand je zweier Theilchen von einander), aber doch in einer beſtimmten Entfernung von ihrem Sitze ſehr ſchnell abnimmt.

Unter dieſen Vorausſetzungen denke man ſich einen Körper von beſtimmter Geſtalt, laſſe äußere Kräfte auf ihn wirken, damit er eine Änderung ſeiner Geſtalt erleide und die Entfernung der Theile von einander vergrößert oder verkleinert werde, und ſuche für dieſen neuen Zuſtand die Wirkung, die ein Theil dieſes Körpers auf den anderen ausübt.

Es ſey nun m (Fig. 51) ein Punct dieſes Körpers, m' ein anderer und $m_{,}$ ein dritter, auf welchen Puncte der zu betrachtenden Maſſe wirken. Die rechtwinkeligen Coordinaten von m ſeyen im natürlichen Zuſtande x, y, z und nachdem ſich die Geſtalt des Körpers geändert hat, $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$; eben ſo ſeyen $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ die Coordinaten von m' im erſteren, $x+x'+\alpha'$, $y+y'+\beta'$, $z+z'+\gamma'$ dieſelben im zweiten Zuſtande. Liegt m' in der Wirkungsſphäre von m, ſo ſind x', y', z' nur ſehr kleine Größen und man kann ſetzen:

$$\alpha' = \alpha + x'\frac{d\alpha}{dx} + y'\frac{d\alpha}{dy} + z'\frac{d\alpha}{dz}$$

$$\beta' = \beta + x'\frac{d\beta}{dx} + y'\frac{d\beta}{dy} + z'\frac{d\beta}{dz}$$

$$\gamma' = \gamma + x'\frac{d\gamma}{dx} + y'\frac{d\gamma}{dy} + z'\frac{d\gamma}{dz}.$$

Man lege nun durch m drei andere rechtwinkelige Coordinatenaxen, ſo daß die Axe der z durch $m_{,}$ geht, nenne x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punctes m' in Beziehung auf dieſelben; a, b, c, a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 die Coſinuſſe der Winkel, welche dieſe neuen Axen mit jeder der früheren machen und man erhält:

$$x' = a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1$$
$$y' = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1$$
$$z' = a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1.$$

Iſt ϑ der Abſtand des Punctes $m_{,}$ von m, ſo gelten vom Puncte $m_{,}$ die vorhergehenden Formeln, wenn man ſetzt $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z = \vartheta$ und man hat für ihn $x' = c\vartheta$, $y' = c_1\vartheta$, $z' = c_2\vartheta$. Heißt nun v die gerade Linie, welche zwiſchen m' und $m_{,}$ gezogen werden

kann, ſo lange dieſe Puncte in ihrer natürlichen Lage ſind, wenn ſie aber eine Änderung erlitten haben $v_{,}$; ſo iſt

$$v^2 = (x' - c\vartheta)^2 + (y' - c_{,}\vartheta)^2 + (z' - c_{2}\vartheta)^2$$
$$v_{,}^2 = (x' + \alpha' - c\vartheta)^2 + (y' + \beta' - c_{,}\vartheta)^2 + (z' + \gamma' - c_{2}\vartheta)^0$$

oder wenn man für x', y', z', und α', β', γ' die vorher angegebenen Ausdrücke und der Kürze halber:

$$a\, x_{,} + b\, y_{,} + c\,(z_{,} - \vartheta) = \mu$$
$$a_{,} x_{,} + b_{,} y_{,} + c_{,}(z_{,} - \vartheta) = \varepsilon$$
$$a_{2} x_{,} + b_{2} y_{,} + c_{2}(z_{,} - \vartheta) = \xi$$
$$\mu . \frac{d\alpha}{dx} + \varepsilon \frac{d\alpha}{dy} + \xi \frac{d\alpha}{dz} = \mu_{,}$$
$$\mu \frac{d\beta}{dx} + \varepsilon \frac{d\beta}{dy} + \xi \frac{d\beta}{dz} = \varepsilon_{,}$$
$$\mu \frac{d\gamma}{dx} + \varepsilon \frac{d\gamma}{dy} + \xi \frac{d\gamma}{dz} = \xi_{,}$$

ſetzt, ſo wird:

$$v^2 = \mu^2 + \varepsilon^2 + \xi^2$$
$$v_{,}^2 = (\mu + \mu_{,})^2 + (\varepsilon + \varepsilon_{,})^2 + (\xi + \xi_{,})^2.$$

Wenn man endlich die aus der analytiſchen Geometrie bekannte Relation zwiſchen den Größen a, b, c ꝛc. berückſichtiget,

$$v^2 = x_{,}^1 + y_{,}^2 + (z_{,} - \vartheta)^2$$
$$v_{,}^2 = v^2 + 2\mu\mu_{,} + 2\varepsilon\varepsilon_{,} + 2\xi_{,}\xi + \mu_{,}^2 + \varepsilon_{,}^2 + \xi_{,}^2.$$

14. Die Wirkung des Theilchens m' auf $m_{,}$ iſt eine Function ihrer gegenſeitigen Entfernung v von ſolcher Beſchaffenheit, daß ſie für Werthe von v, welche viel größer ſind, als der Abſtand je zweier Körpertheile von einander, ſchnell abnimmt und $= 0$ wird. Man bezeichne dieſe Function für den urſprünglichen Zuſtand der Theile mit φv und für den veränderten Zuſtand mit $\varphi v_{,}$, und ſuche nun $\varphi v_{,}$ durch φv auszudrücken. Man hat zuerſt annäherungsweiſe durch Ausziehung der Quadratwurzel aus dem Werthe von $v_{,}^2$ den Ausdruck

$$v_{,} = v + \frac{1}{v}\,(\mu\mu_{,} + \varepsilon\varepsilon_{,} + \xi\xi_{,})$$

und hieraus

$$\varphi v_{,} = \varphi\left(v + \frac{1}{v}\,(\mu\mu_{,} + \varepsilon\varepsilon_{,} + \xi\xi_{,})\right) =$$
$$= \varphi v + \frac{1}{v}\,(\mu\mu_{,} + \varepsilon\varepsilon_{,} + \xi\xi_{,})\,\frac{d.\varphi v}{dv}.$$

14. Zerlegt man die Wirkung des Theilchens m' auf m_1 im veränderten Zuſtande nach den drei Coordinatenaxen x, y, z, ſo erhält man:

$$\frac{\mu+\mu_1}{v_1}\varphi v_1, \quad \frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{v_1}\varphi v_1, \quad \frac{\xi+\xi_1}{v_1}\varphi v_1.$$

Nun muß die Summe (Σ) dieſer Wirkungen für alle poſitiven und negativen Werthe von x_1, y_1 und für die negativen Werthe von z_1 genommen werden, ferner die Summe dieſer Summen in Bezug auf poſitive z_1, um die Wirkung der durch x_1, y_1 begrenzten Körpertheile auf einander zu erhalten. Um dieſe Wirkungen auf eine beſtimmte Einheit zu reduciren, denke man ſich eine Fläche o, in welcher m liegt, von ſo geringer Ausdehnung, daß für alle ihre Theile derſelbe Ausdruck gilt, und multiplicire das zuletzt erhaltene Reſultat der Summirung mit der Anzahl n der Theile, welche o enthält. Dadurch gelangt man zu einem Ausdruck für die Wirkung des von der Ebene $x_1 y_1$ begrenzten Körpertheiles auf den andern in Bezug auf die Fläche o. Bezeichnet man nun die Wirkung in Bezug auf die Fläche = 1 nach den drei Coordinaten mit P, Q, R; ſo erhält man in Bezug auf die Fläche o die Kräfte oP, oQ, oR, und wenn der mittlere Abſtand zweier Theile des Körpers = n und daher die Anzahl der in o enthaltenen Theile $= \frac{o}{n^2}$ iſt,

$$P = \Sigma\frac{\mu+\mu_1}{n^2 v_1}\varphi v_1, \quad Q = \Sigma\frac{\varepsilon+\varepsilon_1}{n^2 v_1}\varphi v_1, \quad R = \Sigma\frac{\xi+\xi_1}{n^2 v_1}\varphi v_1$$

wobei Σ auf x_1, y_1, z_1, und ϑ ſich beziehet, ſo weit ſich die Wirkung des Punctes m auf m' und m_1 erſtreckt.

15. Die Doppelſumme in Bezug auf die zwei Veränderlichen z_1 und ϑ läßt ſich auf die Summe einer einzigen Variablen reduciren; denn dieſe Summe hat die Form

$$\Sigma\Sigma\varphi(\vartheta - z_1)$$

und wird erhalten, wenn man ſucceſſive $\vartheta = n, 2n, 3n\ldots$ ꝛc. und z_1 für jeden dieſer Werthe gleich $0, -n, -2n\ldots$ ꝛc. ſetzt, wobei man bis ins Unendliche fortfahren kann, weil die Function für Werthe der Veränderlichen über eine gewiſſe Größe hinaus ohnehin = o iſt. Man hat daher

$$\begin{aligned}\Sigma\Sigma\varphi(\vartheta - z_1) = \varphi n &+ \varphi 2n + \varphi 3n + \varphi 4n + \ldots\\ &+ \varphi 2n + \varphi 3n + \varphi 4n + \ldots\\ &\qquad\quad + \varphi 3n + \varphi 4n + \ldots\\ = \varphi n &+ 2\varphi 2n + 3\varphi 3n + \ldots = \Sigma\frac{z}{n}\varphi z\end{aligned}$$

wo Σ von $z = n$ bis $z = \infty$ auszudehnen iſt.

Setzt man nun $\vartheta_1 - z_1 = z$, ſo erhält man für obige Größen P, Q, R, folgendes:

$$P = \Sigma . \frac{(\mu + \mu_1)}{n^3 v_1} z \varphi v_1, \quad Q = \Sigma . \frac{(\varepsilon + \varepsilon_1)}{n^3 v_1} z \varphi v_1,$$

$$R = \Sigma . \frac{(\xi + \xi_1)}{n^3 v_1} z \varphi v_1$$

und wenn man für $\frac{1}{v^1}$ und für φv_1 die in 14 gefundenen Werthe ſubſtituirt,

$$P = \Sigma \frac{(\mu + \mu_1) z}{n^3 v} \varphi v + \Sigma (\mu \mu_1 + \varepsilon \varepsilon_1 + \xi \xi_1) \frac{\mu z}{n^3 r} \frac{d \frac{1}{v} \varphi v}{dv}$$

$$Q = \Sigma \frac{(\varepsilon + \varepsilon_1) z}{n^3 v} \varphi v + \Sigma (\mu \mu_1 + \varepsilon \varepsilon_1 + \xi \xi_1) \frac{v \xi}{n^3 v} \frac{d \frac{1}{v} \varphi v}{dv}$$

$$R = \Sigma \frac{(\xi + \xi) z}{n^3 v} \varphi v + \Sigma (\mu \mu_1 + \varepsilon \varepsilon_1 + \xi \xi_1) \frac{\xi z}{n^3 v} \frac{d \frac{1}{v} \varphi v}{dv}$$

und in dieſen Ausdrücken bezieht ſich Σ auf x, y, und z.

16. Verwandelt man dieſe Coordinaten in Polarcoordinaten, und nennt λ den Winkel, welchen der Radius Vector v mit der Axe der z macht, und ω denjenigen, welchen die Projection des Radius Vectors in der Ebene der $x_1 y_1$ mit der Axe der x_1 bildet, ſo erhält man:

$$z = v \cos\lambda, \quad y_1 = v \sin\lambda \sin\omega, \quad x_1 = v \cos\lambda \cos\omega.$$

Iſt demnach fv eine Function von v derſelben Art, wie φ, ſo kann man alle oben vorkommende Glieder, worauf ſich Σ bezieht, unter die Form pfv bringen, wenn p eine Function des Sinus und Coſinus von λ und ω vorſtellt, oder man hat es mit der Größe

$$\Sigma (\Sigma \Sigma p) fv$$

zu thun. Durch dieſe Umſtaltung erlangt man den Vortheil, die Summirungen innerhalb der Klammern ohne Rückſicht auf v vornehmen, und, weil man dabei nicht durch die Eigenſchaft der Function plötzlich abzunehmen, gehindert iſt, leichter von Summen auf

Integrale übergehen zu können. Um zu dieſem Übergange weiter vorzubereiten, denke man ſich eine Kugelfläche, deren Mittelpunct m und deren Halbmeſſer v iſt, in ſo kleine Theile getheilt, daß für alle Puncte jedes ſolchen Theils λ und ω einerlei Werth haben, mithin p conſtant iſt, und nenne jeden Theil sv^2, wo s einen jenem Stücke ähnlichen Theil für den Radius $= 1$ bedeutet. Für ein Stück sv^2 iſt offenbar $\Sigma\Sigma p$ das Product von p in die Anzahl der materiellen Puncte, welche sv^2 enthält, und die $= \frac{sv^2}{n^2}$ iſt; oder man hat für ein ſolches Stück die Gleichung

$$\Sigma\Sigma p = p \cdot \frac{sv^2}{n^2}$$

und für alle Theile, welche in der durch $x_1\, y_1$ begrenzten Halbkugel liegen,

$$\Sigma\Sigma p = \frac{v^2}{n^2}\, \Sigma ps.$$

Da nun s als ein ſehr kleiner Theil der Kugelfläche angenommen wurde, ſo läßt er ſich als Elementarrechteck von der Größe $\sin\lambda\, d\lambda\, d\omega$ betrachten, und man hat daher:

$$\Sigma\Sigma ps = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} p \sin\lambda\, d\lambda\, d\omega$$

wo π die bekannte Bedeutung hat und

$$\Sigma\Sigma p = \frac{v^2}{n^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} p \sin\lambda\, d\lambda\, d\omega.$$

Endlich

$$\Sigma((\Sigma\Sigma p) fv) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} p \sin\lambda\, d\lambda\, d\omega . \Sigma \frac{v^2}{n^2} fv.$$

17. Man drücke nun auch $\mu, \varepsilon, \xi, \mu_1, \varepsilon_1, \xi_1$ durch Polarcoordinaten aus. Da erhält man:

$$\mu = v\,(a \sin\lambda\cos\omega + b \sin\lambda\sin\omega - c\cos\lambda)$$
$$\varepsilon = v\,(a_1 \sin\lambda\cos\omega + b_1 \sin\lambda\sin\omega - c_1\cos\lambda)$$
$$\xi = v\,(a_2 \sin\lambda\cos\omega + b_2 \sin\lambda\sin\omega + c_2\cos\lambda)$$

oder wenn man die Theile innerhalb der Klammern der Ordnung nach durch A, B, C bezeichnet,

$$\mu = Av,\ \varepsilon = Bv,\ \xi = Cv$$

ferner

$$\mu_1 = \nu \left(A \frac{d\alpha}{dx} + B \frac{d\alpha}{dy} + C \frac{d\alpha}{dz} \right)$$

$$\varepsilon_1 = \nu \left(A \frac{d\beta}{dx} + B \frac{d\beta}{dy} + C \frac{d\beta}{dz} \right)$$

$$\mathcal{E}_1 = \nu \left(A \frac{d\nu}{dx} + B \frac{d\gamma}{dy} + C \frac{d\nu}{dz} \right)$$

oder wenn man wieder die Theile innerhalb der Klammern mit A_1, B_1, C_1 bezeichnet:

$$\mu_1 = A_1 \rho, \quad \varepsilon_1 = B_1 \rho, \quad \mathcal{E}_1 = C_1 \rho.$$

Setzt man nun dieſe Werthe in die Gleichungen in 16, und drückt der Kürze halber $\cos\lambda \sin\lambda\, d\lambda\, d\omega$ durch ρ aus: ſo erhält man folgende Ausdrücke:

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \Big((A + A_1) \Sigma \frac{\nu^3}{n^5} \varphi \nu +$$

$$+ (AA_1 + BB_1 + CC_1) A \Sigma \frac{\nu^5}{n^5} \frac{d \frac{1}{\nu} \varphi \nu}{d\nu} \Big) \rho$$

$$Q = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \Big((B + B_1) \Sigma \frac{\nu^3}{n^5} \varphi \nu +$$

$$+ (AA_1 + BB_1 + CC_1) B \Sigma \frac{\nu^5}{n^5} \frac{d \frac{1}{\nu} \varphi \nu}{d\nu} \Big) \rho$$

$$R = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \Big((C + C_1) \Sigma \frac{\nu^3}{n^5} \varphi \nu +$$

$$+ (AA_1 + BB_1 + CC_1) C \Sigma \frac{\nu^5}{n^5} \frac{d \frac{1}{\nu} \varphi \nu}{d\nu} \Big) \rho$$

Man hat aber:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} (A + A_1) \rho =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \left(c + c \frac{d\alpha}{dx} + c_1 \frac{d\alpha}{dy} + c_2 \frac{d\alpha}{dz} \right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} (B + B_1) \rho =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} \left(c_1 + c \frac{d\beta}{dx} + c_1 \frac{d\beta}{dy} + c_2 \frac{d\beta}{dz} \right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}(C+C_1)\rho =$$

$$=-\frac{2\pi}{3}\left(c_2+c\frac{d\gamma}{dx}+c_1\frac{d\gamma}{dy}+c_2\frac{d\gamma}{dz}\right)$$

Ferner

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}A^3\rho = -\frac{2\pi c}{5}(a^2+b^2+c^2) = -\frac{2\pi c}{5}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}A^2 B\rho =$$

$$=-\frac{2\pi}{15}(3c^2c_1+2aa_1c+2bb_1c+a^2c_1+b^2c_1)=-\frac{2\pi c_1}{15}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}ABC\rho =$$

$$= \frac{2\pi}{15}(3cc_1c_2+aa_1a_2+aa_2c_1+a_1a_2c+$$
$$+bb_1c_2+bb_2c_1+b_1b_2c)=0$$

und eben ſo:

$$\iint B^3\rho = -\frac{2\pi c_1}{5},\ \iint C^3\rho = -\frac{2\pi c_2}{5}$$

$$\iint AB^2\rho = -\frac{2\pi c}{15},\ \iint AC^2\rho = -\frac{2\pi c}{15},$$

$$\iint A^2C\rho = -\frac{2\pi c_2}{15}$$

$$\iint B^2C\rho = -\frac{2\pi c_2}{15},\ \iint BC^2\rho = -\frac{2\pi c_1}{\rho}$$

Dieſe Werthe in die vorhergehenden Ausdrücke für P, Q, R geſetzt, nachdem man vorläufig A_1, B_1, C_1 im zweiten Theile des zweiten Gliedes durch A, B, C ausgedrückt hat, und endlich $\frac{2\pi}{3}\sum\frac{v^3}{n^5}\varphi v$ durch E, und $\frac{2\pi}{15}\sum\frac{v^5}{n^5}\frac{d\frac{\varphi v}{v}}{dv}$ durch e erſetzt, führen zu folgenden Reſultaten:

$$P=-E\left(c+c\frac{d\alpha}{dx}+c_1\frac{d\alpha}{dy}+c_2\frac{d\alpha}{dz}\right)$$
$$-e\left(3c\frac{d\alpha}{dx}+c_1\frac{d\alpha}{dy}+c_2\frac{d\alpha}{dz}+c_1\frac{d\beta}{dx}+c\frac{d\beta}{dy}\right.$$
$$\left.+c_2\frac{d\gamma}{dx}+c\frac{d\gamma}{dz}\right)$$

$$Q = -E\left(c_1 + c\frac{d\beta}{dx} + c_1\frac{d\beta}{dy} + c_2\frac{d\beta}{dz}\right)$$
$$- e\left(3c_1\frac{d\beta}{dy} + c\frac{d\beta}{dx} + c_2\frac{d\beta}{dz} + c_1\frac{d\alpha}{dx} + c\frac{d\alpha}{dy}\right.$$
$$\left. + c_2\frac{d\gamma}{dy} + c_1\frac{d\gamma}{dz}\right)$$

$$R = -E\left(c_2 + c\frac{d\gamma}{dx}e + c_1\frac{d\gamma}{dy} + c_2\frac{d\gamma}{dz}\right)$$
$$- e\left(3c_2\frac{d\gamma}{dz} + c\frac{d\gamma}{dx} + c_1\frac{d\gamma}{dy} + c_2\frac{d\alpha}{dx} + c\frac{d\alpha}{dz}\right.$$
$$\left. + c_2\frac{d\beta}{dy} + c_1\frac{d\beta}{dz}\right)$$

18. Im Vorhergehenden wurde die Axe der z_1 durch den angezogenen oder abgeſtoßenen Punct m_1 gelegt, und die Ebene, welche im natürlichen Zuſtande des Körpers ſeine beiden auf einander wirkenden Theile trennt, war demnach auf z_1 ſenkrecht und c, c_1, c_2 waren die Coſinuſſe der Winkel, die dieſe Normale mit den urſprünglichen Coordinatenaxen x, y, z macht. Iſt dieſe Normale mit z parallel, ſo iſt $c = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, und für dieſen Fall P_1 Q_1 R_1 das, was vorhin P, Q, R war; demnach hat man:

$$P_1 = -E\frac{d\alpha}{dz} - e\left(\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\gamma}{dx}\right)$$
$$Q_1 = -E\frac{d\beta}{dz} - e\left(\frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}\right)$$
$$R_1 = -E\left(1 + \frac{dV}{dz}\right) - e\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + 3\frac{d\gamma}{dz}\right)$$

Iſt jene Normale mit y parallel; ſo hat man $c = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, und wenn wieder P, Q, R für dieſen Fall durch $P_2 Q_2 R_2$ erſetzt werden,

$$P_2 = -E\frac{d\alpha}{dy} - e\left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)$$
$$Q_2 = -E\left(1 + \frac{d\beta}{dy}\right) - e\left(\frac{d\alpha}{dx} + 3\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)$$
$$R_2 = -E\frac{d\gamma}{dy} - e\left(\frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\right)$$

Iſt endlich obige Normale mit z parallel, ſo wird $c = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, und wenn $P_3\ Q_3\ R_3$ für dieſen Fall die Partialkräfte ausdrücken:

$$P_3 = - E\left(1 + \frac{d\alpha}{dx}\right) - e\left(3\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)$$

$$Q_3 = - E\frac{d\beta}{dx} - e\left(\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\right)$$

$$R_3 = - E\frac{d\gamma}{dx} - e\left(\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}\right)$$

Vergleicht man dieſe beſonderen Werthe mit den allgemeinen von P, Q, R, ſo wird

$$\left.\begin{aligned} P &= P_1 c_2 + P_2 c_1 + P_3 c \\ Q &= Q_1 c_2 + Q_2 c_1 + Q_3 c \\ R &= R_1 c_2 + R_2 c_1 + R_3 c \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (H)$$

Daher ſind nun auch für die Partialkräfte, welche die Wirkung der einzelnen Theile deſſelben Körpers auf einander ausdrücken, beſtimmte Formeln gegeben.

Es wird ſpäter gezeigt werden, daß E immer $= 0$ iſt, und daß man daher ſtets hat:

$$P_1 = - e\left(\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\gamma}{dx}\right)$$

$$Q_1 = - e\left(\frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}\right)$$

$$R_1 = - e\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{3\,d\gamma}{dz}\right)$$

$$P_2 = - e\left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)$$

$$Q_2 = - e\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{3\,d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)$$

$$R_2 = - e\left(\frac{d\nu}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\right)$$

$$P_3 = - e\left(3\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)$$

$$Q_3 = - e\left(\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\right)$$

$$R_3 = - e\left(\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}\right)$$

und daher

$$P_1 = R_3\,,\quad P_2 = Q_3\,,\quad Q_1 = R_2.$$

Siehe hierüber

Mécanique céleste. Tome I. Chap. 2, und Tome II. Chap. 2.

Vorleſungen über die höhere Mathematik von A. v. Ettingshauſen. Wien, 1827. II. Band, S. 250 u. f.

Mémoires de l'Académie royale des sciences, de l'institut de France. Tome VIII. pag. 355 c. s.

Zweites Kapitel.

Gleichgewicht überhaupt, feſter und elaſtiſcher Körper insbeſondere.

19. Man kann ſich die Thätigkeit jeder Kraft ſo vorſtellen, als beſtrebte ſie ſich, ihren Angriffspunct nach einem in ihrer Richtung liegenden Punct hinzuziehen. Dieſen Punct wollen wir den Mittelpunct der Kraft nennen. Sind nun x_1 y_1 z_1 die rechtwinkeligen Coordinaten des Mittelpunctes einer Kraft P, x, y, z die ihres Angriffspunctes, ſo iſt die gerade Linie p zwiſchen beiden Puncten gegeben durch

$$p = \sqrt{[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]}.$$

Verrückt die Kraft ihren Angriffspunct um die Größe δp, und werden dadurch x, y, z um δx, δy, δz verändert, ſo hat man

$$p\,\delta p = (x - x_1)\,\delta x + (y - y_1)\,\delta y + (z - z_1)\,\delta z$$

und daher

$$\frac{\delta p}{\delta x} = \frac{x-x_1}{p} = \cos a,\quad \frac{\delta p}{\delta y} = \frac{y-y_1}{p} = \cos b,$$

$$\frac{\delta p}{\delta z} = \frac{z-z_1}{p} = \cos c$$

wo a, b, c die Winkel bedeuten, welche die Richtung der Kraft P mit x, y, z macht. Man erhält demnach für die Kräfte, die durch Zerlegung der Kraft P nach den Coordinatenaxen von x, y, z entſtehen,

$$\frac{P\delta p}{\delta x},\ \frac{P\delta p}{\delta y},\ \frac{P\delta p}{\delta z}.$$

Behandelt man die Kräfte P', P'' ꝛc. auf gleiche Weiſe und läßt p', p'' ꝛc. dasſelbe für ſie bedeuten, was p in Bezug auf P war; ſo erhält man die Partialkräfte

$\frac{P'\delta p'}{\delta x}$, $\frac{P'\delta p'}{\delta y}$, $\frac{P'\delta p'}{\delta z}$ und $\frac{P''\delta p''}{\delta x}$, $\frac{P''\delta p''}{\delta y}$, $\frac{P''\delta p''}{\delta z}$ ꝛc.

Heißt s die gerade Linie zwiſchen dem Mittelpuncte der Reſultirenden S von P, P', P'' ꝛc. und ihrem Angriffspunct; ſo wird nach einem gleichen Verfahren der mit der Axe der x parallele Theil der Reſultirenden $\frac{S\delta s}{\delta x}$, der mit der Axe y und z parallele hingegen $\frac{S\delta s}{\delta y}$, $\frac{S\delta s}{\delta z}$ und hiermit

$$\frac{S\delta s}{\delta x} = \frac{P\delta p}{\delta x} + \frac{P'\delta p'}{\delta x} + \frac{P''\delta p''}{\delta x} + \ldots\ldots$$

$$\frac{S\delta s}{\delta y} = \frac{P\delta p}{\delta y} + \frac{P'\delta p'}{\delta y} + \frac{P''\delta p''}{\delta y} + \ldots\ldots$$

$$\frac{S\delta s}{\delta z} = \frac{P\delta p}{\delta z} + \frac{P'\delta p'}{\delta z} + \frac{P''\delta p''}{\delta z} + \ldots\ldots$$

Addirt man dieſe drei Gleichungen, nachdem man die erſte mit δx, die zweite mit δy, die dritte mit δz multiplicirt hat, ſo wird

$$S\delta s = P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' \ldots\ldots (A).$$

Den Raum δs, δp ꝛc., welchen der Angriffspunct der Kraft nach der Richtung derſelben zurücklegt, nennt man die **virtuelle Geſchwindigkeit.**

20. Sollen die Kräfte P, P', P'' ꝛc., die auf einen und denſelben Punct wirken, unter einander im Gleichgewichte ſtehen, ſo muß

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' \ldots\ldots = 0 \qquad (B)$$

ſeyn. Denn iſt der afficirte Punct frei, ſo muß für den Fall des Gleichgewichtes die Reſultirende S der Kräfte, mithin auch $S\delta s$ gleich Null ſeyn, welches mit der angeführten Gleichung übereinſtimmt. Iſt dieſer Punct aber nicht frei, ſondern ſoll er auf einer gegebenen Linie oder Fläche bleiben, ſo iſt klar, daß man ihn als frei betrachten kann, wenn man ſich ſtatt der gegebenen Linie oder Fläche eine Kraft zugegeben denket, welche dem Drucke gleich und entgegengeſetzt iſt, den jene erleidet. Iſt nun l eine Linie, welche in der Richtung der Kraft L liegt, mithin auf obiger Linie oder Fläche ſenkrecht ſteht, ſo hat man für den Fall des Gleichgewichtes

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' \ldots\ldots + L\delta l = 0.$$

Allein da ſich der Angriffspunct nicht nach der Richtung l be-

wegen kann, ſo iſt δl mithin auch $L\delta l = o$ und daher auch für dieſen Fall obige Gleichung wahr.

Dieſer Satz läßt ſich auch umkehren, ſo daß, wenn man hat

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' \ldots\ldots = o$$

Gleichgewicht herrſcht. Denn aus der Vorausſetzung der Giltigkeit dieſer Gleichung folgt $S\delta s = o$, und da für einen allſeitig beweglichen Punct nie $\delta s = o$ ſeyn kann, ſo muß $S = o$ ſeyn und daher Gleichgewicht herrſchen.

21. Es ſey ein Syſtem von Puncten A, B, C ꝛc. (Fig. 52) gegeben, die unveränderlich mit einander verbunden ſind und auf welche Kräfte wirken. Die Reſultirende der auf A wirkenden ſey P, die der auf B, C ꝛc. wirkenden heiße P', P'' ꝛc. Vermöge der Verbindung der einzelnen Puncte unter einander erfolgt eine Wirkung jedes Punctes auf alle übrigen. Es iſt klar, daß der Erfolg ungeändert bleibt, wenn man die von der Verbindung der Puncte unter einander abhängigen Kräfte durch äußere erſetzt und dann dieſe Puncte als von einander unabhängig betrachtet. Soll demnach das ganze Syſtem im Gleichgewichte ſtehen, ſo müſſen alle auf jeden einzelnen Punct wirkenden Kräfte für ſich im Gleichgewichte ſeyn. Heißen nun die auf A wirkenden Kräfte P, Q, R, T ꝛc., die auf B und C wirkenden P', Q', R', T' ꝛc. P'', Q'', R'', T'' ꝛc., wobei alſo Q, R, T ꝛc. Q', R', T' ꝛc. die Kräfte ſind, welche den von der Verbindung der einzelnen Puncte abhängigen ſubſtituirt wurden, die gerade zwiſchen ihrem Mittelpunct und ihrem Angriffspunct liegende Linie q, r, t, q', r', t', q'', r'', t'' ꝛc.: ſo erhält man für den Fall des Gleichgewichtes

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + T\delta t \ldots\ldots = o$$
$$P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + T'\delta t' \ldots\ldots = o$$
$$P''\delta p'' + Q''\delta q'' + R''\delta r'' + T''\delta t'' \ldots\ldots = o.$$

Werden dieſe Gleichungen addirt und der Umſtand berückſichtiget, daß man wegen der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung $Q' = Q$, $R' = R$, $T' = T$ hat, ſo erhält man:

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' \ldots + Q(\delta q + \delta q' \text{ ꝛc.}) + R(\delta r + \delta r' \ldots) + T(\delta t + \delta t' \ldots\ldots) = o.$$

Nennt man die Linie $AB = q_1$, $AC = r_1$, $BC = t_1$ u. ſ. w., ſo iſt leicht einzuſehen, daß man hat $\delta q + \delta q' = \delta q_1$, $\delta r + \delta r' = \delta r_1$, $\delta t + \delta t' = \delta t_1$.

Demnach wird aus obiger Gleichung:

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \ldots\ldots Q\delta q_1 + R\delta r_1 + T\delta t_1 \ldots\ldots = o.$$

Sind die Puncte A, B, C ꝛc. unveränderlich mit einander verbunden, ſo hat man $\delta q_1 = o$, $\delta r_1 = o$, $\delta t_1 = o$, mithin auch

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' \ldots\ldots = o$$

alſo obiger Satz (A) auch für ein ſolches Syſtem von Kräften wahr. Er gilt aber auch, wenn die Puncte A, B, C veränderlich mit einander verbunden ſind, wie ſpäter gezeigt werden wird.

Dieſes Geſetz wird das Princip der **virtuellen Geſchwindigkeiten** genannt.

22. Setzt man für ein Syſtem unveränderlich mit einander verbundener Puncte A, B, C ꝛc., welche von den Kräften P, P', P'' ꝛc. afficirt werden, voraus, daß für ſie die Gleichung gilt

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' = o \ldots\ldots (a)$$

wo δp, $\delta p'$, $\delta p''$ ꝛc. die vorhin angenommene Bedeutung haben, ſo muß dieſes Syſtem im Gleichgewichte ſtehen.

Wäre dieſes nicht der Fall, ſo mag A in einer unangebbar kurzen Zeit den Weg r, B den Weg r', C den Weg r'' ꝛc. zurücklegen. Da wird man nun das Gleichgewicht herſtellen können, wenn an A, B, C ꝛc. gewiſſe Kräfte U, V, W ꝛc. nach einer dieſer Bewegung entgegengeſetzten Richtung angebracht werden. Sind die virtuellen Geſchwindigkeiten dieſer Kräfte δu, δv, δw, ſo iſt daher

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' \ldots\ldots U\delta u + V\delta v + W\delta w \ldots = o \ (b)$$

welcher Ausdruck mit (a) zuſammengehalten gibt:

$$U\delta u + V\delta v + W\delta w \ldots\ldots = o.$$

Da nun dieſe Gleichung für jede Bewegung des Syſtems gilt, ſo kann man auch die wirklich zurückgelegten Räume r, r', r'' als virtuelle Geſchwindigkeiten anſehen und da dieſe in der Richtung der Kräfte U, V, W liegen, erſehen, daß die Größen δu, δv, δw den Größen r, r', r'' gleich und entgegengeſetzt ſind. Es haben daher alle Glieder der Gleichung (b) dasſelbe Zeichen und ſie kann nur $= o$ ſeyn, wenn $Ur = o$, $Vr' = o$, $Wr'' = o$ iſt. Erſterer Ausdruck kann dieſen Werth nur haben, wenn $U = o$ oder wenn $r = o$ iſt. Auf ähnliche Weiſe $r' = o$, $r'' = o$. Demnach iſt das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten auch auf ein Syſtem von Angriffspuncten anwendbar.

23. Mit Hilfe des Princips der virtuellen Geſchwindigkeiten

laſſen ſich alle ſtatiſchen Probleme auflöſen und wenn man es manchmal verläßt und einen anderen Weg einſchlägt, um die Bedingungen des Gleichgewichtes zu beſtimmen; ſo geſchieht es nur zur Abkürzung der Arbeit.

Im Allgemeinen beſteht das Verfahren, um mit Hilfe des Princips der virtuellen Geſchwindigkeiten ein ſtatiſches Problem aufzulöſen, in Folgendem:

1) Es ſoll ein Syſtem von Puncten A, B, C ꝛc., auf welche die Kräfte P, P', P'' ꝛc. wirken, im Gleichgewichte ſtehen, wenn A, B, C ganz von einander unabhängig ſind und ein Punct ſich bewegen kann, ohne dadurch die übrigen zu afficiren. Da zerlege man jede der Kräfte P, P', P'' ꝛc. in drei auf einander ſenkrechte $X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ ꝛc., nenne die Coordinaten von A, x, y, z, die von B und C, $x', y', z', x'', y'', z''$ ꝛc. und man hat für den Fall des Gleichgewichtes:

$$\left.\begin{aligned} 0 = X\delta x + X'\delta x' + X''\delta x'' \ldots\ldots \\ + Y\delta y + Y'\delta y' + Y''\delta y'' \ldots\ldots \\ + Z\delta z + Z'\delta z' + Z''\delta z'' \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (C).$$

Da nun alle Puncte von einander unabhängig ſind; ſo iſt

$$\begin{aligned} X &= 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \\ X' &= 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 0 \\ X'' &= 0, \quad Y'' = 0, \quad Z'' = 0. \end{aligned}$$

2) Es ſeyen die Puncte A, B, C ꝛc. auf irgend eine Weiſe von einander abhängig. Da iſt der einfachſte Weg zur Beſtimmung der Bedingungen des Gleichgewichtes der, daß man zur Grundgleichung diejenigen Gleichungen addirt, welche die Bedingungen der Abhängigkeit der Puncte ausdrücken, nachdem man jede mit einem unbeſtimmten Coefficienten multiplicirt hat. Hierauf betrachtet man das ganze Syſtem als ſolches, deſſen Puncte von einander unabhängig ſind und verfährt daher wie vorher. Das Weſen dieſes Verfahrens beſteht eigentlich darin, daß man ſich ſtatt des Widerſtandes, welcher dem Syſtem im Wege ſteht und deſſen freie Bewegung hindert, oder überhaupt ſtatt der Bedingungen, an welche das Syſtem gebunden iſt, Kräfte denkt, durch welche dieſelben Bedingungen erfüllt werden und deren Richtung und Größe von den Bedingungsgleichungen abhängen. Es ſind daher die zugeſetzten Kräfte eigentlich die Widerſtände, welche der freien Bewegung des Syſtems im Wege ſtehen.

24. Die Bedingungen, unter welchen ein Syſtem von Puncten A, B, C ꝛc., im Gleichgewichte ſteht, beziehen ſich auf das Verhüten einer fortſchreitenden und einer drehenden Bewegung.

Man bezeichne der Kürze halber mit Σ die Summe der nach parallelen Richtungen wirkenden Kräfte, ſo daß $X + X' + X''.. = \Sigma X$, $Y + Y' + Y'' ... = \Sigma Y$, $Z + Z' + Z'' + ... = \Sigma Z$ iſt und ſubſtituire ſie in die allgemeine Gleichung t, welche beim Gleichgewichte Statt finden muß. Da nun bei einem unveränderlichen Syſteme, $\delta x = \delta x' = \delta x''$, $\delta y = \delta y' = \delta y''$, $\delta z = \delta z' = \delta z''$ ꝛc. iſt, ſo erhält man

$$\delta x \Sigma X + \delta y \Sigma Y + \delta z \Sigma Z = 0$$

woraus ſich als Bedingungen des Gleichgewichtes ergeben

$$\Sigma X = 0, \; \Sigma Y = 0, \; \Sigma Z = 0.$$

Um die Bedingungen für das Unterbleiben einer drehenden Bewegung zu finden, drücke man die gerade Linie vom Anfangspuncte der Coordinaten zur Projection des Punctes A auf die Ebene xy durch ρ und den Winkel, welchen ρ mit der Axe der y macht, durch ω aus, und man hat:

$$x = \rho \sin \omega, \; y = \rho \cos \omega$$

$$\delta x = \rho \cos \omega \, \delta \omega = y \delta \omega, \; \delta y = - \rho \sin \omega \, \delta \omega = - x \delta \omega.$$

Durch ein gleiches Verfahren mit den Puncten B, C findet man ähnliche Werthe für $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ ...... Dreht ſich nun jeder Punct um die Axe z in einem unendlich kleinen Bogen $d\omega$, ſo iſt $\delta z = \delta z' = \delta z'' ... = 0$, $\delta x = \delta x' = \delta x'' ... = y d\omega$, $\delta y = \delta y' = \delta y'' .. = - x d\omega$. Setzt man dieſe Werthe in (C), ſo erhält man

$$\Sigma . X y \delta \omega - \Sigma . Y x \delta \omega = 0 \text{ oder } \Sigma . X y - \Sigma . Y x = 0.$$

Ertheilt man auf gleiche Weiſe dem Syſtem eine unendlich kleine Winkelgeſchwindigkeit um die Axen y und x, ſo erhält man als Bedingungen des Gleichgewichtes in Beziehung auf dieſe Axen

$$\Sigma . Z x - \Sigma . X z = 0 \text{ und } \Sigma . Y z - \Sigma . Z y = 0.$$

Setzt man nun ſtatt X, Y, Z die Werthe, welche ſie vorſtellen, ſo erhält man als Bedingung des Gleichgewichtes folgende 6 Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma . P \cos \alpha = 0 \\ \Sigma . P \cos \beta = 0 \\ \Sigma . P \cos \gamma = 0 \end{array} \right\} \ldots\ldots (D).$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma.yP\cos\alpha - \Sigma.x.P\cos\beta &= o \\ \Sigma\, xP\cos\gamma - \Sigma.z\; P\cos\alpha &= o \\ \Sigma\, zP\cos\beta - \Sigma.y\; P\cos\gamma &= o \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (E).$$

Iſt der Anfangspunct der Coordinaten ſelbſt befeſtiget, ſo wird ſchon dadurch den erſten drei Gleichungen entſprochen und es bleibt nur mehr übrig, den drei letzten Genüge zu leiſten, damit das Syſtem weder fortſchreiten, noch ſich um eine der drei Axen, mithin auch nicht um den Anfangspunct der Coordinaten drehen kann.

25. Für parallel wirkende Kräfte hat man $\alpha = \alpha' = \alpha'' \ldots\ldots$ $\beta = \beta' = \beta'' \ldots\ldots$, $\gamma = \gamma' = \gamma'' \ldots\ldots$ Dadurch laſſen ſich die Gleichungen (D) ſo darſtellen:

$$\cos\alpha\,\Sigma P = o, \quad \cos\beta\,\Sigma P = o, \quad \cos\gamma\,\Sigma P = o.$$

Da nun $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ iſt, mithin die Coſinuſſe von α, β, γ nicht $= o$ werden können, ſo muß für den Fall des Gleichgewichtes ſeyn

$$\Sigma P = o.$$

Die Gleichungen (E) nehmen für parallele Kräfte die Form an:

$$\begin{aligned} \cos\alpha\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Px &= o \\ \cos\gamma\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Pz &= o \\ \cos\beta\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Py &= o. \end{aligned}$$

Da jede dieſer Gleichungen durch die zwei anderen beſtimmt wird, ſo genügen ſchon zwei derſelben und man hat als Bedingungen des Gleichgewichts paralleler Kräfte folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma P &= o \\ \cos\alpha\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Px &= o \\ \cos\gamma\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Pz &= o \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (F).$$

Iſt der Anfangspunct der Coordinaten fix, ſo kann das Syſtem keine fortſchreitende Bewegung annehmen und es wird der erſten dieſer drei Gleichungen entſprochen. In dieſem Falle hat dieſer Punct den Druck zu ertragen, welcher der Summe aller Kräfte gleich iſt. Um die Eigenſchaften, welche dieſer Punct haben muß, damit auch keine drehende Bewegung des Syſtems um ihn Statt finde, näher kennen zu lernen, beſtimme man aus den zwei letzten Gleichungen und der Gleichung $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ die Werthe $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Man erhält, wenn man zur Abkürzung

$$(\Sigma Px)^2 + (\Sigma Py)^2 + (\Sigma Pz)^2 = A$$

ſetzt, folgende Ausdrücke:

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma Px}{A},\ \cos\beta = \frac{\Sigma Py}{A},\ \cos\gamma = \frac{\Sigma Pz}{A},$$

und dieſen Ausdrücken muß die Lage des Syſtems im Gleichgewichte entſprechen. Iſt zugleich jede der Größen ΣPx, ΣPy, ΣPz für ſich $= 0$, ſo bleiben die Winkel α, β, γ unbeſtimmt oder es kann bei jeder Lage des Syſtems gegen die Richtungen der Kräfte Gleichgewicht herrſchen. Den Punct, für welchen dieſes Statt findet, nennt man den **Mittelpunct der Kräfte**.

26. Um den Mittelpunct der Kräfte zu finden, hat man nur jenen Punct zu ſuchen, für welchen

$$\Sigma Px = 0,\quad \Sigma Py = 0,\quad \Sigma Pz = 0$$

iſt. Sind X, Y, Z die Coordinaten dieſes Punctes, und $x = m - X$, $y = n - Y$, $z = \omega - Z$, ſo hat man aus dieſen Gleichungen

$$\Sigma P(m - X) = 0,\quad \Sigma P(n - Y) = 0,\quad \Sigma P(\omega - Z) = 0$$

oder

$$X = \frac{\Sigma Pm}{\Sigma P},\quad Y = \frac{\Sigma Pn}{\Sigma P},\quad Z = \frac{\Sigma P\omega}{\Sigma P}.$$

Da durch X, Y, Z nur **ein** Punct beſtimmt wird, ſo gibt es für ein Syſtem paralleler Kräfte auch nur **einen** Mittelpunct.

27. Bekanntlich werden alle materiellen Theile eines ſchweren Körpers, deſſen Ausdehnung nicht gar zu groß iſt, nach parallelen Richtungen abwärts gezogen. Für Schwerkräfte iſt alſo ΣP das Gewicht des Körpers und die Coordinaten X, Y, Z beſtimmen ſeinen Schwerpunct. Heißt g die Schwerkraft und dm ein Elementartheilchen einer ſchweren Maſſe, ſo iſt

$$\Sigma P = \int g\,dm.$$

$$X = \frac{\int xg\,dm}{\int g\,dm},\ Y = \frac{\int yg\,dm}{\int g\,dm},\ Z = \frac{\int zg\,dm}{\int g\,dm} \ \ldots\ (G).$$

Nach dieſen Ausdrücken läßt ſich der Schwerpunct jedes Körpers berechnen.

28. Wenn man einem Syſteme ſchwerer Theile, die ſich im Gleichgewichte befinden, eine unendlich kleine Bewegung ertheilt; ſo wird dadurch der Schwerpunct des Syſtems weder ſteigen noch ſinken. Bezeichnet ΣP die Summe der Gewichte der Maſſen, Px das Moment einer Maſſe in Beziehung auf eine horizontale Ebene, PX das Moment des Schwerpunctes des ganzen Syſtems in Beziehung auf dieſelbe Ebene; ſo erhält man

$$X = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}.$$

Geht bei einer unendlich kleinen Verrückung x in $x+dx$ über, ſo verwandelt ſich X in $X+dX$, und man hat:

$$dX = \frac{\Sigma P dx}{\Sigma P}.$$

Weil aber das Syſtem den Bedingungen des Gleichgewichts entſpricht; ſo iſt $\Sigma P dx = 0$, mithin auch $dx = 0$ oder $x = \text{Const.}$

Aus $dx = 0$ erkennt man, daß die Höhe des Schwerpunctes ein Maximum oder Minimum iſt. Der erſte Fall bezeichnet das labile, der zweite das ſtabile Gleichgewicht.

29. Alles bisher über die Geſetze des Gleichgewichts Geſagte bezieht ſich vorzüglich auf ſolche Fälle, wo die relative Lage der Angriffspuncte in einem Syſteme unveränderlich iſt, wenigſtens iſt das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten, aus welchem die vorausgeſchickten Geſetze des Gleichgewichtes abgeleitet ſind, nur für dieſe Fälle bewieſen. Es iſt aber unumgänglich nothwendig, dieſes Princip auch auf Angriffspuncte auszudehnen, deren relative Lage veränderlich iſt, wie ſie bei allen elaſtiſchen feſten Maſſen vorkommen, und zugleich den Umſtand zu berückſichtigen, daß ſolche Puncte kein Continuum bilden und mit einer Kraft auf einander wirken, die ſich zwar über mehrere Nachbarpuncte erſtreckt, aber in einer gewiſſen Entfernung vom wirkenden Puncte plötzlich Null wird.

Man denke ſich in einer Maſſe dieſer Art ein ſo kleines rechtwinkeliges Parallelepiped (Fig. 53), daß nach der Verſchiebung die Wirkung des Körpers auf alle Theile einer Fläche als gleich groß angeſehen werden kann, aber doch ſo groß, daß ſeine Dimenſionen ein bedeutendes Vielfaches vom Halbmeſſer der Wirkſamkeit der kleinſten Theile ausmachen und man nur die Wirkung des Körpers auf die Flächen desſelben zu berückſichtigen braucht. In einer Ecke dieſes Parallelepipeds denke man ſich einen Punct m, und laſſe die in demſelben zuſammenlaufenden Kanten den Coordinatenaxen x, y, z parallel ſeyn. Sind nun g, h, i ſeine Dimenſionen, ſo kann man die Wirkung des übrigen Theils des Körpers auf jene ſeiner Flächen, welche mit der Ebene der xy parallel iſt und in welcher m liegt, durch $P_{\text{,}}gh$, $Q_{\text{,}}gh$, $R_{\text{,}}gh$ ausdrücken, wo $P_{\text{,}}$, $Q_{\text{,}}$, $R_{\text{,}}$ die in 18 angenommene Bedeutung haben. Die Wirkung auf die entgegengeſetzte Fläche wird offenbar

$$P_{\text{,}}gh + \frac{dP_{\text{,}}}{dz}ghi + Q_{\text{,}}gh + \frac{dQ_{\text{,}}}{dz}ghi + R_{\text{,}}gh + \frac{dR_{\text{,}}}{dz}ghi$$

ſeyn, und da die Wirkungen auf dieſe zwei Flächen einander entgegengeſetzt ſind, ſo erhält man als reſultirende Wirkung nach den Richtungen von x, y, z

$$-\left(\frac{dP_1}{dz}+\frac{dQ_1}{dz}+\frac{dR_1}{dz}\right)ghi.$$

Eben ſo findet man

$$-\left(\frac{dP_2}{dy}+\frac{dQ_2}{dy}+\frac{dR_2}{dy}\right)ghi$$

$$-\left(\frac{dP_3}{dx}+\frac{dQ_3}{dx}+\frac{dR_3}{dx}\right)ghi.$$

Heißen die gegebenen nach den Richtungen x, y, z wirkenden auf die Einheit der Maſſe und des Volumens bezogenen Kräfte X, Y, Z, die Dichte des Parallelepipeds σ, und deſſen Volumen $=\varkappa$; ſo ſind die auf dasſelbe wirkenden Kräfte $X\sigma\varkappa$, $Y\sigma\varkappa$, $Z\sigma\varkappa$ und man hat für den Fall des Gleichgewichtes jenes Parallelepipedes

$$\left.\begin{aligned} X\sigma &= \frac{dP_1}{dz}+\frac{dP_2}{dy}+\frac{dP_3}{dx} \\ Y\sigma &= \frac{dQ_1}{dz}+\frac{dQ_2}{dy}+\frac{dQ_3}{dx} \\ Z\sigma &= \frac{dR_1}{dz}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{dR_3}{dx} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (H).$$

30. Nun erübrigen aber noch die Gleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichtes äußerer Kräfte mit den den kleinſten Körpertheilchen eigenen enthalten, ſich aber nur auf die Oberfläche des Körpers beziehen. Man denke ſich in einer unmerklich kleinen Entfernung von der Oberfläche eines Körpers einen Punct m und durch dieſen eine zur Oberfläche normale Linie gezogen, ferner durch m eine auf dieſer Normalen ſenkrechte Ebene. Dieſe ſchneidet den Körper in einem Stück o, welches ſo klein iſt, daß die Wirkung des übrigen Theiles des Körpers zwar auf alle Puncte des zwiſchen o und der Oberfläche liegenden Stückes gleich ausfällt, aber doch in Bezug auf die Entfernung von der Oberfläche ſehr groß erſcheint. Demnach läßt ſich die Wirkung des Körpers auf das genannte Stück nach der Richtung der drei Coordinatenaxen durch oP, oQ, oR ausdrücken. Sind nun X_1, Y_1, Z_1 äußere Kräfte, welche wieder nach den Richtungen x, y, z auf ein Stück der Oberfläche von der Größe $= 1$ wirken, und o_1 das Stück der Oberfläche,

welches dem von Innen durch o begrenzten Stück entſpricht, ſo ſind die auf o′ wirkenden Kräfte $o_1 X_1$, $o_1 Y_1$, $o_1 Z_1$, mithin für den Fall des Gleichgewichtes:

$$o_1 X_1 + oP = o; \quad o_1 Y_1 + oQ = o; \quad o_1 Z_1 + oR = o$$

oder wenn man für P, Q, R die in 14 angenommenen Werthe ſetzt, und annäherungsweiſe $o_1 = o$ ſeyn läßt:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + P_1 c_2 + P_2 c_1 + P_3 c = o \\ Y_1 + Q_1 c_2 + Q_2 c_1 + Q_3 c = o \\ Z_1 + R_1 c_2 + R_2 c_1 + R_3 c = o \end{array}\right\} \ldots\ldots (I).$$

Die Größen c, c_1, c_2 gehören eigentlich zu jenen Puncten der Oberfläche, welche in der durch m gezogenen Normalen liegen und bezeichnen die Coſinuſſe der Winkel, welche die Normale urſprünglich mit xyz macht, ſie können aber ohne Fehler in demſelben Sinn für den Punct m genommen werden.

31. Man kann die allgemeinen in 29 entwickelten Gleichungen durch andere erſetzen, welche oft bei der Anwendung leichter brauchbar ſind. Es ſey dm ein Maſſendifferenzial im Innern des Körpers, deſſen Dichte σ heißt, mithin $dm = \sigma . dx\,dy\,dz$. Behalten alle hier folgenden Größen ihre vorhin feſtgeſetzte Bedeutung, ſo hat man

$$\int X dm = \iiint \left(\frac{dP_1}{dz} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx}\right) \sigma\, dx\, dy\, dz.$$

Es iſt aber

$$\iiint \frac{dP_1}{dz} \sigma\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint P_1 \sigma\, dx\, dy - \iint (P_1 \sigma)\, dx\, dy$$

wenn $P_1 \sigma$ ſich auf eine, $(P_1 \sigma)$ aber auf die andere Grenze der Integration bezieht. Heißt aber γ_1 der Winkel, welchen die Normale an der Oberfläche mit z macht, ſo iſt das Differenzial dafür $\gamma_1 ds$ und man hat $dx\,dy = \pm \gamma_1 ds$, wo das obere Zeichen für eine, das untere für die andere Grenze der Integration gilt, und ſtatt deſſen man überhaupt $\gamma_1 ds$ ſetzen kann, weil γ_1 ſchon das Zeichen mit ſich führt. Darum wird

$$\iiint \frac{dP_1}{dz} dx\, dy\, dz = \int \gamma_1 P_1 ds$$

Eben ſo iſt

$$\iiint \frac{dP_2}{dy}\, dx\, dy\, dz = \int \beta_1 P_2\, ds;$$

$$\iiint \frac{dP_3}{dx}\, dx\, dy\, dz = \int \alpha_1 P_3\, ds;$$

wenn β_1 und α_1 die Winkel bezeichnen, die die Normale an der Oberfläche mit y und x macht. Mithin

$$\int X dm = \int ds\, (P_1 \gamma_1 + P_2 \beta_1 + P_3 \alpha_1).$$

Auf ähnliche Weiſe hat man

$$\int Y dm = \int ds\, (Q_1 \gamma_1 + Q_2 \beta_1 + Q_3 \alpha_1)$$
$$\int Z dm = \int ds\, (R_1 \gamma_1 + R_2 \beta_1 + R_3 \alpha_1).$$

Gehört die Fläche des Stückes, deſſen Wirkung hier ausgedrückt iſt, zur Oberfläche des ganzen Körpers, ſo iſt offenbar $\gamma_1 = c_2$, $\beta_1 = c_1$, $\alpha_1 = c$ und es iſt daher nach (*I*)

$$\left.\begin{aligned}\int X dm &= \int (\gamma_1 P_1 + \beta_1 P_2 + \alpha_1 P_3)\, ds - \int X_1\, ds\\ \int Y dm &= \int (\gamma_1 Q_1 + \beta_1 Q_2 + \alpha_1 Q_3)\, ds - \int Y_1\, ds\\ \int Z dm &= \int (\gamma_1 R_1 + \beta_1 R_2 + \alpha_1 R_3)\, ds - \int Z_1\, ds\end{aligned}\right\} \ldots (K).$$

32. Die Gleichungen (*I*) enthalten nun den Schlüſſel zum Beweiſe des Principes der virtuellen Geſchwindigkeiten für ein Syſtem von Angriffspuncten, deren gegenſeitige Entfernungen veränderlich ſind. Es ſeyen P, P_1, P_2 ... Kräfte, welche auf die Puncte m, m_1, m_2 ꝛc. wirken und dieſe verſchieben. Nachdem dieſes geſchehen iſt, ſey m ein Punct, welcher in Wechſelwirkung mit einem anderen m_1 ſteht, die Entfernung beider von einander heiße v und die Kraft, mit der ſie auf einander wirken, φv. Die Linie v mache mit den Coordinaten xyz die Winkel α', β', γ', und die Richtung der Kraft mit ebendenſelben Coordinaten die Winkel a, b, c. Dieſem gemäß erhält man für den Fall des Gleichgewichtes die Gleichungen

$$P \cos a + \Sigma \varphi v \cos \alpha' = 0$$
$$P \cos b + \Sigma \varphi v \cos \beta' = 0$$
$$P \cos c + \Sigma \varphi v \cos \gamma' = 0$$

wobei ſich das Zeichen Σ auf alle Puncte erſtreckt, auf welche m wirkt. Denkt man ſich nun den Punct m um eine unendlich kleine Größe verrückt und heißen q, q', q'' die Projectionen des von ihm zurückgelegten Weges auf die Axen x, y, z, ferner iſt die Projection dieſes Weges auf die Richtung der Kraft p und $d_1 v$ die Projection

desſelben auf die Linie v, ſo hat man aus den bekannten Eigenſchaften der Projectionen

$$p = q \cos a + q' \cos b + q'' \cos c$$
$$d_{,} v = q \cos \alpha' + q' \cos \beta' + q'' \cos \gamma'$$

und daher vermöge der obigen Gleichungen

$$Pp + \Sigma \varphi v \delta_{,} v = 0.$$

Ähnliche Gleichungen erhält man für jeden einzelnen Punct. Für die Maſſe $m_{,}$, die mit m in Wechſelwirkung ſteht, erhält man

$$P'p' + \Sigma \varphi v \delta' v = 0$$

wo P', p' dieſelben Bedeutungen haben, wie in Bezug auf m die Größen Pp und $\delta' v$ die Veränderung der Linie v bezeichnet, welche aus der Bewegung von $m_{,}$ hervorgeht und aus beiden Gleichungen wird

$$Pp + P'p' + \Sigma \varphi v (\delta_{,} v + \delta' v) = 0$$

aber $\delta_{,} v + \delta' v$ iſt die totale Veränderung von v, die aus der Bewegung beider Puncte m und $m_{,}$ entſteht. Wird dieſe δv geſetzt, ſo hat man

$$Pp + P'p' + \Sigma \varphi v \delta v = 0.$$

Eben ſo verfährt man mit den übrigen Puncten und erhält demnach

$$Pp + P'p' + P''p'' \ldots\ldots + \Sigma \varphi v \delta v = 0.$$

Da iſt die Verrückung der einzelnen Puncte ganz willkührlich, nimmt man aber die gegenſeitige Entfernung aller derſelben als conſtant an, ſo iſt $\delta v = 0$ und man hat

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots = 0.$$

Demnach gilt dieſes Princip auch für den Fall, wo die Entfernung der einzelnen Angriffspuncte der Kräfte veränderlich iſt und man kann daher die allgemeinen aus dieſem Princip für das Gleichgewicht gezogenen Geſetze für dieſen Fall als giltig anſehen.

33. Die Gleichungen (H) und (I) gelten nicht blos für den Fall, wo äußere Kräfte auf einen Körper wirken, ſeine Theile fortſchieben und erſt nach dieſer Wirkung mit dem Beſtreben der Theile, in ihre alte Lage zurückzukehren, ins Gleichgewicht treten, ſondern auch für die Körper in ihrem natürlichen Zuſtande. Für dieſen Fall iſt nämlich wegen Mangel äußerer Kräfte $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $X_{,}=0$, $Y_{,}=0$, $Z_{,}=0$ und daher aus (H) und (I)

$$\frac{dP_{,}}{dz} + \frac{dP_{2}}{dy} + \frac{dP_{3}}{dx} = 0; \; P_{,} c_{2} + P_{2} c_{,} + P_{3} c = 0$$

$$\frac{dQ_1}{dz} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dx} = 0;\ Q_1 c_2 + Q_2 c_1 + Q_3 c = 0$$

$$\frac{dR_1}{dz} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dx} = 0;\ R_1 c_2 + R_2 c_1 + R_3 c = 0.$$

Weil aber die Theile nicht gewaltſam aus ihren Lagen gebracht ſind, iſt auch $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ und daher, den in 18 entwickelten Werthen von P, Q, R gemäß,

$$P_1 = Q_1 = P_2 = R_2 = Q_3 = R_3 = 0$$
$$P_3 = Q_2 = R_1 = -E$$

und deßhalb aus den vorhergehenden drei Gleichungen

$$\frac{dE}{dx} = 0,\ \frac{dE}{dy} = 0,\ \frac{dE}{dz} = 0,\ E = 0$$

mithin E eine conſtante Größe und zwar $= 0$. (Vergleiche 18.)

Man erhält daher für den Ausdruck, der in 17 mit E bezeichnet wurde, nach Hinweglaſſung des conſtanten Factors

$$\Sigma v^2 \varphi(v) = 0$$

und dieſe Gleichung beſtimmt die Entfernung der Theile von einander, wie ſie durch die den Körpern eigene Anziehung und Abſtoßung bedingt iſt.

34. Wenn auf den Körper zwar keine inneren, aber doch äußere Kräfte wirken, deren Richtungen auf ſeiner Oberfläche ſenkrecht ſtehen, ſo ſind wieder $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, aber X_1 Y_1 Z_1 erhalten die Werthe, welche der auf einen Punct der Oberfläche wirkenden Kraft entſprechen. Iſt Π die Kraft, welche auf den Punct m_1 wirkt und poſitiv oder negativ iſt, je nachdem ſie den Körper zu dehnen oder zuſammenzudrücken ſucht, ſo hat man offenbar

$$X_1 = -\Pi c,\quad Y_1 = -\Pi c_1,\quad Z_1 = -\Pi c_2.$$

$$\frac{dP_1}{dz} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx} = 0; P_1 c_2 + P_2 c_1 + P_3 c - \Pi c = 0$$

$$\frac{dQ_1}{dz} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dx} = 0; Q_1 c_2 + Q_2 c_1 + Q_3 c - \Pi c_1 = 0$$

$$\frac{dR_1}{dz} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dx} = 0; R_1 c_2 + R_2 c_1 + R_3 c - \Pi c_2 = 0.$$

Iſt nun der Körper homogen und Π eine beſtändige Größe, ſo wird er von allen Seiten gleich ſtark zuſammengedrückt oder ausgedehnt, und man erhält

$$\alpha_1 - \alpha = \beta_1 - \beta = \gamma_1 - \gamma$$

daher

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\beta}{dy} = \frac{d\gamma}{dz}$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dx} \text{ etc.} = 0$$

mithin

$$R_1 = Q_2 = P_3 = -5e\frac{d\alpha}{dx}.$$

$$P_1 = Q_1 = P_2 = R_2 = Q_3 = R_3 = 0.$$

Demnach aus den erſten drei obigen Gleichungen

$$\frac{d.e\frac{d\alpha}{dx}}{dz} = 0, \quad \frac{d.e\frac{d\alpha}{dx}}{dy} = 0, \quad \frac{d.e\frac{d\alpha}{dx}}{dx} = 0$$

und aus den drei letzteren

$$5e\frac{d\alpha}{dx} = \Pi.$$

Iſt die urſprüngliche Entfernung zweier einander naher Puncte m und m_1 gleich ν und nach erfolgter Änderung ν_1, ſo daß

$$\nu_1 = \nu - \nu\mu$$

iſt, ſo hat man $\mu = -\frac{d\alpha}{dx}$ und daher

$$\frac{d.\,e\mu}{dx} = 0, \quad \frac{d.\,e\mu}{dy} = 0, \quad \frac{d.\,e\mu}{dz} = 0$$

$$\Pi = 5e\mu.$$

Hieraus folgt, daß e eine Größe ſey, die für denſelben Körper im verkehrten Verhältniſſe mit μ ſteht. Demnach kann e als Maß der Elaſticität eines Körpers angeſehen werden.

35. Nur in ſehr wenigen Fällen erleiden alle Theile eines elaſtiſchen Körpers nach allen Richtungen dieſelbe räumliche Veränderung, meiſtens werden einige Theile einander genähert, während andere von einander entfernt werden und umgekehrt, und das Beſtreben, die vorige Geſtalt wieder anzunehmen, rührt ſowohl von der Kraft einiger Theile, ſich zu nähern, als von der anderer, ſich von einander zu entfernen ab. Nur wenn man bloße elaſtiſche Fäden betrachtet, deren Dicke ſehr gering iſt, und die daher auch nur vermög einer beſonderen äußeren Spannung elaſtiſch ſind, hat man es mit einer bloßen Verſchiebung der Theile nach einer Abmeſſung zu thun, und dieſer Fall als der einfachſte ſoll auch hier zuerſt betrachtet werden.

36. Man denke ſich eine elaſtiſche Faſer oder eine Saite von allenthalben gleicher Dicke und gleichförmiger Dichte aus der natürlichen Lage gebracht und ſuche die Geſetze des Gleichgewichtes zwiſchen ihrer Elaſticität und den äußeren Kräften. Dazu dienen die Gleichungen (*K*). Wirken keine beſonderen Kräfte auf die Oberfläche, ſo hat man in dieſen Gleichungen $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$ und demnach

$$\int X dm = \int (\gamma_1 P_1 + \beta_1 P_2 + \alpha_1 P_3)\, ds$$
$$\int Y dm = \int (\gamma_1 Q_1 + \beta_1 Q_2 + \alpha_1 Q_3)\, ds$$
$$\int Z dm = \int (\gamma_1 R_1 + \beta_1 R_2 + \alpha_1 R_3)\, ds.$$

Dieſe Gleichungen beziehen ſich auf das Stück der Saite, welches betrachtet wird, und die Integration muß ſich von einem Ende dieſes Stückes bis zum anderen erſtrecken. Auf ein Ende beziehen ſich die Coordinaten x, y, z und an dieſem hat die Saite den Querſchnitt o, die Coordinaten des anderen Endes mögen $x_1\, y_1\, z_1$ und der Querſchnitt o_1 ſeyn. Man kann hier ſtatt ds in den vorigen Gleichungen den Querſchnitt ſetzen, und da man zugleich hat

$$\alpha_1 = -\frac{dx}{ds},\ \beta_1 = -\frac{dy}{ds},\ \gamma_1 = -\frac{dz}{ds},$$

ſo erhält man als Integral für das Stück von der Länge $s' - s$ den Ausdruck

$$\int X dm = \left(P'_1 \frac{dz_1}{ds_1} + P'_2 \frac{dy_1}{ds_1} + P'_3 \frac{dx_1}{ds_1}\right) o -$$
$$- \left(P_1 \frac{dz}{ds} + P_2 \frac{dy}{ds} + P_3 \frac{dx}{ds}\right) o_1$$

wenn P'_1, P'_2, P'_3 das für das zweite Ende ſind, was P_1, P_2, P_3 für das erſte bedeuten. Nimmt man die Länge des Stückes $s' - s$ als unendlich klein an, ſo gilt $x dm$ für ein Element, und man hat

$$X dm = d.P_1 o \frac{dz}{ds} + d.P_2 o \frac{dy}{ds} + d.P_3 o \frac{dx}{ds}$$

Auf ähnliche Weiſe findet man:

$$Y dm = d.Q_1 o \frac{dz}{ds} + d.Q_2 o \frac{dy}{ds} + d.Q_3 o \frac{dx}{ds}$$

$$Z dm = d.R_1 o \frac{dz}{ds} + d.R_2 o \frac{dy}{ds} + d.R_3 o \frac{dx}{ds}.$$

Heißt σ die Dichte der Saite, ſo hat man

$$dm = \sigma o ds$$

und daher

$$\left.\begin{aligned} X\sigma o &= \frac{d.P_1 o \frac{dz}{ds}}{ds} + \frac{d.P_2 o \frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{d.P_3 o \frac{dx}{ds}}{ds} \\ Y\sigma o &= \frac{d.Q_1 o \frac{dz}{ds}}{ds} + \frac{d.Q_2 o \frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{d.Q_3 o \frac{dx}{ds}}{ds} \\ Z\sigma o &= \frac{d.R_1 o \frac{dz}{ds}}{ds} + \frac{d.R_2 o \frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{d.R_3 o \frac{dx}{ds}}{ds} \end{aligned}\right\} \ldots (L).$$

37. Aus 36 iſt klar, daß $P_1 \frac{dz}{ds} + P_2 \frac{dy}{ds} + P_3 \frac{dx}{ds}$ die Kraft bezeichnet, womit die Theile, welche durch den Schnitt o von den übrigen getrennt ſind, auf dieſelben nach der Richtung von x wirken. Dieſe Kraft iſt von der Spannung S der Faſer abhängig und der Theil derſelben, der nach x wirkt, iſt $S \frac{dx}{ds}$. Eben ſo ſind $S \frac{dy}{ds}$, $S \frac{dz}{ds}$ die Kräfte, welche ſich aus der ſpannenden Kraft nach den Richtungen y und z ergeben. Man bekommt daher:

$$\left.\begin{aligned} P_1 \frac{dz}{ds} + P_2 \frac{dy}{ds} + P_3 \frac{dx}{ds} &= S \frac{dx}{ds} \\ Q_1 \frac{dz}{ds} + Q_2 \frac{dy}{ds} + Q_3 \frac{dx}{ds} &= S \frac{dy}{ds} \\ R_1 \frac{dz}{ds} + R_2 \frac{dy}{ds} + R_3 \frac{dx}{ds} &= S \frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\} \ldots. (M)$$

und mittelſt dieſer Werthe aus (L)

$$X\sigma o = \frac{d.So \frac{dz}{ds}}{ds}, \quad Y\sigma o = \frac{d.So \frac{dy}{ds}}{ds},$$

$$Z\sigma o = \frac{d.So \frac{dx}{ds}}{ds} \ldots\ldots. (N).$$

Eliminirt man aus dieſen drei Gleichungen S, ſo erhält man zwei Gleichungen, welche die Geſtalt der Saite beſtimmen.

38. Sehr wichtig iſt es, das Verhältniß zwiſchen der Spannung und der daraus hervorgehenden Verlängerung der Saite zu erfahren. Zu dieſer Beſtimmung dient die Gleichung $\Pi = 5e\mu$. Es iſt aber $\Pi = -2S$, mithin

$$\mu = -\frac{2S}{5e}.$$

Iſt l die Länge der Saite und daher $\lambda = \mu l$ das Stück, um welches ſie länger geworden iſt, ſo hat man

$$\lambda = -\frac{2lS}{5e}.$$

Wird die Saite durch das Gewicht p belaſtet, ſo erhält man:

$$So + p = o$$

wobei wie vorhin o den Querſchnitt der Saite bedeutet, mithin

$$\lambda = \frac{2lp}{5eo}.$$

Es iſt daher die Verlängerung bei übrigens gleichen Umſtänden dem Gewichte p proportionirt.

39. Die Kraft, wodurch die Länge einer Saite vom Querſchnitte = 1 auf ihren doppelten Werth gebracht würde, wenn eine ſolche Verlängerung innerhalb der Grenze der vollkommenen Elaſticität läge, nennt man den Modulus ihrer Elaſticität. Iſt M dieſe Kraft, ſo hat man aus der vorhergehenden Gleichung

$$l = \frac{2lM}{5e} \text{ mithin } M = \frac{5}{2}e$$

demnach ſteht M mit e im conſtanten Verhältniſſe. Setzt man für e den Werth aus obiger Gleichung für λ, ſo erhält man:

$$M = \frac{lp}{\lambda o}.$$

40. Kennt man demnach l, p, o und λ, ſo iſt auch M bekannt. Zur Beſtimmung dieſes Werthes λ dienen Verſuche eigener Art, die man am bequemſten mit einem von s'Graveſande angegebenen Apparate anſtellt, der aus (Fig. 54) zu erſehen iſt. Der Körper, deſſen Verlängerung gemeſſen werden ſoll, wird in zwei Klemmen mittelſt der Schrauben AA befeſtiget und ſenkrecht darauf in der Mitte eine Wagſchale mit Gewichten mittelſt eines Hakens B angehängt. Dieſe Gewichte dehnen den Körper MM und bringen ihn in die Lage MNM. Da die Länge MM des Körpers, mithin auch ſeine Hälfte MO ohnehin bekannt iſt, ſo braucht man, um die Verlängerung zu erfahren, nur ON zu beſtimmen; denn weil $MN = \sqrt{(MO^2 + NO^2)}$, ſo iſt die Verlängerung $MN - MO = \sqrt{(MO^2 + NO^2)} - MO$. Zur Kenntniß von ON führt nun eine

Schnur, die vom Haken B aufwärts über eine Rolle C geht und durch ein kleines Gegengewicht balancirt iſt. An der Axe dieſer Rolle befindet ſich ein gut äquilibrirter Zeiger, der über einem eingetheilten Kreiſe ſpielet. So wie durch den Zug des Gewichtes der Punct O nach N ſinkt, nimmt er die Schnur mit ſich um eben ſo viel fort, dieſe dreht die Rolle um einen gleichen Theil, und ſo verſchiebt ſich der Zeiger in einem um ſo viel vergrößerten Maßſtabe, als er den Halbmeſſer der Rolle an Länge übertrifft. Bei den gewöhnlichen Inſtrumenten dieſer Art enthält der Zeiger den Halbmeſſer der Rolle zehnmal in ſich, ſo daß er auf dem getheilten Bogen den Weg NO zehnfach zurücklegt.

Will man mit dieſem Apparate einen Verſuch anſtellen, ſo wird die auf dem Halbirungspuncte des Körpers aufgehängte Wagſchale von unten unterſtützt, damit ſie keinen Druck auf den eingeſpannten Körper ausübt und dann der Stand des Zeigers beobachtet, hierauf die Wagſchale frei gelaſſen und der Stand des Zeigers wieder abgeleſen. Aus dem von ihm durchlaufenen Wege läßt ſich nun leicht auf die Größe von $NO = \lambda$ ſchließen. Andere Apparate zu demſelben Zweck haben Eytelwein (deſſen Statik B. 2), Tredgold (Phil. transact. 1824) u. a. angegeben.

41. Graveſande ſelbſt hat mit ſeinem Apparate mehrere Verſuche mit aufgerollten Stahlfedern und mit Metallſaiten angeſtellt. Er fand bei einer 34.5 Zoll langen Saite ſowohl als bei einer eben ſo langen Stahlfeder die Größe λ der Größe p proportionirt, mithin M für verſchiedene Belaſtungen conſtant, ſo lange λ nicht die Größe von 0.04 Zoll überſchritt. Dabei brachte er aber nicht blos die Belaſtung p, ſondern dieſe mit dem halben Gewichte des geſpannten Körpers vermehrt, in Rechnung, wie es die Natur der Sache fordert (eigentlich hätte $\frac{5}{2}$ des Gewichtes in Rechnung gebracht werden ſollen). Es wurden aber auch bei Belaſtungen, welche obige Grenze weit überſchritten, Verſuche angeſtellt. Dabei ergaben ſich folgende Reſultate:

I. Mit einer Uhrfeder.

Grad der Spannung	p	λ	M
Gering . . .	20 Drachmen	0.10 ʒ.	200
	144 —	0.40	360
Stärker . . .	32 —	0.10	320
	192 —	0.40	480
Noch ſtärker . .	64 —	0.07	914.3
	430 —	0.40	1075
Stärkſte . . .	64 —	0.06	1066.6
	492 —	0.04	1230

II. Mit einer Saite.

Grad der Spannung	p	λ	M
Schwache . .	3 Drachmen	0.04 ʒ.	75
	36 —	0.40	90
Stärkere . . .	8 —	0.05	160
	70 —	0.40	175
Stärkſte . . .	8 —	0.04	200
	86 —	0.40	215

Bei der Berechnung von M wurde $\frac{l}{o} = 1$ geſetzt.

Bezeichnet man die in der erſten Verſuchsreihe mit der Uhrfeder gefundenen Werthe von M ſo, daß $200 = M_1$, $320 = M_2$, $914.3 = M_3$, $1066.6 = M_4$ iſt, ſo hat man

$$360 = M_1 + 160$$
$$480 = M_2 + 160$$
$$1075 = M_3 + 160.7$$
$$1230 = M_4 + 163.4.$$

Setzt man für den Verſuch mit der Saite

$75 = M_1$, $160 = M_2$, $200 = M_3$, ſo wird

$$90 = M_1 + 15$$
$$175 = M_2 + 15$$
$$215 = M_3 + 15.$$

Aus dieſen Verſuchen folgt, daß die Kraft, womit die Theile

einer elaſtiſchen Saite einer Verrückung widerſtehen, mit der Spannung wächſt, und daß man, um eine beſtimmte Verlängerung derſelben hervorzubringen, die Elaſticität um gleich viel ſteigern müſſe, wie groß auch immer die Elaſticität ſeyn mag, von der man ausgeht, vorausgeſetzt, daß man dabei die Grenze der vollkommenen Elaſticität nicht überſchreitet. Wird dieſe Grenze überſchritten, ſo treten die Theile der elaſtiſchen Faſer in ein anderes Gleichgewicht, wodurch ſich gleichſam die mechaniſche Natur des Körpers ändert.

42. Elaſtiſche Stäbe laſſen ſich **dehnen**, **zuſammendrücken**, **biegen** und **winden**, und kehren, ſobald die äußere Kraft zu wirken aufgehört hat, vermöge ihrer Elaſticität wieder in ihre alte Lage zurück, wenn übrigens die äußere Kraft die Grenzen der vollkommenen Elaſticität nicht überſchreitet. Da ſie nicht wie Saiten erſt einer Spannung bedürfen, um ſich hinreichend elaſtiſch zu zeigen, ſo weichen die Geſetze ihres Gleichgewichtes in einigen Puncten von den für Saiten erwieſenen ab.

43. Man denke ſich einen vollkommen homogenen cylindriſchen Stab (Fig. 55), deſſen kreisförmige Baſis ſehr klein iſt und deſſen Axe mit der Coordinatenaxe der x zuſammenfällt, m ſey ein Punct in dieſer Axe und x ſeine urſprüngliche Coordinate. Nachdem er durch eine äußere Kraft verrückt worden iſt, ſeyen $x+x_1$, y und z ſeine Coordinaten und daher x_1, y, z die Größe ſeiner Verrückung nach der Richtung der Coordinatenaxen. Wird der Stab gebogen, ſo ſind y und z Functionen von x und geben zugleich die Krümmung der Axe an. Man nehme in einem durch m gehenden, auf der Axe des Stabes ſenkrechten Querſchnitt ein zweites Theilchen m_1 an, deſſen rechtwinkelige Coordinaten in ſeiner natürlichen Lage x, η und $\varkappa$, nachdem er aber ſeinen natürlichen Platz verlaſſen hat, $x+\alpha_1$, $\eta+\beta_1$, $\varkappa+\gamma_1$ ſind, ſo daß wieder α_1, β_1, γ_1, die mit x, y, z parallelen Verſchiebungen dieſes Punctes vorſtellen. Nach dieſen Bezeichnungen findet man für den Punct m_1 die Werthe der Kräfte P_1, Q_1, R_1 ꝛc. aus (18), wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= R_3 = -e\left(\frac{d\alpha_1}{d\varkappa}+\frac{d\gamma_1}{dx}\right)\\
P_2 &= Q_3 = -e\left(\frac{d\alpha_1}{d\eta}+\frac{d\beta_1}{dx}\right)\\
P_3 &= -e\left(3\,\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d\beta_1}{d\eta}+\frac{d\gamma_1}{d\varkappa}\right)
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots (O)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_1 = R_2 &= -e\left(\frac{d\beta_1}{d\varkappa} + \frac{d\gamma_1}{d\varkappa}\right) \\ Q_2 &= -e\left(\frac{d\alpha_1}{dx} + 3\,\frac{d\beta_1}{d\eta} + \frac{d\gamma_1}{d\eta}\right) \\ R_1 &= -e\left(\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{d\beta_1}{d\eta} + 3\,\frac{d\gamma_1}{d\varkappa}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (O).$$

Werden dieſe Werthe in die Gleichung (H) geſetzt, ſo erhält man die Ausdrücke für die Kräfte $X_{,1}$, $Y_{,1}$, $Z_{,1}$, die auf den Punct m_1 wirken.

Heißt die gerade Linie $m\,m_1 = \nu$ und der Winkel $m_1\;m\,\omega$, den ſie mit einer mit y parallelen $m\,\omega$ einſchließt, $=\delta$, ſo hat man

$$\eta = \nu\cos\delta \text{ und } \varkappa = \nu\sin\delta$$

und in der Gleichung (I)

$$c = 0, \quad c_1 = \cos\delta, \quad c_2 = \sin\delta.$$

Wirket auf die Oberfläche des Cylinders keine Kraft, ſo iſt $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$ und man hat aus (I)

$$\left.\begin{aligned} P_1\sin\delta + P_2\cos\delta &= 0 \\ Q_1\sin\delta + Q_2\cos\delta &= 0 \\ R_1\sin\delta + R_2\cos\delta &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (P).$$

44. Nun betrachte man zuerſt den Fall, wo ſich die Axe des Stabes weder biegt noch verlängert. Da iſt für den Punct m: $y = 0$ und $z = 0$, ferner für alle Puncte außer der Axe $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$, endlich muß die Verlängerung der Linie ν für $\nu = 0$ verſchwinden. Man ſetze dieſe Verlängerung $= \nu\,\varphi$ und die Änderung des Winkels δ gleich ψ. Nimmt man die Änderungen des Punctes m_1 als ſehr klein an, ſo daß man ſtatt β_1, γ_1 und $\nu\varphi$ ſchreiben kann $d\eta$, $d\varkappa$ und $d\nu$, und ſetzt voraus, daß alle Puncte, die in ihrer natürlichen Lage in einem Kreiſe liegen, deſſen Mittelpunct ſich in der Axe des Stabes befindet und auf dieſer Axe ſenkrecht ſteht, gleiche Verſchiebungen erleiden, mithin daß φ und ψ nur von ν und x abhängig ſind; ſo erhält man:

$$\frac{d\alpha_1}{d\eta} = \frac{d\alpha_1}{d\nu}\cdot\frac{\eta}{\nu}, \quad \frac{d\alpha_1}{d\varkappa} = \frac{d\alpha_1}{d\nu}\cdot\frac{\varkappa}{\nu}$$

ferner

$$d\eta = \cos\delta\,d\nu - \nu\sin\delta\,d\delta \text{ oder } \beta_1 = \eta\varphi - \varkappa\psi$$

$$d\varkappa = \sin\delta\,d\nu + \nu\cos\delta\,d\delta \text{ oder } \gamma_1 = \eta\psi + \varkappa\varphi$$

und daraus

$$\frac{d\gamma_1}{dx} = \frac{\eta\, d\psi}{dx} + \frac{\varkappa\, d\varphi}{dx},\ \frac{d\beta_1}{dx} = \frac{\eta\, d\varphi}{dx} - \frac{\varkappa\, d\psi}{dx} \text{ u. ſ. f.}$$

Subſtituirt man alle dieſe Werthe in (O), ſo kommen folgende Ausdrücke zum Vorſchein:

$$P_1 = -e\left(\eta\,\frac{d\psi}{dx} + \varkappa\,\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varkappa}{\nu}\,\frac{d\alpha_1}{d\nu}\right)$$

$$P_2 = -e\left(\eta\,\frac{d\varphi}{dx} - \varkappa\,\frac{d\psi}{dx} + \frac{\eta}{\nu}\,\frac{d\alpha_1}{d\nu}\right)$$

$$P_3 = -e\left(3\,\frac{d\alpha_1}{dx} + 2\,\varphi + \nu\,\frac{d\varphi}{d\nu}\right)$$

$$Q_1 = -e\left(\frac{\eta^2 - \varkappa^2}{\nu}\,\frac{d\psi}{d\nu} + \frac{\eta\varkappa}{\nu}\,\frac{d\varphi}{d\nu}\right)$$

$$Q_2 = -e\left(\frac{d\alpha_1}{dx} + 4\,\varphi + \frac{\varkappa^2 + 3\eta^2}{\nu}.\frac{d\varphi}{d\nu} - \frac{2\eta\varkappa}{\nu}.\frac{d\psi}{d\nu}\right)$$

$$R_1 = -e\left(\frac{d\alpha_1}{dx} + 4\varphi + \frac{\eta^2 + 3\varkappa^2}{\nu}.\frac{d\varphi}{d\nu} + \frac{2\eta\varkappa}{\nu}.\frac{d\psi}{d\nu}\right).$$

Mittelſt dieſer Werthe und den obigen Ausdrücken $\cos\delta = \frac{\eta}{\nu}$, $\sin\delta = \frac{\varkappa}{\nu}$ wird endlich aus (P)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{\nu}.\frac{d\alpha_1}{d\nu} &= 0 \\ \frac{d\alpha_1}{dx} + 4\,\varphi + 3\,\nu\,\frac{d\varphi}{d\nu} &= 0 \\ \frac{1}{\nu}.\frac{d\psi}{d\nu} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (Q).$$

Dieſe Gleichungen gelten nur für $\nu = r$, wo r den Halbmeſſer des Stabes bedeutet, weil ſie aus jenen Fundamentgleichungen abgeleitet worden ſind, die ſich auf die Oberfläche des Körpers beziehen. Mittelſt ihrer und der Vorausſetzung, daß die Quadrate von ν vernachläſſiget werden können und daher $\nu\,\frac{d\varphi}{d\nu} = 0$ iſt, erhält man:

$$P_1 = -e\,\frac{d\psi}{dx}\,\eta$$

$$P_2 = -e\,\frac{d\psi}{dx}\,\varkappa$$

$$P_3 = -\frac{5e}{2}\,\frac{d\alpha_1}{dx}.$$

Heißt die Reſultirende aus P_1 und P_2, P; ſo wird

$$P = \sqrt{(P_1^2 + P_2^2)} = e\,\nu\,\frac{d\psi}{dx}$$

und dieſe Kraft ſteht auf ν ſenkrecht.

45. Nun ſetze man ſtatt der Kräfte Y_1 und Z_1, die auf m_1 wirken, zwei andere, deren eine in der Richtung des Radius, die andere in einer darauf ſenkrechten Richtung liegt, und nenne, weil beide mit ν verſchwinden müſſen, die erſtere $\nu\,\Phi$, die andere $\nu\,\Psi$, ſo daß man nun die Kräfte X, $\nu\,\Phi$ und $\nu\,\Psi$ hat, die von δ unabhängig ſind und nur von x und ν abhängen. Man hat bekanntlich

$$Y_1 = \nu\,\Phi\cos\delta - \nu\,\Psi\sin\delta,\quad Z_1 = \nu\,\Psi\cos\delta + \nu\,\Phi\sin\delta$$

oder

$$Y_1 = \eta\,\Phi - \varkappa\,\Psi,\quad Z_1 = \eta\,\Psi + \varkappa\,\Phi.$$

Setzt man dieſe Werthe in die Gleichungen H und O, ſo geht hervor:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sigma}{e}X_1 + 3\frac{d^2\alpha_1}{dx^2} + \frac{d^2\alpha_1}{d\nu^2} + \frac{1}{\nu}\cdot\frac{d\alpha_1}{d\nu} + 4\frac{d\varphi}{dx} + 2\nu\frac{d^2\varphi}{d\nu\,dx} = 0\\
&\frac{\sigma}{e}\Phi + 3\frac{d^2\varphi}{d\nu^2} + \frac{9}{\nu}\frac{d\varphi}{d\nu} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2}{\nu}\frac{d^2\alpha_1}{d\nu\,dx} = 0\\
&\frac{\sigma}{e}\Psi + \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{d\nu^2} + \frac{3}{\nu}\frac{d\psi}{d\nu} = 0
\end{aligned}\right\}(R)$$

Man nehme nun an, daß es ſtets möglich ſey, die Kräfte Φ und Ψ, mithin auch α, φ, ψ in eine ſehr convergirende, nach den ganzen Potenzen von ν fortſchreitende Reihe aufzulöſen, oder zu ſetzen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha + m\nu + m_1\nu^2 + \ldots\ldots\\
\varphi &= n + n_1\nu + n_2\nu^2 + \ldots\ldots\\
\psi &= o + o_1\nu + o_2\nu^2 + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Coefficienten m, m_1, n_1, n_2 ꝛc. kann man mittelſt der Gleichungen (R) und (Q) beſtimmen.

In (R) kommt ein Glied vor, welches im Nenner ν hat. Setzt man dieſes $= 0$, ſo muß auch $m = 0$, $n_1 = 0$ und $o_1 = 0$ ſeyn. Setzt man in den Gleichungen (Q), wo $\nu = r$ iſt, obige Reihen ſtatt α_1, φ und ψ, und vernachläſſiget die das Quadrat von r enthaltenden Glieder, ſo erhält man:

$$\frac{dn}{dx} + 2m_1 = 0,\quad \frac{d\alpha}{dx} + 4n = 0,\quad o = 0$$

mithin

$$n = -\frac{1}{4}\frac{d\alpha}{dx}, \quad m_1 = \frac{1}{8}\frac{d^2\alpha}{dx^2}.$$

Vernachläſſiget man endlich ν_2 in dem Werthe von α, φ, ψ, ſo hat man

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \varphi = n, \quad \psi = o$$

und daher

$$\varphi = -\frac{1}{4}\frac{d\alpha}{dx}.$$

Es ſey für $\nu = o$, $X_1 = X$, $\Phi = p$, $\Psi = q$, ſo iſt aus (R) mittelſt obiger Werthe von α, φ, ψ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma}{e} X + 3\frac{d^2\alpha}{dx^2} + 4m_1 + 4\frac{dn}{dx} &= o \\ \frac{\sigma}{e} p + \frac{d^2 n}{dx^2} + 24 n_2 + 4 n_1 &= o \\ \frac{\sigma}{e} q + \frac{d^2 o}{dx^2} + 8 o_2 &= o \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (S).$$

Setzt man in die erſte und dritte dieſer Gleichungen für n, o_2 und m_1 die vorher gefundenen Werthe, ſo erhält man:

$$X + \frac{5e}{2\sigma}\cdot\frac{d^2\alpha}{dx^2} = o, \quad \Psi + \frac{e}{\sigma}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} = o$$

oder wenn man $\frac{5e}{2\sigma} = a^2$, $\frac{e}{\sigma} = b^2$ ſetzt

$$X + a^2\frac{d^2\alpha}{dx^2} = o, \quad \Psi + b^2\frac{d^2\psi}{dx^2} = o \ldots\ldots (T).$$

Die erſte Gleichung ſtimmt ganz mit der für Saiten gefundenen überein und auch P_3 hat für Stäbe und Saiten denſelben Werth. Daher wird auch für Stäbe das Geſetz Statt finden, daß ſie durch eine dehnende Kraft eine derſelben proportionirte Verlängerung erhalten, und dieſes mag als Grund dienen, daß bei den mit Saiten angeſtellten Verſuchen S. 196 auch gleich jene angegeben wurden, welche ſich auf aufgerollte Federn beziehen. Außer einer Verlängerung geht aber bei Stäben noch eine Veränderung ihrer Dicke vor. Das Verhältniß dieſer beiden Veränderungen wird durch die Gleichung $\varphi = -\frac{1}{4}\frac{da}{dx}$ ausgedrückt, welcher gemäß der Querſchnitt um $\frac{1}{4}$, alſo die Dicke um die Hälfte der Verlängerung vermindert wird. Die Richtigkeit dieſes Rechnungsreſultates hat Cagniard-Latour

durch einen Verſuch bewieſen. Er nahm einen Meſſingſtab und tauchte ein $2^{m}.03$ langes Stück desſelben in eine mit Waſſer angefüllte Glasröhre, ſo daß deſſen unteres Ende den Boden der Röhre berührte, hob dann den Stab ſo weit, daß ſein unteres Ende um 6^{mm} vom Boden abſtand, wobei ſich der Waſſerſpiegel durch das Heben des Stabes um 5^{mm} ſenkte. Hierauf befeſtigte er den Stab mit dem unteren Ende am Boden der Röhre, brachte am anderen Ende eine Kraft an, die ihn um 6^{mm} verlängerte, und beobachtete, daß dabei der Waſſerſpiegel nur um $2^{mm}.5$ ſank. Es ſey nun l die urſprüngliche Länge des Stabes, ω ſein Querſchnitt und daher $l\omega$ ſein Volumen. Geht beim Dehnen l in $l\,(1+\mu)$ und ω in $\omega\,(1-\vartheta)$ über, ſo wird ſein Volumen $l\omega\,(1+\mu-\vartheta)$. Wird der Stab vor ſeiner Dehnung um die Größe h gehoben und ſank dabei der Waſſerſpiegel um die Größe k, ſo iſt offenbar

$$h\omega = k.$$

Wird nun der Stab um h gedehnt, ſo iſt wieder

$$\mu l = h$$

das nach der Dehnung des Stabes eingetauchte Stück hat noch die Länge l, aber den Querſchnitt $\omega\,(1-\vartheta)$, mithin das Volumen $l\omega\,(1-\vartheta)$.

Iſt da die Senkung des Waſſerſpiegels k; ſo iſt

$$l\omega\vartheta = k$$

mithin aus dieſen drei Gleichungen

$$\vartheta = \frac{k}{h}\cdot\mu,$$

weil aber dem Verſuche gemäß $\frac{k}{h} = \frac{1}{2}$ iſt, ſo iſt

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\mu,$$

mithin mit der Theorie übereinſtimmend.

46. Die aus P_1 und P_2 reſultirende, auf v ſenkrechte Kraft P wurde vorhin gleich $e\,v\,\frac{d\psi}{dx}$ gefunden. Die Reſultirende der Kräfte, die ſich auf die Puncte eines ganzen Querſchnittes beziehen, iſt offenbar $=0$, aber ihr Moment K iſt durch folgende Gleichung gegeben

$$K = 2\pi\int_0^r P v^2\,dv = \tfrac{1}{2}\pi e r^4\,\frac{d\psi}{dx}.$$

Da $v\psi$ die Größe der Verrückung des Punctes m_1 bezeichnet, welche in der Ebene des Querſchnittes eintritt, ſo iſt ψ der Drehungsbogen dieſes Punctes, und man hat für einen Stab von der Länge l, der an dem Ende, wo man die Coordinaten zu zählen anfängt, befeſtigt iſt

$$\text{für } x = 0 \quad \Psi = 0$$

$$\text{für } x = l \quad K = \tfrac{1}{2}\pi e r^4 \frac{d\psi}{dx}.$$

Wirkt keine weitere Kraft auf den Stab, ſo iſt $\psi = 0$, und daher der zweiten Gleichung (T) gemäß

$$\frac{b^2 d^2 \psi}{dx^2} = 0, \text{ mithin } \psi = Ax + B,$$

wo A und B die zwei Conſtanten der Integration bezeichnen. Sucht man ſie mittelſt der zwei vorhergehenden Gleichungen, ſo erhält man $B = 0$, $A = \frac{2k}{\pi e r^4}$, und daher

$$\psi = \frac{2Kx}{\pi e r^4}.$$

Hieraus folgt, daß der Drehungswinkel dem Abſtande von dem befeſtigten Ende, der vierten Potenz der Dicke des Stabes und dem Momente der drehenden Kraft proportionirt ſey. Für den Phyſiker iſt die Proportionalität zwiſchen den Momenten der drehenden Kraft und der Größe des Drehungswinkels von der größten Wichtigkeit und es iſt demnach wieder nothwendig, das Reſultat der Rechnung mit dem Ergebniſſe directer Verſuche zu vergleichen. Nach den älteren Verſuchen von Coulomb mit cylindriſchen Stäben und den neueſten von Savart mit drei- und vierkantigen ſtimmten beide mit einander auf das genaueſte überein, und man kann obige Proportionalität innerhalb der Grenzen der vollkommenen Elaſticität ohne Bedenken jeder weiteren Unterſuchung, wo es Noth thut, zum Grunde legen.

Folgende Tabelle enthält einige Ergebniſſe aus Savart's Verſuchen mit cylindriſchen Stäben von verſchiedenen Durchmeſſern und zwar betrug der Durchmeſſer des Stabes A $0^m.0024$, der von B $0^m.00458$, der von C $0^m.00691$.

Drehungswinkel	drehendes Gewicht in Grammen		
	Stab A	Stab B	Stab C
1°	—	41	207
2 —	5.95	83	415
3 —	8.90	125	625
4 —	11.90	166	830
5 —	14.85	205	1030
6 —	17.83	248	1240
7 —	20.80	287	1450
8 —	23.80	327	1660
9 —	26.75		
10 —	29.70		
11 —	32.65		
12 —	35.60		
13 —	38.60		
14 —	41.55		
15 —	44.56		

47. Die Geſetze des Gleichgewichtes an Stäben, deren Axe gebogen und dabei zugleich verlängert wird, laſſen ſich auf demſelben Wege mittelſt derſelben Grundformeln finden, allein da die hierzu nöthigen Rechnungen zu viel Platz einnehmen und für den Phyſiker die Reſultate derſelben bei weitem nicht ſo intereſſant ſind als die bereits gefundenen, ſo wollen wir ſie übergehen und den wißbegierigen Leſer auf Poiſſon's vollſtändige Arbeit hierüber in den Mém. de l'Acad. des sc. etc. verweiſen.

Drittes Kapitel.

Gleichgewicht flüſſiger, beſonders tropfbarer Körper.

48. Flüſſige Körper unterſcheiden ſich von den feſten durch die abſolut leichte Verſchiebbarkeit ihrer Theile und auf dieſe Eigenſchaft ſtützen ſich alle Unterſuchungen über das Gleichgewicht derſelben.

Es ſey eine flüſſige Maſſe gegeben, die ſich im Gleichgewichte befindet und man unterſuche die Bedingungen, unter denen dieſes

Statt findet. Es wirken auf dieſe Maſſe Kräfte, welche nach den drei rechtwinkeligen Coordinaten zerlegt, für jede Maſſeneinheit X, Y, Z geben. Man denke ſich die ganze Maſſe in Elemente getheilt, wovon jedes durch Ebenen begrenzt iſt, die mit den Coordinatenebenen parallel ſind. Heißen die Coordinaten eines jeden Theilchens x, y, z, ſo iſt ſein Volumen $dx\,dy\,dz$ und ſeine Maſſe dm gleich $\sigma\,dx\,dy\,dz$, wenn σ die Dichte der Flüſſigkeit bezeichnet.

Die auf dm wirkenden Kräfte ſind nun

$$Xdm,\quad Ydm,\quad Zdm\ \ldots\ldots\ (a).$$

Wegen der Fortpflanzung eines einſeitigen Druckes nach allen Seiten erleidet dm auch noch durch die Umgebung nach jeder Richtung einen Druck. Dieſer hängt offenbar von der Lage der Maſſe dm, mithin von x, y, z ab. Bezeichnet man den der Fläche $= 1$ entſprechenden Druck mit p, ſo iſt jener Theil, welcher auf die Maſſe dm nach der Richtung der z wirkt, von x und y unabhängig. Geht daher z in $z + dz$ über, ſo verwandelt ſich p in $p + \frac{dp}{dz}\,dz$. Es wird daher der Druck auf die Seite $dx\,dy$ der Maſſe dm gleich ſeyn $p\,dx\,dy$ und der auf deren entgegengeſetzte Seite wirkſame $\left(p + \frac{dp}{dz}.dz\right) dx\,dy$, mithin die Reſultirende beider

$$\frac{dp}{dz}\,dz\,dx\,dy\ \ldots\ .\ (b)$$

Eben ſo findet man für die Kraft, welche aus den nach der Richtung der y und x wirkenden Drückungen reſultiren, die Ausdrücke

$$\frac{dp}{dy}\,dy\,dx\,dz \text{ und } \frac{dp}{dx}\,dx\,dy\,dz\ \ldots\ (c).$$

Da nun ſtets eine der Kräfte (a) einer von den Kräften (b) und (c) entgegenwirkt, ſo erhält man als Reſultirende nach den Hauptrichtungen

$$Xdm - \frac{dp}{dx}\,dx\,dy\,dz = \left(X\sigma - \frac{dp}{dx}\right) dx\,dy\,dz$$

$$Ydm - \frac{dp}{dy}\,dx\,dy\,dz = \left(Y\sigma - \frac{dp}{dy}\right) dx\,dy\,dz$$

$$Zdm - \frac{dp}{dz}\,dx\,dy\,dz = \left(Z\sigma - \frac{dp}{dz}\right) dx\,dy\,dz.$$

Sind nun δx, δy, δz, die virtuellen Geſchwindigkeiten nach den Richtungen x, y, z; ſo hat man als Bedingung des Gleichgewichtes:

$$\left(X\sigma - \frac{dp}{dx}\right)\delta x + \left(X\sigma - \frac{dp}{dy}\right)\delta y + \\ + \left(Z\sigma - \frac{dp}{dz}\right)\delta z = 0$$

und hieraus

$$\sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \frac{dp}{dx}\delta x + \frac{dp}{dy}.\delta y + \\ + \frac{dp}{dz}\delta z = \delta p \ldots (A).$$

Soll nun p möglich ſeyn, was doch in der Natur der Aufgabe liegt, ſo muß δp eine vollſtändige Variation ſeyn und das erſte Glied dieſer Gleichung muß den Bedingungen der Integrabilität entſprechen. Es muß demnach ſeyn:

$$\frac{d.\sigma X}{dy} = \frac{d.\sigma Y}{dx}, \frac{d.\sigma Y}{dz} = \frac{d.\sigma Z}{dx}, \frac{d.\sigma Y}{dz} = \frac{d.\sigma Z}{dy}.$$

49. Hat die Flüſſigkeit eine freie Oberfläche, ſo iſt für dieſelbe natürlich $p = 0$, mithin auch $dp = 0$, d. h. p ſteht auf dieſer Oberfläche ſenkrecht oder die Oberfläche muß ſich für den Fall des Gleichgewichtes ſo geſtalten, daß p darauf ſenkrecht ſteht.

Für $\delta p = 0$ iſt auch $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$ oder x, y, z dieſer Gleichung ſind die Coordinaten der Oberfläche und die Gleichung iſt zugleich die der Oberfläche.

50. Für tropfbare Flüſſigkeiten iſt σ eine conſtante Größe, weil ſie unzuſammendrückbar ſind und darum δp integrabel, wenn es der Ausdruck $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ iſt. Bei Naturkräften, deren Größen ſtets von einem Puncte aus wirken, wird die Bedingung der Integrabilität nicht fehlen und daher obige Größe ein Integral geben. Es ſey dieſes V, und daher

$$Xdx + Ydy + Zdz = dV \ldots\ldots\ldots (B).$$

Gibt nun V einen beliebigen conſtanten Werth, ſo iſt $dV = 0$ und auch $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ oder letzteres die Gleichung ſo vieler Flächen in der flüſſigen Maſſe als man V conſtante, von einander verſchiedene Werthe ertheilen will. Für jeden derſelben iſt aber auch $dp = 0$, mithin ſteht auf jeder die Reſultirende aller

wirkſamen Kräfte ſenkrecht und in allen dieſen Flächen ſteht die Flüſſigkeit im Gleichgewichte.

Läßt man die conſtante Größe V um unmerkliche Differenzen wachſen, ſo theilt man dadurch die ganze Flüſſigkeit in lauter unendlich dünne Schichten, welche von Flächen, denen die vorige Gleichung entſpricht, begrenzt werden, und in denen die Flüſſigkeit für ſich im Gleichgewichte ſteht.

51. Aus A und B erhält man die Gleichung

$$\sigma d V = d p.$$

Iſt eine Flüſſigkeit zwar unzuſammendrückbar, aber nicht homogen, ſo iſt σ veränderlich. Soll demnach auch hier noch $\sigma d V$ integrabel ſeyn, ſo muß σ eine Function von V werden und für einerlei Werth von V auch einerlei Werth haben, d. h. in derſelben Fläche, deren Gleichung $d V = 0$ iſt, muß die Flüſſigkeit einerlei Dichte haben.

Da der Werth von V willkürlich genommen werden kann, ſo muß auch der Werth von σ, welches eine Function von V iſt, willkürlich ſeyn oder das Geſetz, nach welchem ſich die Dichte der Flüſſigkeit von Schichte zu Schichte ändert, iſt auch willkürlich.

Viertes Kapitel.

Gleichgewicht tropfbarer Flüſſigkeiten, auf welche beſtimmte Kräfte einwirken.

52. Die vorhergehenden Geſetze gelten, die Kräfte, welche auf flüſſige Maſſen wirken, mögen von was immer für einer Art ſeyn, mithin auch für jene, welche in der Natur Statt finden. Dieſe Kräfte ſind bekanntlich für tropfbar flüſſige: die Schwere, die Wirkung der flüſſigen Theile auf einander und die des Gefäßes auf die Flüſſigkeiten.

53. Die Geſetze, welche beim Gleichgewichte tropfbarer Körper, in ſo weit ſie blos als ſchwer angeſehen werden, Statt finden, ſind bereits in der Naturlehre hinreichend dargeſtellt, ſo daß es hierüber kaum mehr als ein Paar Worte bedarf.

Geſetzt es wirke die Schwere nach der Richtung z und heiße g, ſo iſt in A und B des vorhergehenden Kapitels:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g$$

und daher

$$dp = \sigma g dz., \text{ oder } p = \int \sigma g dz + \text{Const.}$$

Für tropfbare (unzuſammendrückbare) Flüſſigkeiten iſt σ conſtant, und daher

$$p = \sigma g z + \text{Const.}$$

oder weil für $z = 0$ auch $p = 0$ iſt,

$$p = \sigma g z.$$

54. Der Werth von p gibt die Größe des Druckes auf ein Stück $= 1$, der die Flüſſigkeit einſchließenden Wände an. Iſt z für alle ſolche Stücke gleich, ſo erleiden ſie auch denſelben Druck und man erhält durch Multiplication von p mit der Größe des gedrückten Stückes den Geſammtdruck. Dieſes gilt aber natürlich nur für den horizontalen Boden eines Gefäßes, bei einem geneigten Boden oder für die Seitenwand haben die über den einzelnen Stücken derſelben befindlichen flüſſigen Säulen nicht einerlei Höhe und man muß, um den Geſammtdruck auf ein Stück dieſer Fläche berechnen zu können, den ſogenannten Mittelpunct des Druckes ſuchen, d. h. den Punct, in welchem man ſich ohne Änderung des Erfolges den geſammten Druck concentrirt denken kann. Wie man dieſen findet, mag ein Beiſpiel lehren:

Es ſey $ABCD$ (Fig. 56) eine gegen den Horizont geneigte Ebene, wovon alle Theile ſymmetriſch gegen BD liegen. Es ſey $AC = y$ horizontal gezogen und man denke ſich die ganze Ebene durch Linien, welche mit dieſer parallel ſind, in lauter Elementarparallelogramme $ACA'C'$ getheilt, und berechne den Mittelpunct des Druckes auf jedes einzelne derſelben. In unſerem Fall muß dieſer Mittelpunct für jedes Element, mithin auch jener der ganzen Fläche in die Linie BD fallen. Heißt z die Höhe der flüſſigen Säule über $ACA'C'$, ſo iſt der Druck auf dieſes Element gleich $\sigma z . y dx$, wenn σ die Dichte der Flüſſigkeit, y die Baſis und dx die Höhe des Elementes bedeutet. Weil aber z der Größe x proportionirt iſt, und durch cx ausgedrückt werden kann, ſo erhält man ſtatt obigem Ausdruck $c\sigma y x dx$. Das Moment dieſes Ausdruckes in Beziehung auf den Anfangspunct der Coordinaten iſt $c\sigma y x^2 dx$ und die Summe aller dieſer Momente für die ganze gedrückte Fläche

$$c\sigma \int y x^2 dx,$$

wo die Integration auf die ganze Fläche auszudehnen iſt. Iſt nun x' die mit x parallele Coordinate für den Mittelpunct des ganzen Druckes, ſo hat man

$$c\sigma \int y x^2 dx = c\sigma \int x' x y dx$$

und daher

$$x_1 = \frac{\int y x^2 dx}{\int y x dx}.$$

Es verſteht ſich von ſelbſt, daß dieſe Unterſuchung nicht blos für den Bodendruck, ſondern auch für den Seitendruck gilt.

55. Wenn eine Flüſſigkeit blos von der Schwere afficirt wird, muß ſie ſelbſt in engen Gefäßen eine horizontale ebene Oberfläche annehmen. Das Hinzutreten der anderen oben genannten Kräfte ändert dieſe Oberfläche bedeutend ab und macht, daß ſie bald convex bald concav iſt, und nur in ſeltenen Fällen eben erſcheint. Da die freie Oberfläche ſtets die Form haben muß, daß auf jedem ihrer Puncte die daſelbſt wirkſamen Kräfte ſenkrecht ſtehen, ſo kann man aus dieſer Geſtalt auch die Richtung der Kräfte ſelbſt näher kennen lernen.

56. Es ſey AB (Fig. 57) der Querſchnitt einer in verticaler Richtung in eine tropfbare Flüſſigkeit getauchten Ebene, CD der Querſchnitt der Oberfläche der Flüſſigkeit an derſelben und man ſuche die Kräfte, welche ihre Geſtalt beſtimmen. Man ziehe zu C die Tangente CE und nenne $ECB = \alpha$. Die Geſtalt der Krümmung CD wird durch die Attraction der Theile der Ebene AB auf die Flüſſigkeit, verglichen mit der Attraction der flüſſigen Theile unter ſich beſtimmt. Beide Anziehungen ſind zwar höchſt wahrſcheinlich von ungleicher Stärke, man kann aber annehmen, daß ſie mit wachſender Entfernung auf gleiche Weiſe abnehmen. Die ober C befindlichen Theile der Ebene AB wirken auf die nahe an C liegenden Puncte ſchief aufwärts, die unter C befindlichen Theile aber ſchief abwärts ziehend. Jede dieſer Kräfte läßt ſich in eine mit AB parallele und in eine darauf ſenkrechte zerlegen, aber dieſe Kräfte ſind für die ober C liegenden Theile denjenigen gleich und entgegengeſetzt, welche von den unter C liegenden herrühren. Es ſey die horizontal wirkende Kraft der unter C liegenden Theile $= \rho C$, die der ober C befindlichen ρC, die vertical wirkende der erſtern ρc, die der letzteren $-\rho c$. Die Wirkung des zwiſchen BC und CE enthaltenen Flüſſigen ſey ſo beſchaffen, daß ſie, wenn CE eine horizontale Richtung hätte, gleich $\rho' C$ wäre. Iſt nun der Winkel $ECG = d\alpha$, ſo iſt die verticale Wirkung der Theilchen innerhalb der Schenkel dieſes Winkels $= \rho' C d\alpha \cos\alpha$, die horizontale $\rho' C d\alpha \sin\alpha$. Integrirt man dieſen Ausdruck von $\alpha = 0$ an, ſo wird die verticale Wirkung $\rho' C \sin\alpha$, die horizontale $- \rho' C (1 - \cos\alpha)$. Die Flüſſigkeit zwiſchen CD und CE wirket auf das betrachtete Theilchen mit

der Kraft Q und ihre Richtung ſey CF. Iſt $FCE = \beta$, ſo iſt der verticale Theil $Q \cos \beta$ und der horizontale $- Q \sin \beta$. Man hat daher als vertical wirkende Kräfte

$$\rho c, \; - \rho c, \; \rho' C \sin \alpha, \; Q \cos \beta;$$

als horizontal wirkende

$$\rho C, \; \rho C, \; - \rho' C (1 - \cos \alpha), \; - Q \sin \beta.$$

Durch Zuſammenwirken aller dieſer Kräfte geht eine Reſultirende R hervor, welche auf CD ſenkrecht ſtehen muß, und daher die verticale $R \sin \alpha$ und die horizontale $R \cos \alpha$ gibt. Man hat daher

$$R \sin \alpha = \rho' C \sin \alpha + Q \cos \beta$$

und

$$R \cos \alpha = 2 \rho C - \rho' C + \rho' C \cos \alpha - Q \sin \beta$$

und hieraus

$$Q \cos (\beta - \alpha) = (2 \rho - \rho') \, C \sin \alpha \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (A).$$

Auf demſelben Wege findet man für den Fall einer convexen Oberfläche und dieſelbe Bedeutung der einzelnen Buchſtaben:

$$Q \cos (\beta - \alpha) = (\rho' - 2 \rho) \, C \sin \alpha \; \ldots\ldots\ldots \; (B).$$

Da $Q . \cos (\beta - \alpha)$ in beiden Fällen eine poſitive Größe iſt, ſo hat man für eine concave Oberfläche $2 \rho > \rho'$, für eine convexe $\rho' > 2 \rho$. Für eine ebene Oberfläche muß offenbar $Q = 0$ und daher $2 \rho = \rho'$ ſeyn.

57. Gleich wie die hier betrachteten Kräfte die Geſtalt der Oberfläche beſtimmen, ſo hängt von dieſer wieder die Wirkung der Flüſſigkeit auf ſich ſelbſt ab. Durch beide werden die Capillaritätsphänomene hervorgebracht. Um dieſe näher kennen zu lernen, betrachte man die Wirkung einer Kugel auf ein Element, das ſich in einem außer ihr befindlichen, auf ihr ſenkrechten, ſehr engen Canale befindet. Man hat für die Wirkung einer Kugel auf einen außer ihr befindlichen Punct den Ausdruck (C)

$$R = 2\pi \, \frac{d \left({}^{1}_{\rho}\!\int r\,dr \left[\varphi_2 (\rho + r) - \varphi_2 (\rho - r) \right] \right)}{d \rho}$$

wo ρ der vom Mittelpunct der Kugel zu dem angezogenen Puncte gezogene Radiusvector und r die Entfernung des ziehenden Theilchens im Centrum der Kugel iſt, φ aber eine von dem Geſetze, nach welchem die Wirkung der Theile auf einander erfolgt, abhängige Function bedeutet. Demnach gibt $\int R \, d\rho$ die Wirkung der Kugel auf

ein Stück der genannten flüſſigen Säule vom Querſchnitte $=1$, das um die Größe $\rho - a$ von der Oberfläche jener Kugel vom Halbmeſſer a abſteht, wenn man das Integral von $\rho = a$ anfangen läßt. Man erhält für $\int R\,d\rho$

$$\frac{2\pi}{\rho}\int_0^a r\,dr\,[\varphi_2(\rho+r) - \varphi_2(\rho-r)] -$$

$$- \frac{2\pi}{a}\int_0^a r\,dr\,[\varphi_2(a+r) - \varphi_2(a-r)].$$

Da die Wirkung der flüſſigen Theile auf einander nur bei ſehr geringen Entfernungen merklich iſt, für kaum angebliche Entfernungen aber ſchon verſchwindet; ſo müſſen $\varphi_2\,(\rho+r)$ und eben ſo $\varphi_2\,(a+r)$ und $\varphi\,(a-r)$ verſchwindende Größen ſeyn, indem ρ ſchon für ſich und daher noch mehr $\rho+r$ einen merklich großen Werth hat und auch $\rho-r$ und $a+r$ ſolche Größen ſind. Es reducirt ſich daher obiger Ausdruck auf

$$- \frac{2\pi}{a}\int_0^a r\,dr\,[\varphi_2(a-r)].$$

Setzt man nun $a-r=z$, ſo wird aus dieſem Ausdrucke

$$\frac{2\pi}{a}\int_0^a (a-z)\,dz\,\varphi_2\,(z)$$

oder

$$2\pi\int_0^a dz\,\varphi_2(z) - \frac{2\pi}{a}\int_0^a z\,dz\,\varphi_2\,(z).$$

Man kann aber die Grenzen der Integration von o bis a erweitern bis $o - \infty$, indem die über a hinausreichenden Werthe ohnehin verſchwinden und ſo dieſes Integral von a unabhängig darſtellen. Man erhält:

$$2\pi\int_0^\infty dz\,\varphi_2\,(z) - \frac{2\pi}{a}\int_0^\infty z\,dz\,\varphi_2\,(z.)$$

Setzt man das erſte Integral gleich P, das Integral von $2\pi\int z\,dz\,\varphi_2\,(z)$ innerhalb derſelben Grenzen $=H$, ſo erhält man für die geſuchte Wirkung der flüſſigen Kugel den Ausdruck

$$P - \frac{H}{a} \ldots\ldots (C)$$

wobei $\frac{H}{a}$ bedeutend kleiner iſt als P, indem das Differenzial der letz-

teren Größe das der erſteren multiplicirt mit $\frac{z}{a}$ iſt und $\frac{z}{a}$ eine ſehr kleine Größe vorſtellt.

Dieſer Ausdruck gibt zugleich die Größe der Wirkung eines von einem Kugelſegment begrenzten flüſſigen Körpers auf ein außerhalb desſelben liegendes Theilchen an, das ſich in einem Canal befindet, welcher auf der die Kugel ſchneidenden Fläche ſenkrecht ſteht, weil die jenſeits dieſer Fläche liegenden Theile auf dieſe Säule keine Wirkung mehr ausüben können. Je größer a wird, deſto kleiner iſt $\frac{H}{a}$ und für $a = \infty$ verſchwindet dieſe Größe ganz. Für dieſen Fall iſt aber die Oberfläche der Flüſſigkeit eben, und es drückt P die mit dieſer Geſtalt zuſammenhängende Wirkung der Flüſſigkeit auf ſich ſelbſt aus.

Gibt man a einen negativen Werth, ſo geht die concave Oberfläche in eine convexe über und die Wirkung einer ſo begrenzten Flüſſigkeit auf ſich ſelbſt iſt $P + \frac{H}{a}$ und man hat demnach

für eine concave Oberfläche $P - \frac{H}{a}$

. . . . convexe . . . . . $P + \frac{H}{a}$

. . . . plane . . . . . P.

58. Wenn eine Flüſſigkeit was immer für eine krumme Oberfläche hat, ſo kann man ſich die daraus hervorgehende Wirkung eines Punctes auf einen innerhalb der Flüſſigkeit befindlichen an dieſem Punct auf der krummen Fläche ſenkrechten Canal mit der eines Ellipſoides übereinſtimmend denken, welches die krumme Oberfläche an der betreffenden Stelle berührt. Denn iſt z. B. AB (Fig. 58) ein Schnitt einer krummen Oberfläche, CD ein auf AB in C ſenkrecht ſtehender Canal und ab der Schnitt des die Fläche AB in C berührenden Ellipſoides; ſo hat die Flüſſigkeit innerhalb des Raumes ACa und BCb auf den Canal CD keinen merklichen Einfluß, weil der zwiſchen dieſen Grenzen liegende Meniskus erſt da eine merkliche Dicke hat und vermög ſeiner Maſſe eine Wirkung auf CD ausüben könnte, wo es die zu große Entfernung nicht mehr erlaubt. Es ſey nun die Axe des berührenden Ellipſoides, welche mit CD zuſammenfällt $2a$, die zwei anderen aber $2a_1$ und $2a_2$. Denkt man ſich zwei Ellipſen, die dieſes Ellipſoid ſchneiden, und wovon eine

in der Ebene ACB liegt, die andere aber in einer auf ihr ſenkrechten Ebene, ſo iſt der Krümmungshalbmeſſer der erſteren $\frac{a_1^2}{a}$, der der letzteren $\frac{a_2^2}{a}$. Eine Ebene, welche durch C und die Axe $2a$ geht, und gegen die durch die Axen $2a$ und $2a_1$ gehende Ebene unter dem Winkel δ geneigt iſt, ſchneidet das Ellipſoid in einer Ellipſe, die $2a$ zu einer und A zur zweiten Axe hat, wo A durch

$$A^2 = \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 \sin^2 \delta + a_2^2 \cos^2 \delta}$$

gegeben iſt. Der zu C gehörige Krümmungshalbmeſſer dieſer Ellipſe iſt $\frac{A^2}{a}$. Nennt man dieſen B, ſo hat man

$$\frac{1}{B} = \frac{a}{a_2^2} \sin^2 \delta + \frac{a}{a_1^2} \cos^2 \delta$$

oder wenn man $\frac{a_2^2}{a} = b_1$, $\frac{a_1^2}{a} = b$ ſetzt,

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{b_1} \sin^2 \delta + \frac{1}{b} \cos^2 \delta.$$

Die Wirkung des Stückes, das zwiſchen der vorhin genannten Ebene und derjenigen liegt, die unter dem Winkel $d\delta$ gegen ſie geneigt iſt und wie jene durch die Axe a geht, fällt nahe mit der eines Kugelſtückes vom Halbmeſſer B zuſammen und iſt daher gleich $\frac{1}{2\pi} d\delta \left(P + \frac{H}{B}\right)$, mithin erhält man für die Wirkung des ganzen Ellipſoides

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\delta \left(P + \frac{H}{B}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\delta \left(P + \frac{H}{b_1} \cdot \sin^2 \delta + \frac{H}{b} \cos^2 \delta\right)$$

$$= P + \tfrac{1}{2} H \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b_1}\right).$$

Sind B und B_1 die Krümmungshalbmeſſer zweier Curven, welche entſtehen, wenn die krumme Oberfläche von zwei durch die Axe gehenden auf einander ſenkrechten Ebenen geſchnitten wird; ſo hat man

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{B_1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b_1}$$

und daher aus obigem Ausdruck

$$P + \frac{1}{2} H \left(\frac{B}{1} + \frac{1}{B_1}\right) \ldots \ldots (D).$$

59. Um die Geſtalt der Oberfläche der Flüſſigkeit in einem Haarröhrchen zu finden, ſey O (Fig. 59) der tiefſte Punct derſelben und AOB die Oberfläche, um die es ſich handelt, $OD = z$ die verticale Ordinate eines Punctes C der krummen Fläche, während x und y ſeine zwei horizontalen Ordinaten vorſtellen. Man denke ſich nun einen unendlich dünnen Canal CEO und drücke die Bedingungen des Gleichgewichtes dem Vorhergehenden gemäß aus. Da O um die Größe $DO = z$ tiefer liegt als C, ſo wird zur Wirkung der Capillarität in O noch die der Schwere der Säule z treten müſſen, um der Capillarität in C das Gegengewicht zu halten. Heißt g die Größe der Schwere, ſo erhält man:

$$P - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B_1}\right) + gz = P - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b_1}\right)$$

oder

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{B_1} - \frac{2gz}{H} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b_1}.$$

Iſt die krumme Oberfläche AOB durch Umdrehung um die Axe z entſtanden, ſo ſind x und y Functionen von z. Man ſetze $u = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ und man hat:

$$b = b_1$$

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{B_1} = \frac{\frac{d^2 z}{d^2 u} + \frac{dz}{u\,du}\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

und daher aus obiger Gleichung

$$\frac{\frac{d^2 z}{du^2} + \frac{dz}{u\,du}\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2gz}{H} = \frac{2}{b} \ldots (E).$$

Setzt man $\frac{g}{H} = \alpha$, multiplicirt alle Glieder mit $u\,du$ und integrirt, ſo wird

$$\frac{u \cdot \frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}} - 2\alpha \int z u\,du = \frac{u^2}{b} + \text{Const.}$$

oder

$$\frac{b\frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(1+\frac{dz^2}{du^2}\right)}}-\frac{2ab}{u}\int zu\,du=u\;\ldots\ldots\;(F).$$

Die Conſtante der Integration iſt $=0$, indem $\int zu\,du$ verſchwinden muß, wenn $u=0$ iſt. Um dieſe Gleichung völlig zu integriren, bedenke man, daß g gegen H ſehr klein iſt und daher für die erſte Annäherung $\alpha=0$ geſetzt werden kann. In dieſem Falle hat man aus (F)

$$dz=\frac{u\,du}{\sqrt{(b^2-u^2)}}$$

und durch Integriren

$$z=b-\sqrt{(b^2-u^2)}.$$

Der wahre Werth von u wird zwar von dieſem etwas verſchieden ſeyn, weil man hier die Größe $\frac{g}{H}=0$ geſetzt hat, welches nicht ganz der Wahrheit gemäß iſt; man ſieht aber leicht aus (F), daß jener wahre Werth $=v$ durch die Gleichung

$$v=u+\frac{2\alpha b}{u}\int zu\,du$$

ausgedrückt wird. Setzt man in dieſe Gleichung näherungsweiſe für z obigen Werth, ſo erhält man

$$v=u+\frac{2\alpha b}{u}\int u\,du\,[b-\sqrt{(b^2-u^2)}]$$

oder

$$v=u+\frac{\alpha b}{u}\left(bu^2+\tfrac{2}{3}(b^2-u^2)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{3}b^3\right)\;\ldots\ldots\;(G).$$

60. Die hier angewendete Näherungsmethode beſteht ihrem Weſen nach eigentlich darin, daß man ſtatt des zur eigentlichen krummen Oberfläche gehörigen Werthes von u, den zur Berührungsſphäre gehörigen, geſetzt hat. Iſt aOb ein Bogen dieſer Sphäre, ſo hat man: $FO=GO-GF=GO-\sqrt{(GE^2-EF^2)}$.

Aber es iſt $FO=z$, $GO=GE=b$, $EF=u$, mithin $z=b-\sqrt{(b^2-u^2)}$, wie es auch vorhin gefunden wurde. Nennt man den Winkel $CGD=\delta$, ſo hat man nahe $v=b\sin\delta$, $b\cos\delta=\sqrt{(b^2-u^2)}$. Setzt man letzteren Werth in obigem Ausdrucke von v, ſo wird

$$v = u + \frac{\alpha b}{u}(b u^2 + \tfrac{2}{3} b^3 \cos \delta^3 - \tfrac{2}{3} b^3) \; \ldots\ldots\ldots \quad (H).$$

Differenziirt man das letzte Glied der Gleichung (*G*), ſo erhält man

$$\frac{\alpha b^2 \, du \, (3u^2 + 2b^2)}{3u^2} - \frac{2\alpha b}{3u^2} du \sqrt{[(b^2 - u^2)]}\,(b^2 + 2u^2).$$

Läßt man die Größen von der Ordnung α^2 weg, ſo kann man wieder $v = u$ ſetzen und aus obigem Werthe von v durch Differenziiren finden:

$$du = dv\,(1 - \alpha b)^2 +$$
$$+ \frac{2\alpha b}{3v^2} dv [(b^2 + 2v^2)(b^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} - b^3]$$

mithin

$$dz = \frac{v\,dv\,(1 - \alpha b^2)}{\sqrt{(b^2 - v^2)}} + \frac{2\alpha b\,dv}{3v}\left(b^2 + 2v^2 - \frac{b^3}{\sqrt{(b^2 - v^2)}}\right).$$

Hieraus wird, wenn man für v die Größe $b \sin \delta$ ſetzt,

$$\frac{dz}{b} = d\delta \sin\delta\,(1 - \alpha b^2) + \tfrac{2}{3}\alpha b^2\, d\delta \left(\sin 2d - \frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\cos \frac{1}{2}\delta}\right)$$

und durch Integriren

$$\frac{z}{b} = (1 - \alpha b^2)(1 - \cos\delta) + \frac{\alpha b^2}{3}(1 - \cos 2\delta) +$$
$$+ \tfrac{4}{3}\,\alpha b^2 \log\cos\tfrac{1}{2}\delta.$$

Da der äußerſte Werth von u nur unmerklich von dem Halbmeſſer l des Röhrchens abweicht, indem die Dicke der oberſten flüſſigen Schichten gar nicht in Betracht kommt, und auch u nahe mit v zuſammenfällt, ſo kann man $u = l$ ſetzen und dadurch für den äußerſten Werth von v, für welchen $\delta = \delta_1$ iſt, erhalten

$$v = l + \alpha b^2 l - \tfrac{2}{3}\,\frac{\alpha b^4}{l} + \tfrac{2}{3}\alpha\,\frac{b^4}{l}\,\cos^3\delta.$$

Man hat aber auch aus dem früheren, für den äußerſten Werth v, für welchen wieder δ in δ_1 übergeht:

$$v = b \sin\delta_1$$

und daher mittelſt beider Werthe von v

$$b = \frac{l}{\sin\delta_1} + \frac{\alpha b^2 l}{\sin\delta_1} - \frac{2}{3}\,\frac{\alpha b^4}{l.\sin\delta_1} + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha b^4 \cos^3\delta_1}{l.\sin\delta_1}$$

oder annäherungsweiſe:

$$b = \frac{l}{\sin\delta_1} + \frac{\alpha l^3}{\sin^3\delta_1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha l^3}{\sin^5\delta_1} + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha l^3\cos^3\delta_1}{\sin^5\delta_1}$$

mithin für den äußerſten Werth von z

$$z = l \tang \tfrac{1}{2}\delta_{,} \left(1 - \tfrac{2}{3}\alpha \frac{l^2(1-\cos^3\delta_{,})}{\sin^4\delta_{,}}\right) + \\ + \frac{2\alpha l^3}{3\sin\delta_{,}} + \frac{4\alpha l^3}{3\sin^3\delta_{,}} \log\cos\tfrac{1}{2}\delta_{,}$$

und

$$\frac{1}{b} = \frac{\sin\delta_{,}}{l}\left[1 - \frac{\alpha l^2}{\sin^2\delta_{,}}\left(1 - \tfrac{2}{3}.\frac{(1-\cos^3\delta_{,})}{\sin^2\delta_{,}}\right)\right] \ldots\ldots (I).$$

Dieſe Unterſuchung wird für eine convexe Fläche auf dieſelbe Weiſe geführt, wie es hier für eine concave geſchehen iſt, nur muß man z von Oben nach Unten zählen; man findet für z und $\frac{1}{b}$ dieſelben Werthe.

61. Wird die Flüſſigkeit in einem cylindriſchen Haarröhrchen zur Höhe h über das Niveau gehoben, ſo muß $\frac{H}{b} = hg$ ſeyn. Setzt man aus (I) für $\frac{1}{b}$ den Werth, ſo erhält man nahe:

$$h = \frac{H\sin\delta_{,}}{gl}\left[1 - \frac{\alpha l^2}{\sin^2\delta_{,}}\left(1 - \tfrac{2}{3}.\frac{(1-\cos^3\delta_{,})}{\sin^2\delta_{,}}\right)\right].$$

Man hat $\frac{g}{H} = \alpha$ und da beinahe $h = \frac{H\sin\delta_{,}}{gl}$ iſt, ſo kann man annäherungsweiſe $\alpha = \frac{\sin\delta_{,}}{hl}$ ſetzen. Dieſes in die vorhergehende Gleichung ſubſtituirt, gibt

$$h = \frac{H\sin\delta_{,}}{gl}\left[1 - \frac{l}{h\sin\delta_{,}}\left(1 - \tfrac{2}{3}\,\frac{(1-\cos^3\delta_{,})}{\sin^2\delta_{,}}\right)\right].$$

Da hier $\frac{H}{g}$ und $\delta_{,}$ vom Durchmeſſer des Röhrchens unabhängige Größen ſind, und $\frac{l}{h}$ ſehr klein iſt; ſo hat man nahe

$$h = \frac{H\sin\delta_{,}}{gl} = \frac{\text{Const}}{2l}$$

d. h. h iſt nahe dem Durchmeſſer des Haarröhrchens proportional.

62. Aus dieſer Theorie laſſen ſich alle mit den Erſcheinungen an Haarröhrchen verwandten Phänomene, welche in der Naturlehre aufgezählt ſind, vollſtändig erklären.

Zwiſchen zwei ebenen unter einem ſehr ſpitzigen Winkel in Waſ-

ſer getauchten Glasplatten hebt ſich die Flüſſigkeit ſo, daß ihre oberſten Stellen in der Krümmung einer Hyperbel liegen. Es ſey $ABCD$ (Fig. 60) die eine, $AB_1 C_1 D$ die andere dieſer zwei Platten und CAC_1 der Winkel, unter welchem ſie gegen einander geneigt ſind, ferner $bc=l$ die Entfernung zweier einander gerade gegenüber liegender Stellen, welche den Durchmeſſer eines Haarröhrchens vertritt, das man ſich an dieſe Stelle denken kann, $be=h$ die daſelbſt gehobene Waſſerſäule und $Ab=x$. Da nun die Werthe von bc denen von Ab direct und denen von be verkehrt proportionirt ſind; ſo hat man

$$x=m.l,\ l=\frac{n}{h},$$

wo m und n conſtante Größen ſind; mithin auch

$$x=\frac{mn}{h} \text{ oder } xh=mn=\text{Const.}$$

welches anzeigt, daß die Curve DC eine Hyperbel ſey, wozu AC, AD die Aſſymtoten vorſtellen.

63. Das Aufſteigen eines Waſſertropfens in einem coniſchen Röhrchen und die nöthige Neigung des Röhrchens, um den Tropfen im Gleichgewichte zu erhalten, findet man auf folgende Weiſe: Es ſey ACB (Fig. 61) das coniſche Röhrchen, $abcd$ ein darin befindlicher Tropfen mit concaven Enden, fc die Tangente zu einer, ki zur anderen Krümmung, welche Tangenten nahe die Halbmeſſer des Röhrchens vorſtellen, denen die betreffenden Krümmungen entſprechen; ferner hg der Halbmeſſer, welcher die Höhe der Säule halbirt. Man nenne $Cg=x$, $gi=gc=a$ und das Verhältniß zwiſchen der Länge der Axe des Kegels und dem entſprechenden Halbmeſſer $\frac{c}{b}$. Die Kraft, mit welcher der Meniskus $afcb$ eine dünne Waſſerſäule zu heben ſucht, iſt $\frac{H}{fc}$, dieſelbe vom Meniskus $ckid$ ausgehende Kraft $\frac{H}{ki}$. Es iſt aber $fc:Cc=hg:gC$ oder $fc=(x+a).\frac{c}{b}$ und $ki:iC=hg:gC$ oder $ki=(x-a).\frac{c}{b}$ mithin jene Kräfte $\frac{Hb}{c(x+a)}$ und $\frac{Hb}{c(x-a)}$, und daher die beſchleunigende Kraft $\frac{Hb}{c}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$, für welche man

$\frac{Hb}{c} \cdot \frac{2a}{x^2}$ erhält, wenn man die zwei Brüche in eine Reihe auflöſet und alle Glieder derſelben, welche im Nenner eine höhere Potenz von x als die zweite haben, vernachläſſiget.

Soll das Säulchen nicht der Spitze des Kegels zugehen, ſo muß man dieſen gegen den Horizont neigen. Geſchieht dieſes zur Herſtellung des Gleichgewichtes um den Winkel ω, ſo iſt

$$\frac{Hb}{c} \cdot \frac{2a}{x^2} = 2ga \sin \omega$$

oder

$$\sin \omega = \frac{Hb}{cgx^2}.$$

In einem Röhrchen vom Halbmeſſer hg würde ſich Waſſer zur Höhe l heben und man hätte dann $l.g = \frac{H}{hg} = \frac{Hb}{cx}$. Setzt man dieſen Werth in vorhergehenden Ausdruck; ſo iſt

$$\sin \omega = \frac{l}{x}.$$

64. Wenn man zwei verticale Ebenen in eine Flüſſigkeit taucht, die entweder beide benetzt oder beide unbenetzt läßt, ſo erleiden ſie in derſelben eine Kraft, welche ſie einander zu nähern ſucht, wird aber eine davon benetzt, die andere aber nicht, ſo ſucht dieſe Kraft ſie von einander zu entfernen. Der erſte Fall iſt in der Naturlehre Abſch. II. Kap. V. D erörtert worden. Der Grund zur Annäherung der Platten beſteht darin, daß ſich die Flüſſigkeit zwiſchen denſelben mehr hebt oder ſenkt, als außerhalb der Ebenen, und dieſe größere Senkung oder Erhöhung der Flüſſigkeit rührt davon her, daß beide Ebenen zuſammenwirken. So wie aber eine derſelben von der Flüſſigkeit benetzt wird, die andere nicht, ſo wirken beide Kräfte zwiſchen den Ebenen einander entgegen, die Depreſſion an der inneren Seite der nicht benetzten und die Elevation an der inneren Seite der benetzten iſt kleiner als an der anderen Fläche derſelben und nun wird die geſammte innere Depreſſion oder Elevation eine kleinere Wirkung hervorbringen müſſen als die äußeren, und die Ebenen werden ſich eben ſo abſtoßen, wie ſie ſich im erſten Falle angezogen haben. Man kann nach der vorhergehenden Theorie ſogar die Größe der abſtoßenden Kräfte finden.

65. Wenn man eine Scheibe mit der Oberfläche einer ruhigen

Flüſſigkeit in Berührung bringt und ſie dann wegnehmen will, ſo erfährt man einen Widerſtand. Hebt man die Scheibe, ſo folgt ihr eine Säule der Flüſſigkeit, die mit der oberen Fläche an der Scheibe haftet und erſt, wenn die hebende Kraft eine gewiſſe Größe überſchritten hat, reißt ſie ſich von derſelben los, mit einer gewiſſen Kraft kann ſie aber im Gleichgewichte erhalten werden. Es ſey AB (Fig. 62) eine Scheibe, welche mit der flüſſigen Säule $AEFB$ bis zur Grenze des Gleichgewichtes gehoben worden iſt und man ſuche die dazu nöthige Kraft. Es ſey GH die Axe der Scheibe, l ihr Halbmeſſer, $l+y$ der Abſtand eines Punctes der krummen Oberfläche von der Axe und z die Höhe dieſes Punctes über der Oberfläche der ruhenden Flüſſigkeit CD. Da nun hier $b=\infty$, und $u=l+y$ iſt, ſo wird nach der Gleichung (E)

$$\frac{\frac{d^2 z}{dy^2}}{\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{l+y} \cdot \frac{\frac{dz}{dy}}{\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\alpha z.$$

Man führe nun, um dieſe Gleichung zu integriren, den Winkel ω ein, welchen ein Element mn der Curve (oder ſeine Tangente) mit der Horizontallinie no macht, welche durch den unterſten Punct n dieſes Elementes zur Axe gezogen iſt. Man hat nämlich $\frac{dz}{dy} = -\tang \omega$ und daher aus obiger Gleichung

$$\frac{d\omega}{dy}\cos\omega + \frac{\sin\omega}{l+y} = -2\alpha z.$$

Dieſes mit $dz = -dy \tang \omega$ multiplicirt und dann integrirt gibt

$$\cos\omega + \int \frac{dz \sin\omega}{l+y} = \text{Const} - \alpha z^2.$$

Da dieſes Integral für $z=0$ verſchwinden ſoll, ſo wird für den Anfang desſelben $\omega=0$, d. h. $\cos\omega=1$ und daher auch $\text{Const}=1$; mithin

$$\alpha z^2 = 1 - \cos\omega - \int \frac{dz \sin\omega}{l+y}.$$

Iſt l beträchtlich groß in Vergleich mit $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ſo kann man vorläufig den mit dem Integralzeichen behafteten Theil weglaſſen und ſetzen

$$z = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\,(1-\cos\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}\omega.\sqrt{\frac{2}{\alpha}}.$$

Das Differenzial in das vernachläſſigte Integral geſetzt, gibt:

$$-\int\frac{dz\sin\omega}{l+y} = -\sqrt{\frac{2}{\alpha}}.\int\frac{d\omega\sin\frac{1}{2}\omega.\cos^2\frac{1}{2}\omega}{l+y}$$

und von $\omega=o$ an integrirt

$$-\int\frac{dz\sin\omega}{l+y} = -\frac{2\sqrt{\frac{2}{\alpha}}}{3(l+y)}.(1-\cos^3\tfrac{1}{2}\omega) -$$

$$-\tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}.\int\frac{dy\,(1-\cos^3\frac{1}{2}\omega)}{(l+y)^2}$$

oder wenn man die mit $(l+y)^2$ dividirten Glieder gegen die mit $l+y$ dividirten wegläßt,

$$-\int\frac{dz\sin\omega}{l+y} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.\frac{(1-\cos^3\frac{1}{2}\omega)}{(l+y)\sqrt{\alpha}}$$

und daher

$$\alpha z^2 = 1-\cos\omega - \frac{2\sqrt{2}}{3}.\frac{(1-\cos^3\frac{1}{2}\omega)}{(l+y)\sqrt{\alpha}} \;\ldots.\; (K).$$

Geht für das oberſte Element der Curve ω in ω_1 über, und z in z_1, wo dann z_1 die Höhe der gehobenen Säule bedeutet; ſo wird für αz_1^2 eine ähnliche Gleichung, nur wird man zu bedenken haben, daß $\omega=\pi-\omega_1$ iſt, und man erhält

$$z_1 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\cos\tfrac{1}{2}\omega_1 - \frac{1-\sin^3\frac{1}{2}\omega_1}{3l\alpha\cos\frac{1}{2}\omega_1}.$$

Das Volumen der ganzen gehobenen Säule beſteht aus dem Volumen des Cylinders, deſſen Höhe z_1 und deſſen Baſis πl^2 iſt nebſt dem Volumen der ringförmigen außer dieſem Cylinder liegenden Maſſe. Erſteres iſt $\pi l^2 z_1$ wo für z_1 obiger Werth zu ſetzen kommt, letzteres hingegen $-2\pi\int(l+y)\,z\,dy$, wo das Integral von $\omega=o$ bis $\omega=\pi-\omega_1$ auszudehnen iſt. Man kann aus (K) z finden und durch dieſen Werth erhalten

$$-\int(l+y)\,z\,dy = \int\frac{(l+y)\,(d\omega\cos\omega+dy\sin\omega)}{2\alpha} =$$

$$= \frac{(l+y)\sin\omega}{2\alpha} + \text{Const.}$$

wo man den vollſtändigen Werth erhalten wird, wen man $\omega=\pi-\omega_1$ und $y=o$ ſetzt. Demnach hat man

$$-2\pi\int(l+y)\,z\,dy=\frac{\pi l\sin\omega_{,}}{\alpha}$$

mithin für das Volumen der ganzen gehobenen Säule

$$\frac{\pi l^2\sqrt{2.\cos\frac{1}{2}\omega_{,}}}{\sqrt{\alpha}}-\frac{\pi l\,(1-\sin^3\frac{1}{2}\omega_{,})}{3\alpha\cos\frac{1}{2}\omega_{,}}+\frac{\pi l\sin\omega_{,}}{\alpha}$$

oder

$$\frac{\pi l^2\sqrt{2\cos\frac{1}{2}\omega_{,}}}{\sqrt{\alpha}}-\frac{\pi l}{3\alpha\cos\frac{1}{2}\omega_{,}}(1-6\sin\tfrac{1}{2}\omega_{,}+5\sin^3\tfrac{1}{2}\omega_{,}).\qquad(L)$$

Iſt q die Höhe, welche die Flüſſigkeit in der Axe eines Röhrchens vom Halbmeſſer h erreicht, ſo iſt

$$q=\frac{2\sin\delta_{,}}{\alpha h}\left[1-\frac{h}{2q\sin\delta_{,}}\left(1-\frac{2}{3}.\frac{(1-\cos^3\delta_{,})}{\sin^2\delta_{,}}\right)\right]$$

oder weil $\delta_{,}=\pi-\omega_{,}$ iſt

$$q=\frac{2\cos\omega_{,}}{\alpha h}\left(1-\frac{h}{6q\cos^3\omega_{,}}(1-\sin\omega_{,})^2(1+2\sin\omega_{,})\right)$$

und nahe

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{h}{2\cos\omega_{,}}\left(q+\frac{h}{6\cos^3\omega}(1-\sin\omega_{,})^2.(1+2\sin\omega_{,})\right).$$

Setzt man dieſen Werth in (L), ſo wird, wenn man das ſpecifiſche Gewicht der Flüſſigkeit g nennt und die Glieder vom zweiten angefangen vernachläſſiget, das Gewicht der gehobenen Säule

$$g\pi l^2\cos\tfrac{1}{2}\omega_{,}\sqrt{\frac{hq}{\cos\omega_{,}}}.$$

Aus obiger Gleichung ſieht man zugleich, daß ſich in cylindriſchen Haarröhrchen nur dann die Höhen der gehobenen Säulen verkehrt, wie ihre Durchmeſſer verhalten, wenn man zu den beobachteten Höhen $\frac{1}{6}$ des Durchmeſſers, multiplicirt mit

$$\frac{(1-\sin\omega_{,})^2\,(1+2\sin\omega_{,})}{\cos^3\omega_{,}},\ \text{addirt.}$$

66. Laplace hat nachträglich ſeine Haarröhrchentheorie auf eine andere Weiſe dargeſtellt und die bei Haarröhrchenerſcheinungen wirkſamen Kräfte unmittbar mit der gehobenen flüſſigen Säule verglichen. Es ſey $ABCD$ (Fig. 63) ein Haarröhrchen, das in die durch MN begrenzte Flüſſigkeit getaucht iſt und dieſe Flüſſigkeit ſey bis AB im Röhrchen geſtiegen. Man denke ſich die gehobene

Säule bis EF in verticaler Richtung fortgeſetzt, dann in horizontale Richtung GH übergehend und endlich wieder nach IK vertical aufwärts gekehrt. Da die verticalen wenn auch ungleich langen Säulen $AEFB$ und $IGHK$ mit einander im Gleichgewichte ſtehen, ſo muß das Stück, um welches erſtere die letztere an Länge übertrifft, durch eine aufwärts gerichtete Kraft getragen werden. Um dieſe Kraft zu finden, bedenke man Folgendes: Die im Arme $DCEF$ enthaltene Flüſſigkeit wird abwärts gezogen, 1. durch ſich ſelbſt, 2. durch die ſie umgebende Flüſſigkeit. Beide Kräfte werden aber durch Gegenkräfte im Arme $IKGH$ aufgehoben. Dieſelbe Säule $DCEF$ wird ferner aufwärts gezogen, 1. durch die Flüſſigkeit in der Röhre $ABCD$, doch dieſe wird durch die Wirkung der Maſſe $ABCD$ auf $DCEF$ aufgehoben. 2. Durch die Röhre $ABCD$. Die in $ABCD$ enthaltene Flüſſigkeit wird afficirt, 1. durch die Wirkung des Flüſſigen auf ſich ſelbſt, 2. durch die Wirkung der in der unteren Röhre enthaltenen Flüſſigkeit; auch dieſe wird wieder durch den Gegenzug der Flüſſigkeit in $ABCD$ aufgehoben. 3. Durch unter dem Röhrchen befindliche Flüſſigkeit, endlich 4. durch die Röhrenwand. Demnach bleiben zwei aufwärts gerichtete, von der Röhre $ABCD$ ausgehende Kräfte und eine abwärts gerichtete von dem Zug der Flüſſigkeit unter CD abhängige Kraft zurück. Heißt jede der erſteren P, die letztere Q, ſo erhält man als Reſultirende $2P-Q$ und wenn man das Volumen der gehobenen Säule v, ihr ſpecifiſches Gewicht s nennt, ſo erhält man

$$sv = 2P - Q.$$

P iſt wegen ſeiner geringen Wirkungsſphäre dem Umfange des Röhrchens proportionirt, und man hat $P = pc$, wenn c deſſen Umfang, p aber eine conſtante Größe bezeichnet, welche, wenn das Geſetz der Anziehung der Röhre für alle Körper gleich iſt, ſelbſt die Stärke dieſer Anziehung bedeuten kann. Hat q dieſelbe Bedeutung in Betreff der Anziehung des Flüſſigen, ſo iſt auch $Q = qc$ und man erhält aus obiger Gleichung

$$(2p-q)\,c = sv.$$

Für ein cylindriſches Haarröhrchen, deſſen Halbmeſſer r heißt, iſt $c = 2r\pi$, $v = ar^2\pi$, wenn a die mittlere Länge der gehobenen Säule bedeutet, mithin

$$(2p-q)\,2r\pi = sar^2\pi \text{ und } r = \frac{2(2p-q)}{sa}.$$

Setzt man $\frac{2(2p-q)}{s} = f$, ſo iſt $\frac{f}{r} = a$, mithin die Höhe der gehobenen Säule dem Halbmeſſer des Röhrchens verkehrt proportionirt. Bezeichnet a nicht die mittlere Höhe der gehobenen Säule, ſondern den Abſtand des unterſten Punctes des Meniskus $ABab$, mit welchem die Flüſſigkeit im Röhrchen begrenzt iſt, ſo wird $v = ar^2\pi + \frac{r^3\pi}{3}$, weil der Meniskus $= r^3\pi - \frac{2}{3}r^3\pi$ iſt, mithin $f = ar + \frac{r}{3}$.

Es iſt klar, daß eine Hebung der Flüſſigkeit erfolgen wird, wenn $2p > q$, hingegen eine Depreſſion, wenn $2p < q$ iſt.

67. Den Werth der Laplace'ſchen Haarröhrchentheorie wird man, ungeachtet ihrer großen inneren Naturgemäßheit, doch erſt recht ſchätzen lernen, wenn man ſie mit den Ergebniſſen unmittelbarer Meſſungen vergleicht. Soll eine ſolche Meſſung angeſtellt werden, ſo muß man ſich eines calibrirten reinen Röhrchens bedienen, deſſen innerer Durchmeſſer nach I. 46 genau gefunden worden iſt. Dieſes Röhrchen wird mit der Flüſſigkeit, womit man den Verſuch anſtellen will, inwendig ſorgfältig benetzt, hierauf ein am oberen Rande wohlabgeſchliffenes Gefäß A (Fig. 64) genommen, die Flüſſigkeit eingefüllt, das Röhrchen B durch den Pfropf C geſteckt, ſo daß es ſenkrecht auf der mit dem Pfropf verbundenen Platte ab ſteht, dann dieſe Platte ſelbſt auf den Rand des Gefäßes A gelegt und der ganze Apparat durch die Stellſchrauben des Poſtamentes mittelſt einer Waſſerwage in verticale Stellung gebracht. Zur Beſtimmung des oberen Randes der im Röhrchen gehobenen Säule dient der vertical ſtehende getheilte Maßſtab E, an dem ſich ein mit einem Fadenkreuze verſehenes Fernrohr verſchieben läßt. Man verſchiebt nämlich das Fernrohr, bis der horizontale Faden im Geſichtsfelde desſelben die Oberfläche der flüſſigen Säule im Röhrchen berührt und notirt den Stand desſelben am Maßſtabe. Hierauf ſchiebt man die Platte ab an die Seitenwand des Gefäßes A und bringt neben ihr den Deckel G an, durch welchen der Stift H geht und mittelſt einer Schraube I ſanft gehoben und geſenkt werden kann, und verſchiebt dieſen Stift ſo lange, bis ſeine unterſte Spitze den Spiegel der Flüſſigkeit berührt. Iſt dieſes der Fall, ſo nimmt man mittelſt eines kleinen Löffels etwas Flüſſigkeit heraus, damit die Spitze des Stiftes H außer derſelben ſtehe und viſirt dann mit dem

Fernrohre *F* auf die Spitze. Hat man ſie an der rechten Stelle des Geſichtsfeldes, ſo lieſt man wieder den Stand des Fernrohres am Maßſtab ab und der Abſtand beider Stellungen des Fernrohres von einander gibt die Länge der gehobenen flüſſigen Säule.

Folgende Tafel enthält die Reſultate einiger Meſſungen dieſer Art, die mit der Theorie vollkommen übereinſtimmen.

Flüſſigkeit	Innerer Durchmeſſer des Röhrchens	Beobachtete Höhe	Berechnete Höhe	Beobachter
Waſſer	2 Millim.	6.75 M.	——	Häuy und Tremery
——	$\frac{4}{3}$ ——	10 —	10.12 M.	
——	$\frac{3}{4}$ ——	18.5 —	18	
——	1.29441 —	23.1634	——	Gay-Luſſac
——	1.90381 —	15.5861	15.5783	
Weingeiſt	1.29441 —	9.18235	——	
——	1.90381 —	6.08397	6.0725	
Orangenöhl	2 ——	93.4	——	Häuy und Tremery.
——	$\frac{4}{3}$ ——	5	5.1	
——	$\frac{3}{4}$ ——	9	9.1	
Queckſilber	2 ——	—$3\frac{2}{3}$	—	
——	$\frac{4}{3}$ ——	—5.5	5.49	

Bei den von Häuy und Tremery angeſtellten Verſuchen wurde die Rechnung ohne die oben angegebene Correction geführt, bei Gay-Luſſacs Verſuchen hingegen wurde ſtets $\frac{1}{6}$ des Röhrchendurchmeſſers als Correction gebraucht. Die Tafel VIII enthält die Höhe, zu welcher mehrere Flüſſigkeiten durch Capillarität in einem gläſernen Röhrchen gehoben werden.

Fünftes Kapitel.

Gleichgewicht der Gaſe.

68. Alle jene Geſetze des Gleichgewichtes, welche im Kap. III. aus der abſoluten Verſchiebbarkeit der Theile flüſſiger Körper abgeleitet worden ſind, finden auch bei Gaſen volle Anwendung, und daher gelten für das Gleichgewicht dieſer auch die Formeln (*A*) und (*B*); es kommen nur noch andere Bedingungsgleichungen dazu, welche

von der Zuſammendrückbarkeit der Gaſe abhängen. Dieſe bewirkt nämlich, daß die Dichte der Gaſe ſelbſt bei derſelben Temperatur nicht allenthalben gleich groß iſt, ſondern vom Drucke abhängt. Haben p und σ die in Kap. III. feſtgeſetzte Bedeutung, ſo hat man für Gaſe

$$p = c\sigma$$

wo c eine von der Natur und Temperatur des Gaſes abhängige Größe vorſtellt. Verbindet man dieſen Ausdruck mit $dp = \sigma dV$, ſo erhält man

$$dp = \frac{p}{c} dV$$

und hieraus

$$\log p = \frac{V}{c} + \log C \text{ oder } p = C e^{\frac{V}{c}}$$

wo C eine Conſtante, e die Baſis der Logarithmen für den Modulus $= 1$ iſt. Hieraus ſieht man, daß p eine Function von V ſey und daß daher in derſelben Gleichgewichtsſchichte der Druck derſelbe ſeyn muß, und es ſtimmt von dieſer Seite das Verhalten eines Gaſes mit dem heterogener tropfbarer Maſſen überein. Doch unterſcheiden ſie ſich darin weſentlich von einander, daß hier die im Gleichgewichte befindlichen Schichten von verſchiedener Dichte nicht in jeder beliebigen Ordnung auf einander folgen können, ſondern nach einem beſtimmten Geſetze auf einander folgen müſſen. Man hat nämlich

$$\sigma = \frac{p}{c} = \frac{C}{c} e^{\frac{V}{c}}$$

woraus man erſieht, daß σ eine Function von V iſt und daher mit dieſer Größe in einer beſtimmten Verbindung ſteht.

Iſt die Temperatur nicht in der ganzen Gasmaſſe gleich, ſo hat auch c für verſchiedene Stellen einen verſchiedenen Werth und iſt eine Function der Temperatur t. Daraus folgt, daß auch t eine Function von V ſeyn müſſe. Im Allgemeinen ſind daher p, σ und t Functionen von V und es müſſen demnach in derſelben Gleichgewichtsſchichte der Druck, die Dichte und die Temperatur dieſelben ſeyn. Aber das Geſetz, nach welchem die Temperatur von Schichte zu Schichte wechſelt, iſt nicht ſo wie das der Dichte beſtimmt, ſondern es kann jedes beliebige ſeyn. Iſt dieſes Geſetz einmal ange-

nommen, ſo wird darnach der Druck und die Dichte beſtimmt durch die Gleichungen

$$p = C e^{\int \frac{dV}{c}}, \quad \sigma = \frac{C}{c} e^{\int \frac{dV}{c}}.$$

69. Wirkt auf ein Gas blos die Schwere, ſo ſetze man wieder voraus, ihre Wirkung erfolge nach der Richtung z und ſie heiße g. Da wird

$$X = o, \; Y = o, \; Z = g, \; dV = g\,dz$$

und deßhalb

$$p = C e^{\frac{\int g\,dz}{c}}, \quad \sigma = \frac{C}{c} . e^{\int \frac{g\,dz}{c}}.$$

Hieraus erſieht man, daß ſowohl der Druck als die Dichte eine Function von z ſind und daher in gleichen Entfernungen vom Mittelpuncte der Erde gleich ſeyn müſſen, vorausgeſetzt, daß die Temperatur überall dieſelbe iſt.

70. Iſt a der Exponent des Verhältniſſes zwiſchen der Dichte der Luft und dem Drucke, den ſie vermöge ihrer Expanſivkraft bei der Temperatur 0° C auf eine Fläche $= 1$ ausübt, mithin $\frac{p}{\sigma} = a$; ſo hat man für die Temperatur t°

$$p = a\sigma\,(1 + 0.00375\,t) \;\ldots\ldots\; (A)$$

ferner iſt aus dem Vorhergehenden

$$dp = \sigma g\,dz.$$

Hier iſt z ſo genommen, daß es mit p wächſt, alſo von oben nach unten gezählt. Verſetzt man den Anfangspunct der Coordinaten nach unten, ſo geht dz in $-dz$ über, und man hat

$$dp = -\sigma g\,dz,$$

oder wenn man für σ das ſetzt, was aus der vorhergehenden Gleichung folgt,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\,dz}{a\,(1 + 0.00375\,t)} = -\frac{g\,dz}{a\,(1 + \alpha t)}$$

wenn man $0.00375 = \alpha$ ſetzt.

71. Bisher hat g die Schwere bezeichnet ohne nähere Beziehung auf die Entfernung vom Mittelpuncte der Erde, wo ſie Statt findet. Man bezeichne mit dieſem Buchſtaben die Größe der Schwere an der Meeresfläche und mit $g_{,}$ die Schwere in der Höhe z, nenne ferner den Erdhalbmeſſer in dieſer Breite r, ſo hat man

$$g_1 = \frac{gr^2}{(r+z)^2}$$

mithin

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gr^2\,dz}{a(1+\alpha t)\,(r+z)^2}$$

und durch Integriren, in der Vorausſetzung, daß nur z veränderlich iſt,

$$\log p = \frac{mg}{a(1+\alpha t)}\,\frac{r^2}{r+z} + \text{Const.} \ldots . \; (B)$$

wo m den Modulus der gemeinen Logarithmen $= 0.434295$ bedeutet. Dieſe Gleichung zeigt, wie der Druck mit der Höhe zuſammenhängt.

Setzt man ſtatt p den Werth, wie er ſich aus (A) ergibt, ſo wird

$$\log[\sigma a(1+\alpha t)] = \frac{mg}{a(1+\alpha t)} \cdot \frac{r^2}{r+z} + \text{Const.} \ldots \; (C)$$

und dieſe Gleichung zeigt, wie σ von z abhängt.

72. Die Gleichungen (B) und (C) beſtimmen den Zuſtand des Gleichgewichtes einer Gasmaſſe vollkommen, allein auf eine freie Oberfläche einer ſolchen Maſſe beziehen ſie ſich nur in ſo fern, als ſich daraus die Geſtalt derſelben ableiten läßt, die übrigens aus (49) klar iſt. Die Höhe der Gasmaſſe, welche nothwendig iſt, damit eine freie Oberfläche Statt finden kann, oder in Bezug auf unſere Atmoſphäre, die Höhe der Atmoſphäre läßt ſich daraus nicht beſtimmen. Dazu gelangt man durch andere Betrachtungen:

Die Atmoſphäre hat offenbar dort ihr Ende, wo die ſpecifiſche Expanſivkraft der Luft ihrer Schwere gleich iſt. Heißt demnach e die ſpecifiſche Expanſivkraft der Luft an der Erdoberfläche bei der Temperatur T, e_1 dieſelbe am Ende der Atmoſphäre, wo die Temperatur t herrſcht, ſo hat man

$$e_1 = \frac{1 + 0.00375\,t}{1 + 0.00375\,T} \cdot e = \frac{1+\alpha t}{1+\alpha T}\,e.$$

Die Größe e würde keine Änderung erleiden, wenn ſtatt der jetzt vorhandenen nach oben immer dünner werdenden Atmoſphäre eine andere von gleichem Drucke und gleichförmiger Dichte geſetzt würde. Die Höhe h dieſer Atmoſphäre ließe ſich aus der Gleichung $h = \frac{D}{d} \cdot b$ finden, wo D die Dichte des Queckſilbers, d die

Dichte der Luft an der Erdoberfläche und b der daſelbſt herrſchende mittlere Barometerſtand iſt. Entſtünde nun an der Erdoberfläche irgend ein luftleerer Raum, ſo würde ſich die Luft in denſelben vermöge ihrer Expanſivkraft mit einer Geſchwindigkeit hineinſtürzen, die ſich zu der, mit welcher dieſes durch die bloße Schwere geſchehen würde, verhielte, wie $\sqrt{h} : \sqrt{\gamma}$, wo γ die Acceleration der Schwere bezeichnet. Man hat daher

$$e : g = \sqrt{h} : \sqrt{\gamma} \text{ oder } e = g \sqrt{\frac{h}{\gamma}}.$$

Setzt man dieſes in die vorhergehende Gleichung, ſo wird

$$e_1 = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T} g \sqrt{\frac{h}{\gamma}}.$$

Aber obiger Bedingung gemäß iſt e_1 gleich der Schwere am Ende der Atmoſphäre, d. i.

$$e_1 = \frac{r^2}{(r+z)^2} g$$

oder, weil z gegen r nur klein iſt,

$$e_1 = \frac{1}{1 + \frac{2z}{r}} \cdot g$$

mithin

$$\frac{1}{1 + \frac{2z}{r}} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha T} \sqrt{\frac{h}{\gamma}}$$

Zur numeriſchen Beſtimmung der Größe z aus dieſer Gleichung iſt die Kenntniß der Temperatur am Ende der Atmoſphäre nöthig, die uns leider bis jetzt fehlt.

73. Man nehme an, die Temperatur nehme von unten nach oben in einem arithmetiſchen Verhältniſſe ab, wenn die Höhe in demſelben Verhältniſſe zunimmt und ſetze ferner, daß dieſe Abnahme für 1° C 96.88 Toiſen betrage. Man hat daher

$$t = T - \frac{z}{96.88}$$

Setzt man dieſen Werth für t in obige Gleichung und vernachläſſiget zugleich die Größe $\frac{2z}{r}$ als ſehr klein, ſo wird

$$1 = \frac{1 + \alpha \left(T - \frac{z}{96.88}\right)}{(1 + \alpha T)} \sqrt{\frac{h}{\gamma}}$$

und hieraus

$$z = \frac{96.88\,(1 + \alpha T) - 96.88\,(1 + \alpha t)\sqrt{\frac{\gamma}{h}}}{\alpha}$$

Dieſe Formel gibt in der Vorausſetzung, daß $T = 22°.4$ R und der mittlere zur Berechnung von h gebrauchte Barometerſtand 331.3 p. L. ſey, 27631 Toiſen = 7.22 geog. Meilen. Indeß ſieht man leicht, daß dieſe Größe zu gering ſey und daß daher das Geſetz der Wärmeabnahme nicht der Natur entſprechend angenommen wurde. Darum muß man die Anwendung eines anderen Geſetzes verſuchen. Man nehme an, die Temperatursabnahme ſtehe im geraden Verhältniſſe mit den jedesmaligen Temperaturen. Heißt demnach das Differenzial der Höhe dz, die Wärmeabnahme $-dt$, ſo erhält man

$$-\frac{dt}{1 + \alpha t} = \frac{dz}{f}$$

wo f eine Conſtante bezeichnet. Hieraus wird

$$z = -f \log \text{nat}\,(1 + \alpha t) + \text{Const}$$

Es muß aber $z = 0$ ſeyn, wenn man für $1 + \alpha t$ ſetzt $1 + \alpha T$, mithin iſt

$$\text{Const} = f \log \text{nat}\,(1 + \alpha T)$$

und daher

$$z = f \log \text{nat}\left(\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}\right).$$

Es iſt aber auch

$$\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t} = \frac{e}{e_1} = \sqrt{\frac{h}{\gamma}}$$

und daher

$$z = f \log \text{nat} \sqrt{\frac{h}{\gamma}}.$$

Schmidt fand aus einer großen Anzahl von Beobachtungen

$$f = 64493 \text{ Toiſen}$$

und daher

$$z = 104975 \text{ Toiſen} = 27.5 \text{ geog. Meilen.}$$

Sowohl dieſe als die vorhergehende Höhe beziehen ſich auf den Äquator. Für die Breite, wo die mittlere Temperatur = 0 iſt, gibt die erſtere Vorausſetzung $z = 25128$ T. = 6.6 geog. M., die zweite $z = 103518$ T. = 27.1 geog. M.

Sechstes Kapitel.

Höhenmeſſung mit dem Barometer.

A. Theorie derſelben.

74. Das Geſetz der Abnahme des Luftdruckes bei wachſender Entfernung vom Mittelpuncte der Erde wird durch Erhöhungen und Vertiefungen auf der Erdoberfläche nicht geſtört und es herrſcht an einer Stelle, die in einer beſtimmten Entfernung von der Meeresfläche iſt, derſelbe Druck, dieſe Stelle mag dem Gipfel eines Berges oder einer freien Luftmaſſe angehören. Daher wird man aus dem herrſchenden Luftdrucke die Entfernung eines Ortes von der Meeresfläche entnehmen können. Den Zuſammenhang zwiſchen der Höhe z und dem Luftdrucke p drückt die Formel B (Kap. V.) aus, für welche man nur noch die Conſtante zu beſtimmen braucht. Um dieſe zu finden, ſey P das, was aus p wird, wenn $z = 0$ iſt, mithin der Luftdruck an der Meeresfläche. Da hat man:

$$\log P = \frac{mgr}{a(1+\alpha t)} + \text{Const}$$

und daher

$$\log \frac{P}{p} = \frac{mgr}{a(1+\alpha t)} \cdot \frac{z}{r+z}.$$

Es iſt klar, daß dieſer Ausdruck auch gilt, wenn P nicht der Luftdruck an der Meeresfläche, ſondern der an einer nicht gar hohen Station herrſchende iſt, aber dann gibt z nicht die abſolute Höhe, ſondern nur den Höhenunterſchied zweier Stationen an. Bezeichnet man den Barometerſtand in der unteren Station mit B, in der um die Größe z höher liegenden mit b, ferner die Dichte des Queckſilbers mit d, ſo iſt

$$P = dgB,\ p = dg_1 b = \frac{dgbr^2}{(r+z)^2}.$$

$$\log \frac{P}{p} = \log \frac{B}{b} + 2 \log \left(1 + \frac{z}{r}\right)$$

Iſt endlich die Temperatur der Luft in der unteren Station t, in der oberen t_1 und $\frac{t+t_1}{2} = \tau$, ſo wird, wenn man obige Gleichung zu Hilfe nimmt,

$$z = \frac{a}{mg}(1 + \alpha\tau)\left[\log\frac{B}{b} + 2\log\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

75. Nun handelt es ſich noch um die numeriſche Beſtimmung der Größe $\frac{a}{mg}$ und α. Erſtere läßt ſich entweder aus dem bekannten Verhältniſſe zwiſchen der Dichte der Luft und des Queckſilbers oder aus trigonometriſchen Meſſungen ableiten. Aus dem Verhältniſſe der Dichte der zwei genannten Flüſſigkeiten findet man

$$\frac{a}{mg} = 18365 \text{ Meter};$$

aus trigonometriſchen Meſſungen leitete Ramond

$$\frac{a}{mg} = 18336 \text{ Meter}$$

ab, ſtatt deſſen er in der Folge 18393 zu ſetzen für gut fand. Weil aber ſeine Beobachtungen in einer Breite von 45° angeſtellt wurden, ſo muß man für jede andere Breite φ ſetzen

$$\frac{a}{mg} = 18336\,(1 + 0.00284 \cos 2\varphi)$$

oder nach Oltmanns

$$\frac{a}{mg} = 18336\,(1 + 0.002837 \cos 2\varphi).$$

Die Größe α iſt für trockene Luft $= 0.00375$; feuchte Luft in Berührung mit Waſſer dehnt ſich in der Wärme etwas mehr aus als trockene, darum ſetzt Laplace $\alpha = 0.004$ und glaubt dadurch den Einfluß der Luftfeuchtigkeit hinreichend berückſichtiget zu haben. Gibt man dieſes zu, ſo erhält man für die Höhe z in der Vorausſetzung des erſteren Ramond'ſchen Coefficienten die Formel

$$z = 18336\,(1 + 0.00284 \cos 2\varphi)\,(1 + 0.004\,\tau)$$
$$\left[\log\frac{B}{b} + 2\log\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

Weil z gegen r ſtets ſehr klein iſt, ſo hat man annäherungsweiſe

$$\log \text{nat}\left(1 + \frac{z}{r}\right) = \frac{z}{r}$$

und daher

$$\log \text{vulg}\left(1 + \frac{z}{r}\right) = 0.4342945 \cdot \frac{z}{r}$$

mithin

$$z = 18336\ (1 + 0.00284 \cos 2\varphi)\ (1 + 0.004\,\tau)$$
$$\left(\log \frac{B}{b}\left(1 + \frac{z}{r}\right) + 0.868589\ \frac{z}{r}\right) \ldots (A)$$

wo man für z im zweiten Gliede den Werth ſetzen kann, welcher ſich aus

$$z = 18336\ (1 + 0.004\,\tau) \log \frac{B}{b}$$

ergibt. Dieſer letztere Ausdruck kann ſelbſt zur Berechnung nicht ſehr bedeutender Höhen mit Übergehung des vorhergehenden gebraucht werden, weil da der Einfluß der Änderung der Schwere mit der Höhe und der geographiſchen Breite vernachläſſiget werden kann.

76. Die Laplace'ſche Regel, die Luftfeuchtigkeit in Rechnung zu bringen, kann nur als Annäherung betrachtet werden, die wohl in den meiſten Fällen ausreicht; aber wenn es ſich um eine ganz naturgemäße Betrachtung des Einfluſſes dieſer Feuchtigkeit handelt, ſo muß man einen anderen Weg einſchlagen.

Der Coefficient $\frac{a}{mg}$ hängt, wie die vorhergehende Deduction zeigt, von dem Verhältniſſe der Dichte der Luft zu der des Queckſilbers ab und wächſt bei gleicher Dichte des Queckſilbers ſo, wie die Dichte der Luft abnimmt. Die Änderung dieſer Dichte durch die Wärme iſt durch den Coefficienten $1 + \alpha t$ in Rechnung gebracht, die Änderung derſelben durch Beimengung von Dünſten fordert einen neuen Coefficienten. Heißt σ die Dichte der trockenen Luft bei 0° C und dem Luftdrucke b und werden dieſer Luft Dünſte von der Spannkraft e beigemengt; ſo nimmt σ ab, weil die Luft blos unter dem Drucke $b - e$ ſteht und geht in $\sigma\left(\frac{b-e}{b}\right)$ über, hingegen um $\frac{\sigma\rho e}{b}$ zu, wenn ρ die Dichte der beigemengten Dünſte in Beziehung auf die der reinen Luft bezeichnet, ſo daß nun die Dichte der feuchten Luft gleich $\sigma\left(\frac{b-e}{b}\right) + \frac{\sigma\rho e}{b} = 1 - (1 - \rho)\ \frac{e}{b}$ iſt. Es wird daher der Coefficient, welcher für trockene Luft $\frac{a}{mg}$ war, für ſolche, die Feuchtigkeit von der Expanſivkraft e enthält

$$c = \frac{a}{mg\left(1 - (1-\rho)\frac{e}{b}\right)}$$

ſeyn. Für $b = 760^{\text{mm}}$ iſt $\rho = \frac{5}{8}$, ferner $\frac{a}{mg} = 18336$ mithin

$$c = 18336\left(\frac{1}{1 - \frac{3e}{6080}}\right) \text{ oder nahe } c = 18336\left(1 + \frac{e}{2000}\right)$$

daher wird die Höhenformel mit Hinweglaſſung der Factoren, welche ſich auf die Abnahme der Schwere beziehen, in Metern

$$z = 18336\,(1 + 0.00375\,\tau)\left(1 + \frac{e}{2000}\right)(\log B - \log b)$$

in Toiſen

$$z = 9394.323\,(1 + 0.00375\,\tau)\left(1 + \frac{e}{900}\right)(\log B - \log b).$$

Der Werth von e iſt das Mittel der Expanſivkräfte des Waſſerdunſtes an beiden Stationen.

B. Hypſometriſche Tafeln.

77. Mehrere Gelehrte haben zum Behufe der Höhenmeſſung mit dem Barometer nach der vorhergehenden Formel Tafeln berechnet, welche das Geſchäft der numeriſchen Ausmittlung der zu meſſenden Höhe ungemein vereinfachen. Eine der ſinnreichſten Tafeln dieſer Art iſt unſtreitig die von Oltmanns conſtruirte, von der wir nun ausführlicher ſprechen wollen. Man bringe obige Formel (A) in folgende Form:

$$z = 18336 \log\frac{B}{b}\,(1 + 0.004\,\tau)\,(1 + 0.00284\cos 2\varphi)$$
$$\left(1 + \frac{z}{r} + \frac{0.868589\,\frac{z}{r}}{\log\frac{B}{b}}\right)$$

Nimmt man annäherungsweiſe $z = 18336 \log\frac{B}{b}$, $\log\frac{B}{b} = \frac{z}{18336}$ und $r = 6366191$ Meter, ſo wird

$$z = 18336 \log \frac{B}{b} (1 + 0.004\tau)(1 + 0.00284 \cos 2\varphi)$$

$$\left(1 + \frac{\log \frac{B}{b} + 0.868589}{347}\right).$$

Setzt man nun

$$18336 \log \frac{B}{b} = A; \quad 0.004\tau \cdot A = A_1$$

$$0.00284 \cos 2\varphi \cdot (A + A_1) = A_2$$

$$\left(\frac{\frac{A}{18336} + 0.868589}{347}\right)(A + A_1 + A_2) = A_3$$

ſo iſt

$$z = A + A_1 + A_2 + A_3.$$

Dieſe Formel iſt nun zur Conſtruction jener Tafel benützt worden, die in der N. IX vorkommt. Sie beſteht aus 4 von einander verſchiedenen Theilen als eben ſo vielen einzelnen Tafeln, deren Sinn und Benützung in Folgendem beſteht: Der Theil *a* enthält die Höhenzahlen, welche den beobachteten Barometerhöhen entſprechen. Der Theil *b* gibt die Correction jener Höhe an, die dem kleineren Barometerſtand entſpricht und durch die Verſchiedenheit der Temperatur des Queckſilbers in beiden Barometern nothwendig gemacht wird. Das Argument dieſer Tafel iſt der genannte Temperaturunterſchied. Die demſelben gegenüberſtehende Zahl wird zu der Höhe, die dem anderen Barometerſtande zugehört, mit ihrem Zeichen geſetzt. Iſt dieſes geſchehen, ſo wird von dieſer corrigirten Höhe die dem höheren Barometerſtande entſprechende Höhenzahl abgezogen und die Differenz gibt A. Wird der tauſendſte Theil von A mit der doppelten Summe der Thermometerſtände t und t_1 in der freien Luft an beiden Stationen multiplicirt, ſo iſt das Product die Correction wegen der Luftwärme $= A_1$ und wird mit dem Zeichen, das der Größe $\frac{t + t_1}{2}$ zukommt, zu A geſetzt. Auf dieſe Weiſe erhält man die Größe $A + A_1$. Zur weiteren Rechnung dient die Formel *c*, welche die Correction wegen der Schwere in der Beobachtungsſtation angibt. Man nehme aus ihr die Zahl, welche in der erſten verticalen Zeile der Größe $A + A_1$ und zugleich in der erſten horizontalen Zeile der Breite φ des Beobachtungsortes entſpricht und ſetze ſie zur Größe $A + A_1$, ſo daß man nun die Höhe

$A+A_1+A_2$ hat. Iſt die Höhe der unteren Station ſchon ſehr bedeutend, ſo bedarf es auch noch einer Correction wegen der Abnahme der Schwere. Zu dieſer liefert die Tabelle *d* den Stoff. Man braucht ſie ſo: 1000 M. verhalten ſich zur gefundenen Höhe, wie die zum Barometerſtand in der unteren Station gehörige Correction (aus dieſer Tabelle) zur geſuchten Correction. Dieſe iſt ſtets additiv.

Will man den Gebrauch dieſer Tafeln zugleich mit der Anwendung des vorhin entwickelten Feuchtigkeitscoefficienten verbinden, ſo muß man vorerſt den Factor x ſuchen, mit welchem die Größe $A+A_1+A_2+A_3$ multiplicirt werden muß, um die wirkliche geſuchte Höhe mit vollkommener Berückſichtigung der Luftfeuchtigkeit zu erhalten. Es iſt klar, daß man hat

$$(1+0.00375\,\tau)\left(1+\frac{e}{2000}\right)=(1+0.004\,\tau)\,x$$

mithin annäherungsweiſe

$$x=1-0.00025\,\tau\left(1+\frac{e}{2000}\right).$$

78. Ein Beiſpiel wird ohne Zweifel den Gebrauch jener Tafeln am beſten erklären. Ich beobachtete den Barometer und Thermometer am Gipfel des Gamskahrkogels im Salzburgiſchen (Breite 47° 10′), während gleichzeitig an der Wiener Sternwarte beobachtet wurde und erhob folgende Beobachtungszahlen:

Station	Barometerſtand	Temperatur des Queckſilbers	Temperatur der Luft
Wien	747.45 Mm.	0° C	16°.2 C
Gamskahrkogel	569.10 ——	10° C	9°.2 C

Dieſem gemäß gibt die

Tafel *a* für	747.45 Mm.	6017.0 M. = *a*
—	569.10 ——	3847.1 — = *b*
b — $T-T_1=$ 10°	——	14.7 — = *c*
Mithin die genäherte Höhe *a* — *b* — *c*		2155.2

Erſte Correction für $2.1552 \times 2\,(t+t_1)$

$= 2.1552 \times 50.8$ laut Tafel *c* 109.5

Summe 2264.7

Zweite Correction laut Tafel *d* 6.8

Mithin die genaue Höhendifferenz . . . . . . 2271.5 Meter.

C. Grad der Genauigkeit barometriſcher Meſſungen.

79. Bei gehöriger Aufmerkſamkeit wird man mittelſt dieſer Formel den Höhenunterſchied zweier Stationen mit hinreichender Genauigkeit finden; allein ſelbſt der geſchickteſte und fleißigſte Beobachter wird nicht darauf rechnen dürfen, ein ganz wahres Reſultat zu erlangen, theils weil Beobachtungsfehler unvermeidlich ſind, theils weil die Formel auf Vorausſetzungen beruht, die nicht in aller Hinſicht und unter allen Umſtänden, welche beim Höhenmeſſen vorkommen, wahr ſind. Es wird nützlich ſeyn, die Quellen der Fehler und ihre wahrſcheinlichen Grenzen näher zu unterſuchen.

80. Die erſte Quelle der Fehler, welche beim Höhenmeſſen mit dem Barometer vorkommen, liegt in den Beobachtungen ſelbſt. Auch der beſte Beobachter erlangt keine die Wahrheit genau darſtellende Reſultate, ſelbſt wenn die Inſtrumente, deren er ſich bedient, vollkommen wären; denn die unentbehrlichen Werkzeuge, die Sinnesorgane enthalten ſchon die Quelle mancher fehlerhaften Anzeige in ſich.

Es iſt beinahe unmöglich, den Barometerſtand genauer, als bis zu $\frac{1}{2}$ M. anzugeben und ich geſtehe frei, daß mir die Wahrheitsliebe jedes Beobachters verdächtig vorkommt, der ihn auf $\frac{1}{100}$ M. oder auf noch kleinere Theile mit Sicherheit meſſen will. Daß man mittelſt eines Nonius derlei Theile wahrnehmen kann, wird wohl Niemand läugnen, der ſich auf ſolche Werkzeuge verſteht, aber daraus folgt nicht, daß das Reſultat bis zu dieſer Größe richtig ſey, ja häufig wird man deſto größere Fehler begehen, je feiner der Nonius getheilt iſt, weil ein feinerer Nonius längere Zeit fordert zum Einſtellen als ein minder fein getheilter und daher der Beobachter das Queckſilber dem erwärmenden Einfluß ſeiner Körpernähe längere Zeit hindurch ausſetzt. Nimmt man noch dazu den Fehler, welcher von der Capillarität, von der Theilung, von der Dehnung oder Contraction der Scale, von der Haltung des Auges abhängt ꝛc. ſo wird man wohl obige Grenze nicht für zu groß halten.

Noch weniger iſt man im Stande, die Temperatur genau zu meſſen. Selbſt wenn man ſich eines genau berichtigten Thermometers bedient, wird man die Temperatur des Queckſilbers höchſtens auf $\frac{1}{2}°$ C genau kennen lernen, indem das am Barometer befeſtigte Thermometer und das Queckſilber im Barometer nicht gleich ſchnell

von der Wärme afficirt werden, beſonders wenn letzteres in Holz gefaßt iſt. Man könnte dieſem Übel zwar dadurch zu begegnen ſuchen, daß man das Thermometer unmittelbar in das Queckſilber des Barometers taucht; aber ſo unerläßlich dieſes auch bei einem Normalbarometer iſt, das einen feſten Stand behält und ein ſehr großes Queckſilbergefäß hat, ſo ſchwer geht es bei einem compendioſen, leicht transportablen Reiſebarometer an. Dieſer Einfluß wird zwar wegen der geringen Ausdehnung des Queckſilbers gering ſeyn, aber bei großen Höhen doch nicht vernachläſſigt werden dürfen. Viel ſchwieriger findet man die mittlere Lufttemperatur genau. Bei geringer Sorgfalt fehlt man ſelbſt mit guten Thermometern um 2° und mehr, und es iſt die größte Vorſicht und Geſchicklichkeit nöthig, wenn man ein bis auf 1° genaues Reſultat erhalten will. Die Urſache davon liegt in der großen Schwierigkeit, das Thermometer gerade nur dem Einfluſſe der Luftwärme auszuſetzen und den Einfluß der directen Sonnenſtrahlen, der Radiation, des Windes, Regens, Nebels und anderer Meteore abzuhalten. Ein Fehler von 1° bringt in der gemeſſenen Höhe einen Fehler von 0.004 der wahren Größe hervor. Man wird zwar auch ſtets in den Beobachtungen des Feuchtigkeitszuſtandes einen Fehler begehen, allein dieſer kommt gegen die Größe der aus den vorgenannten Quellen entſpringenden Fehler in keinen Betracht.

81. Außer den Beobachtungen liegen in der Höhenformel ſelbſt Gründe zu Irrthümern. Der beſtändige Coefficient mag aus Verſuchen über die Dichte der Luft abgeleitet oder aus Vergleichung von Höhen, die trigonometriſch oder durch Nivelliren gefunden, mit den Ergebniſſen der Barometerbeobachtungen abgeleitet ſeyn, ſo paßt er doch nicht auf alle Fälle, auf welche man ihn gewöhnlich ausdehnt. Denn iſt er aus der Luftdichte abgeleitet, ſo ſetzt er vollkommenes Gleichgewicht der Luft voraus, das doch ſelbſt bei der größten ſogenannten Windſtille nicht herrſcht; hat man ihn aber aus gemeſſenen Höhen entnommen, ſo gilt er auch nur für Verhältniſſe, wie die waren, bei denen die zu dieſem Behufe gemachten Beobachtungen angeſtellt wurden. Indeß kann man den vom etwaigen fehlerhaften Factor abhängenden Irrthum als verſchwindend klein anſehen, wenn man die Barometerbeobachtung zum Behufe der Höhenmeſſung nur bei ziemlich windſtillem Wetter vornimmt.

82. Den größten Fehler veranlaßt ohne Zweifel die Art und Weiſe, wie man die Luftwärme der Beobachtungsſtationen in Rechnung zu bringen pflegt, indem man nämlich vorausſetzt, die halbe Sum-

me der in beiden äußerſten Stationen beobachteten Thermometerſtände gebe die mittlere Temperatur der zwiſchen dieſen Stationen in verticaler Richtung liegenden Luftſchichte. Die Temperatur der Luft nimmt von unten nach oben nicht immer gleich ſtark und gleich ſchnell ab und das Geſetz der Wärmevertheilung ſelbſt ſcheint Veränderungen zu unterliegen, die das Gewicht der zwiſchen zwei Stationen von verſchiedener Höhe befindlichen Luftſäule abändern und demnach die Höhendifferenz anders wahrnehmen laſſen, als ſie wirklich iſt. Zu Mittag erhitzt ſich der Boden ſehr ſtark, ohne daß zugleich die obere Luft in demſelben Maße erwärmt wird, nach Sonnenuntergang und während der Nacht tritt unten eine erhebliche Erkältung ein, ohne auf die hoch oben befindlichen Luftſchichten zu wirken. Mit dieſen Ungleichheiten der Temperatur treten auf- und abſteigende Luftſtröme ein und afficiren das Barometer. Alles dieſes beſtätigen vielfache Erfahrungen. So z. B. fand Ramond die Höhe ſeines Beobachtungszimmers zu Barèges über das von Dangos in Tarbes aus den um 10 Uhr Abends angeſtellten Beobachtungen um 10 M. zu klein und aus den zu Mittag angeſtellten zu groß. Ähnliche Reſultate fand Brandes aus den Beobachtungen auf dem St. Gotthard und in Genf, d'Aubuiſſon aus den Beobachtungen am St. Bernhard und in Genf und neueſtens Horner aus Barometerbeobachtungen, die am Gipfel des Rigi und zu Zürch angeſtellt wurden.

83. Zu den bisher genannten einer genauen Höhenbeſtimmung mittelſt des Barometers im Wege ſtehenden Umſtänden gehört auch noch, daß die Barometerveränderungen in zwei Stationen nicht gleichzeitig eintreten und daher auch ein um ſo größerer Fehler zu befürchten iſt, je größer der horizontale Abſtand der Stationen iſt. Dieſe Veränderungen ſtehen mit dem herrſchenden Winde in Verbindung und man hat bei vielen Beobachtungen die Regel beſtätiget gefunden, daß der Barometerſtand an jenen Orten zu hoch ſteht, wo der Wind herkommt. Davon rührt es her, daß man ſelbſt an Orten von gleicher Höhe zu gleichen Zeiten ungleiche Barometerſtände beobachtet, und den Höhenunterſchied von Orten verſchieden findet, wenn man ihn aus Beobachtungen, die bei verſchiedenen Winden angeſtellt ſind, ableitet.

D. Practiſche Regeln für Höhenmeſſungen.

84. Wenn man den Höhenunterſchied zweier Stationen aus dem daſelbſt herrſchenden mittleren Barometer- und Thermometerſtand ableitet, ſo hat man keine weitere Vorſicht zu brauchen, als daß man die Höhenformeln richtig anwendet; wenn man aber blos aus zwei gleichzeitigen Beobachtungen ein genügendes Reſultat erhalten will und um dieſe anſtellen zu können, bedeutende Höhen erſteigen muß, iſt es nicht gleichgiltig, unter welchen Umſtänden die Beobachtung angeſtellt iſt, und man muß auf manche Schwierigkeit gefaßt ſeyn, von welcher der in einem Wohnhauſe oder in der Ebene Beobachtende nichts weiß. Noch mehr Umſicht iſt nothwendig, wenn ein einziger Beobachter eine Höhe finden will und daher aus den zu verſchiedenen Zeiten beobachteten Barometerſtänden auf die in derſelben Zeit herrſchenden geſchloſſen werden muß.

85. Soll der Höhenunterſchied zweier Orte durch gleichzeitige Barometerbeobachtungen ausgemittelt werden, ſo braucht man vor allem zwei genau übereinſtimmende Barometer. Von ihrer Übereinſtimmung muß man ſich vor der Reiſe auf die höhere Station und nach der Rückkehr von derſelben mit aller Sorgfalt überzeugen, und falls ſie nicht übereinſtimmen, genau ausmitteln, ob die Differenz conſtant ſey und daher mittelſt einer einfachen Addition oder Subtraction gefunden werden kann oder ob ſie veränderlich ſey. Im letzteren Falle ſteht es um die Brauchbarkeit der Barometer nicht am beſten.

86. Der Werth einer Höhenmeſſung mit dem Barometer hängt ſelbſt bei der größten Aufmerkſamkeit des Beobachters und beim Gebrauche der beſten, genau abgeglichenen Inſtrumente von dem Zuſtande der Atmoſphäre ab, bei welcher man beobachtet. Wenn der Luftdruck verhältnißmäßig gering iſt und ſtarken Schwankungen unterliegt, wenn heftige oder veränderliche Winde oder Regengüſſe herrſchen, die Temperatur ungewöhnlich hoch, ſtark veränderlich oder die Luft beſonders trocken iſt, ſoll man keine Höhenmeſſung vornehmen; ruhige Tage mit bewölktem Himmel ſind dazu am beſten brauchbar.

Es iſt auch nicht gleichgiltig, zu welcher Stunde man die Beobachtung anſtellt. Zu Mittag angeſtellte Beobachtungen geben immer die Höhe zu groß, die zur Nachtzeit vorgenommenen zu klein an. D'Aubuiſſon empfiehlt, und wie es ſcheint mit Grund, als

die zu Höhenmeſſungen tauglichſten Stunden 8 Uhr Vormittag oder 4 Uhr Nachmittag, weil da die Temperaturveränderungen am langſamſten vor ſich gehen. Ramond räth, beim Gebrauche von Mittagsbeobachtungen den Coefficienten um $\frac{1}{144}$ zu vermindern, hingegen ihn beim Gebrauche von Morgen- oder Abendbeobachtungen um $\frac{1}{77}$ zu vergrößern. Indeß beziehet ſich dieſe Vorſchrift nur auf die Pyrenäen, wo Ramond beobachtete, und es iſt ſehr wahrſcheinlich, daß anderwärts eine andere Regel eingeführt werden müſſe.

Es iſt unumgänglich nothwendig, daß man an beiden Stationen, deren Höhenunterſchied man finden will, gleichzeitig beobachte. Dieſe Stationen ſollen auch keine zu große horizontale Entfernung von einander haben, indeß iſt eine Entfernung von mehreren Meilen noch immer kein weſentliches Hinderniß, beſonders wenn die Höhendifferenz nicht zu groß iſt, und ſich zwiſchen den zwei Stationen keine höhere Mittelſtation befindet.

87. Zur Meſſung einzelner Berghöhen muß man ſich, bevor man die Reiſe antritt, mit allen zur Erreichung ſeines Zweckes nöthigen Inſtrumenten verſehen. Nebſt dem Barometer, einem damit verbundenen und einem freien Thermometer muß man ſich noch mit den zur Aufſtellung dieſer Inſtrumente nöthigen Geſtellen verſehen, um ſo mehr, als man in großen der Vegetation entrückten Höhen nicht Gelegenheit findet, die Inſtrumente an einen Baum zu hängen. Vorzüglich gute Dienſte leiſtet ein dreifüßiges Geſtell, aber auch ein rechtwinkelig gebogener eiſerner Haken ſoll nicht fehlen, und man thut gut, ſich zugleich mit einem Fernrohre zu verſehen, das ein Fadenkreuz hat und mit einer Libelle verbunden iſt.

Auf der Reiſe zum Beobachtungsorte hat man auf das Barometer die größte Aufmerkſamkeit zu verwenden und insbeſondere dafür zu ſorgen, daß es nicht Luft fange und das Queckſilber nicht über Gebühr erhitzt werde. Darum halte man es ſtets in einiger Entfernung vom Körper und wo möglich, auf der Schattenſeite, trage es mit dem oberen Ende nach vorwärts gekehrt, lege es beim etwaigen Ausruhen nicht auf feuchten Boden oder auf Felſen, die von der Sonne beſchienen werden oder die Zeichen einer ſtarken Wärmeſtrahlung an ſich tragen.

88. Iſt man an Ort und Stelle angelangt, ſo wird das Barometer aufgehängt. Iſt ein Fels, ein Baum ꝛc. in der Nähe, ſo kann dieſes mittelſt des oben erwähnten Hakens geſchehen, den man in das Holz oder in einen Felſenſprung hineintreibt, fehlt es an ſol-

chen natürlichen Stützen, ſo muß man den dazu beſtimmten Dreifuß aufrichten. Das Barometer ſoll ſtets im Schatten hängen. Bietet ein hervorragender Fels einen Schatten dar, ſo iſt dieſer zu benützen, auch wenn das Barometer an einen Baum gehängt wird, ſoll es an der Schattenſeite geſchehen. In Ermanglung deſſen benützt man den Schatten des Dreifußes, eines Begleiters, zuſammengetragener Steine ꝛc. ꝛc. oder man ſpannt einen eigens dazu beſtimmten Schirm auf. In Ermanglung jedes anderen Hilfsmittels umwickelt man das Barometer bis zu der Stelle, wo man beobachtet, mit einem zu Gebote ſtehenden, am beſten weißen Tuche. Bei ſtarkem Winde wird das Schwanken des Barometers durch Steine oder Erdſtücke gehemmt.

89. Iſt das Barometer aufgeſtellt, ſo darf man doch nicht alſogleich zum Beobachten des Luftdruckes ſchreiten, ſondern man muß abwarten, bis der Augenblick eintritt, wo man es für wahrſcheinlich halten kann, daß das am Barometer befeſtigte Thermometer die Temperatur des Queckſilbers im Barometer richtig angibt. Man betrachte darum von Zeit zu Zeit dieſes Thermometer, und beurtheile ſorgfältig, was etwa auf Rechnung der Strahlung, zufälliger Einflüſſe ꝛc. kommt. Nach einer Viertelſtunde bei Barometern, die in Metall gefaßt ſind und bei bewölktem Himmel, aber erſt nach einer halben Stunde beim Gebrauch eines Barometers in hölzerner Faſſung oder bei heiterem Himmel und Sonnenſchein kann man den Stand des Thermometers als Anzeige der Temperatur des Queckſilbers brauchen. Dieſen Stand muß man aber vor der Barometerbeobachtung kennen lernen, um nicht durch anhaltende Nähe des Körpers, wie ſie zum Behufe des Einſtellens und Beobachtens des Barometers nothwendig iſt, das Thermometer mehr als das Barometer zu afficiren und dadurch eine fehlerhafte Temperatur in Rechnung zu bringen. Iſt die Temperatur des Queckſilbers bekannt, ſo geht man zur Beobachtung der Queckſilberſäule im Barometer über, wobei man auf richtige Stellung des Auges, auf den verticalen Stand der Queckſilberſäule ꝛc. wohl zu ſehen hat. Der letztere läßt ſich manchmal nur ſchwer herſtellen, weil auf großen iſolirten Höhen häufig ſtarke Winde hauſen, ſo daß man oft ſogar genöthiget iſt, den Barometerſtand bei ſchwankender Säule aus der Excurſionsweite und dem tiefſten, beim Sinken des Queckſilbers eintretenden Stande derſelben abzunehmen. Das Thermometer, welches die Luftwärme angeben ſoll, bedarf einer

nicht minderen Sorgfalt. Es muß an einem offenen, luftigen Orte im Schatten aufgehängt werden und von dem Träger, von Felſen oder Mauern wenigſtens einige Zolle entfernt ſeyn. Es gehört Überlegung dazu, um den rechten Wärmegrad der Luft zu treffen, denn das Thermometer ſteigt und ſinkt, ſo wie die Sonne ſich zeigt oder ſich hinter Wolken verbirgt, oder Winde ihr Spiel mit mehr oder weniger Lebhaftigkeit treiben. Bei ganz ruhiger Luft erhält man ſelten die Temperatur der atmoſphäriſchen Schichten, um die es ſich handelt, ſondern die des Beobachtungsortes, und während des Windes täuſcht man ſich nicht ſelten, beſonders wenn er nicht conſtant iſt.

90. Hat man die nöthigen Beobachtungen gemacht, ſo werden ſie in das dazu beſtimmte Manuale eingetragen und denſelben noch überdieß die Höhe des unteren Queckſilbergefäßes des Barometers über den Boden beigeſetzt, um ſie bei der Höhenberechnung vom Reſultate abziehen zu können. Hat man wegen Mangel eines zweckmäßigen Platzes zum Aufſtellen der Inſtrumente, überdieß eine unter dem zu beſtimmenden Berggipfel liegende Station wählen müſſen, ſo muß man auch noch dieſe Höhe ſchätzen, oder durch Nivelliren beſtimmen, um ſie zur beobachteten Höhe addiren zu können.

91. Eine richtige Höhenbeſtimmung ſetzt zwei gleichzeitige Beobachtungen voraus, wozu demnach zwei Beobachter nothwendig ſind. Soll ein einziger Beobachter das ganze Geſchäft übernehmen, ſo muß er aus den nach gewiſſen Zwiſchenzeiten in beiden Stationen gemachten Beobachtungen auf den daſelbſt herrſchenden gleichzeitigen Druck und die Temperatur ſchließen. Zu dieſem Ende beobachtet man an der unteren Station vor der Reiſe auf die obere den Luftdruck und thut daſſelbe abermals nach der Rückkehr von derſelben, um mittelſt der zwiſchen beiden Beobachtungen verfloſſenen Zeit die ſtündliche Änderung des Luftdruckes berechnen und daraus den Barometerſtand entnehmen zu können, welcher unten in dem Augenblicke herrſchte, als man das Barometer in der oberen Station beobachtete. Kehrt man aber nicht wieder in die erſte Station zurück, ſo läßt man auf die erſte daſelbſt gemachte Beobachtung nach einer Zeit, die wenigſtens ſo lang iſt, als man braucht um den halben Weg zur oberen Station zurückzulegen, eine zweite Beobachtung folgen und benützt die dabei bemerkte Veränderung des Luftdruckes, um den Barometerſtand in der unteren Station zur Zeit der oberen Beobachtung zu berechnen.

Die Temperatur läßt ſich mit weniger Sicherheit erſchließen. Indeß meint man der Wahrheit ziemlich nahe zu kommen, wenn man ſtatt der Größe $t + t_,$ nur $2t_,$ ſetzt und dann die ſo ſich ergebende Höhe um das Quadrat ihres 500. Theiles vermehrt. Die Tafel X. enthält eine Sammlung gemeſſener Höhen. Über Höhenmeſſen mit dem Barometer ſiehe:

Ramond in Mémoire de l'Acad. de Paris. Tom. VI.

Littrow Höhenmeſſen durch das Barometer. Wien 1823.

Horner tables hypsomet. Zurich 1827.

Tableau comparatif des hauteurs des principales montagnes et lieux remarquables du globe par Perrot. Paris 1826.

Siebentes Kapitel.

Gleichgewicht der Dünſte.

A. Expanſivkraft der Dünſte.

92. Die Grundlage der ganzen Lehre vom Gleichgewichte der Dünſte und der mit ihr in Verbindung ſtehenden hygrometriſchen Fragen iſt die Spannkraft, welche die Dünſte einer Flüſſigkeit bei einer beſtimmten Temperatur haben können. Mehrere Gelehrte, wie Ziegler, Watt, Betancourt, Robiſon, Buker und Rouppe, Schmidt, Dalton, Ure, Southern, Taylor, Gay-Luſſac, Arzberger, Chriſtian ꝛc. haben hierüber Verſuche angeſtellt; aber keiner hat ſo viel Aufſehen erregt, wie Dalton. Seine Verſuche zur Ausmittlung dieſer Größe haben viele Bewunderer und viele Tadler gefunden; doch haben ſich letztere mehr an die von ihm angewendete Methode gehalten, die Reſultate aber faſt durchaus als gut anerkannt. Dieſes konnte ohne Widerſpruch geſchehen, weil es wahrſcheinlich iſt, daß er die Reſultate, welche er auf dem erſten von ihm eingeſchlagenen Wege erhielt, nach denen corrigirt hat, welche er erlangte, indem er Waſſer von beſtimmter Temperatur unter den Recipienten einer Luftpumpe brachte und die Luft ſo weit verdünnte, bis das Waſſer zum Sieden kam, in welchem Falle die Barometerprobe die Expanſivkraft der Dünſte angeben mußte.

Ich bin darum geneigt, den Dalton'ſchen Reſultaten eini-

gen Werth beizulegen, weil ſich bei der Wiederholung ſeiner Verſuche von Ure mit einem viel zweckmäßigeren Apparate Reſultate ergaben, die mit den von Dalton erhaltenen wohl zuſammenſtimmen; ohne jedoch das Geſetz für richtig zu halten, nach welchem Dalton die Spannkräfte für Temperaturen über dem Siedpunct und unter dem Eispunct des Waſſers berechnete, und zwar wieder aus dem Grunde, weil Ure durch directe Verſuche bei hohen Temperaturen Reſultate erhielt, die ſich mit den von Dalton berechneten nicht vertragen.

93. Die weſentlichen Mängel des Dalton'ſchen Verfahrens beſtehen darin, daß das Waſſer in der Röhre, welche das Barometer umgab, der großen Tiefe wegen nicht gleichförmig erwärmt werden konnte, das Thermometer aber, welches die Temperatur desſelben angeben ſollte, nicht die mittlere der ganzen Säule, ſondern nur die einer einzigen horizontalen Schichte anzeigte. Ferner mußte auch die Queckſilberſäule in verſchiedenen Schichten eine ungleiche Temperatur haben, ohne daß man die Reduction auf eine beſtimmte Normaltemperatur mit Sicherheit hätte vornehmen können.

Ure vermied dieſe zwei Fehler auf folgende Weiſe: Er bediente ſich zur Beſtimmung der Spannkräfte der Flüſſigkeiten von 24° F. bis etwas über 212° F. des in Fig. 65 abgebildeten Apparates, der einem Heberbarometer ähnlich iſt, wovon der offene Schenkel eine größere Länge hat als der geſchloſſene. Letzterer enthielt über dem Queckſilber in *a* die verdünſtete Flüſſigkeit und war mit einem unten dicht anſchließenden Recipienten umgeben, der für Temperaturen unter 212° F. Waſſer, bei höheren hingegen Öhl enthielt, das durch zwei untergeſtellte Argand'ſche Lampen zu dem gehörigen Wärmegrade gebracht wurde. Ein Thermometer mit länglichem Queckſilbergefäße, an dem ſich mittelſt einer Loupe noch $\frac{1}{10}$° F. gut abnehmen ließ, ſtand nahe an dem Theile der Röhre, welcher die Dünſte enthielt. Ihre Expanſivkraft wurde durch die Länge der Queckſilberſäule gemeſſen, die im offenen Schenkel zugegeben werden mußte, um das Queckſilber im geſchloſſenen dahin zu bringen, wo es ſtand, als der darüber befindliche Raum luft- und dunſtleer war. Die Stellen, welchen die Oberfläche des Queckſilbers in dieſem Zuſtande in beiden Armen entſprachen, waren durch Ringe von Platindraht angemerkt. Das vom Dunſt erfüllte Röhrenſtück hatte nur eine Länge von $\frac{1}{2}$3. Bei jedem Verſuche wurde die Tempera-

tur der die Röhre umgebenden Flüſſigkeit ſehr langſam erhöht und jede Temperatur etwa 5 Minuten lang unverändert erhalten.

Zu Verſuchen bei Temperaturen weit über der Siedhitze des Waſſers bediente ſich Ure des in Fig. 66 abgebildeten Apparates, deſſen Einrichtung aus der Zeichnung klar iſt; er wurde gerade ſo wie der vorherbeſchriebene behandelt.

Man ſieht leicht ein, daß der vom Dunſt eingenommene Raum bei ſeiner geringen Ausdehnung leicht bei einerlei Temperatur erhalten werden konnte und daß dadurch dem einen Mangel des Dalton'ſchen Apparates abgeholfen war; allein auch für Beſeitigung der zweiten oben angegebenen Unvollkommenheit war geſorgt, indem ſich die Wärme durch eine Flüſſigkeit abwärts ſehr langſam fortpflanzt und darum die Queckſilbermaſſe in der erwärmten Röhre nicht unter die Stelle, wo die erwärmende Flüſſigkeit aufhört, erhitzt wurde; endlich war die Meſſung an der Queckſilberſäule im offenen Schenkel vorgenommen worden.

94. Durch dieſe Mittel hat Ure die in nachfolgender Tafel enthaltenen Reſultate gefunden, denen die Dalton'ſchen beigeſetzt ſind, um über ihre Übereinſtimmung urtheilen zu können.

Temperatur nach Fahrenh.	Spannkraft der Waſſerdünſte in engliſchen Zollen		Temperatur nach Fahrenh.	Spannkraft der Waſſerdünſte in engliſchen Zollen	
	Ure	Dalton		Ure	Dalton
24°	0.170	0.150	110°	2.456	2.53
32	0.200	0.200	115	2.820	2.92
40	0.250	0.263	120	3.300	3.33
50	0.360	0.375	125	3.830	3.79
55	0 416	0.443	130	4.366	4.34
60	0.516	0.524	135	5.070	5.00
65	0.630	0.616	140	5.770	5.74
70	0.726	0.721	145	6.600	6.53
75	0.860	0.851	150	7.530	7.42
80	1.010	1.000	155	8.500	8.40
85	1.170	1.17	160	9.600	9.46
90	1.360	1.36	165	10.800	10.68
95	1.640	1.58	170	12.050	12.13
100	1 860	1.86	175	13.550	13.62
105	2.100	2.18	180	15.160	15.15

Temperatur nach Fahrenh.	Spannkraft der Waſſerdünſte in engliſchen Zollen		Temperatur nach Fahrenh.	Spannkraft der Waſſerdünſte in engliſchen Zollen	
	Ure	Dalton		Ure	Dalton
185°	16.900	17.00	271.2°	88.000	——
190	19.000	19.00	273.7	91.200	——
195	21.100	21.22	275	93.480	83.13
200	23.600	23.64	275.7	94.600	——
205	25.900	26.18	277.9	97.800	——
210	28.880	28.84	279.5	101.600	——
212	30.000	30.00	280	101.900	88.75
216.6	33.400	——	281.8	104.400	——
220	35.540	34.99	283.8	107.700	——
221.6	36.700	——	285.2	112.200	——
225	39.110	38.20	287.2	114.800	——
226.3	40.100	——	289	118.200	98.96
230	43.100	41.75	290	120.150	100.12
230.5	43.500	——	292.3	123.100	——
234.5	46.800	——	294	126.700	104.80
235	47.220	45.58	295	129.000	105.97
238.5	50.300	——	295.6	130.400	——
240	51.700	49.67	297.1	133.900	——
242	53.600	51.34	298.8	137.400	——
245	56.340	53.88	300	139.700	111.81
245.8	57.100	——	300.6	140.900	——
248.5	60.400	——	302	144.300	114.15
250	61.900	58.21	303.8	147.700	——
251.6	63.500	——	305	150.560	117.68
254.5	66.700	——	306.8	154.400	——
255	67.250	62.85	308	157.700	121.20
257.5	69.800	——	310	161.300	123.53
260	72.300	67.73	311.4	164.800	——
260.4	72.800	——	312	167.000	125.85
262.8	75.900	——			
264.9	77.900	——			
265	78.040	72.76			
267	81.900	74.79			
269	84.900	76.82			
270	86.300	77.85			

Eine genauere Betrachtung dieſer Ergebniſſe zeigt, daß ſie innerhalb des Fundamentalabſtandes des Thermometers ziemlich gut übereinſtimmen, bei Temperaturen über 212° F. bleiben die Dalton'ſchen Reſultate allerdings weit hinter den Ure'ſchen zurück, aber erſtere ſind auch nicht durch directe Verſuche erhalten, ſondern aus einem Geſetze, das bei anderen Temperaturen ſich auszuſprechen ſchien, abgeleitet. Der Mangel an Übereinſtimmung rührt alſo nicht von einem Vorſichtsfehler, ſondern von einer unrichtigen Hypotheſe her, aus welcher die Spannkräfte berechnet wurden. Demnach glaube ich die Übereinſtimmung der Reſultate dieſer von einander unabhängig angeſtellten Verſuche, wovon die letzteren mit Apparaten angeſtellt wurden, an denen nichts zu tadeln iſt, als hinreichenden Grund für die Richtigkeit derſelben anſehen zu können. Wenn auch neuere Experimentatoren andere Spannkräfte erhielten, ſo haben ſie doch keinen ſo zu ihren Gunſten ſprechenden Controlleur, wie die Dalton'ſchen an Ure fanden und ihre Reſultate können den Dalton'ſchen nicht wohl vorgezogen werden.

95. Es wäre ſehr zu wünſchen, daß man das Geſetz kennte, nach welchem die Spannkräfte des Waſſers bei ſteigenden Temperaturen wachſen. Mehrere ausgezeichnete Gelehrte haben ſich mit der Beſtimmung dieſes Geſetzes abgegeben, aber keinem iſt es gelungen, dieſes aus der Natur der Dunſtbildung abzuleiten (wenn man Schitko ausnimmt, deſſen Geſetz ſich nur auf Temperaturen über dem Siedpunct des Waſſers bezieht und von dem erſt in der Wärmelehre die Rede ſeyn kann) und ſo lange dieſes nicht der Fall iſt, hat man für die Richtigkeit des mathematiſchen Ausdruckes der Spannkräfte keinen anderen Bürgen, als die größere oder geringere Übereinſtimmung mit den Ergebniſſen der Verſuche; da aber dieſe immer von Beobachtungsfehlern behaftet ſind, die das wahre Geſetz ſtören, ſo wird man nie mit Sicherheit urtheilen können, ob die Formel das Naturgeſetz darſtelle oder nicht, wenn ſie auch den empiriſch gefundenen Spannkräften ziemlich gut entſpricht. Gegenwärtig kennt man ſogar mehrere mathematiſche Ausdrücke für die Spannkräfte der Waſſerdünſte, welche die Erfahrungsreſultate gleich gut darſtellen, und doch kann nur einer der Natur ganz entſprechen. Unter dieſen Umſtänden bleibt nichts übrig, als jene Formel zu wählen, welche unmittelbar aus den Verſuchen abgeleitet iſt, und zu warten, bis jemand den glücklichen Fund macht, um ſolche aus der Natur

der Dunſtbildung deduciren zu können. Darum wähle ich vor der Hand die folgende Formel:

Stellt man die Ergebniſſe der Dalton'ſchen Verſuche graphiſch dar, indem man die Expanſivkraft als Ordinaten, die ihnen entſprechenden Temperaturen aber als Abſciſſen annimmt, ſo erhält man durch Verbindung der Abſciſſenenden eine Curve, welche mit einer logarithmiſchen Linie viele Ähnlichkeit hat, wie Fig. 67 zeigt; doch überzeugt man ſich bald, daß ſie keine gemeine logarithmiſche Linie ſeyn kann, indem die Spannkräfte nicht der Gleichung dieſer Curve ($y = a^x$) entſprechen. Die einfachſte Hypotheſe über die Natur dieſer krummen Linie iſt offenbar die, nach welcher x nicht die Temperatur ſelbſt, ſondern eine Function $f(t)$ der Temperatur iſt, ſo daß die Spannkraft y durch die Gleichung

$$y = a^{f(t)}$$

ausgedrückt wird. Man ſetze nun

$$f(t) = A + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \ldots\ldots$$

wo α, β, γ, beſtändige Größen ſind, und man hat

$$y = a^{A + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \ldots\ldots}$$

daher

$$\log y = (A + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \ldots\ldots) \log a$$

oder weil $\log a = 1$ iſt, und man bei der dritten Potenz von t ſtehen bleiben kann,

$$\log y = A + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3.$$

Für $t = 0$ iſt $\log y = A$. Da dieſe Größe A von ſo großem Einfluſſe auf die Spannkraft bei den übrigen Temperaturen iſt, ſo muß ſie ſehr genau beſtimmt ſeyn, und man muß jenen Punct der Thermometerſcale als Nullpunct anſehen, für welchen die Spannkraft mit voller Schärfe bekannt iſt. Dieſes iſt mit dem Siedpuncte der Fall, bei welchem die Spannkraft der Dünſte dem herrſchenden Luftdrucke gleich kommt. Bezeichnet daher A den log der Spannkräfte für dieſen Punct, ſo gibt t den Abſtand der betreffenden Temperaturen vom Siedpunct an. Da bei Dalton's Verſuchen ein Thermometer gebraucht wurde, deſſen Siedpunct bei 30 engl. Z. Luftdruck beſtimmt war; und

$\log 30 = 1.4771213$ iſt, ſo hat man

$$\log y = 1.4771213 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3.$$

Zur Beſtimmung von α, β, γ dienen die bei den Temperaturen 75°, 50°, 25° gemachten Beobachtungen, für welche man erhält

$$t = 25 \quad e = 11.250$$
$$t = 50 \quad e = 3.500$$
$$t = 75 \quad e = 0.910$$

woraus man findet:

$$-0.4259687 = 25\alpha + 625\beta + 15625\gamma$$
$$-0.9330519 = 50a + 2500b + 125000\gamma$$
$$-1.5180799 = 75a + 5625b + 421875\gamma$$

und hieraus

$$\alpha = -0.0153741955o$$
$$\beta = -0.00006742735$$
$$\gamma = +0.0000000338\text{1.}$$

Es erübriget nun noch, die engliſchen Maße auf franzöſiſche und alle Reſultate auf ein Thermometer zu reduciren, deſſen Siedpunct nicht bei 30 engl. Z. $= 0^{m}.76199$, ſondern bei $0^{m}.76$ d. h. bei einem nahe um 2^{mm} geringeren Druck beſtimmt wurde, wie jene ſind, deren man ſich gewöhnlich bedient. Eine Differenz von 2^{mm} im Luftdrucke bewirkt aber eine Verrückung des Siedpunctes um $\frac{2}{27}$° C; ſtimmen $t°$ des von Dalton gebrauchten Thermometers mit $\tau°$ des unſerigen überein, ſo hat man

$$t = m + n\tau$$

wobei m und n zwei conſtante Größen ſind, welche den Bedingungen entſprechen, daß für $\tau = -\frac{2}{27}$, $t = 0$ und für $\tau = 100$, $t = 100$ iſt, welches der Fall wird, wenn

$$m - \tfrac{2}{27}n = 0, \quad 100 = m + 100n$$

oder

$$m = \frac{2}{27} \cdot \frac{100}{100 + \frac{2}{27}}, \quad n = \frac{100}{100 + \frac{2}{27}}$$

und daher

$$t = \tfrac{2}{27} + \tau\left(1 - \tfrac{1}{1350}\right).$$

Nennt man nun für das neue Thermometer und für die neuen Maße das, was vorhin y hieß, Y, ſo erhält man

$$\log Y = \log 0^{m}.76199 - 0.0011291995\text{7} - 0.0153727875\text{7}\,\tau - 0.0000673199\text{5}\,\tau^2 + 0.000000033\text{74}\,\tau^3$$

oder

$$\log Y = -\ 0.1737663 - 1 + A\tau + B\tau^2 + C\tau^3$$

wobei $A = -\ 0.01537278757$, $\log A = 0.1867526 - 2$
$B = -\ 0.0000673 1995$, $\log B = 0.8281441 - 5$
$C = \ 0.0000000 3374$, $\log C = 0.5281451 - 8$

Nach dieſer Formel ſind die Spannkräfte der Tafel XI a bis 100° C berechnet. Die Spannkräfte von 100°—224°.2 wurden von den franzöſiſchen Akademikern neueſtens durch Beobachtung gefunden, die von 224°.2 bis 265°.89 mittelſt der Formel $e = (1 + 0.7153\,t)^5$ berechnet.

96. Die Expanſivkraft der Dünſte anderer Flüſſigkeiten läßt ſich nicht, wie Dalton meinte, aus jener der Waſſerdünſte erkennen, ſondern es ſind dazu eigene Verſuche nöthig. Ure hat dergleichen mit der vorhin beſchriebenen Vorrichtung angeſtellt, und ich laſſe ſie hier folgen, mit der einzigen Abänderung, daß ich die Expanſivkräfte in Millimetern und die Temperatur durch Celſiſche Wärmegrade ausgedrückt habe. Übrigens ſind auch dieſe Verſuche nicht die einzigen, welche angeſtellt wurden, ſondern es haben mehrere ausgezeichnete Phyſiker, wie Mayer, Muncke, Dalton, Watt, Robiſon ꝛc. mit dieſem Gegenſtande ſich beſchäftiget, ich habe aber darum die Ure'ſchen gewählt, weil ſie die umfaſſendſten ſind und auch an Genauigkeit den anderen nicht nachſtehen. Die Tafel XI b enthält ſie.

97. Eine Flüſſigkeit, die mit irgend einem Stoffe in chemiſcher Verbindung ſteht, gibt Dünſte von geringerer Spannkraft, als im freien Zuſtande, aber es bleibt das Verhältniß der Spannkräfte für Dünſte aus reinem Waſſer und aus dem in einer chemiſchen Verbindung ſtehenden für verſchiedene Temperaturen daſſelbe. Gay-Luſſac unterſuchte die Spannkraft der Dünſte des Waſſers, das mit verſchiedenen Subſtanzen chemiſch verbunden war, und fand folgende relative Spannkräfte.

Name der Flüſſigkeit	Specifiſches Gewicht bei 10° C	Relative Spannkraft
Reines Waſſer	1.000	100.0
Kochſalzlöſung	1.096	90.6
——	1.163	82.3
——	1.205	75.3
Salſaurer Kalk	1.274	66.0
——	1.343	50.5
——	1.397	37.6
Schwefelſäure	1.493	18.1
——	1.541	12.2
——	1.702	2.4
——	1.848	0.0

Man ſieht hieraus, daß Schwefelſäure vom ſpecifiſchen Gewichte 1.848 bei 10° C keine Dünſte von wahrnehmbarer Spannung gibt. Dasſelbe fand Prinſep für Schwefelſäure vom ſpecifiſchen Gewichte 1.840 noch bei 25° C.

B. Dichte und ſpecifiſches Gewicht der Dünſte.

98. Bei der Ausmittlung der Dichte und des ſpecifiſchen Gewichtes der Dünſte kommt es darauf an, das Volumen der Dünſte, die eine Maſſe von bekanntem Gewichte gibt, oder umgekehrt, das Gewicht eines gewiſſen Volumens Dunſt zu beſtimmen. Wie Gay-Luſſac ſeine Verſuche hierüber anſtellte, iſt aus meiner Naturlehre klar, es iſt aber noch eine nähere Erörterung ſeines Verfahrens und der dazu nöthigen Rechnungen übrig.

Das Gay-Luſſac'ſche Verfahren führt offenbar nur dann zu einem richtigen Reſultate, wenn alles in den Recipienten gebrachte Waſſer in Dunſt übergegangen iſt; man muß ſich daher auch überzeugen können, daß dieſes wirklich geſchah. Zu dieſem Behufe muß man die Spannkräfte der Waſſerdünſte im Recipienten bei 100° C mit der vergleichen, welche ihnen bei dieſer Temperatur zukommen kann. Iſt die beobachtete Spannkraft kleiner als die größte bei dieſer Temperatur mögliche, ſo iſt gewiß alles Waſſer in Dunſt verwandelt; man hat daher ſtets nur ſo viel Waſſer in den Recipienten zu bringen, oder ſeinen Rauminhalt ſo lang zu vergrößern,

bis die Spannkraft der Dünſte unter dem der herrſchenden Temperatur entſprechenden Maximum ſteht.

Hat man ſich in dieſer Hinſicht Genüge geleiſtet, ſo bleiben noch die durch Rechnung zu veranſtaltenden Correctionen übrig. Um zu ihrer Kenntniß zu gelangen ſey p das Gewicht der in Dunſt verwandelten Flüſſigkeit, n die Anzahl der Abtheilungen am Recipienten, die der Dunſt einnimmt, in Theilen eines Liters, und v die Größe eines Theiles, mithin nv das Volumen des Dunſtes, ohne Rückſicht auf die Ausdehnung des gläſernen Recipienten durch die Wärme. Dehnt ſich dieſer für jeden Wärmegrad um die Größe c aus (wo c für gemeines Glas gleich 0.0000262716 iſt), ſo hat dieſes Volumem bei t° C die Größe $nv(1+ct)$ und das Volumen eines Grammes Dunſt iſt

$$\frac{(1+ct)\,nv}{p}.$$

Der Dunſt ſteht aber nicht unter dem vollen Luftdrucke B, ſondern unter dem Drucke $B-b$, wenn b die Länge der im Recipienten befindlichen Queckſilberſäule über der Oberfläche der äußeren Flüſſigkeit bedeutet. Demnach beträgt das Volumen v des Dunſtes, den ein Gramm Waſſer unter dem Normalluftdrucke von $0^m.76$ gibt

$$\frac{nv(1+ct)\,(B-b)}{p\;0.76}.$$

Vergleicht man dieſes Gewicht mit demjenigen, welches atmoſphäriſche Luft bei gleichem Volumen, bei derſelben Temperatur und demſelben Luftdrucke einnimmt, ſo erhält man das Verhältniß ihrer ſpecifiſchen Gewichte.

Bei einem ſolchen Verſuche war die Waſſermenge 0.600 G. und gab bei 100° C Dunſt, der 220 Abtheilungen des Recipienten erfüllte, wovon jede 0.00499316 Liter hielt. Das Queckſilber im Recipienten ſtand um 52^{mm} höher als außerhalb desſelben und der Luftdruck war 755.5^{mm}. Reducirt man dieſe beiden Queckſilberſäulen, wovon die letztere die Temperatur von 15° C hatte, auf 0° C, ſo hat man

für die erſte $52\left(1-\frac{100}{5550}\right) = 51.06$

für die zweite $755.5\left(1-\frac{15}{5550}\right) = 753.46.$

Da ferner $p = 0.600$, $n = 220$, $v = 0.00499316$, $B = 753.47$, $b = 51.07$, mithin $B - b = 702.40$ iſt, ſo wird

$$v = 1.6964 \text{ Liter}$$

und ein Liter wiegt $\frac{1}{16964}$ Gramme.

Ein Liter atmoſphäriſche Luft wiegt bei 100° C und unter dem Luftdruck von $0^{m}.76$ $\frac{1}{1.0577}$ Gr. Daher iſt das Verhältniß zwiſchen der Dichte des Waſſerdunſtes und der atmoſphäriſchen Luft

$$= \frac{10577}{16964} \text{ oder nahe } \frac{10}{16}.$$

99. Außer dieſen Verſuchen über die Dichte des Waſſerdunſtes, die mir die genaueſten zu ſeyn ſcheinen, ſind noch mehrere andere angeſtellt worden. Folgende Tabelle enthält die dabei gewonnenen Reſultate:

Beobachter	Temperatur	Dichte
Anderſon . .	7.56 R	0.000620406
	12	0.000617908
	20	0.000603067
	22.67	0.000593976
Clemens und Deſormes	10	0.000514645
Davy . . .	30.22	0.000751103
Gay-Luſſac .	0	0.000589489
Mayer . . .	15	0.000748522
Muncke . .	30	0.000616035
	34	0.000635842
	35	0.000582246
Sauſſure . .	15.16	0.000662457
	4.75	0.000692108
	6.18	0.000644430
Schmidt . .	80	0.000705072
	17.5	0.000882102

100. Dumas (Annales de Chemie etc. Tom. 33. p. 337) hat in der neueſten Zeit auf einem anderen bei weitem nicht ſo ſicheren Wege die Dichten und ſpecifiſchen Gewichte mehrerer Dunſtarten unterſucht. Er nimmt eine Glaskugel von bekanntem Inhalt, bringt die Subſtanz hinein, deren Dünſte er beſtimmen will, zieht die

Öffnung der Kugel in ein Haarröhrchen aus und bringt ſie in ein Bad von Waſſer, Schwefelſäure oder einem leicht ſchmelzenden Metallgemiſche, verwandelt dann den Körper in Dunſt, indem er die Temperatur des Bades weit über den Siedpunct der zu verdünſtenden Maſſe erhitzt, ſchmelzt dann bei einer genau bekannten Temperatur und bei gegebenem Luftdrucke das Haarröhrchen zu, läßt das Ganze erkalten, wägt es ab, öffnet es unter Waſſer, beſtimmt den Raum, den dieſes einnimmt, genau und erlangt hierdurch die Kenntniß des Volumens des Dunſtes bei der Temperatur, wo man den Ballon zuſchmolz. Da durch Vergleichung des Gewichtes des zugeſchmolzenen Ballons nach der Operation mit dem Gewichte des leeren Gefäßes auch das Gewicht der Dunſtmaſſe bekannt iſt, ſo hat man alles, was zur Beſtimmung der Dichte und des ſpecifiſchen Gewichtes nothwendig iſt.

101. Iſt die Dichte oder das ſpecifiſche Gewicht eines Dunſtes bei irgend einer Temperatur bekannt, ſo laſſen ſich daraus leicht dieſelben Größen für 0° C berechnen, weil man weiß, daß ſich Dünſte bei einer Änderung der Temperatur ſo ausdehnen und zuſammenziehen, wie eine beſtändige Gasart. Heißt demnach das Gewicht eines Liters Dunſt bei 100° C P_{100} ſo iſt das Gewicht P_0 unter demſelben Volumen bei 0° gegeben durch

$$P_0 = P_{100} \cdot 1,375.$$

Man darf hierbei nicht vergeſſen, daß das Gewichtsverhältniß einer Luft- und Dunſtmaſſe, welches bei einer beſtimmten Temperatur gefunden wurde, für jede andere Temperatur gilt, wenn nur beide einerlei Temperatur haben.

Durch die hier angegebenen Verſuche und Berechnungen hat man die Dichten und ſpecifiſchen Gewichte kennen gelernt, welche die Tafel III. b enthält.

102. Wiewohl man bei der Beſtimmung des ſpecifiſchen Gewichtes der Dünſte dasſelbe meiſtens für höhere Temperaturen unmittelbar findet und das der Temperatur 0° C entſprechende erſt daraus berechnet; ſo legt man doch letzteres allen weiteren Berechnungen der ſpecifiſchen Gewichte für andere Temperaturen zum Grunde. Heißt P_0 das ſpecifiſche Gewicht des Dunſtes bei 0° C, ſo iſt ſein ſpecifiſches Gewicht P_t bei der Temperatur t gegeben durch

$$P_t = \frac{P_0}{1 + 0.00375\, t}$$

oder wenn π das Gewicht eines Liters atmoſphäriſche Luft bei 0° C und 0m.76 Luftdruck bedeutet

$$P_t = \frac{\frac{10}{16}\pi}{1 + 0.00375\,t}$$

vorausgeſetzt, daß der Dunſt unter dem Drucke 0m.76 ſteht. Allein Dünſte ſtehen bekanntlich nur unter ihrem eigenen Drucke. Heißt ihre Expanſivkraft e, ſo ſtellt dieſe zugleich den Druck vor, dem ſie unterſtehen, und es iſt

$$P_t = \frac{\frac{10}{16}\pi e}{0.76\,(1 + 0.00375\,t)},$$

oder wenn man ihre Dichte s_t nennt

$$s_t = \frac{\frac{10}{16}e}{0.76\,(1 + 0.00375\,t)}.$$

Die Tafel (XI. a) enthält die größte Dichte und das ſpeciſiſche Gewicht, welches Waſſerdünſte innerhalb der Temperatur — 20° und 40° C haben.

C. Anwendung des Vorhergehenden.

103. Es iſt bekannt, daß der Dunſt in der Luft dieſelbe Expanſivkraft beibehält, die er im luftleeren Raume hat. Darum geben obige Zahlen auch zugleich die größte Dichte des Dunſtes in der Luft und die Dunſtmenge an, die ein Liter, auch wenn er Luft enthält, faſſen kann, mithin auch die Dunſtmenge, die er wirklich enthält, wenn er mit Dünſten geſättiget iſt. Es laſſen ſich aber aus dieſem Satze noch andere für die Ausübung höchſt wichtige Wahrheiten ableiten.

Man kann nach dieſem Grundſatze die Änderung im Volumen einer Luftart berechnen, die vorgeht, wenn Dünſte von bekannter Spannkraft der Luft beigemengt werden, entweder dadurch, daß man tropfbare Flüſſigkeit mit der Luft in Berührung bringt, und ſie verdünſten läßt, oder der Luft die Dünſte geradeweges beimengt.

Geſetzt es ſtehe ein Luftvolumen v unter dem Drucke b und es werden Dünſte in dasſelbe gebracht, deren Expanſivkraft in dieſem Raume $= e$ iſt. Dadurch wird erſteres Volumen vergrößert und geht in v_1 über, ſo daß man hat:

$$v : v_1 = b - e : b$$

oder

$$v_1 = \frac{b}{b-e} v \text{. und } v_1 - v = \frac{e}{b-e} \cdot v.$$

Schätzt man die Vergrößerung des Rauminhaltes in Theilen des urſprünglichen Volumens, ſo iſt $v = 1$, und man erhält

$$v_1 = \frac{b}{b-e} \text{ und } v_1 - v = \frac{e}{b-e}.$$

Wird der urſprünglich trockene Raum mit Dünſten geſättiget, ſo iſt e die jeder Temperatur entſprechende größte Spannkraft, welche man aus der Tafel (XI) entnehmen kann. Für Waſſerdünſte enthält die Tafel XII die Vergrößeruug des Volumens dieſer Art von — 20° bis + 40° C, vorausgeſetzt, daß $b = 0^m.76$ und $v = 1$ ſey, woraus man leicht die Vergrößerung des Volumens für jeden anderen Luftdruck und jeden Werth von v berechnen kann.

104. Ändert ſich während oder nach der Beimiſchung der Dünſte zugleich auch die Temperatur und der Luftdruck, ſo wird auch dadurch das Volumen eine beſondere, von der vorhergehenden verſchiedene Änderung erfahren. Es ſey die erſtere Temperatur t und ſie gehe in t_1 über, bei erſterer haben die Dünſte die Spannkraft e, bei letzterer e_1, wo e_1 aus der Tafel der Expanſivkräfte zu entnehmen iſt, wenn Flüſſigkeit genug da iſt, oder in Ermangelung dieſer nach dem Geſetze der Ausdehnung der Dünſte durch die Wärme ſich berechnen läßt, ferner gehe der erſte Druck b über in b_1. Iſt v_1 das Volumen der Luft nach der Vermengung mit Dunſt bei der Temperatur t, ſo wird daraus beim Übergange des Druckes $b-e$ in $b_1 - e_1$ das Volumen v_2, und es iſt

$$v_2 = \frac{b-e}{b_1 - e_1} \cdot v_1.$$

Allein wegen der Temperaturveränderung geht v_1 in

$$\frac{1 + 0.00375\,t_1}{1 + 0.00375\,t} \cdot v_1$$

über, und es wird das Volumen, um das es ſich handelt,

$$\frac{b-e}{b_1 - e_1} \cdot \frac{1 + 0.00375\,t_1}{1 + 0.00375\,t} \cdot v_1.$$

Setzt man aber für v_1 den Werth aus dem Vorhergehenden, ſo erhält man

$$\frac{b}{b_{1}-e_{1}}\cdot\frac{1+0.00375\,t_{1}}{1+0.00375\,t}\cdot v$$

ſtatt deſſen man, wenn t nicht gar viel von 0 abweicht, ſetzen kann

$$\frac{b}{b_{1}-e_{1}}\cdot\left[1+0.00375\,(t_{1}-t)\right]v.$$

105. In einer mit Dünſten beladenen Luft kann auch mit der Zeit eine Änderung des Volumens dadurch vorgehen, daß ein Theil der Dünſte abſorbirt wird, und es handelt ſich, falls eine Änderung der Temperatur eingetreten iſt, darum zu erfahren, ob die eingetretene Raumveränderung der letzteren Urſache allein, oder dieſer und zugleich einer Abſorption zugeſchrieben werden muß. Dieſes läßt ſich nach der vorhergehenden Formel beurtheilen. Stimmt die vorgegangene Volumenänderung mit dem Werthe überein, den die Formel gibt, ſo hat gewiß keine Abſorption der Dünſte Statt gefunden; nur wenn die Formel einen größeren Werth gibt, als der wirklich beobachtete iſt, und die Differenz außerhalb der Grenzen der wahrſcheinlichen Beobachtungsfehler liegt, muß eine Abſorption eingetreten ſeyn.

106. In einem nicht ausdehnbaren Gefäße kann ein Zuſatz von Dunſt keine Änderung des Volumens hervorbringen; dafür wird dadurch der Druck auf das Gefäß vergrößert.

Geſetzt es befinde ſich in einem ſolchen Gefäße mit Dünſten vermengte Luft und ein darin befindliches Barometer zeige den Druck b und ein Thermometer die Temperatur t an. Iſt e die Expanſivkraft der Dünſte in dieſem Raume, ſo iſt $b-e$ der von der trockenen Luft herrührende Druck auf das Queckſilber des Barometers, mithin der Ausdruck ihrer Expanſivkraft. Geht nun die Temperatur in t_{1} über, ſo wird der durch die Spannkraft der Luft bewirkte Druck

$$\frac{1+0.00375\,t_{1}}{1+0.00375\,t}\cdot(b-e)$$

und dieſer um die Spannkraft e_{1} vermehrt, welche die Dünſte bei einer Temperatur t_{1} haben, gibt die Expanſivkraft, welche durch die Queckſilberſäule des Barometers, nämlich durch b_{1} gemeſſen wird. Es iſt demnach

$$\frac{1+0.00375\,t_{1}}{1+0.00375\,t}\cdot(b-e)+e_{1}=b_{1}.$$

Dieſe Formel iſt von Nutzen, wenn man wiſſen will, ob nicht in einem verſchloſſenen Gefäße Dunſt abſorbirt worden iſt, indem man ſie wie die vorhergehende anwendet.

D. Hygrometer.

107. Die Hauptaufgabe der Hygrometrie läuft immer darauf hinaus, die Dunſtmenge zu beſtimmen, die in einem gegebenen Raume enthalten iſt. Dieſe iſt aber bald beſtimmt, wenn man die Expanſivkraft der Dünſte in dieſem Raume kennt. Iſt der Raum mit Dunſt geſättiget, ſo gibt die Tafel XI dieſe Expanſivkraft an; wenn dieſes aber nicht der Fall iſt, ſo muß man eigene Inſtrumente haben, die zur Kenntniß dieſer Größe führen, und dieſes ſind die ſogenannten Hygrometer.

Kein Hygrometer gibt die Expanſivkraft der in einem beſtimmten Raume enthaltenen Dünſte unmittelbar an, ſondern alle liefern nur ein Factum, welches mit der Expanſivkraft zuſammenhängt und aus dem man mit mehr oder weniger Sicherheit die eigentliche Aufgabe durch Rechnung auflöſen kann. Hier ſollen die vorzüglichſten Hygrometer näher betrachtet und mit einander verglichen werden.

108. Unter dem Namen Schwefelätherhygrometer verſtehe ich das zuerſt von Daniell ausgeführte Inſtrument zur Beſtimmung der Feuchtigkeit, welches darum auch das Daniell'ſche heißt, und das von Körner zum hygrometriſchen Gebrauche eingerichtete Thermometer. Der Grundſatz, auf welchem dieſes Hygrometer beruht, wurde zuerſt von den Florentiner-Akademikern angewendet, indem ſie einen hohlen Kegel, deſſen Spitze nach abwärts gekehrt war, mit einer erkältenden Subſtanz füllten, und die Waſſermenge beſtimmten, die ſich als Beſchlag an die Wände des Kegels abſetzte und ſich in einem untergeſtellten Gefäße ſammelte; Fontana ließ eine genau abgewogene, reine, gut polirte Glasſcheibe kalt werden und beſtimmte ihre Gewichtszunahme, welche ſie durch den daran abgeſetzten wäſſerigen Beſchlag erhielt, wenn ſie einige Zeit der Luft ausgeſetzt war. Le Roi beſtimmte zuerſt die Feuchtigkeitsmenge aus der Temperatur eines Gefäßes, in dem Augenblicke, wo es zu beſchlagen anfing; Dalton hat dieſes Verfahren erneuert; Daniell wendete zur Erkältung eines ſolchen Gefäßes Schwefeläther an, und gab dem Gefäße auch ſelbſt eine zweckmäßige Geſtalt, die ſeines Hygrometers; allein Fiſcher in

Berlin (deſſen mechaniſche Naturlehre. Berlin 1819. S. 466) hat zuerſt darauf aufmerkſam gemacht, daß ſich dem erkaltenden Leroi'ſchen Gefäße bequem eine durch Schwefeläther erkältete Thermometerkugel ſubſtituiren laſſe. Körner in Jena hat endlich nach Soldners Idee das Thermometer zu dieſem Gebrauche bequem eingerichtet und dadurch dieſem Inſtrumente den höchſten Grad der Einfachheit ertheilt, deſſen es fähig zu ſeyn ſcheint.

109. Wenn man ein Daniell'ſches Hygrometer verfertigen will, nehme man eine 12 Z. lange, 3 L. weite Glasröhre und blaſe an einem Ende eine etwa 1 Z. im Durchmeſſer haltende Kugel daran. In dieſe Kugel ſchiebe man ein kleines, am beſten mit einem cylindriſchen Gefäße verſehenes Queckſilberthermometer, deſſen Scale wenigſtens bis zum Siedpunct des Schwefeläthers (35°.6 *C*) reicht und mittelſt einer an der Rückwand der Scale angebrachten Feder in der Lage erhalten wird, daß das Queckſilbergefäß auf dem Boden der Kugel ruht. Weil dieſes Thermometer in Schwefelätherdünſten ſtehen muß, ſo darf man nicht, wie es ſonſt zu geſchehen pflegt, um die Grade beſſer ſichtbar zu machen, dieſelben mit Druckſchwärze oder aufgelöſtem ſchwarzem Siegellack einlaſſen, weil dieſe Subſtanzen vom Äther aufgelöſet werden, ſondern man thut am beſten, wenn man dazu feinen Tuſch mit Leimwaſſer abgerieben anwendet.

Befindet ſich das Thermometer in der Röhre, ſo biegt man ſie in einer Stichflamme 1 Zoll über dem Thermometer in einen rechten Winkel, blaſet dann am anderen Ende wieder eine 1 Zoll weite Kugel an, die ſich in ein ſehr enges dünnes Röhrchen endet und biegt ſie dann zum zweiten Male etwa 5 Z. vom erſten Bug und ſchreitet hierauf zum Einfüllen des Schwefeläthers. Zu dieſem Ende hält man die Kugel mit dem Thermometer über glühende Kohlen, oder über eine Weingeiſtflamme, damit etwas Luft herausgetrieben werde, beachtet dabei aber ſtets den Stand des inneren Thermometers, um die Temperatur nicht über die Gebühr zu ſteigern und das Thermometer zerſpringen zu machen, und tauchet hierauf das offene Röhrchen in Schwefeläther. Dieſer dringt in die Kugel, ſobald ſich die Luft abgekühlt hat und füllt ſie bald ganz an. Durch Neigen der Röhre kann man leicht die ganze Äthermaſſe in die andere Kugel, worin ſich das Thermometer befindet, bringen. Iſt dieſe bis zu $\frac{2}{3}$ ihres Inhaltes voll, ſo ſchreite man zum Luftleermachen des Inſtrumentes. Zu dieſem Ende hält man die Kugel mit dem Äther

wieder über eine Weingeiſtflamme und zwar in der Nähe einer wohl unterhaltenen Stichflamme. Der Äther kommt bald zum Sieden und vertreibt die Luft aus dem Apparate. Man erkennt daraus, ob die Luft vertrieben iſt, wenn der herausſtrömende Dampf angezündet werden kann. Nimmt der Äther nur mehr die Hälfte der Kugel ein, und ſtrömt der Dampf in Maſſe heraus, ſo hält man eilig die offene Spitze in die Stichflamme, damit ſie zuſchmelze. Es iſt rathſam, gleich nach dem Abkühlen des Apparates die leere Kugel mit Muſſelin zu überziehen und mit dem Inſtrumente alſogleich einen Verſuch zu machen, um zu ſehen, ob man das Beſchlagen der Kugel zuwege bringen kann. Geht dieſes nicht an, ſo iſt das Inſtrument entweder nicht luftleer, oder der darin befindliche Äther iſt durch Kochen zu ſehr geſchwächt worden. Dann muß man die Spitze wieder öffnen, neuen ſtarken Äther einfüllen und das ganze Verfahren wiederholen. Erſt wenn man das Inſtrument bei einer vorgenommenen Probe wirkſam findet, kann man die Spitze an der Kugel beſſer und auf eine dauerhaftere Art zuſchmelzen.

An den in England verfertigten Inſtrumenten dieſer Art macht man die Kugel, worin ſich das Thermometer befindet, an ihrem unteren Theile oft aus ſchwarzem Glaſe, um den Beſchlag beſſer zu ſehen; Greiner in Berlin verſieht ſie an der Stelle, wo der Dunſtbeſchlag eintritt, mit einer vergoldeten Zone; es läßt ſich aber auch bei einer weißen Kugel gut beobachten, wiewohl Greiner's Einrichtung einen großen Vortheil gewährt. Daniell hat ein ſolches Hygrometer mit einer Platinkugel verfertigen laſſen (Meteorol. essays p. 146) und davon wegen der größeren Wärmeleitungsfähigkeit des Metalles eine beſondere Empfindlichkeit erwartet; er fand ſich aber in ſeiner Hoffnung getäuſcht, indem dieſes koſtſpielige Inſtrument nicht mehr leiſtete als ein ganz gläſernes.

110. Daniell's Hygrometer läßt ſich bei ſeiner gewöhnlichen Einrichtung nur für den freien Raum brauchen, man kann es aber mittelſt einer einfachen Zugabe zur Prüfung abgeſonderter Räume brauchbar machen. Man verbindet es nämlich mit einem Recipienten ſo, daß die Kugel mit dem Thermometer innerhalb desſelben ſteht, während die mit Äther zu betröpfelnde außerhalb desſelben bleibt. Fig. 68 ſtellt dieſe Einrichtung vor.

111. Daniell's Hygrometer iſt ein etwas koſtſpieliges, gebrechliches, ſchwer zu transportirendes Inſtrument; es braucht zum Beſchlagen ſtarken Schwefeläther und kann doch kein beſonders ge-

naues Reſultat geben, weil die Temperatur des Schwefeläthers ſtets etwas geringer ſeyn wird, als die der Glaskugel, und doch beim Gebrauche vorausgeſetzt wird, daß beide eine gleiche Temperatur haben. Darum verdient auch Körners Inſtrument vor dem Daniell'ſchen bei weitem den Vorzug. Die Einwendung Daniell's, daß bei jenem nur die obere Hälfte der Kugel mit verdünſtendem Äther bedeckt iſt, und darum der Bethauungspunct nicht richtig angegeben werde, iſt nicht von großem Belange, indem das obere und kältere Queckſilber in der Kugel ſinken, und ſo die Metallſchale, an der ſich der Beſchlag abſetzt, nahe eine Temperatur annehmen muß, wie ſie das Thermometer angibt. Nach meinen Erfahrungen gereicht auch der Umſtand dem Körner'ſchen Hygrometer nicht zum Nachtheile, daß dieſe Kugel mit Metall bedeckt iſt, das ſich wegen ſeiner Wärmeleitungsfähigkeit ſchnell allenthalben beſchlägt, während bei Glas die Beſchlagung an einer ſchmalen Zone eintritt. Wer dieſen Umſtand ſcheut, kann Bohnenbergers Rath befolgen und einen beiderſeits offenen von außen vergoldeten Glascylinder, deſſen Höhe ſeinen Durchmeſſer $1\frac{1}{2}$mal übertrifft, über die Thermometerkugel ſtecken, nachdem ſie zur Verhütung eines Unfalles einige Male mit Muſſelin überzogen worden.

112. Körner verfertiget ſein Hygrometer in der Regel mit aufwärts gebogener Kugel; Jones hat es in England mit der gewöhnlichen geraden Röhre eingerichtet, ich habe es aber lange, bevor dieſes Inſtrument in England bekannt wurde, auf dieſe Art eingerichtet, weil es leichter in ein Futteral eingepaßt und ſicherer transportirt werden kann. Man thut ſehr gut, wenn man am unteren Theile der Kugel ein kleines Zäpfchen vorſtehen läßt und das Schälchen an der unteren Stelle durchlöchert, damit jenes Zäpfchen durch die Öffnung gehe und ſich das Schälchen wohl an die Kugel anlege. Das Zäpfchen dient zur Ableitung des zu reichlich zugegebenen Äthers. Übrigens iſt es weſentlich, daß die Schale aus dünnem Metalle verfertiget ſey und einen dauerhaften Glanz habe. Darum wird ſie gewöhnlich vergoldet. Ich ziehe die ſilbernen, in- und auswendig vergoldeten Schälchen allen übrigen vor. Es iſt grenzenloſer Unſinn, die Schale zu lackiren, wie ich es doch von Leuten ſah, die ſich Künſtler nennen.

113. Um die beim Gebrauche des Schwefeläthers nöthigen Vorſichten kennen zu lernen und aus ſeiner Anzeige die Spannkraft der Dünſte nebſt allem damit in Verbindung Stehenden ableiten zu

können, muß man den Verlauf der dabei Statt findenden Erſcheinungen näher betrachten.

Die unmittelbare Leiſtung dieſes Inſtrumentes iſt, die Dünſte in der die Thermometerkugel zunächſt umgebenden Luftſchichte auf die größte Spannkraft zu bringen; das Mittel, dieſes zu bewirken, iſt Erkältung, und dieſe wird durch die Verdünſtung eines flüchtigen Fluidums, wozu man meiſtens Schwefeläther wählt, hervorgebracht; der Muſſelinüberzug hat die Beſtimmung, das ſchnelle Ablaufen der Flüſſigkeit zu verhindern. Sobald dieſe aufgetröpfelt wird, fängt ſie an zu verdünſten, erkaltet ſich und entreißt ſowohl der Thermometerkugel als der zunächſt an ihr befindlichen Luftſchichte Wärme; wird nicht zu eilig verfahren und nicht zu ſchnell Wärme gebunden, ſo wird die Erkältung in der Luft und im Thermometer gleichmäßig vor ſich gehen und man wird die Temperatur, welche das Thermometer anzeigt, für die der erkälteten Luftſchichte halten können, man hat aber kein anderes Kriterium, daß die Dünſte ihre größte Spannkraft erlangt haben, als den Umſtand, daß dieſe bei der mindeſten Temperaturverminderung in tropfbaren Zuſtand übergehen. Sobald alſo dieſes Statt findet, hat man die Erkältung zu weit getrieben, und man kann die dabei Statt habende Temperatur nur dann mit einiger Sicherheit als diejenige anſehen, für welche die Dünſte ihre größte Spannkraft haben, wenn die Temperatur überhaupt nur langſam ſank.

Hieraus wird man nun leicht die Nothwendigkeit und Richtigkeit folgender Vorſichtsmaßregeln erſehen: Man ſoll ſtets wenigſtens zwei Ätherſorten von verſchiedener Stärke zur Hand haben und zuerſt die ſchwächere brauchen, wenn man nicht ſchon vorhinein weiß, daß der Bethauungspunct tief unter der beſtehenden Lufttemperatur liegt. Braucht man bei ziemlich feuchter Luft zu ſtarken Schwefeläther, ſo ſinkt das Queckſilber zu ſchnell, Luft und Queckſilber werden nicht gleich ſtark abgekühlt, und die Queckſilberſäule ſinket in der kurzen Zeit, während man das Auge von der Kugel auf die Röhre richtet und den Stand der Säule erblickt, um mehr als der Beobachtungsfehler betragen ſoll, ſelbſt wenn man ſo glücklich iſt, ſchon den erſten feinſten Beſchlag wahrzunehmen. Bei großer Trockenheit bringt man mit ſchwachem Äther überhaupt nicht die zum Beſchlagen nöthige Erkältung hervor. Man muß ſich hüthen, neuen Äther nachzutröpfeln, wenn man Grund hat, zu vermuthen, die Temperatur ſey dem Bethauungspuncte nahe, bevor das Queck-

ſilber wieder zu ſteigen anfangen will, weil jeder neu zugegebene Äthertropfen ein ſchnelles Sinken des Thermometers erzeugt. Glaubt man den rechten Augenblick des Beſchlagens überſehen zu haben, ſo kann man den Thau von der ſtark beſchlagenen Kugel durch Berührung mit einem feinen Tuche wegwiſchen und ſehen, ob er ſich alſogleich wieder bildet. So lange dieſes der Fall iſt, ſteht das Queckſilber immer noch unter dem Thaupuncte und erſt wenn der Thau nach dem Wegwiſchen nur langſam entſteht, kann man den Stand des Thermometers als dem Thaupuncte entſprechend anſehen. Übrigens iſt dieſes immer nur ein Nothbehelf und muß der directen Beobachtung des erſten Thauabſatzes nachſtehen.

114. Das Zutröpfeln des Schwefeläthers geſchieht mit einem Glasſtängelchen, oder beſſer mit einem kleinen Pinſel. Ich brauche bei Körners Hygrometer auch mit Vortheil eine kleine Vorrichtung, die durch bloßes Berühren mit der Hand die nöthige Ätherportion auf die Kugel leitet. Sie beſteht aus einem kleinen (1 Kub. Zoll haltenden) Gefäße *a* (Fig. 69) aus dünnem Metall, das den Schwefeläther enthält. Durch den Deckel dieſes Gefäßes geht ein heberförmig gekrümmtes Haarröhrchen *b*. Außerdem hat dieſer Deckel noch eine andere Öffnung, ſchließt aber übrigens das Gefäß recht wohl. So wie dieſes Gefäß mit der Hand berührt wird und der Zeigefinger die Öffnung ſchließt, treibt die durch die Wärme der Hand vermehrte Spannkraft der Luft im Gefäße den Äther in das Röhrchen und leitet ihn auf die Thermometerkugel. So wie man die Hand zurückzieht, entweicht aus der nun freien Öffnung Luft, und das Zutröpfeln des Äthers hört auf.

115. Um nach dem hier angewendeten Grundſatze die Feuchtigkeit einer abgeſperrten Luftmaſſe unterſuchen zu können, brauche ich die Vorrichtung Fig. 70, wo *A* der Recipient iſt, *a* ein von außen vergoldetes Schälchen, wie ein Fingerhut, das eine Thermometerkugel aufnehmen kann, und überdieß noch etwas Raum für Schwefeläther übrig hat. Dieſes Schälchen beſchlägt im Inneren des Recipienten gerade ſo, wie das an Körners Hygrometer, wenn der verdünſtende Schwefeläther die gehörige Temperaturverminderung erzeugt hat und das Thermometer, welches ſich darin befindet, zeigt die dabei Statt findende Temperatur an.

116. Um mittelſt des Schwefelätherhygrometers die Spannkraft der Waſſerdünſte zu finden, braucht man die dem Bethauungspuncte entſprechende Expanſivkraft aus der Tafel der größten Spann-

kräfte zu nehmen, denn dieſe ſteht mit der den unveränderten Dünſten eigenen im Gleichgewichte und iſt daher ihr gleich.

Durch Erkältung hat man wohl die ſpeciſiſche, aber nicht die abſolute Expanſivkraft vermindert, indem die Dünſte in dem Maße dichter wurden, als ihre ſpeciſiſche Ausdehnſamkeit abnahm. Wie man aus der gegebenen Spannkraft und Temperatur die Dunſtmenge in einem beſtimmten Volumen berechnen kann, iſt klar.

117. Hutton hatte zuerſt die Idee, aus der Erkältung, die ein mit Waſſer befeuchtetes Thermometer in der Luft durch Verdünſtung desſelben erleidet, auf den Dunſtgehalt der Luft zu ſchließen, Leslie aber hat dieſes Verfahren weiter ausgebildet und auf Grundſätze gebracht; ſein dazu empfohlener Apparat, ein Differenzialthermometer, läßt ſich aber mit Vortheil durch ein gemeines Thermometer erſetzen, deſſen Kugel mit Muſſelin umwunden und feucht erhalten iſt, worauf Anderſon und Auguſt zuerſt aufmerkſam gemacht haben.

Ich beſitze ein zu dieſem Zwecke eingerichtetes, von Weilhöfer in Wien verfertigtes Inſtrument, das allen Forderungen entſpricht, die man billiger Weiſe an ein Hygrometer machen kann. Es iſt in Fig. 71 abgebildet. *abcd* iſt eine meſſingene Rahme, innerhalb welcher ſich zwei auf einander liegende Glastafeln befinden, wovon eine matt geſchliffen iſt. Auf dieſer ſind neben einander zwei Thermometer *e* und *f* befeſtiget, die ſehr empfindlich ſind, indem $\frac{1}{10}$° C noch $\frac{1}{4}$ L. groß iſt, ihre Scale reicht von — 25° C bis 50° C. Eines derſelben, nämlich *f* iſt an der Kugel mit Muſſelin überzogen und zum Benetzen beſtimmt, die Kugel hängt frei in einem runden Ausſchnitt der Rahme, das andere unterſcheidet ſich von einem gewöhnlichen Thermometer in nichts, und dient blos zur Angabe der Lufttemperatur. Zwiſchen den zwei Thermometern befindet ſich ein kleines gläſernes, mit reinem Waſſer gefülltes Gefäß *g*; durch deſſen meſſingenen Deckel geht eine $\frac{1}{2}$ L. weite Glasröhre, die einen Baumwollfaden von der Kugel des Thermometers *f* in das Waſſer führt. Dieſer Faden zieht durch Capillarität das Waſſer beſtändig in die Höhe und bringt es an die Thermometerkugel, ſo daß man in jedem Augenblick, ohne einen beſonderen Verſuch anſtellen zu müſſen, den Unterſchied im Stande beider Thermometer beobachten und daraus die Feuchtigkeit in der Luft abnehmen kann. Es iſt begreiflich, daß beide Thermometer ſehr genau mit einander überein=

ſtimmen und einerlei Empfindlichkeit beſitzen müſſen, darum ſollen auch beide gleich weite Röhren und gleich große Kugeln haben.

118. Um eine Formel zu finden, mittelſt welcher man die Luftfeuchtigkeit aus den Anzeigen dieſes Hygrometers berechnen kann, muß man dem Verlaufe der Dinge an dieſem Inſtrumente nachſpüren.

Wenn ſich ein mit Waſſer befeuchtetes Thermometer in der Luft befindet, die noch nicht mit Waſſerdünſten geſättiget iſt, ſo beginnt das Waſſer zu verdünſten. Die dazu nöthige Wärme wird dem Thermometer und der dasſelbe zunächſt umgebenden Luftſchichte entriſſen. Es muß demnach die Temperatur beider ſinken und zwar faſt gleichmäßig ſo, daß das Thermometer ſtets den Wärmegrad der erkalteten Luftmaſſe angibt. Man kann von der durch das Thermometer gelieferten Wärme abſehen und dieſes Inſtrument blos als Mittel anſehen, die Temperatur obiger Luftſchichte anzugeben. Die Verdünſtung, mithin auch die Erkältung dauert ſo lange fort, bis dieſe Luftſchichte mit Dünſten geſättiget iſt, die Sättigung wird aber theils durch die Verminderung der Temperatur, theils durch den Zuwachs an Dünſten zu Stande gebracht. Iſt dieſe einmal erreicht, ſo kann keine weitere Verminderung der Temperatur mehr eintreten, weil jede erkaltende Urſache einen Dunſtniederſchlag bewirken und dadurch die nöthige Wärmequelle eröffnen würde; die Temperatur kann aber auch nicht ſteigen, ſo lange die urſprüngliche Dunſtmenge, die Dichte und Temperatur der Luft nicht geändert wird, denn wäre ein Grund zu einer höheren Temperatur vorhanden, ſo hätte dieſelbe nicht ſo tief ſinken können. Es ſinkt demnach die Temperatur der Luft zunächſt um die feuchte Thermometerkugel ſo tief, bis die Dünſte in dieſer Luft das Maximum ihrer Spannkraft erreicht haben und die Wärme, welche die hierzu nöthigen Dünſte gebunden haben, wurde von dieſer Luftſchichte und dem in derſelben ſchon vorläufig enthaltenen Dunſte geliefert.

119. Zur näheren Beſtimmung der Feuchtigkeit der Luft nach dem hier beſprochenen Grundſatze, ſey p das Gewicht der trockenen Luft in der vorhin betrachteten Schichte, bei der beſtehenden Temperatur und dem herrſchenden Luftdrucke, p_1 das Gewicht der ſchon in dieſem Raume enthaltenen Dünſte, p_2 das Gewicht des neu gebildeten Dunſtes, π das Gewicht der trockenen Luft bei $0°$ C und einem Barometerſtande von $0^m.76$ das die ganze beſprochene Schichte faſſen kann, b der herrſchende Barometerſtand, t die Tem-

peratur der Luft, wie ſie ein trockenes Thermometer anzeigt, t_1 die Temperatur des befeuchteten Thermometers, $\delta = t - t_1$; e_1 die größte Expanſivkraft des Waſſerdunſtes bei t_1° C; e die Expanſivkraft der wirklich vorhandenen Dünſte bei der Temperatur t; s die Dichte dieſes Waſſerdunſtes, α der Ausdehnungscoefficient der Gaſe für die Temperaturänderung von 1° C mithin gleich 0.00375.

Unter dieſen Vorausſetzungen ſteht die trockene Luft in der mit Dunſt bei der Temperatur t_1 geſättigten Schichte unter dem Drucke $b - e_1$, und es iſt daher

$$p = \pi \, . \, \frac{b - e_1}{0.76\,(1 + \alpha t_1)}.$$

Eben ſo ſteht der ſchon vorhandene Dunſt unter dem Drucke e und weil er auch die Temperatur t_1 hat, ſo iſt

$$p_1 = \pi s \, . \, \frac{e}{0.76\,(1 + \alpha t_1)}.$$

Endlich iſt der Druck, unter welchem der neu gebildete Dunſt ſteht, $e_1 - e$ und daher

$$p_2 = \pi s \, . \, \frac{c_1 - e}{0.76\,(1 + \alpha t_1)}.$$

Iſt nun c die Wärmecapacität der trockenen Luft, ſo beträgt die zur Bildung des neu hinzugekommenen Dunſtes von ihr abgegebenen Wärmemenge $p c \delta$ oder

$$\pi c \delta \, . \, \frac{b - e}{0.76\,(1 + \alpha t_1)}.$$

Heißt eben ſo c_1 die Capacität des Waſſerdunſtes, ſo hat dieſer beim Übergange aus der Temperatur t in t_1 die Wärmemenge $p_1 c_1 \delta$ oder

$$\pi s c_1 \delta \, . \, \frac{e}{0.76\,(1 + \alpha t_1)}$$

abgegeben. Bezeichnet endlich λ die Anzahl der Wärmegrade, um die man die Temperatur einer Waſſermaſſe = 1 durch die von einer Maſſeneinheit des gebildeten Dunſtes gebundene Wärme ſteigern könnte; ſo iſt die von dieſem Dunſte gebundene Wärme $p_2 \lambda$ oder

$$\pi s \lambda \, . \, \frac{e_1 - e}{0.76\,(1 + \alpha t_1)}.$$

Weil nun die vom Dunſte gebundene Wärme von der trockenen Luft und von dem urſprünglich vorhandenen Dunſte herkommt, ſo iſt:

$$\pi c \delta \cdot \frac{b - e_1}{0.76\,(1 + \alpha t_1)} + \pi s c_1 \delta \cdot \frac{e}{0.76\,(1 + \alpha t_1)} =$$

$$= \pi s \lambda \,\frac{e_1 - e}{0.76\,(1 + \alpha t_1)}$$

oder

$$c\delta\,(b - e_1) + s c_1 \delta e = s\lambda\,(e_1 - e)$$

und hieraus

$$e = \frac{s\lambda e_1 - c\delta\,(b - e_1)}{s\lambda + s c_1 \delta}.$$

Nach den zuverläſſigſten Angaben iſt aber

$$s = 0.62349,\; c = 0.2669,\; c_1 = 2.8470,\; \lambda = 550^\circ\,\mathrm{C}.$$

Setzt man dieſe Werthe in die vorhergehende Gleichung, ſo wird:

$$e = \frac{342.9195\, e_1 - 0.2669\,\delta\,(b - e_1)}{342.9195 + 1.775076035\,\delta}$$

oder indem man die Diviſion zum Theile verrichtet, als Annäherungswerth

$$e = e_1 - 0.00077832\,(b - e_1)\,\delta \;\ldots\ldots\; (A).$$

Begnügt man ſich mit einer Annäherung, bei der man höchſtens um $0^{mm}.1$ fehlen kann, ſo erhält man

$$e = e_1 - 0.0008\,b\,\delta \;\ldots\ldots\; (B).$$

120. Dieſe Formel iſt nur für den Fall anwendbar, wenn das Waſſer am feuchten Thermometer in tropfbarem Zuſtande vorhanden iſt; iſt dieſes hingegen gefroren, ſo muß die Rechnung anders geführt werden, weil da die von der Luft und dem ſchon vorhandenen Waſſerdünſten hergegebene Wärme nicht blos zur Dunſtbildung, ſondern auch zum Schmelzen einer Portion Eis verwendet wird. Eine geringe Modification in dem ſpeciellen Werthe von λ dehnt aber obige Formel auch auf dieſen Fall aus. Setzt man $\lambda = 550 + 75 = 625$, ſo hat man zugleich auf die Wärmeconſumtion beim Schmelzen des Eiſes die nöthige Rückſicht genommen, indem man mit der Wärme, durch welche Eis von der Temperatur 0° C in Waſſer von derſelben Temperatur verwandelt wird, eine gleiche Waſſermenge von 0° auf 75° erwärmen kann. Nach dieſer Modification des Werthes von λ erhält man für den hier in Rede ſtehenden Fall

$$e = e_1 - \frac{0.26690}{389.68125}\,(b - e_1)\,\delta$$

oder

$$e = e_1 - 0.000685\,(b - e_1)\,\delta \;\ldots\ldots\; (C)$$

ſtatt deſſen man wieder ſetzen kann

$$e = e_1 - 0.0007\,b\,\delta \;\ldots\ldots\; (D).$$

Für Réaumurſche Grade und Pariſer Linien erhält man für die Temperatur über 0°

$$e = e_1 - 0.00097\,b\,\delta$$

für eine Temperatur unter 0°

$$e = e_1 - 0.00085\,b\,\delta.$$

121. Um dieſe Formeln zu prüfen, wählte ich aus einer großen Anzahl von Beobachtungen eines Schwefelätherhygrometers und eines befeuchteten Thermometers des Ritter v. Bürg einige aus, die er ſelbſt als völlig genau bezeichnet und die ich auch in anderer Hinſicht für zweckmäßig halte, ich drücke aber die Expanſivkräfte und den Barometerſtand in Millimetern, den Wärmegrad nach der Celſiſchen Scale aus. Ich berechnete für den Bethauungspunct, den das Schwefelätherhygrometer angab, die Expanſivkraft der Dünſte und verglich ſie mit der, welche nach obiger Formel für die Anzeigen eines befeuchteten Thermometers reſultiren.

Folgende Tabelle gibt die beobachteten Größen an.

Zahl der Beobachtung	Stand des trockenen Therm. t	Stand des befeuchteten Therm. t_1	Barometerſtand b	Bethauungspunct τ
1	19.55	14.70	710.29	10.44
2	22.01	17.95	721.37	15.09
3	16.20	11.09	707.95	5.85
4	14.01	10.56	706.53	7.29
5	15.40	13.07	709.42	10.02
6	10.24	7.36	702.62	3.60

Hieraus ergeben ſich folgende Werthe für die Größen δ, e, ſowohl nach dem Schwefelätherhygrometer als für den Stand des befeuchteten Thermometers.

Zahl der Beobachtung	δ	e nach dem Schwefeläther-hygrometer	e nach der Formel (A)	Differenz
1	4.85	9.73	9.80	0.07
2	4.06	12.91	12.97	0.06
3	5.17	7.26	7.15	— 0.11
4	3.45	8.02	7.86	0.16
5	2.33	9.49	10.10	0.61
6	2.88	6.36	6.43	0.07
			Mittlere Differenz	0.14

122. Man kann den Coefficienten von $b\,\delta$ auch unmittelbar aus Beobachtungen ableiten, die man gleichzeitig mit einem Schwefelätherhygrometer und einem Pſychrometer anſtellt. Da nämlich für jede Beobachtung mittelſt des bekannten Thaupunctes die Expanſivkraft $e_{,}$ der in der Luft vorhandenen Waſſerdünſte gefunden wird, e hingegen aus dem Stande des Pſychrometers mittelſt der Tafel der Expanſivkräfte gefunden werden kann und eben ſo $b\,\delta$ bekannt iſt; ſo erhält man jenen Coefficienten durch die Größe $\frac{e - e_{,}}{b\,\delta} = c$. Es iſt klar, daß man zu dieſem Zwecke nur ſehr ſorgfältig angeſtellte Beobachtungen benützen darf, indem ein ſehr kleiner Fehler an der beobachteten Temperatur einen großen Einfluß auf c nimmt. Man hat bereits aus mehreren Beobachtungen dieſe Größe c abgeleitet. Sie folgen hier mit der von Auguſt auf theoretiſchem Wege gefundenen und zwar für Pariſer Linien und Réaumurſchen Wärmegraden:

Nach Auguſt iſt . . . . $c = 0.000972$
„ Bohnenberger . . . . . . $c = 0.000892$
„ Bürg . . . . $c = 0.001018$
Im Mittel 0.000960

oder wenn die Expanſivkraft in Millimetern, die Temperatur nach Celſiſchen Graden angegeben wird:

Nach Auguſt . . . . $c = 0.000778$
„ Bohnenberger . . . . . $c = 0.000704$
„ Bürg . . . . $c = 0.000814$
Im Mittel 0.000765

Daher erhält man im Durchſchnitte für erſtere Maße

$$e = e_1 - 0.0000960\, b\, \delta$$

für letztere

$$e = e_1 - 0.000765\, b\, \delta.$$

123. Man kann noch auf einem anderen Wege zur Kenntniß einer Formel gelangen, welche zu demſelben Ziele führt, wie die vorher deducirte. Es ſey wieder wie vorhin t die Temperatur der Luft t_1 die vom befeuchteten Thermometer angezeigte $\delta = t - t_1$, ferner E die größte Spannkraft der Waſſerdünſte für die Temperatur t; e die der vorhandenen Dünſte und man ſetze

$$\delta = A\,(E - e) + A_1\,(E - e)^2 + \ldots\ldots$$

wo A und A_1 conſtante, zu beſtimmende Größen ſind.

Weil $E - e$ ſtets eine ſehr kleine Größe iſt, ſo kann man bei den zwei angeſetzten Gliedern ſtehen bleiben, ja ſogar

$$\delta = A\,(E - e) \text{ d. i. } \frac{\delta}{A} = E - e$$

als Näherungsformel brauchen, und obige Gleichung ſo ausdrücken:

$$\delta = A\,(E - e) + A_1\,(E - e)\,(E - e)$$

oder

$$\delta = A\,(E - e) + \frac{\delta A_1}{A}\,(E - e)$$

d. i.

$$\delta = \left(A + \frac{A_1 \delta}{A}\right)(E - e).$$

Um den Einfluß des Luftdruckes auf den Werth von δ zu erfahren, hat Anderſon ein Leslie'ſches Hygrometer unter einen Recipienten gebracht und zugleich ein Gefäß mit Schwefelſäure dazugeſellt, damit die durch das Waſſer an der feuchten Hygrometerkugel gebildeten Dünſte davon abſorbirt werden und die Spannkraft der Dünſte innerhalb des Recipienten beſtändig dieſelbe bleibe. Als mittelſt einer Luftpumpe die Luft verdünnt war, ergaben ſich folgende Reſultate:

Luftdruck	δ
29.63.	27
23.6	34
17.6	44
11.6	62
5.6	91

Es wächſt demnach der Werth von δ nahe in demſelben Verhältniſſe, wie der Luftdruck abnimmt. Heißt nun der Normalbarometerſtand B, der bei einer Beobachtung Statt habende b, ſo iſt

$$\delta = \frac{B}{b}\left(A + \frac{A_1}{A}\,\delta\right)(E - e)$$

oder wenn man $\frac{A_1}{A} = C$ ſetzt

$$e = E - \frac{b\,\delta}{B(A + C\delta)}.$$

Die Größen A und C hat Anderſon aus einer großen Anzahl von Beobachtungen beſtimmt und gefunden $A = 36$, $C = -0.1$, ſo daß man demnach für engliſche Zolle und Fahrenheit'ſche Grade erhält]

$$e = E - \frac{b\,\delta}{1080 - 3\delta},$$

oder für Millimeter und hunderttheilige Grade

$$e = E - \frac{b\,\delta}{600 - 3\delta}.$$

124. Dieſes Hygrometer hat mit dem Schwefelätherhygrometer das gemein, daß bei ihm ſo wie bei dieſem die Dünſte zunächſt des Thermometers auf die größte Spannkraft gebracht werden; jedoch geſchieht dieſes nicht in beiden durch dasſelbe Mittel. Beim Schwefelätherhygrometer wird dieſes blos durch Herabſetzung der Temperatur, beim befeuchteten Thermometer hingegen durch dieſe und zugleich durch Vermehrung der Dunſtmenge bewirkt. Daraus erſieht man leicht, daß der Stand eines befeuchteten Thermometers t_1 mit dem Bethauungspuncte τ nicht zuſammenfallen kann, ſondern daß dieſer ſtets tiefer liegen muß als jener. Wenn das Geſetz, nach welchem die Expanſivkräfte des Waſſerdunſtes mit ſteigender Temperatur wachſen, genau bekannt wäre, ſo ließe ſich wohl eine Formel finden, welche den Zuſammenhang zwiſchen den Temperaturen t, t_1 und τ oder t, τ und δ nachweiſet; bei dem gegenwärtigen Stande der Dinge läßt ſich dieſes nicht auf einem theoretiſchen Wege leiſten. Indeß haben doch Auguſt in Berlin (über Anwendung des Pſychrometers zur Hygrometrie. Berlin 1828) und Meikle in England (Phil. journ. N. 3. p. 31) dieſen Zuſammenhang aus Verſuchen nachzuweiſen geſucht. Erſterer hat nämlich eine Formel entwickelt, welche die größte Expanſivkraft des Waſſerdunſtes für jede Temperatur angibt. Nach

dieſer iſt $\log e_1 = \frac{23.94537\, t_1}{800 + 3\, t_1} - 2.2960383$. Ferner

$$e = \frac{e_1 - 0.00077832\,(b - e_1)\,\delta}{1 + 0.00154\,\delta} \text{ und}$$

$$\tau = \frac{800}{3} \cdot \frac{2.2960883 + \log e}{5.6857520 - \log e}.$$

Da nun e_1 mittelſt der zwei erſten Formeln bekannt iſt, ſo läßt ſich daraus τ, alſo die Temperatur finden, welche das Schwefelätherhygrometer anzeigt.

Die Formel Meikle's iſt

$$\tau = t - \frac{\delta\,(\delta + 55)}{t_1 + 18}.$$

Sie gibt den Thaupunct ziemlich ſcharf an, jedoch hat ſie ſelbſt Meikle nicht näher entwickelt.

125. Ein der näheren Betrachtung würdiges Hygrometer iſt das Haarhygrometer. Über dieſes Inſtrument hat uns Sauſſure eine ſo vollſtändige Belehrung ertheilt, daß kaum mehr etwas die Verfertigung und den Gebrauch dieſes Inſtrumentes betreffendes hinzuzuſetzen bleibt; darum halte ich mich auch pünctlich an ſeine eigene Anleitung.

126. Das Gerippe dieſes Inſtrumentes bildet eine meſſingene viereckige Rahme Fig. (72) von etwa 12 Zoll Länge und 3 Zoll Breite mit der nöthigen Einrichtung, um das Haar, den Zeiger und die Scale anbringen zu können. Am oberen Theile befindet ſich ein Schraubenkloben *a*, der das obere Ende des Haares hält und ſelbſt durch eine Hülſe *b* geht, welche mittelſt einer Schraube *c* an die Rahme befeſtiget iſt, damit er ſanft mittelſt einer eigenen Micrometerſchraube *d* gehoben und geſenkt werden kann. Am unteren Theile befindet ſich die Gabel zur Aufnahme des Zeigers *ef*. Dieſer beſteht aus zwei Theilen, wovon der eine dazu dient, die Feuchtigkeitsgrade anzugeben, der andere das Haar aufzunehmen und zu ſpannen. Der erſtere bildet einen meiſtens verjüngt zulaufenden Stift, der letztere beſteht aus einem 1 L. dicken Rollenſtück von etwa 2 L. im Halbmeſſer mit 2 Einſchnitten oder Zargen, die gegen Innen zu immer enger werden und wovon eine für das Haar, die andere für den Faden beſtimmt iſt, an welchem das Gegengewicht hängt. An jedem Ende der Zarge befindet ſich ein kleiner Kolben mit einer Schraube; der untere iſt zur Befeſtigung des Haares, der

obere zur Befeſtigung des Seidenfadens beſtimmt, der das Gegengewicht trägt. Die Welle, um welche ſich der Zeiger dreht, muß vollkommen kreisrund, möglichſt dünn, und wo möglich aus Glockengut, nicht aus Stahl beſtehen, damit ſie nicht roſten kann; das Ganze muß genau äquilibrirt ſeyn und daher unbelaſtet in jeder Lage ſtehen bleiben. Übrigens iſt es vortheilhaft, den Zeiger eines Inſtrumentes, das zum Transport beſtimmt iſt, in ſeiner unterſten Lage befeſtigen zu können, damit die Erſchütterungen, denen es ausgeſetzt iſt, das Haar nicht afficiren. Zu dieſem Zwecke befindet ſich am unteren Theile der Rahme eine Art Sperrhaken *l*, der durch Lüften einer Schraube *m* beweglich gemacht, durch Anziehen derſelben aber befeſtiget wird. Soll das Inſtrument transportirt werden, ſo bringt man mit einem Finger den Zeiger in die unterſte Lage, lüftet die Schraube *m* und hebt den Sperrhaken ſo weit, daß ſein längerer Schenkel die Rolle und der kürzere das Gewichtchen hält und befeſtiget ihn in dieſer Lage durch Anziehen obiger Schraube.

Sauſſure beſchreibt noch ein größeres Inſtrument dieſer Art, das eine viel kleinere Rolle hat und viel empfindlicher iſt, aber er ſelbſt gibt dem erſteren handſameren Apparate den Vorzug.

127. Ein ſehr wichtiger Punct iſt die Auswahl und Zubereitung des Haares.

Die zu Hygrometern beſtimmten Haare müſſen fein, weich, nicht gekräuſelt und noch weniger geſpalten ſeyn, von einem geſunden lebendigen Kopfe geſchnitten, nicht von ſelbſt ausgefallen ſeyn. Blonde Haare haben dieſe Eigenſchaften öfter beiſammen als dunklere. Sie brauchen nicht länger als 10 Z. zu ſeyn, denn da ſich ein Haar in gut zubereitetem Zuſtande vom Puncte der äußerſten Trockenheit bis zu dem der größten Feuchtigkeit um 0.0245 ſeiner Länge ausdehnt, ſo entſpricht einem Grade eine Verlängerung von 0.000245, oder wenn die Länge des Haares 10 Z. beträgt 0.0294 L. Hat die Rolle 2 L. im Halbmeſſer und der Zeiger 3 Z. Länge, ſo fällt ein Grad 0.529 L. groß aus, und kann daher noch recht wohl in kleinere Theile durch das Augenmaß getheilt werden.

128. Bevor man ein Haar zu einem Hygrometer verwendet, muß es vom natürlichen Fett befreit werden. Dieſes geſchieht nach Sauſſure's Anleitung auf folgende Weiſe: Man nimmt ein Büſchel Haare von der Dicke eines Federkieles, legt ſie einzeln aus einander und nähet ſie in einen Leinwandſack von etwa 15 L. Breite ein, ſo, daß ſie von der Leinwand allſeitig gedeckt werden, ohne einander

zu berühren. Hierauf gibt man ſie in einen langhalſigen Kolben mit 180 Gran Soda in 30 Unzen Waſſer, erhitzt die Löſung, bis das Waſſer kocht, und unterhält das Kochen 30 Minuten lang, nimmt dann den Sack heraus, kocht ihn noch einmal einige Minuten lang in reinem Waſſer, ſchneidet ihn dann auf, nimmt die Haare heraus, ſchwenket ſie in kaltem Waſſer und läßt ſie in der Luft trocknen.

129. Sind die getrockneten Haare rein, weich, glänzend, durchſcheinend und nicht verfilzt, ſo ſind ſie gewiß nicht zu ſtark gelauget, ſind ſie aber rauh, undurchſcheinend und an einander hängend, ſo hat man des Guten zu viel gethan und ſie ſind entweder zu lange oder in zu ſtarker Lauge gekocht worden. Letzteres kann auch der Fall ſeyn, ſelbſt wenn man zwiſchen Waſſer und Soda das rechte Verhältniß genommen und die Zeit des Kochens nicht über die Gebühr verlängert hat; ein zu raſches Sieden der Lauge oder der Gebrauch eines zu weiten Gefäßes kann die Verdünſtung des Waſſers und die Concentration der Lauge zu ſehr begünſtiget haben.

Selten ſind alle Haare, die aus derſelben Lauge kommen, gleich ſtark gelaugt; man erkennt die weniger gelaugten daran, daß ſie weniger durchſichtig ſind als die anderen. Dieſe dehnen ſich auch weniger, aber ſchneller aus als die mehr gelaugten.

130. Hat man das Haar gehörig zubereitet und gut befunden, ſo ſpannt man es in die Rahme ein und bringt das Gegengewicht zum Spannen desſelben an. Dieſes ſoll nicht über 3 Gran betragen. Iſt es größer, ſo läuft man Gefahr, daß es das Haar zu ſehr dehne und in ſeiner Organiſation ſo abändere, daß es durch die Feuchtigkeit unregelmäßig ausgedehnt wird. Man darf ſich nicht dadurch irre machen laſſen, daß das Haar anfangs von einem ſo kleinen Gewichte nicht völlig geſpannt wird; ſobald es einmal einer ſehr feuchten Luft ausgeſetzt war, tritt die Spannung ſchon ein.

Iſt das Haar eingeſpannt, ſo ſchraubt man eine beliebig getheilte Scale auf und ſchreitet hierauf zur Beſtimmung der zwei feſten Puncte.

131. Zur Beſtimmung des **Feuchtigkeitspunctes** nimmt **Sauſſure** eine 15—16 Z. hohe Glasglocke, benetzt ſie inwendig mittelſt eines Schwammes mit Waſſer, hängt das Hygrometer hinein, und ſetzt ſie auf einen mit Waſſer bedeckten Teller. Die Wirkung der Feuchtigkeit auf das Haar zeigt ſich alſogleich, beſonders wenn man von Zeit zu Zeit an das Glas klopft und dadurch den Zeiger von etwa einwirkenden Hinderniſſen befreit. Gut gelaugte Haare

erreichen ſchon nach einer Stunde die größte Ausdehnung und bleiben dabei, ſo lange die inneren Wände des Recipienten naß ſind; trocknen ſie zu früh, ſo muß man ſie wieder naß machen. Der Vernachläſſigung dieſes Umſtandes mag es zuzuſchreiben ſeyn, daß Prinſep (Zeitſch. B. II. S. 29) bei der Beſtimmung des Feuchtigkeitspunctes das Haar nur dann auf die größte Verlängerung brachte, wenn das Waſſer und die Luft im Recipienten gleich warm waren. Verlängert ſich das Haar nach 2—3 Stunden noch immer, ſo iſt es zu ſtark gelaugt und man muß es durch ein weniger gelaugtes erſetzen. Dasſelbe muß auch geſchehen, wenn es rückgängig wird. Soll das Inſtrument beſonders gut ausfallen, ſo muß man das Haar nach dieſer Operation einige Tage den Veränderungen der Luftfeuchtigkeit ausſetzen und dann den Punct der größten Feuchtigkeit noch einmal beſtimmen.

132. Die Beſtimmung des Punctes der größten Trockenheit fordert mehr Umſtändlichkeit und iſt nicht ſo leicht wie die des Punctes der größten Feuchtigkeit. Man muß ſich da vorläufig das zum Austrocknen der Luft nöthige Materiale bereiten. Nach Sauſſure geſchieht dieſes auf folgende Art: Man nimmt einen cylindriſchen Recipienten, der nicht viel weiter und höher iſt, als daß das Hygrometer hineingeſchoben werden kann, biegt ein Eiſenblech von der Höhe des Recipienten ſo, daß es deſſen halbe Breite einnimmt, legt es auf glühende Kohlen und beſtreut es auf beiden Seiten mit einem aus gleichen Theilen Salpeter und rohem Weinſtein beſtehenden Pulver, damit es verpuffe und das Alkali zurücklaſſe und das Blech gleichförmig bedecke. Dieſes Blech läßt man auch nach der Verpuffung noch $\frac{1}{4}$ St. lang ſchwach glühen, damit das Kali feſter werde und nicht ablaufe. So wie dieſes geſchehen iſt, verſtärkt man die Hitze bis zum Dunkelrothglühen und unterhält dieſen Grad eine Stunde lang, nimmt das Blech vom Feuer und läßt es ſo weit abkühlen, bis es ohne Gefahr in den Recipienten geſchoben werden kann, den man vorläufig ſchon erhitzt hat, hängt auch das Hygrometer hinein, ſtellt alles auf einen Teller und ſperrt es mit Wachs oder Queckſilber luftdicht. Anfangs ſchreitet der Zeiger ſehr ſchnell gegen den Punct der größten Trockenheit zu, aber ſeine Bewegung wird immer langſamer, je näher er der äußerſten Grenze kommt; er erreicht ſie aber in der Regel erſt nach 2—3 Tagen und behält da einen bleibenden Stand. Um aber gewiß zu ſeyn, daß dieſes Stillſtehen nicht blos von einem Gleichgewichte zwiſchen den

Dünſten und der Luft herrühre, erwärme man den Apparat durch directes Sonnenlicht oder durch Kohlenfeuer. Geht bei der Temperaturerhöhung der Zeiger nicht weiter abwärts, ſondern vielmehr aufwärts, ſo iſt dieſes immer ein Zeichen, daß die Austrocknung hinreichend weit getrieben ſey und daß die Bewegung des Zeigers blos von der durch die Wärme bewirkten Ausdehnung des Haares herrühre. Sind die beiden fixen Puncte der Scale auf dieſe Weiſe beſtimmt, ſo kann man die Scale verzeichnen.

133. Von einem guten Haarhygrometer verlangt man, daß es empfindlich genug ſey, unter denſelben Umſtänden immer wieder auf denſelben Feuchtigkeitsgrad weiſe und daß es mit anderen nach denſelben Grundſätzen verfertigten Inſtrumenten übereinſtimme. Die Empfindlichkeit eines Hygrometers prüft man, indem man das Inſtrument in einen, feuchte Luft enthaltenden Recipienten bringt und es kleinen Änderungen der Temperatur ausſetzt. Iſt das Inſtrument empfindlich genug, ſo muß der Zeiger ſich beim geringſten Steigen der Temperatur gegen den Trockenheitspunct, beim Sinken derſelben gegen den Feuchtigkeitspunct hin bewegen. Man kann es empfindlicher machen, wenn man ein mehr gelaugtes Haar einzieht und den Zeiger länger, oder die Rolle an demſelben kleiner macht. Allein die Anwendung des letzteren Mittels hat bald eine Grenze, weil ſich ſonſt das Haar zu ſehr biegen muß und dadurch rauh wird. Zeigt das Hygrometer die Veränderungen der Feuchtigkeit nicht ſchnell genug an, ſo iſt das Haar zu dick oder zu ſehr gelaugt und man muß es durch ein feineres und weniger gelaugtes erſetzen. Nicht ſelten hemmen Roſt an den Zapfen der Rolle, ja bei frei in der Luft befindlichen Hygrometern feine Spinnengewebe den freien Gang des Zeigers und ziehen dem Inſtrumente den Vorwurf der Unempfindlichkeit zu. Wie man unterſucht, ob ein Inſtrument unter denſelben Umſtänden denſelben Feuchtigkeitsgrad anzeigt, iſt für ſich klar und bedarf keiner beſonderen Erwähnung. Bei der Unterſuchung, ob zwei Hygrometer mit einander übereinſtimmen, darf man ja nicht vergeſſen, daß nicht alle einerlei Grad der Empfindlichkeit haben. Dieſes iſt beſonders mit ſolchen Hygrometern der Fall, die vorher ſehr verſchiedenen Stand hatten; da iſt immer das trocknere Haar unempfindlicher als das minder trockene und erlangt erſt mit der Zeit wieder ſeine urſprüngliche Lebendigkeit. Indeß wird man bei Haarhygrometern nie eine völlige Übereinſtimmung zu erwarten haben; ſelbſt Sauſſure, der keine Vorſicht verſäumte, verſichert, daß

die meiſten Inſtrumente um 1—2 Grade von einander abweichen, ſelbſt wenn die Haare nahe gleiches Alter haben. Haare von ſehr ungleichem Alter ſtimmen in ihrer Ausdehnung gar ſelten überein, indem das ältere faſt immer unempfindlicher iſt und ſich bei gleichen Änderungen der Feuchtigkeit um weniger ändert als ein jüngeres.

134. Nichts iſt einfacher als der Gebrauch des Haarhygrometers. Man darf es nur an den Ort bringen, wo man die Feuchtigkeit beſtimmen will, und den ſtationären Stand des Zeigers abwarten. Aber die unmittelbaren Anzeigen dieſes Inſtrumentes geben für ſich noch nicht die Feuchtigkeitsmenge oder die Spannkraft der Dünſte an, auch wird das Haar nicht blos von der Feuchtigkeit, ſondern auch von der Temperatur afficirt. Daher gehört zur näheren Beſtimmung des hygrometriſchen Zuſtandes der Luft eine eigene Berechnung.

135. Die Wärme dehnt das Haar und das Geſtell aus, und gibt der Luft oder vielmehr dem Raume eine größere Capacität für die Dünſte. Steigt daher die Temperatur, ſo muß der Zeiger gegen die Feuchtigkeitspuncte ſteigen, wegen der Ausdehnung des Haares, und ſinken wegen der Ausdehnung des Geſtelles. Die erſtere Ausdehnung beträgt nach Sauſſure für 1° R nahe 0.000019 von der Länge des Haares, die letztere nach Laplace und Lavoiſier, falls die Rahme aus Meſſing beſteht, 0.000023 von der Höhe der Rahme, mithin die geſammte Ausdehnung 0.000042. Ferner wenn die Temperatur ſteigt, ſo ſuchen die vorhandenen Dünſte mit mehr Energie der anziehenden Kraft des Haares zu widerſtehen und der Zeiger muß gegen den Nullpunct der Scale hinrücken, wenn auch die abſolute Feuchtigkeitsmenge dieſelbe geblieben iſt. Das Gegentheil wird beim Sinken der Temperatur eintreten müſſen. Darum iſt es in manchem Falle nothwendig, Hygrometerſtände, die bei verſchiedenen Wärmegraden beobachtet worden ſind, auf eine Normaltemperatur zu reduciren. Zu dieſem Behufe hat Sauſſure eine Tabelle geliefert, welche für jeden Hygrometerſtand die Änderungen desſelben angibt, welche in ihm vorgehen, wenn die Temperatur um einen Grad ab- oder zunimmt, und welche alle Einwirkungen der Wärme umfaßt, die vorhin angegeben wurden. Dieſe Tabelle iſt aber für ein 80 theiliges Thermometer eingerichtet, deſſen Siedpunct bei 27 P. Z. Luftdruck beſtimmt wurde. Da hier durchaus das hunderttheilige Thermometer, deſſen Siedpunct bei $0^m.76$

beſtimmt iſt, zum Grunde gelegt wurde, ſo mußte Sauſſure's Tabelle für dieſes Thermometer eingerichtet werden.

136. Iſt v die Änderung des Hygrometers für eine Variation des achzigtheiligen Thermometers von 1°, ſo iſt $\frac{4v}{5}$ dieſelbe für die Änderung der Temperatur um 1° am hunderttheiligen Thermometer, deſſen Siedpunct wie der vorige bei 27 P. Z. beſtimmt wurde. Wird der Siedpunct des letzteren auf den Luftdruck $0^m.76$ bezogen, ſo wird dadurch ſein Fundamentalabſtand in dem Verhältniſſe von 100 : 101 vergrößert und aus $\frac{4v}{5}$ wird $\frac{4.04}{5}\,v = v_1$. Auf gleiche Weiſe iſt die Tabelle abgeändert, welche nach Sauſſure anzeigt, um wie viele Grade das Thermometer ſinken muß, um den Hygrometerſtand auf 100° zu bringen. Beide vereint enthält die Tafel XIII.

Nach den in den zwei erſten Rubriken dieſer Tabelle enthaltenen Zahlen läßt ſich die Reduction eines Hygrometerſtandes auf eine andere Temperatur leicht bewerkſtelligen. Iſt t_1 dieſe Temperatur, t diejenige, bei welcher der Hygrometerſtand h beobachtet wurde, v_1 die betreffende Änderung des Hygrometers für 1° C, ſo hat man für den corrigirten Hygrometerſtand h_1

$$h_1 = h - v\,(t_1 - t)$$

wobei das Zeichen von t und t_1 wohl zu beobachten iſt.

Hat man bei 16°.5 C den Hygrometerſtand 64° beobachtet, und man will ihn auf 10° C reduciren, ſo iſt

$v_1 = 1.404$, $t_1 - t = -6.5$ und $h_1 = 64 + 1.404 \times 6.5 = 73.13$.

Wäre derſelbe Hygrometerſtand bei —4°.6 beobachtet worden, ſo hätte man für die Reduction auf 10°; $t_1 - t = 14°.6$ und

$$h_1 = 64 - 1.404 \times 14.6 = 43.50.$$

137. Um aus dem Hygrometerſtande die relative Spannkraft des Dunſtes berechnen zu können, hat Gay-Luſſac ein Hygrometer unter einen Recipienten geſtellt, in welchem die aus einer wäſſerigen Salzlöſung oder einer verdünnten Säure entwickelten Waſſerdünſte bei einer beſtimmten Temperatur ihre größte Spannkraft erlangt hatten, bei der aber doch das Hygrometer unter dem Feuchtigkeitspuncte ſtehen mußte; hat den Stand desſelben beobachtet, wenn er ſtationär geworden war, und dieſen Stand mit der bekannten Spannkraft der Dünſte verglichen. Seine Reſultate enthält folgendes Täfelchen. Sie wurden bei 10° C erhalten.

Relative Spannkraft der Dünſte bei 10° C	Hygrometergrad
100.0	100.0
90.6	97.7
82.3	92.2
75.9	87.4
66.0	82.0
50.5	71.0
37.6	61.3
18.1	33.1
12.2	25.3
2.4	6.1
0.0	0.0

Dieſe Reſultate graphiſch dargeſtellt, zeigten, daß die Curve der Spannkräfte für wachſende Hygrometergrade eine Hyperbel ſey; es wurde ihre Gleichung geſucht und daraus die Interpolationswerthe gefunden, wie ſie die Tafel (XIV) angibt.

Dieſe Tabelle iſt zwar nur für die Temperatur von 10° C conſtruirt, läßt ſich aber auch ohne großen Fehler für jede andere Temperatur brauchen. Will man nach ihr die abſolute Spannkraft der Dünſte finden, ſo braucht man nur die relative, wie ſie die Tafel gibt, mit der größten Expanſivkraft für die herrſchende Temperatur zu multipliciren und das Reſultat durch 100 zu dividiren.

138. Mit dem Haarhygrometer hat das Fiſchbeinhygrometer viele Ähnlichkeit. Es iſt in Fig. 73 abgebildet und beſteht aus einem Fußgeſtelle mit zwei verticalen Säulen, an denen der zur Scale beſtimmte Kreis ſo angebracht iſt, daß er erhöht und geſenkt, aber in jeder Lage befeſtiget werden kann. Am Fußgeſtelle iſt eine Klemme angebracht, in welcher das Fiſchbein mit einer Schraube feſt gemacht iſt, während es am oberen Ende von einer zweiten Klemme gehalten wird, die ſelbſt an einem Seidenbande hängt, das um die Rolle geht, welche mit dem Zeiger an derſelben Axe ſteckt. Eine etwas kleinere an derſelben Axe befindliche Welle wird nach entgegengeſetzter Richtung durch eine Seidenſchnur gezogen, die mittelſt eines ſchraubenförmig gewundenen federnden Silberdrahtes ſtets geſpannt erhalten wird. Das Fiſchbein iſt quer über die Faſern geſchnitten, 8 Z. lang, 1 L. breit und möglichſt dünn. Man kann

einen ſolchen Streifen ſo dünn ausarbeiten, daß er bei der angegebenen Breite und Länge nur $\frac{1}{4}$ Gr. wiegt und doch 160 Gr. tragen kann.

139. Zur Beſtimmung des Punctes der größten Feuchtigkeit wird dieſes Inſtrument in Waſſer getaucht und ſo lange darin gelaſſen, bis ſich das Fiſchbein nicht mehr verlängert. Den Punct der größten Trockenheit beſtimmt man, indem man das Inſtrument zugleich mit ungelöſchtem Kalk in einen abgeſperrten Recipienten bringt und den ſtationären Stand des Zeigers abwartet, der gewöhnlich innerhalb drei Wochen eintritt.

140. Sauſſure, der große Kenner hygrometriſcher Inſtrumente, macht dem Fiſchbeinhygrometer mit Recht den Vorwurf, daß ſein Feuchtigkeitspunct unrichtig beſtimmt ſey, weil es ſich beim hygrometriſchen Gebrauche nicht darum handelt, wie viel Waſſer überhaupt ein Körper aufnehmen kann, ſondern wie viel er der mit Dünſten geſättigten Luft zu entreißen vermag. Darum haben auch die Grade über 80 keine hygrometriſche Bedeutung mehr, indem ein ſolches Hygrometer in ganz mit Dünſten geſättigter Luft nahe auf 80° weiſet. Auch iſt die Beſtimmung des Punctes der größten Trockenheit nicht nach Sauſſure's Sinn vollzogen, und liegt wahrſcheinlich zu nahe an erſterem; endlich ſcheint das Fiſchbein überhaupt, als ein Agregat paralleler Faſern, nicht beſonders geeignet, durch Waſſer eine beſtimmte Ausdehnung anzunehmen. Indeß wird dieſes Inſtrument, beſonders in England, noch öfters gebraucht, darum iſt es nothwendig, den Zuſammenhang zwiſchen ſeinen Anzeigen und der Spannkraft der Dünſte, welche ihnen entſpricht, näher zu unterſuchen.

141. Zu dieſem Ziele gelangt man auf zweifachem Wege, nämlich durch Vergleichung der De Luc'ſchen Grade mit den Sauſſure'ſchen bei demſelben Feuchtigkeitszuſtande oder durch unmittelbares Beſtimmen der Spannkraft der Dünſte für beſtimmte Anzeigen des Fiſchbeinhygrometers. Zum erſteren Behufe haben De Luc ſelbſt und ſpäter Böckmann eine Tabelle geliefert, die aber an Brauchbarkeit viel verliert, weil die Temperatur nicht angegeben iſt, auf die ſie ſich bezieht. Eine andere Tabelle lieferte Dulong. Er verglich den Stand des Sauſſure'ſchen Hygrometers mit dem des De Luc'ſchen und mittelte zugleich die relative Spannkraft für die Temperatur von 13°.9 C aus, die beiden entſpricht. Er fand, was die folgende Tafel enthält:

Hygrometerſtand		Relative Spannkraft
nach de Luc	nach Sauſſure	
12°.2	28	0.0997
18 .0	44	0.1980
22 .5	55	0.2976
31 .8	75	0.4876
37 .5	84	0.5912
45 .5	91	0.6844
54 .0	92	0.7797
58 .0	97.5	0.8774
70 .0	102	0.9762

Man ſieht ſchon aus dieſer Tabelle, daß das Haarhygrometer nicht gut adjuſtirt war und daß daher noch andere Verſuche zu wünſchen ſind. Dieſe ſtellt Anderſon, wie es ſcheint, mit großer Genauigkeit an. Er beobachtete zu gleicher Zeit ein Haarhygrometer, ein Fiſchbeinhygrometer und ein Thermometer mit befeuchteter Kugel, und berechnete aus letzterem die Spannkraft der Dünſte. Hierauf ſuchte er für den Gang des Fiſchbeinhygrometers einen analytiſchen Ausdruck, für welchen dieſe Beobachtungen die Conſtanten lieferten, und entwarf nach der ſo gefundenen Gleichung die Tabelle, welche in den angehängten Tabellen als die XV[te] vorkommt. Z. B. Bei einer Beobachtung, wie ſie Anderſon anſtellte, ſtand das De Luc'ſche Hygrometer auf 27°, während die Lufttemperatur 65° F = 18°.33 C, der Luftdruck 29.35 Z. = 745^{mm}.4 und der Stand des feuchten Thermometers 51°.5 = 10°.56 C war. Für 27° findet man durch Interpoliren aus obiger Tafel die relative Spannkraft = 40.3, mithin da die größte abſolute Spannkraft bei 18°.33 C 15.66, als abſolute Spannkraft des wirklich vorhandenen Dunſtes 15.66 × 0.403 = 6.31. Nach dem Stande des befeuchteten Hygrometers findet man mittelſt Anderſons Formel 16.11 — 9.34 = 6.32.

142. Wiewohl nach dem Vorhergehenden jedes der genannten Hygrometer zur Beſtimmung des Feuchtigkeitszuſtandes der Luft geeignet iſt, ſo haben doch nicht alle einerlei wiſſenſchaftlichen Werth, weil dieſe Beſtimmung nicht bei jedem mit derſelben Leichtigkeit und Sicherheit erfolgt.

In Betreff der Evidenz der Grundſätze, auf denen das Weſen

der Hygrometer beruht, ſteht das Schwefelätherhygrometer oben an; und es bleibt über ſeinen Gebrauch und die Richtigkeit der dadurch erlangten Reſultate nicht der mindeſte Zweifel, ſobald nur der Thaupunct mit gehöriger Aafmerkſamkeit beſtimmt iſt. Auch iſt dieſes Inſtrument einfach genug, läßt ſich leicht berichtigen und brauchen, gibt ohne weitere Rechnung mit bloßer Beihilfe der Tafel der größten Expanſivkräfte die Luftfeuchtigkeit an, hat aber den Nachtheil, daß es nur durch einen eigens angeſtellten Verſuch zum Ziele führt und beſonders bei trockener Luft und bei geringer Temperatur ungemeine Aufmerkſamkeit fordert, um ein richtiges Reſultat zu geben. Man muß da reichlich und wiederhohlt Äther zutröpfeln und läuft dabei leicht Gefahr, das Metallſchälchen zu benetzen und den dadurch entſtandenen feuchten Fleck für einen Dunſtbeſchlag zu halten. Noch mehr Irrthum kann der Beobachter bei ſehr geringer Temperatur durch die Nähe ſeines Körpers hervorbringen. Darum es in ſolchen Fällen nothwendig iſt, durch eine längere Röhre den Äther zuzuleiten und mittelſt eines Fernrohres den Beſchlag zu beobachten; beides aber iſt mit großen Unbequemlichkeiten verbunden.

143. Das Pſychrometer ruht nicht auf ſo einfacher Baſis. Es läßt ſich zwar ſein Weſen theoretiſch (119) ergründen, fordert aber dazu mehr als das Schwefelätherhygrometer, ohne doch dieſelbe Evidenz zu gewähren. Genau genommen kann man die Größen, welche zur Beſtimmung der Luftfeuchtigkeit mittelſt dieſes Inſtrumentes nothwendig ſind, nur aus den Daten des Schwefelätherhygrometers erkennen (122) und das, was das Pſychrometer anzeigt, fordert nicht blos den Gebrauch der Tafel der größten Expanſivkräfte, um die Luftfeuchtigkeit anzugeben, ſondern auch noch eine ziemlich mühſame Rechnung. Allein es bedarf keines beſonderen Verſuches, um ein Reſultat zu erhalten, ſondern nur einer einfachen Thermometer- und Barometerbeobachtung, das Reſultat hängt weniger von der Geduld und Geſchicklichkeit des Beobachters ab, als beim Schwefelätherhygrometer, und man wird ſelbſt bei minderer Temperatur und großer Trockenheit die beabſichtigte Größe genauer finden als bei jenem, um ſo mehr, als der Thaupunct beim Schwefelätherhygrometer ſchnell vorübergehend iſt und mit einem einzigen Blicke erkannt ſeyn will, während der Stand des Pſychrometers mit Gemächlichkeit beobachtet werden kann.

144. Das Haar- und das Fiſchbeinhygrometer ſtehen in Be-

treff ihrer theoretiſchen Begründung weit hinter den zwei vorhin erwähnten Inſtrumenten. Da das Geſetz, nach welchem ſich die Anziehung des Haares oder Fiſchbeines zum Waſſer bei verſchiedenen Feuchtigkeitsgraden ändert, gänzlich unbekannt iſt, ſo läßt ſich a priori über den Gang dieſes Inſtrumentes gar nichts beſtimmen, und jede Beſtimmung auf empiriſchem Wege läßt ſich um ſo weniger ohne Scheu auf alle Inſtrumente dieſer Art ausdehnen, als es faſt unmöglich iſt, zwei vollkommen gleiche organiſche Körper zu erhalten, und ſich ihr Verhalten ſo ſehr mit der Zeit ändert. Die Erfahrung zeigt dieſes deutlich genug, indem ſie lehrt, daß derſelbe Feuchtigkeitszuſtand, welcher doch von einem Schwefelätherhygrometer und einem Pſychrometer übereinſtimmend angegeben wird, von einem Haarhygrometer ſehr abweichend beſtimmt wird.

145. Wenn es ſich um Vergleichung des Haarhygrometers mit dem Fiſchbeinhygrometer handelt, ſo wird man wohl unbedingt erſterem den Vorzug geben, theils weil es beſſer cultivirt iſt als letzteres, theils auch weil die Verfertigung desſelben nicht ſo vielen Schwierigkeiten unterliegt und leichter zwei Haar- als zwei Fiſchbeinhygrometer übereinſtimmend gemacht werden können.

146. Aus allem geht hervor: 1. daß das Pſychrometer zur Beſtimmung der Luftfeuchtigkeit am beſten geeignet iſt; 2. daß die Anzeigen des Pſychrometers mit denen des Schwefelätherhygrometers übereinſtimmen müſſen und nach dem Zeugniſſe der Erfahrung wirklich übereinſtimmen, 3. daß ein Haarhygrometer keine Beſtimmungen liefert, die volles Zutrauen verdienen.

Siehe hierüber:

Gehlers Wörterbuch. B. II. Artikel Dampf.

Unterſuchungen über die Expanſivkraft der Dämpfe von Kämptz. Halle 1826.

Ure in phil. transact. 1818.

Essais sur l'Hygrométrie par B. H. de Saussure. Neuchatel 1783. Dasſelbe deutſch. Leipzig 1784.

The Edinb. Encyclop. conducted by Bewster. Art. Hygrom.

Zeitſch. für Phyſ. und Math. 4.50 und 5.293.

Auguſt. Über die Anwendung des Pſychrometers zur Hygrometrie. Berlin 1828.

Dritter Abſchnitt.

Bewegung der Körper.

Erſtes Kapitel.

Bewegung der Körper überhaupt, feſter insbeſondere.

1. Wenn irgend eine Kraft auf einen Punct wirket, und denſelben in Bewegung ſetzt; ſo kann man ſich immer vorſtellen, ſie behalte ein unangebbar kleines Zeittheilchen dt hindurch ihre einmal erlangte Intenſität, nach was für einem Geſetze ſich dieſe Intenſität ſonſt auch verändern mag. Hat der Punct durch die Wirkſamkeit einer ſolchen Kraft in der Zeit t den Raum s zurückgelegt und nach Verlauf der Zeit t die Geſchwindigkeit v erlangt; ſo hat man daher immer

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Im nächſtfolgenden Zeitmomente nimmt durch die Wirkſamkeit der Kraft φ die Geſchwindigkeit um dv zu, und es iſt

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Iſt nun p eine Kraft, welche die Geſchwindigkeit v eines Punctes um eine Einheit zu ſteigern vermag, ſo iſt $\varphi : p = \frac{dv}{dt} : 1$ oder $\varphi = p \, . \, \frac{dv}{dt}$. Mithin für $p = 1$

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

2. Wenn ein Syſtem materieller Puncte von Kräften afficirt wird, welche dasſelbe in Bewegung ſetzen, ſo nimmt jeder Punct eine Bewegung an, wie ſie der Natur und Wirkungsweiſe dieſer Kräfte und der Verbindung der Puncte unter einander entſpricht, und man kann ſie in drei auf einander ſenkrechte und den drei Coor-

dinatenaxen x, y, z parallele u, v, w zerlegen. Zugleich iſt man im Stande die Kräfte zu finden, welche dieſe Geſchwindigkeiten nach entgegengeſetzten Richtungen hervorzubringen im Stande ſind. Werden dieſe Kräfte zugleich mit den urſprünglich thätigen in Wirkſamkeit gedacht; ſo hat man das Syſtem der Puncte, auf welche ſich dieſes bezieht, ins Gleichgewicht geſetzt.

Es ſeyen nun X, Y, Z die nach den Coordinatenaxen x, y, z zerlegten Kräfte, welche ſich aus allen auf die Puncte des beweglichen Syſtems wirkenden Kräften ergeben. Dieſe beſchleunigen jeden Punct nach der Richtung x, y, z in der Zeit dt eben ſo wie die Kräfte $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ und die Kräfte

$$X - \frac{d^2x}{dt^2},\ Y - \frac{d^2y}{dt^2},\ Z - \frac{d^2z}{dt^2}$$

erhalten die betreffenden Puncte im Gleichgewichte. Man kommt daher durch die allgemeinen (II 20.) für das Gleichgewicht aufgeſtellten Geſetze nebſt den Bedingungsgleichungen, an welche das Syſtem gebunden iſt, zur Kenntniß der Gleichungen, welche die Geſetze der Bewegung ausdrücken. Es iſt nämlich:

$$\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \\ + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0 \ldots\ldots \quad (A).$$

3. Iſt der bewegte Punct frei, ſo hat man

$$X - \frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad Y - \frac{d^2y}{dt^2} = 0,\quad Z - \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

oder

$$X = \frac{d^2x}{dt^2},\quad Y = \frac{d^2y}{dt^2},\quad Z = \frac{d^2z}{dt^2} \ldots\ldots \quad (B).$$

Werden dieſe Gleichungen integrirt, ſo erhält man mittelſt derſelben die Gleichung der Bahn, welche jeder Punct nach x, y, z beſchreibt und die Lage des Beweglichen in dieſer Bahn für jede gegebene Zeit. Setzt man endlich die Geſchwindigkeiten zuſammen, ſo findet man die Geſchwindigkeit des bewegten Punctes. Iſt dieſe v, ſo erhält man

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)}.$$

Wird das Bewegliche nur im erſten Augenblicke von Kräften afficirt, hierauf aber ſich ſelbſt überlaſſen, ſo ſind alle beſchleunigenden Kräfte $= 0$ oder man hat

$X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ und deßhalb $v = \text{Const.}$

Mithin iſt in dieſem Falle die Bewegung gleichförmig, wie dieſes ohnehin klar iſt.

4. Soll ſich das Bewegliche auf einer vorgeſchriebenen Bahn bewegen, ſo kann man ſich dieſe Bahn wie in (II 23) durch eine Kraft erſetzt denken, welche dem Drucke gleich und entgegengeſetzt iſt, den die Bahn erleidet, und das Syſtem als frei behandeln. Dieſer Druck wird das Reſultat der Wirkſamkeit der Kräfte X, Y, Z und $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2z}{dt^2}$ nach einer auf die Bahn ſenkrechten Richtung ſeyn.

5. Beſteht das Syſtem der beweglichen Puncte aus m, m_1, m_2 ꝛc. deren Inbegriff durch Σm bezeichnet werden mag und bewegen ſich dieſe progreſſiv vorwärts, ſo erhält man:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = X\Sigma m, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = Y\Sigma m,$$

$$\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = Z\Sigma m \;\ldots\ldots\ldots\; (C).$$

Sind nun x_1, y_1, z_1 die rechtwinkeligen Coordinaten des Schwerpunctes (Mittelpunctes der Maſſe) des ganzen Syſtemes, ſo iſt

$$x_1\Sigma m = \Sigma mx, \; y_1\Sigma m = \Sigma my, \; z_1\Sigma m = \Sigma mz$$

und daher

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2}\Sigma m = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2}$$

und daher auch mittelſt (C)

$$\frac{X\Sigma m}{\Sigma m} = \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad \frac{Y\Sigma m}{\Sigma m} = \frac{d^2y_1}{dt^2}, \quad \frac{Z\Sigma m}{\Sigma m} = \frac{d^2z_1}{dt^2}.$$

Dieſe Formeln geben aber die Bewegung des Schwerpunctes, wenn man ſich in ihm die geſammten Maſſen vereinigt denkt und daher bewegt ſich der Schwerpunct eines Syſtemes ſo, als wären alle Maſſen und Kräfte unmittelbar in ihm vereiniget. Dieſes Princip führt

den Namen: das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunctes.

Für $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ bewegen ſich alle Maſſen gleichförmig und geradlinig. Für dieſe Vorausſetzung hat man aber auch

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z_1}{dt^2}=0 \text{ und}$$

$$\frac{dx_1}{dt}=a,\quad \frac{dy_1}{dt}=b,\quad \frac{dz_1}{dt}=c$$

wo a, b, c conſtante Größen bezeichnen, oder endlich

$$x_1=at+a',\ y_1=bt+b_1,\ z_1=ct+c_1$$

wo a_1, b_1, c_1 wieder die Integrationsconſtanten ſind. Eliminirt man hieraus t, ſo erhält man eine Gleichung des erſten Grades zum Beweiſe, daß ſich auch der Schwerpunct geradlinig fortbewegt. Seine Geſchwindigkeit iſt

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1^2}{dt^2}+\frac{dy_1^2}{dt^2}+\frac{dz_1^2}{dt^2}\right)}=\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}.$$

6. Wenn man die Gleichungen (C) der Reihe nach mit $2dx$, $2dy$, $2dz$ multiplicirt und hierauf addirt, ſo erhält man:

$$\Sigma m\left(\frac{2dx\,d^2x+2dy\,d^2y+2dz\,d^2z}{dt^2}\right)=$$
$$=2\Sigma m\,(Xdx+Ydy+Zdz)$$

aber wegen $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ erhält man

$$2dx\,d^2x+2dy\,d^2y+2dz\,d^2z=2ds\,d^2s$$

mithin

$$2\Sigma m\,\frac{ds\,d^2s}{dt^2}=2\Sigma m\,(Xdx+Ydy+Zdz)$$

und hieraus

$$\Sigma m\,\frac{d^2s}{dt^2}=\Sigma mv^2=2\Sigma m\int(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Setzt man aber $\Sigma m\int(Xdx+Ydy+Zdz)=\Phi$, ſo iſt

$$\Sigma mv^2=\text{Const}+2\Phi.$$

Wirken nun auf das Syſtem keine beſchleunigenden Kräfte, ſo iſt $\Phi=0$, und daher

$$\Sigma mv^2=\text{Const}.$$

mithin iſt die Summe der lebendigen Kräfte eines Syſtemes, d. h. die lebendige Kraft des Syſtemes ſelbſt eine beſtändige Größe

und darin beſteht das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Wenn beſchleunigende Kräfte vorhanden ſind und demnach Φ nicht $= 0$ iſt, ſo nimmt die lebendige Kraft $\Sigma m v^2$ zu und ab, ſo wie Φ wächſt oder abnimmt. Da aber Φ von x abhängt und wieder denſelben Werth erlangt, wenn das Bewegliche wieder an demſelben Orte anlangt, ſo erhält auch die lebendige Kraft wieder denſelben Werth, ſobald das Bewegliche wieder ſich an demſelben Orte befindet, der dazwiſchen zurückgelegte Weg mag wie immer beſchaffen ſeyn, und daher wird ein Körper, der z. B. von a nach b kommt, in b dieſelbe Geſchwindigkeit haben, er mag auf geradem oder krummen Wege dahin gelangt ſeyn.

Das erwähnte Princip hat aber nur ſeine Richtigkeit, wenn ein Körper durch unmerklich wachſende Zwiſchenſtufen von einem Zuſtande in den anderen übergeht. Erfolgt eine plötzliche Veränderung der Bewegung, ſo verliert dieſes Princip ſeine Anwendbarkeit, und es findet dabei ein Verluſt an lebendiger Kraft Statt.

7. Wenn ein bewegliches Syſtem ſich um eine der Axen x, y, z dreht, ſo daß bei der Umdrehung um die Axe z die Variation des Winkels, den der auf die Ebene xy projicirte Radius Vector ρ beſchreibet, gleich $\delta\varphi$ iſt und eben ſo $\delta\psi$ und $\delta\omega$ die Variation der auf die Ebenen xz und yz projicirten Radii Vectoren bedeuten, wenn die Drehung um y oder x erfolgt; ſo hat man, wenn die Drehung um die Axe z erfolgt:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi,$$

$$\delta x = -\rho \sin\varphi\, \delta\varphi = -y\,\delta\varphi, \quad \delta y = \rho\cos\varphi\,\delta\varphi = x\,\delta\varphi.$$

Ferner wenn eine Drehung um y Statt findet:

$$\delta x = z\,\delta\psi, \quad \delta z = -x\,\delta\psi$$

und wenn ſich das Syſtem um x dreht:

$$\delta z = y\,\delta\omega, \quad \delta y = -z\,\delta\omega$$

mithin gelten, wenn eine Drehung um alle drei Axen eintritt, alle dieſe Werthe von δx, δy, δz zugleich und man hat aus (A)

$$\Sigma m \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right)(z\,\delta\psi - y\,\delta\varphi) +$$

$$+ \Sigma m \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right)(x\,\delta\varphi - z\,\delta\omega) +$$

$$+ \Sigma m \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right)(y\,\delta\omega - x\,\delta\psi) = 0$$

oder

$$\left[\Sigma m(Yx-Xy)+\Sigma m\left(\frac{y\,d^2x-x\,d^2y}{dt^2}\right)\right]\delta\varphi+$$
$$+\left[\Sigma m(Xz-Zx)+\Sigma m\left(\frac{x\,d^2z-z\,d^2x}{dt^2}\right)\right]\delta\psi+$$
$$+\left[\Sigma m(Zy-Yz)+\Sigma m\left(\frac{z\,d^2y-y\,d^2z}{dt^2}\right)\right]\delta\omega=0$$

und hieraus

$$\Sigma m\,(Xy-Yx)-\Sigma m\left(\frac{y\,d^2x-x\,d^2y}{dt^2}\right)=0$$
$$\Sigma m\,(Zx-Xz)-\Sigma m\left(\frac{x\,d^2z-z\,d^2y}{dt^2}\right)=0,$$
$$\Sigma m\,(Yz-Zy)-\Sigma m\left(\frac{z\,d^2y-y\,d^2z}{dt^2}\right)=0.$$

Integrirt man dieſe Gleichungen, ſo erhält man:

$$\Sigma\int m\,(Xy-Yx)-\Sigma m\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{dt}\right)=c$$
$$\Sigma\int m\,(Zx-Xz)-\Sigma m\left(\frac{x\,dz-z\,dx}{dt}\right)=c_1$$
$$\Sigma\int m\,(Yz-Zy)-\Sigma m\left(\frac{z\,dy-y\,dz}{dt}\right)=c_2$$

wo c, c_1, c_2 die Conſtanten der Integration ſind.

Setzt man nun für x und y die Werthe $\rho\cos\varphi$, $\rho\sin\varphi$, ſo wird

$$x\,dy=\rho^2\cos^2\varphi\,d\varphi,\quad y\,dx=-\rho^2\sin^2\varphi\,d\varphi$$
$$\text{mithin}\; y\,dx-x\,dy=-\rho^2\,d\varphi^2=-\rho\,d\varphi.\rho.$$

Aber $\rho\,d\varphi.\rho$ iſt die Fläche, welche der auf die Ebene xy projicirte Radius Vector ρ in der Zeit dt beſchreibt. Ähnliche Ausdrücke erhält man für $x\,dz-z\,dx$ und für $z\,dy-y\,dz$. Bezeichnet man dieſe Flächen, welche die Projection des Radius Vector beſchreibt, nach der Ordnung mit dA, dB, dC, ſo wird demnach

$$\Sigma\int m\,(Yx-Xy)+\Sigma m\,\frac{dA}{dt}=c$$
$$\Sigma\int m\,(Xz-Zx)+\Sigma m\,\frac{dB}{dt}=c_1$$
$$\Sigma\int m\,(Zy-Yz)+\Sigma m\,\frac{dC}{dt}=c_2.$$

Wenn die Glieder innerhalb des Integralzeichens $= o$ werden, ſo iſt

$$\Sigma m\,dA = c\,dt,\quad \Sigma m\,dB = c_1\,dt,\quad \Sigma m\,dC = c_2\,dt.$$

Die Ausdrücke enthalten das Geſetz der Erhaltung der Flächen.

Die vorhin bezeichneten Integrale ſind in drei Fällen gleich Null: 1. wenn das Bewegliche nur durch einen Stoß getrieben wird; denn dann iſt $X = o$, $Y = o$, $Z = o$. 2. Wenn die Maſſen ſich gegenſeitig anziehen, im Übrigen aber durch keine weitere Kraft afficirt werden; denn in dieſem Falle ſuchen ſich die Theilchen einander zu nähern, können aber dieſes nicht wegen der Unveränderlichkeit des Syſtemes, welches vorausgeſetzt wird. 3. Wenn die Kräfte nach dem Anfangspuncte O der Coordinaten hinzielen. Denn heißt in dieſem Falle S die nach O zielende Kraft (Centripetalkraft), ſo iſt

$$X = -\frac{Sx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}},\quad Y = -\frac{Sy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}},$$

und daher $Xy = Yx$ ꝛc.

8. Aus 6 hat man

$$\Sigma m v^2 = \text{const} + 2\Sigma\int m(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Differenziirt man nach δ, ſo wird:

$$\Sigma m v\,\delta v = \Sigma m(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z).$$

Setzt man dieſen Werth von $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ in die Gleichung (A), ſo erhält man:

$$\Sigma m v\,\delta v = \Sigma m\left(\frac{d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,dz}{dt^2}\right).$$

Berückſichtiget man zugleich, daß man hat $v = \dfrac{ds}{dt}$,

$\delta v = \dfrac{\delta ds}{dt}$ oder weil $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ iſt:

$$\delta v = \frac{\delta x\,d\delta x + \delta y\,d\delta y + \delta z\,d\delta z}{ds\,dt},$$ ſo wird

$$\Sigma m\,\delta(v\,ds) = \Sigma m\,d\left(\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt}\right)$$

und durch Integriren

$$\Sigma m\,\delta\int v\,ds = \text{const} + \Sigma m\left(\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt}\right).$$

Dieſes Integral erſtreckt ſich vom Puncte, wo jede Maſſe ausgeht, bis zu dem, wohin ſie gelangt. Heißt es F, wenn x, y, z dem Ausgangs-, hingegen f, wenn dieſelben dem Anlangungspuncte entſprechen, ſo erhält man

$$\Sigma m \delta \int v ds = f - F.$$

Da nun dieſe Puncte als unveränderlich angenommen werden, ſo iſt $f = 0$ und $F = 0$, mithin auch

$$\Sigma m d \int v ds = 0.$$

Demnach iſt der Weg, welchen jede der bewegten Maſſen des Syſtems beſchreibt, ſo beſchaffen, daß, wenn man jede Maſſe mit dem Integrale $\int v ds$ multiplicirt, die Summe dieſer Producte ein Kleinſtes wird. Deßhalb heißt dieſes das Princip der kleinſten Wirkung. Betrachtet man einen iſolirten Punct, ſo hat man

$$\delta \int v ds = 0$$

oder die Bahn, welche er beſchreibt, iſt ſo beſchaffen, daß für ſie obiges Integral kleiner wird, als es für jede andere Bahn der Fall wäre.

9. Die bisher entwickelten Geſetze der Bewegung ſind wahre Naturgeſetze und enthalten die allgemeinſten Normen, nach welchen alle Bewegungen erfolgen. Durch Anwendung auf ſpecielle Fälle erhält man das, was ſich auf ſolche Fälle bezieht. Handelt es ſich z. B. um die freie Bewegung eines ſchweren Körpers im leeren Raume, ſo hat man, wenn die Coordinate z als die Verticale angeſehen wird und die Intenſität der Schwere g heißt,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

und demnach

$$\frac{d^2 z}{dt} = g dt \text{ oder } \frac{dz}{dt} = v = gt, \text{ und } z = \tfrac{1}{2} g t^2$$

alſo die ohnehin ſchon bekannten Formeln, in der Vorausſetzung, daß für $t = 0$ auch $v = 0$ und $z = 0$ ſey. Fällt ein ſchwerer Körper in einem widerſtehenden Mittel und nimmt man an, daß der Widerſtand dem Quadrate ſeiner Geſchwindigkeit proportional ſey, ſo geht g in $g - g c^2 v^2 = g (1 - c^2 v^2)$ über, wo c eine von der Natur des widerſtehenden Mittels abhängige Größe iſt. Man hat daher

$$\frac{d^2 z}{dt} = g (1 - c^2 v^2) dt, \text{ daraus}$$

$$gdt = \frac{d^2z}{(1-c^2v^2)\,dt} = \frac{dv}{1-c^2v^2} \text{ und } g\,dz = \frac{v\,dv}{1-c^2v^2}.$$

Nimmt man wieder an, es ſey für $t=0$ auch $v=0$ und $z=0$, ſo erhält man durch Integration dieſer zwei Gleichungen:

$$v = \frac{1}{c}\cdot\frac{e^{2gct}-1}{e^{2gct}+1};\quad z = \frac{1}{2gc^2}\cdot\log\frac{1}{(1-c^2v^2)}.$$

Eliminirt man daraus v, ſo wird

$$z = \frac{1}{gc^2}\cdot\log\tfrac{1}{2}\left(e^{gct}+e^{-gct}\right)$$

e bedeutet die Baſis der natürlichen Logarithmen.

Nimmt man beim freien Falle auf die Variation der Schwere Rückſicht, ſo hat man, wenn der Halbmeſſer der Erde $= r$, die Entfernung des Beweglichen vom Mittelpuncte der Erde beim Anfange der Bewegung a iſt, ſtatt g zu ſetzen $\frac{gr^2}{(a-z)^2}$. Man findet daher

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-z)^2}$$

und wenn man beiderſeits mit $2\,dz$ multiplicirt und dann integrirt:

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \varkappa + \frac{2gr^2}{a-z}$$

wo $\varkappa$ die Conſtante der Integration bedeutet. Hat man nun wieder für $t=0$, $z=0$ und $\frac{dz}{dt}=0$, ſo wird

$$0 = \varkappa + \frac{2gr^2}{a} \text{ oder } \varkappa = -\frac{2gr^2}{a}$$

mithin

$$\frac{dz^2}{dt^2} = v^2 = \frac{2gr^2}{a-z} - \frac{2gr^2}{a} = \frac{2gr^2}{a}\cdot\frac{z}{a-z}$$

Aus obiger Differenzialgleichung findet man auch

$$dt = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\cdot\frac{a-z}{\sqrt{(az-z^2)}}\cdot dz =$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(\frac{(\frac{1}{2}a-z)\,dz}{\sqrt{(az-z^2)}} + \frac{1}{2}a\,\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2-(\frac{1}{2}a-z)^2}}\right)$$

und durch Integriren

$$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \left[\sqrt{(az - z^2)} + \frac{a}{2} \text{ arc } \left(\cos \frac{a - 2z}{a} \right) \right].$$

Zweites Kapitel.

Pendelbewegung.

10. Die Pendelbewegung iſt für den Phyſiker ſo wichtig und die vollſtändige Entwickelung ihrer Geſetze mittelſt elementarer mathematiſcher Kenntniſſe ſo wenig ausführbar, daß ſie hier, wo es ſich gerade um die Darſtellung der für die Naturlehre beſonders wichtigen Bewegungsgeſetze handelt, näher betrachtet werden muß. Zuerſt ſoll die Theorie des einfachen Pendels, das ſich im leeren Raume bewegt, und hierauf die des zuſammengeſetzten vorgenommen werden, die Darſtellung der Art und Weiſe endlich, wie man Pendelverſuche anſtellt und ſie auf den mathematiſchen Zuſtand reducirt, ſoll den Beſchluß machen.

A. Theorie des Kreispendels.

11. Es ſey l die Länge eines einfachen Kreispendels, der unterſte Punct desſelben in der Lage des Gleichgewichtes ſey der Anfangspunct der Coordinaten z und y, und dieſe werden von unten nach oben gezählt. z liege in der Verticalen. Hat für die anfängliche Elongation z den Werth c, ſo iſt die Geſchwindigkeit in dem Puncte, welchem y und z entſprechen,

$$v = -\frac{ds}{dt_1} = \sqrt{2g(c - z)}.$$

Ferner folgt aus der Natur des Kreiſes

$$ds = \frac{l\,dz}{\sqrt{(2lz - z^2)}},$$

und daher

$$dt_1 = -\frac{ds}{v} = -\frac{l}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(c - z)(2lz - z^2)}}$$

wo t_1 die Zeit der Bewegung vorſtellt.

Das Integral dieſer Gleichung läßt ſich nicht durch einen endlichen Ausdruck darſtellen und man iſt gezwungen, das zweite Glied desſelben in eine ſchnell convergirende Reihe aufzulöſen, von wel-

cher wenige Glieder t_1 ſchon ſcharf genug angeben. Zu dieſem Behufe bringe man die vorige Gleichung in folgende Form:

$$dt_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dz\left(1-\frac{z}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(cz-z^2)}}.$$

Es iſt aber

$$\left(1-\frac{z}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2l} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^2}{4l^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^3}{8l^3} + \text{rc.}$$

und wenn man die Integration von $z=0$ bis $z=c$ ſich erſtrecken läßt:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(cz-z^2)}} = \pi$$

mithin

$$t_1 = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Big[1 + (\tfrac{1}{2})^2\frac{c}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{c^2}{4l^2} + \\ + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{c^3}{8l^3} + \text{rc.}\Big]$$

Heißt nun die Zeit einer ganzen Oſcillation t, ſo hat man

$$t = 2t_1$$

und daher

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Big[\,[1 + (\tfrac{1}{2})^2\frac{c}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{c^2}{4l^2} + \\ + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{c^3}{8l^3} + \ldots\Big] \ldots \quad (A).$$

12. Die Pendel, mit denen es der Phyſiker in der Wirklichkeit zu thun hat, ſind ſtets phyſiſche oder zuſammengeſetzte Pendel und er muß daher die Geſetze kennen, nach denen ein ſolches ſchwingt. Man denke ſich demnach ein Syſtem unveränderlich mit einander verbundener Maſſen m um eine unverrückbare horizontale Axe beweglich und nehme an, in dem vorhin gebrauchten rechtwinkeligen Coordinatenſyſteme ſtelle x dieſe Axe vor, und man hat

$$\Sigma m(Yz - Zy) = \Sigma m\left(\frac{z\,d^2y - y\,d^2z}{dt^2}\right).$$

Iſt der Abſtand der Maſſe m von der Axe $=r$ und b der Winkel, den eine durch m und die Axe gehende Gerade mit der Ebene der xz macht, ſo iſt $y=r\sin b$, $z=r\cos b$, $z\,dy-y\,dz = r^2\,db$ und

$$\frac{y d^2 x - x d^2 y}{d t^2} = d\,(r^2 \mathrm{d} b)$$

mithin auch

$$\Sigma m\,(Yz - Zy) = \Sigma m\,\frac{d\,(r^2 \mathrm{d} b)}{d t^2} = \Sigma m r^2\,\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d} t^2}$$

letzteres darum, weil r von t unabhängig iſt.

Wirkt nun auf dieſes Syſtem nur die Schwere, und iſt z vertical, ſo hat man $Z = g$, $Y = o$. Beſteht ferner das Syſtem aus einer den Raum ſtettig erfüllenden Maſſe, ſo bezeichnet m ein Maſſenelement $= dm$ und die Summen Σ gehen in Intergrale über, darum wird

$$-\int g y\,dm = \frac{d^2 b}{d t^2} \int r^2\,dm$$

oder wenn h die mit y parallele Coordinate des Schwerpunctes, m hingegen die geſammte Maſſe des um x beweglichen Körpers vorſtellt:

$$-\,g m h = \frac{d^2 b}{d t^2} \int r^2\,dm.$$

Iſt ω die Winkelgeſchwindigkeit, mit welcher der Körper ſich zu bewegen fortfahren würde, wenn nach Verlauf der Zeit t die Kraft zu wirken aufhörte, ſo hat man $\omega = \frac{db}{dt}$; $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 b}{d t^2}$ und deßhalb

$$\frac{d\omega}{dt} = -\,\frac{g m h}{\int r^2\,dm}.$$

Heißt $\varkappa$ die vom Schwerpuncte ſenkrecht auf die Rotationsaxe gezogene gerade Linie, ſo iſt $h = \varkappa \sin b$. Setzt man dieſen Werth in die vorhergehende Gleichung, multiplicirt ſie mit $\omega\,dt = db$ und integrirt, ſo erhält man

$$\omega^2 = \frac{2 g m \varkappa \cos b}{\int r^2\,dm} + \text{const.}$$

Zur Beſtimmung der const weiß man, daß am Anfange der Bewegung, wo der Körper um den Winkel a aus der Lage des Gleichgewichtes gebracht worden iſt, $\omega = o$ iſt. Daraus geht hervor

$$o = \frac{2 g m \varkappa \cos a}{\int r^2\,dm} + \text{const}$$

mithin

$$\omega^2 = \frac{2 g \varkappa m}{\int r^2 dm} (\cos b - \cos a) \; . \; . \; . \; . \quad (B).$$

Der Ausdruck $\int r^2 dm$ heißt das Moment der Trägheit des Pendels.

13. Denkt man ſich die ganze Maſſe m dieſes Körpers in einem Puncte vereiniget, welcher in einer auf der Drehungsaxe ſenkrechten Linie liegt und deſſen Entfernung von der Axe $= l$ iſt, ſo wird $\varkappa = l$, $\int r^2 dm = l^2 m$ und daher für dieſes Pendel

$$\omega_1^2 = \frac{2g}{l} (\cos b - \cos a).$$

Soll für gleiche Ausſchlagwinkel b und a dieſes Pendel mit dem vorhergehenden einerlei Winkelgeſchwindigkeit haben, oder $\omega_1 = \omega$ ſeyn, ſo wird man

$$l = \frac{\int r^2 dm}{m \varkappa} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (C)$$

haben. Der Punct, in welchem die ganze Maſſe m vereiniget gedacht wurde und deſſen Entfernung von der Drehungsaxe dieſer Gleichung entſpricht, heißt Schwingungsmittelpunct und die mit der Schwingungsaxe parallele Linie, in welcher alle Puncte dieſer Art liegen, Schwingungsaxe.

14. Es ſey das Trägheitsmoment in der Vorausſetzung, daß die Rotationsaxe durch den Schwerpunct geht, gegeben, und man ſuche dasſelbe für eine andere mit jener parallele Axe, deren Entfernung von jener $= \varkappa$ iſt. Man nehme den Schwerpunct als Anfangspunct der Coordinaten an und denke ſich erſtere Axe in der Richtung der x, die Coordinaten der anderen Axe in der Ebene der zy ſeyen p und q, endlich ſey ρ die Entfernung eines Maſſenelementes dm von der erſten, r dieſelbe von der zweiten Axe. Da hat man

$$\rho^2 = z^2 + y^2$$

$$r^2 = (z-p)^2 + (y-q)^2 = \rho^2 + \varkappa^2 - 2(pz + qy)$$

mithin

$$\int r^2 dm = \int \rho^2 dm + \varkappa^2 m - 2 \int dm (pz + qy)$$

aber weil nur eine Bewegung um die gegebene Axe möglich iſt:

$$\int dm (pz + qy) = 0$$

mithin

$$\int r^2 dm = \int \rho^2 dm + m\varkappa^2.$$

oder wenn man $\int \rho^2 dm = m f^2$ ſetzt:

$$\int r^2 dm = m (f^2 + \varkappa^2).$$

Subſtituirt man dieſen Werth in die Gleichung (*C*), ſo wird

$$l = \varkappa + \frac{f^2}{\varkappa}.$$

Läßt man nun das zuſammengeſetzte Pendel um eine andere, aber mit erſterer parallele Axe ſchwingen, deren Entfernung vom Schwerpuncte $= \varkappa_1$ iſt, ſo wird dieſes ſchwingen, wie ein einfaches Pendel von der Länge λ und man hat

$$\lambda = \varkappa_1 + \frac{f^2}{\varkappa_1}.$$

Eliminirt man aus dieſen beiden Gleichungen f, ſo erhält man

$$\varkappa_1 (l - \lambda) = (\varkappa - \varkappa_1)(\varkappa + \varkappa_1 - l).$$

Geht die zweite Schwingungsaxe durch den Schwingungsmittelpunct der erſteren, ſo iſt $\varkappa + \varkappa_1 = l$, und man hat daher

$$l - \lambda = 0 \text{ oder } l = \lambda$$

oder die Schwingungszeit ändert ſich durch Verwechslung der Axen nicht. Man kann auch umgekehrt behaupten: Wenn ſich bei der Verwechslung der Axen die Schwingungszeit nicht ändert oder $l = \lambda$ iſt, ſo iſt der Abſtand beider Axen von einander gleich der Länge eines einfachen, gleichzeitig ſchwingenden Pendels; denn für $l - \lambda = 0$ iſt auch

$$0 = (\varkappa - \varkappa_1)(\varkappa + \varkappa_1 - l)$$

und daher entweder $\varkappa - \varkappa_1 = 0$ oder $\varkappa + \varkappa_1 - l = 0$; aus $\varkappa - \varkappa_1 = 0$ läßt ſich für die Größe l keine Folgerung ziehen, für den zweiten Fall folgt aber

$$\varkappa + \varkappa_1 = l.$$

Ein ſolches Pendel mit verwechſelbaren Axen heißt ein **Reverſionspendel**. **Bohnenberger** hat ſchon vor Langem darauf aufmerkſam gemacht, **Kater** hat es aber zuerſt zu großen Verſuchen benützt und deſſen ungemeine Brauchbarkeit vollkommen außer Zweifel geſetzt.

15. Bisher wurde auf den Widerſtand des Mittels und auf etwaige an der Axe des Pendels vorhandene Reibung gar keine Rückſicht genommen. Man kann aber auch dieſe Hinderniſſe in Rechnung ziehen. Wird ein einfaches Pendel von der Länge l um den Winkel a aus der verticalen Lage gebracht und hat es ſich dieſer Verticalen um den Bogen s genähert, ſo daß es mit derſelben nur noch den Winkel b bildet und die Geſchwindigkeit ω erlangt; ſo

wird es durch die Kraft $g \sin b$ beſchleuniget, aber durch die Kräfte $p\omega^2$ und qg verzögert, und zwar durch erſtere vermöge des Luftwiderſtandes, durch letztere vermöge der Reibung, wenn vorausgeſetzt wird, daß der Luftwiderſtand dem Quadrate der im leeren Raume erlangten Geſchwindigkeit proportionirt iſt und daß die Reibung eine conſtante Größe ſey. p und q ſind da beſtändige, von der Natur dieſer Hinderniſſe abhängige Größen. Man hat daher

$$\frac{d\omega}{dt} = g \sin b - p\omega^2 - qg.$$

Aber weil $s = la - lb$ und $ds = -l\,db$, $\omega = \frac{ds}{dt} = -\frac{l\,db}{dt}$ iſt, ſo folgt aus dieſer Gleichung, wenn man dt wegſchafft und mit 2 multiplicirt:

$$2\omega\, d\omega - 2pl\omega^2\, db = -2lg\, db \sin b + 2qlg\, db.$$

Wird dieſe Gleichung mit e^{-2plb} multiplicirt, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen bezeichnet; ſo wird ſie integrabel und man erhält:

$$\omega^2 e^{-2plb} = \text{const} +$$
$$+ \frac{2lg}{1 + 4p^2l^2} \cdot e^{-2plb} (\cos b + 2pl \sin b) - \frac{qg}{p} e^{-2plb}.$$

Beſtimmt man die const ſo, daß ω für $b = a$ verſchwindet, ſo wird nach der Multiplication mit e^{2plb}

$$\omega^2 = \frac{2gl}{1 + 4p^2l^2} \Big(\cos b - \cos a - 2pl(\sin a - \sin b) +$$
$$+ \left(1 - e^{-2pl(a-b)}\right)(\cos a - 2pl \sin a)\Big) -$$
$$- \frac{qg}{p}\left(1 - e^{-2pl(a-b)}\right).$$

Werden p und q als ſehr kleine Größen der erſten Ordnung betrachtet, ſo kann man bei der erſten Ordnung ſtehen bleiben und annäherungsweiſe ſetzen: $1 - e^{-2pl(a-b)} = 2pl(a-b)$ und dadurch die vorhergehende Gleichung in folgende umſtalten:

$$\omega^2 = 2lg \left\{ \begin{array}{l} \cos b + 2pl(\sin b - b\cos a) + qb \\ -\cos a - 2pl(\sin a - a \sin a) - qa \end{array} \right\} \ldots (E).$$

Weil nun nebſt den Größen p und q auch a und b in der Regel nur klein ſind; ſo kann man ſetzen

$$a = \sin a + \tfrac{1}{6}\sin a^3,\quad b = \sin b + \tfrac{1}{6}\sin b^3.$$

Setzt man überdieß der Kürze wegen

$$4pl\sin\tfrac{1}{2}a^2 + q - (\tfrac{1}{3}pl\cos a - \tfrac{1}{6}q)\sin b^2 = m$$
$$4pl\sin\tfrac{1}{2}a^2 + q - (\tfrac{1}{3}pl\cos a - \tfrac{1}{6}q)\sin a^2 = n$$

ſo wird

$$\omega^2 = 2lg\,[\cos b + m\sin b - (\cos a + n\sin a)]$$

oder nahe

$$\omega^2 = 2lg\,[\cos(b-m) - \cos(a-n)]$$

oder endlich, wenn man $b - m = b_1$, $a - n = a_1$ und $\sin\tfrac{1}{2}a_1\cos\varphi = \sin\tfrac{1}{2}b_1$ ſetzt

$$\omega = 2\sqrt{lg}.\sin\tfrac{1}{2}a_1\sin\varphi \;\ldots\ldots\ldots\; (F).$$

Man hat aber auch umgekehrt

$$b = b_1 + m = b_1 + 4pl\sin\tfrac{1}{2}a^2 + q - \tfrac{1}{6}(2pl\cos a - q)\sin b^2$$

mithin $l\,db = l\,db_1\,[1 - \tfrac{1}{3}(2pl\cos a - q)\sin b_1\cos b_1]$

und weil $-\sin\tfrac{1}{2}a_1 d\varphi\sin\varphi = \tfrac{1}{2}db_1\cos\tfrac{1}{2}db_1$ und $ds = -l\,db$ iſt

$$ds = 2l\sin\tfrac{1}{2}a_1 d\varphi\sin\varphi\left(\frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}b_1} - \tfrac{2}{3}(2pl\cos a - q)\sin\tfrac{1}{2}b_1\cos b_1\right).$$

Mittelſt der Werthe von ds und ω erhält man

$$t = \frac{ds}{\omega} = \sqrt{\frac{l}{g}}.\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2\cos\varphi^2)}} -$$
$$- \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}a_1\,(2pl\cos a - q)$$
$$\times\sqrt{\frac{l}{g}}.\int d\varphi\cos\varphi\,(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}a_1^2\cos\varphi^2).$$

Soll t die Zeit einer Schwingung bedeuten, ſo muß ſich die Integration erſtrecken von der größten Elongation des Pendels auf einer Seite der Verticalen bis zur größten Elongation auf der entgegengeſetzten und in dieſen beiden Lagen iſt $\omega = 0$. Dieſen Werth erhält ω nach (F), für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \pi$. Für $\varphi = 0$ iſt aber $\sin\tfrac{1}{2}a_1 = \sin\tfrac{1}{2}b_1$ und daher $a_1 = b_1$ und $a = b$. Für $\varphi = \pi$ iſt $b_1 = -a_1 = -(a-n)$ und daher $b = -(a_1 - n) = -(a - 2n)$ oder der ganze Schwingungsboden $= 2(a-n)$. Demnach braucht man, um die Dauer einer Schwingung mit Rückſicht auf die hier betrachteten Hinderniſſe zu finden, die vorhergehende Gleichung nur innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ zu integriren. Dieſen Grenzen gemäß verſchwindet das zweite Integral, und man erhält

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin \tfrac{1}{2} a_1^{\,2} + \left(\frac{1.3}{1.4}\right)^2 \sin \tfrac{1}{2} a_1^{\,4} \ldots \right] (G).$$

Für unendlich kleine Schwingungsbögen hat t hier denſelben Werth, wie im leeren Raume, aber für einen größeren Bogen a fällt die Zeit einer Schwingung gerade ſo aus, als wenn das Pendel im leeren Raume mit dem Bogen a_1 oſcillirte. Da nun $a_1 < a$, ſo wird t in der Luft kleiner als im leeren Raume.

16. Bisher wurde die Flüſſigkeit, worin ſich ein Pendel bewegt, blos als widerſtehendes Medium betrachtet und ihr Einfluß auf die Schwingungszeit auch nur von dieſer Seite geſchätzt; alle ſchweren Flüſſigkeiten, wie die Luft, vermindern auch die beſchleunigende Kraft durch ihren nach aufwärts gerichteten Druck und verlängern auch dadurch die Schwingungszeit, indem ein Pendel in einer ſolchen Flüſſigkeit gleichſam minder ſchwer iſt, als im leeren Raume.

17. Auf die hier befolgte Weiſe hat man die Sache bis in die neueſte Zeit behandelt und insbeſondere hat den in 15 eingeſchlagenen Weg zuerſt im Jahre 1826 Bohnenberger (Naturwiſſenſchaftliche Abhandlungen I. p. 25) angegeben. Neueſtens hat Beſſel wichtige Gründe gegen die Haltbarkeit dieſer Betrachtung angeführt und die Sache, wie es ſcheint, naturgemäßer behandelt. Nach der bisher herrſchenden Anſicht hat man die bewegende Kraft des Pendels um die Größe des Widerſtandes in der Luft vermindert und den Reſt der Kraft nur auf das Pendel wirken laſſen, während er doch nicht blos dieſes, ſondern auch die verdrängte Flüſſigkeit bewegen muß. Deßhalb nimmt Beſſel auf die letztere Maſſe Rückſicht und entwickelt die hierzu nöthige Formel. Um ſeine Theorie an das vorhin Vorgetragene anſchließen zu können, wollen wir die in 12 entwickelte Formel wieder vornehmen, nach welcher man hat

$$\omega^2 = \frac{2 g m \varkappa \cos b}{\int r^2 dm} + \text{const.}$$

Setzt man $\int r^2 dm = m(f^2 + \varkappa^2)$, $\omega = \frac{db}{dt}$, ſo wird

$$\text{const} = c = m(f^2 + \varkappa^2) \left(\frac{db}{dt}\right)^2 - 2 g m \varkappa \cos b.$$

Für unendlich kleine Schwingungsbögen iſt endlich, wenn λ die Länge des Secundenpendels vorſtellt, $g = \lambda \pi^2$, mithin

$$c = m\,(f^2 + \varkappa^2)\left(\frac{db}{dt}\right)^2 - 2\,\pi^2\,\lambda\,m\,\varkappa \cos b \;\ldots\ldots\; (H).$$

Hier bezeichnet c die lebendige Kraft des Pendels. Bewegt ſich nun dieſes in einer Flüſſigkeit, ſo wird wegen des fortwährenden Stoßes an ſtets wechſelnde Theile der Flüſſigkeit c vermindert, und dieſe Verminderung hängt von der Figur des Pendels und von ſeiner Geſchwindigkeit, mithin von t und b ab. Setzt man dieſen Verluſt für die Zeiteinheit gleich $\psi\left(\frac{db}{dt}\right)$, mithin für die Zeit dt, wo das Pendel um db weiter rückt $= db\,\psi\left(\frac{db}{dt}\right)$, ſo geht nach Verlauf der Zeit t, c in $c - \int db\,\psi\left(\frac{db}{dt}\right)$ über. Zum erſten Theile des zweiten Gliedes muß das Product aus der Anzahl der verdrängten flüſſigen Theile in das Quadrat ihrer Geſchwindigkeit, nämlich $\int \omega^2\,dm_1$, gegeben werden, wo m_1 die Maſſe der verdrängten Flüſſigkeit vorſtellt, und vom zweiten Theile iſt endlich noch $2\,\pi^2\,\lambda\,m_1\,\varkappa_1 \cos b$ hinwegzunehmen, wo $\varkappa_1$ die Entfernung des Schwerpunctes der verdrängten Flüſſigkeit von der Axe bedeutet. Dabei wird aber vorausgeſetzt, daß der Schwerpunct des Pendels, der verdrängten Flüſſigkeit und die Drehungsaxe in derſelben Ebene liegen. Demnach erhält man für die Bewegung des Pendels in dem widerſtehenden Mittel

$$c - \int db\,.\,\psi\left(\frac{db}{dt}\right) = m\,(f^2 + \varkappa^2)\left(\frac{db}{dt}\right)^2$$
$$+ \int \omega^2\,dm_1 - 2\,\pi^2\,\lambda\,(m\varkappa - m_1\varkappa_1) \cos b \;\ldots\ldots\; (I).$$

Bisher hat man nur das berückſichtiget, was beim erſten und letzten Gliede von dem Widerſtand des Mittels herrührt, das was dem zweiten Theile beigeſetzt iſt, aber gänzlich vernachläſſiget, ja ſelbſt beim letzten Theile hat man immer $\varkappa_1 = \varkappa$ geſetzt, wiewohl dieſes nur für Pendel angeht, welche aus homogenen Theilen beſtehen.

Soll nun die Bewegung des Pendels in der widerſtehenden Flüſſigkeit ſo betrachtet werden, wie es die Natur der Sache erfordert, ſo iſt vor allem nothwendig, daß man das Integral $\int \omega^2\,dm_1$ auf die ganze bewegte flüſſige Maſſe ausgedehnt, zu finden im Stande ſey. Bis jetzt war man dieſes nicht im Stande, weil man über die in der Flüſſigkeit erzeugte Bewegung ſelbſt nicht

ins Reine zu kommen vermochte. Setzt man voraus, dieſe Bewegung daure nicht länger als die Schwingung des Pendels, ſo iſt die Geſchwindigkeit jedes Theilchens der des betreffenden Punctes des Pendels proportionirt und hängt nur noch von der Figur desſelben und vom Orte des flüſſigen Theilchens ab. Man erhält ſo

$$\int \omega\, dm_1 = m_1 C \left(\frac{db}{dt}\right)^2$$

wo C eine conſtante Größe iſt, und für obige Gleichung wäre

$$c - \int db\, \psi \left(\frac{db}{dt}\right) = m\left(f^2 + \varkappa^2 + \frac{m_1}{m} C\right)\left(\frac{db}{dt}\right)^2 -$$
$$- 2\varkappa^2 \lambda\, (m\varkappa - m_1 \varkappa_1) \cos b.$$

Sieht man dieſe Gleichung als für ein zuſammengeſetztes, im leeren Raume ſchwingendes Pendel giltig an, ſo findet man die Länge l des mit demſelben gleichzeitig ſchwingenden Einfachen durch den Quotienten aus dem ſtatiſchen Momente in das Trägheitsmoment, mithin

$$l = \frac{f^2 + \varkappa^2 + \frac{m_1}{m} C}{\varkappa - \frac{m_1}{m} \varkappa_1}$$

Aus der Gleichung H hätte man gefunden

$$l = \frac{f^2 + \varkappa^2}{\varkappa}.$$

Man ſieht demnach, daß durch den bisher vernachläſſigten Theil das Trägheitsmoment vermehrt wird, und daß die Schwingungszeit eines Pendels außer der vorhin beſprochenen Änderung auch noch die von dieſer Vermehrung der Trägheit abhängige erleidet. Es iſt kaum zu erwarten, daß obige Vorausſetzung über die Bewegung der Flüſſigkeit der Natur entſpricht, allein Beſſel hat das Reſultat, welches aus dieſer Vorausſetzung gefolgert wurde, aus einer der Bewegung des Pendels völlig entſprechenden Vorausſetzung über die Form des Integrals $\int \omega^2 dm_1$ eben ſo gefunden und daher mag jenes Reſultat als richtig vorausgeſetzt werden.

18. Außer der Reibung und dem Widerſtande der Flüſſigkeit, worin ſich ein Pendel bewegt, hat auch noch die Elaſticität der Unterlage, die Stumpfheit der Schneide, wenn ein Pendel mittelſt einer ſolchen aufliegt, auf die Schwingungen desſelben Einfluß. Selbſt die härteſte Unterlage erhält durch den Druck des

darauf liegenden Pendels einen, wenn auch unendlich kleinen und vorübergehenden Eindruck, dadurch treten vielleicht auch die zunächſt an der eingedrückten Stelle liegenden Theilchen in die Höhe und ſo geſchieht es, daß ſich das Pendel nicht um die Schärfe der Schneide, wenn dieſe auch keine Abſtumpfung hat, ſondern um einen höher oder tiefer liegenden Punct dreht. Daß dieſes auf die Schwingungszeit einen Einfluß haben muß, verſteht ſich von ſelbſt.

So ſcharf man auch die Schneide, mit welcher ein Pendel auf der Unterlage aufliegt, machen mag, ſo ſtellt ſie doch nicht eine Linie, ſondern einen, wenn auch noch ſo kleinen, Cylinder vor. Dieſe cylindriſche Schneide rollt demnach bei der Bewegung des Pendels auf der untergelegten Ebene und man darf bei der Beſtimmung der Pendellänge nicht von der Schneide ſelbſt zu zählen anfangen, ſondern von einem Puncte, der um den Halbmeſſer des Cylinders unter der Schneide liegt. Allein dieſer Halbmeſſer läßt ſich nicht beſtimmen und dürfte wohl ſelten conſtant ſeyn, ſondern ſich mit jedem Punct der Schneide, welcher mit der Unterlage in Berührung ſteht, ändern.

Übrigens iſt es klar, daß auch die Elaſticität der einzelnen Theile des Pendels ſelbſt, wegen der durch das Gewicht derſelben hervorgebrachten Verlängerung, auf die Schwingungszeit einen Einfluß haben müſſe.

B. Pendelbeobachtungen.

19. Der nächſte Zweck der Pendelbeobachtungen iſt, die Schwingungszeit eines Pendels von bekannter Länge oder die Länge eines Pendels, dem eine beſtimmte Schwingungszeit entſpricht, kennen zu lernen. Hieraus läßt ſich dann die Anzahl der innerhalb einer beſtimmten Zeit vollbrachten Schwingungen und alles jenes deduciren, was mit dieſer Größe in Verbindung ſteht. Demnach kommt es bei Pendelbeobachtungen zunächſt auf Beſtimmung der Pendellänge und der Schwingungszeit an.

20. Alle Pendel, mit deren Beobachtung wir uns befaſſen können, ſind zuſammengeſetzte, und man muß aus einem ſolchen erſt durch Rechnung das gleichgeltende einfache Pendel finden. Darum iſt es nothwendig, bei Pendelbeobachtungen ſolche Pendel zu wählen, für welche die zum Behufe der Rechnung vorzunehmenden Meſſungen leicht und genau vollzogen werden können. Dieſes iſt um ſo nothwendiger, als es vielleicht kein Inſtrument

gibt, für welches auch ein ſehr kleiner Meſſungsfehler einen größeren Einfluß auf das Reſultat erlangen kann, als bei einem Pendel.

Bei den denkwürdigen Pendelbeobachtungen, welche die franzöſiſchen Akademiker anſtellten, bediente man ſich eines Pendels, das aus einer, an einem dünnen Metallfaden hängenden Platinkugel beſtand, oben eine feine Schneide hatte, die ſich auf einer möglichſt gut befeſtigten Achatebene bewegte. Ein ſolcher Pendelapparat hat das Nachtheilige, daß man ſeinen Schwingungspunct nicht mit aller Schärfe durch Rechnung beſtimmen kann und auch in Betreff der wegen der Abſtumpfung der Schneide anzubringenden Correction eine kleine Unſicherheit zurückbleibt. Beiden Übelſtänden wich Beſſel dadurch aus, daß er nicht mit einem einzigen, ſondern mit zwei ſolchen Pendeln, deren Längenunterſchied der Toiſe de Pérou vollkommen gleich war, Beobachtungen anſtellte. Dabei erreichte er den Vortheil, daß er ſich nicht auf die Richtigkeit der Unterabtheilung eines Normalmaßes verlaſſen durfte, daß der Mittelpunct der Bewegung jedes einzelnen Pendels aus der Rechnung hinwegfiel und auch die Aufhängungsart gleichgiltig blieb, wenn ſie nur an beiden Pendeln genau dieſelbe war. Letzteres wurde dadurch vollkommen erreicht, daß man den an einem höher gelegenen Puncte befeſtigten Faden an einem horizontalen Cylinder von 1 L. Durchmeſſer genau anliegen ließ, ſo daß ſich der Faden bei jeder Schwingung auf dem Cylinder auf- und abwickeln mußte. Da beſchrieb der Mittelpunct der Pendelkugel eine Curve, deren Evolute der Durchſchnittskreis des Cylinders war. Man könnte ſich unter ſolchen Umſtänden auch einer Schneide oder einer kleinen Klemme bedienen, ohne der Richtigkeit des Reſultates nahe zu treten.

Einige, wie z. B. Freycinet bedienten ſich bei Pendelverſuchen gewöhnlicher Pendel mit einer Linſe und einer metallenen oder gar hölzernen Stange; Cap. Kater machte hingegen ſeine merkwürdigen Pendelbeobachtungen mit dem Bohnenberger'ſchen Reverſionspendel, bei welchem die Rechnung gar ſehr erleichtert wird, indem bei einem ſolchen Pendel, wenn man es dahin gebracht hat, daß es um beide Schneiden gleichzeitig ſchwingt, nur der Abſtand dieſer Schneiden gemeſſen zu werden braucht, um die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels zu finden.

21. Wenn man ſich eines Pendels von der zuerſt beſprochenen Form bedient, ſo hat man vorzüglich zu ſorgen, ein gleichförmig

dichtes Material, das vom Erdmagnetiſmus nicht afficirt wird, zu wählen. Eine Kugel und ein feiner Draht aus einer Legirung von 2 Th. Kupfer und 1 Th. Nickel dürften vorzüglich dazu geeignet ſeyn. Die Ausdehnung, welche jeder einzelne Theil durch die Wärme und durch die Spannung erleidet, ſo wie ihr abſolutes Gewicht muß auf das Genaueſte bekannt ſeyn.

Das Reverſionspendel muß der äußeren Form nach ſymmetriſch conſtruirt ſeyn, mithin weil es der Maſſe nach nicht ſymmetriſch ſeyn darf, an einer cylindriſchen oder prismatiſchen Stange zwei gleich große und gegen die zwei Schneiden gleich geſtellte Linſen haben, wovon eine hohl, die andere maſſiv iſt. Die Schneiden müſſen zum Verwechſeln eingerichtet ſeyn. Kater und Bohnenberger verſehen es mit einem beweglichen Gewichte, Beſſel räth aber, dasſelbe wegzulaſſen und Anfangs das Stück der Stange zwiſchen den zwei Schneiden zu lang zu machen, hierauf aber beide Linſen einander gleichmäßig zu nähern, bis das Pendel um beide Schneiden gleichzeitig ſchwingt.

22. Zur Beſtimmung der Schwingungszeit oder der in einer beſtimmten Zeit vollbrachten Anzahl der Schwingungen dient die von Borda zuerſt angegebene Methode der Coincidenzen ganz beſonders. Um das Weſen dieſer Methode einzuſehen, denke man ſich ein zu unterſuchendes Pendel gerade vor einem Uhrpendel aufgehängt, damit ſie ſich in der Lothlinie, in welcher ſie ruhen, einander decken. Beginnen nun beide zugleich ihre Bewegung nach derſelben Richtung und haben ſie gleiche Schwingungszeiten, ſo werden ſie nach jeder Schwingung genau in der Lothlinie vor einander vorübergehen und ſich decken (coincidiren); ſind aber ihre Schwingungszeiten ungleich, ſo decken ſie ſich in jener Lothlinie nur dann, wenn das eine gerade um eine Oscillation weniger gemacht hat, als das andere.

Kennt man demnach die Schwingungszeit des Uhrpendels, ſo läßt ſich leicht aus der beobachteten Zwiſchenzeit zweier Coincidenzen die Schwingungszeit des anderen Pendels berechnen. Bei der Anwendung dieſer Methode kommt alles darauf an, daß der Augenblick des Vorübergehens beider Pendel in der Lothlinie möglichſt ſcharf beobachtet werde. Darum pflegt man beide Pendel nahe an einander und ſo aufzuhängen, daß das Ende der zu prüfenden Pendelſtange einen Theil der Linſe des Uhrpendels deckt und auf dieſer Linſe einen Theil zu ſchwärzen, aber mitten im Geſchwärzten

eine weiße Stelle, die zugleich dem Mittelpuncte der Linſe entſpricht, zu laſſen. Man braucht da nur mittelſt eines Fernrohres den weißen Fleck zu beobachten; der Augenblick ſeines Verſchwindens in der Lothlinie iſt der Moment der Coincidenz beider Pendel. Auf dieſe Weiſe hat Kater ſeine Beobachtungen angeſtellt.

23. Die gerade auseinandergeſetzte Beobachtungsmethode fordert, daß beide Pendel einander ſehr nahe ſeyen. Da hat man aber zu beſorgen, daß ſie auf einander einwirken; deßhalb hat Beſſel folgendes Verfahren angewendet: Er hing das zu prüfende Pendel 8 F. vom Uhrpendel auf und brachte zwiſchen beiden eine Convexlinſe ſo an, daß ſie das Bild des erſteren auf dem zweiten entwarf und man mittelſt eines Fernrohres beide zugleich deutlich ſehen konnte. An der Scale des erſteren Pendels wurde ein horizontaler Streifen angebracht, der in der Mitte eine ſchwarze Stelle hatte, welche vom Faden dieſes Pendels, wenn es in Ruhe war, genau halbirt und von einem an dieſem Faden befindlichen ſchwarzen Cylinder ganz zugedeckt wurde. Am unterſten Uhrpendelende war ein ſchwarzes Stück Papier angebracht, in welches ein kleines Loch eingeſchnitten war, das mit obiger weißen Stelle genau zuſammenfiel, wenn beide Pendel ruhten. Man ſah daher im Zuſtande der Ruhe beider Pendel durch das Fernrohr alles ſchwarz, während der Bewegung derſelben erſchien die weiße Stelle bei jedem Schlage der Uhr, ausgenommen, wenn beide Pendel in demſelben Augenblicke vor der Lothlinie vorübergingen. Man kann demnach die Zeit des Verſchwindens und Wiedererſcheinens des Weißen beobachten und die wahre Coincidenz in die Mitte derſelben ſetzen, oder einen beliebigen, innerhalb dieſer Grenzen gelegenen Punct für die Mitte annehmen. Letzteres iſt aber minder genau, als erſteres, und man muß, um ein hinreichend genaues Reſultat zu erhalten, aus mehreren Beobachtungen das Mittel nehmen.

24. Die Berechnungsart der Schwingungszeit aus den beobachteten Coincidenzen beſteht darin, daß man aus der Zeit, die zwiſchen zwei zunächſt auf einander folgenden Coincidenzen verfließt, die Anzahl der Schwingungen des Pendels abnimmt und indem man die erſte Coincidenz mit der zweiten, dieſe mit der dritten u. ſ. f. verbindet, aus den ſo erhaltenen Reſultaten das Mittel nimmt. Beſſel hat aber dagegen erinnert, daß man dabei nicht ganz richtig verfahre, indem das Mittel immer auf den zwei äußerſten Beobachtungen beruht. Er wählt deßhalb eine Methode,

nach welcher allen beobachteten Coincidenzen gleicher Einfluß geſtattet wird. Es wurde nämlich ſowohl aus der Summe der Anzahl der Schwingungen des Pendels innerhalb der beobachteten Coincidenzen als aus den Zeiten, wo dieſe Coincidenzen Statt fanden, das Mittel genommen und das Mittel der Schwingungsanzahl mit der Differenz aus dem Mittel der Coincidenzzeiten und der Zeit der erſten Coincidenz verglichen. Hat man z. B. die Coincidenzen nach der Schwingungsanzahl 0, 40, 80, 160, 189, 229 beobachtet und gefunden, daß dieſe in den Zeiten $20^h\,44'\,44''$; $20^h\,45'\,53''$; $20^h\,47'\,2''$; $20^h\,49'\,20''$; $20^h\,50'\,10''$; $20^h\,51'\,19''$ Statt finden; ſo erhält man als Mittel der Schwingungsanzahl $116\frac{1}{3}$, als Mittel der Coincidenzzeit $20^h\,48'\,4''\frac{2}{3}$, und daher die Dauer von $116\frac{1}{3}$ Schwingungen gleich $20^h\,48'\,4''\frac{2}{3} - 20^h\,44'\,44'' = 0^h\,3'\,20''\frac{2}{3}$, oder die Zeit einer Schwingung $= 1''.7249$, vorausgeſetzt, daß das Uhrpendel Secunden ſchlägt.

25. Es iſt klar, daß man für jede Coincidenz ſowohl die Temperatur der Luft als die des Pendels, ferner den Luftdruck und endlich auch den Schwingungsbogen kennen lernen muß.

Findet man, daß während der Coincidenzbeobachtung eine Wärmeänderung eingetreten iſt, ſo muß man die jeder Coincidenz entſprechende Temperatur durch Interpoliren ſuchen. Daſſelbe findet bei den übrigen Größen, welche auf die Schwingungszeit Einfluß haben, Statt. Die Beobachtung aller dieſer Größen mit Ausnahme des Schwingungsbogens iſt bereits ſchon beſprochen worden; die Größe des Schwingungsbogens beſtimmt man entweder an einem Gradbogen, oder an einer Längenſcale; in beiden Fällen muß man aber wohl darauf bedacht ſeyn, daß dieſer Bogen nicht zu groß erſcheint, wenn ſich die Scale hinter dem Pendel befindet. Heißt die Entfernung des Beobachters von der Scale m, vom Pendel n, und iſt α die größte beobachtete Entfernung des Pendels von der Lothlinie, ſo iſt die wahre Entfernung gleich $\alpha . \frac{n}{m}$ und der Schwingungsbogen a gegeben durch

$$\tang a = \frac{\alpha n}{L m}$$

wo L die Entfernung der Scale vom Aufhängungspuncte des Pendels bedeutet.

26. Zur richtigen Beſtimmung des Ausſchlagwinkels durch Interpoliren muß man das Geſetz kennen, nach wel-

chem dieſer Winkel abnimmt. Nach Borda's Beobachtungen nehmen die Schwingungsbögen in einer geometriſchen Progreſſion ab, während die Zeiten in einer arithmetiſchen Progreſſion wachſen und aus der Theorie folgt dasſelbe Geſetz. Kennt man demnach den Ausſchlagwinkel bei der erſten und letzten Coincidenz, ſo kann man, weil auch die Anzahl der dazwiſchen liegenden Glieder bekannt iſt, den Exponenten jenes geometriſchen Verhältniſſes finden und mittelſt dieſes für jeden Augenblick den Schwingungsbogen berechnen.

27. Nach der vor Beſſel gebräuchlichen Theorie über die Bewegung eines Pendels in einer Flüſſigkeit war es hinreichend, die Pendelbeobachtungen mit einem einzigen Pendel gemacht zu haben; aber nach der Beſſel'ſchen Theorie, welche der gelehrte Urheber ſelbſt durch ſehr ſcharfe Verſuche geprüft und richtig befunden hat, kommt in der Formel für die Länge eines Pendels von beſtimmter Schwingungszeit oder für die Schwingungszeit eines Pendels von beſtimmter Länge ein vom Widerſtande des Mittels herrührender Coefficient vor, der ſich nur dadurch beſeitigen läßt, daß man zwei Pendel von ganz gleicher Geſtalt aber ſehr verſchiedener Maſſe, z. B. eines mit einer Kugel aus Meſſing, ein anderes mit einer Kugel aus Holz oder Elfenbein, oscilliren läßt und für beide die Schwingungszeit zu beſtimmen ſucht. Da jener Coefficient für beide gleich iſt, wird man ihn aus den Ergebniſſen beider Pendelverſuche eliminiren können.

C. Correction der beobachteten Schwingungszeit.

28. Die durch Pendelbeobachtung gefundenen Größen bedürfen mehrerer Correctionen, um von äußeren Einflüſſen befreit und auf einen rein mathematiſchen Zuſtand zurückgeführt zu werden. Dieſe Correctionen dienen zur Reduction, 1. auf unendlich kleine Schwingungsbögen, 2. auf eine beſtimmte Temperatur, 3. auf den leeren Raum, 4. auf die Meeresfläche.

29. Die Schwingungszeit für einen unendlich kleinen Bogen iſt

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Für Schwingungen in einem Bogen $2a$ wird die Schwingungszeit $t_{,}$

$$t_{,} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 a\right)$$

ſtatt deſſen man wohl ſetzen kann

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{16} \sin^2 a.\right)$$

Demnach iſt die anzubringende Correction

$$C = \frac{t \sin^2 a}{16}.$$

Iſt a während einer Schwingung auf a_1 herabgeſunken, ſo muß man den Bogen $\frac{a + a_1}{2}$ in Rechnung bringen, und ſetzen.

$$C = \frac{t \sin^2 (a + a_1)}{32}.$$

Iſt n die in der Zeit T beobachtete Anzahl von Schwingungen mit dem Bogen $2a$, ſo hat man

$$T = n \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\sin^2 a}{16}\right).$$

Dieſes Pendel hätte aber in derſelben Zeit n_1 unendlich kleine Schwingungen vollbracht, und es wäre

$$T = n_1 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

und daher

$$n_1 = n \left(1 + \tfrac{1}{16} \sin^2 a\right)$$

oder die Correction c

$$c = \frac{n \sin^2 a}{16}.$$

Oft will man zuſammenhängende Reihen von Schwingungen mittelſt einer einzigen Correction auf unendlich kleine Bögen reduciren. Sind $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ die halben Schwingungsbögen zu beiden Seiten der Lothlinie bei der erſten, zweiten, dritten ꝛc. Schwingung; ſo hat man für alle zuſammen die Correction

$$c = \tfrac{1}{16} \left(\sin^2 a_1 + \sin^2 a_2 + \ldots\ldots \sin^2 a_n\right).$$

Es iſt aber

$$a_2 = \frac{a_1}{q},\ a_3 = \frac{a_1}{q^2} \ldots\ldots\ldots a_n = \frac{a_1}{q^{n-1}}$$

und deßhalb, wenn man ſtatt des Sinus den Bogen ſetzt:

$$c = \frac{a_1^2}{16} \left(1 + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^4} + \ldots \frac{1}{q^{2n-2}}\right) = \frac{a_1^2}{16} \cdot \frac{q^{2n-2} \cdot q^2 - 1}{q^{2n-2}\,(q^2 - 1)}$$

oder wegen $q^{2n-2} = \frac{a_1^2}{a_n^2}$

$$c = \frac{1}{16} \cdot \frac{a_1^2 q^2 - a_n}{q^2 - 1}.$$

Man ſetze nun $q = 10^x$ mithin $x = \log q$ und entwickle q nach der bekannten Reihe für Exponentialgrößen, wobei man den Modulus der Logarithmen, nämlich $2.3025851 = m$ ſetzt. Man erhält

$$q = 1 + mx + \tfrac{1}{2}(mx)^2 + \ldots\ldots$$

oder durch Erhebung zum Quadrate und Vernachläſſigung aller die erſte überſteigenden Potenzen

$$q^2 = 1 + 2mx = 1 + 2m \log q.$$

Wird dieſer Werth in die vorhergehende Gleichung geſetzt; ſo erhält man:

$$c = \frac{a_1^2 - a_n^2 + 2a_1^2 m \log q}{32 m \log q} = \frac{a_1^2 - a_n^2}{32 m \log q} + \frac{a_1^2}{16}$$

oder wenn für $\log q$ ſein Werth $\frac{1}{n-1} \cdot \log \frac{a_1}{a_n}$ geſetzt wird:

$$c = \frac{(n-1)(a_1^2 - a_n^2)}{32 m (\log a_1 - \log a_n)} + \frac{a_1^2}{16}.$$

Da der letzte Theil die Correction für die erſte Schwingung enthält, ſo drückt die erſte die Correction für $n-1$ Schwingungen aus oder auch für n, wenn man n ſtatt $n-1$ ſchreibt. Demnach iſt die Correction für n Schwingungen:

$$c = \frac{n(a_1 + a_n)(a_1 - a_n)}{32 m (\log a_1 - \log a_n)};$$

ſchreibt man endlich die Sinuſſe ſtatt der Bogen, ſo iſt

$$c = \frac{n \sin(a_1 + a_n) \sin(a_1 - a_n)}{32 m (\log \sin a_1 - \log \sin a_n)}.$$

Dieſe Formel hat Borda zuerſt ohne Beweis angegeben.

30. Hat das Pendel bei der, während einer Schwingung herrſchenden Temperatur die Länge l; ſo hat man die Schwingungszeit in unendlich kleinen Bögen

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Bei der Normaltemperatur wäre die Länge l_0 geweſen und man hätte die Schwingungszeit t_1 gefunden durch

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$

Iſt c der Ausdehnungscoefficient des Pendels von der Normaltemperatur bis zur Temperatur der Beobachtung, ſo wird

$$l_\circ = \frac{l}{1+c} = l\,(1 - \tfrac{1}{2}c + \ldots..)$$

mithin

$$t_{\prime} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,(1 - \tfrac{1}{2}c + \ldots.)$$

und es iſt die Correction für die Temperatur

$$-\frac{tc}{2}.$$

Eben ſo findet man für die Schwingungsanzahl die Correction

$$+\frac{nc}{2}.$$

31. Die Reduction des Pendels auf den leeren Raum fordert eine zweifache Correction. Die erſte bezieht ſich auf die Verminderung der Schwere durch das Mittel, die zweite auf die Vermehrung des Momentes der Trägheit des Pendels.

Um die Correction in erſterer Beziehung vornehmen zu können, ſey g die Schwere in der Luft und daher die Schwingungszeit in einem kleinen Bogen

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Im leeren Raume hätte man aber die Schwere $g_{\prime}$, und deßhalb die Schwingungsdauer $t_{\prime}$, mithin

$$t_{\prime} = \pi \sqrt{\frac{l}{g_{\prime}}}.$$

Iſt S die mittlere Dichte, v das Volumen des Pendels, s die Dichte der Luft, ſo hat man

$$\frac{g_{\prime}}{g} = \frac{vS}{v\,(S-s)} = 1 + \frac{s}{S-s}$$

oder mit hinreichender Annäherung

$$\frac{g_{\prime}}{g} = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{s}{S-s} \text{ und } g_{\prime} = g\left(1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{s}{S-s}\right)$$

mithin

$$t_{\prime} = \pi \sqrt{\frac{l}{g\left(1 + \frac{1}{2}\frac{s}{S-s}\right)}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{s}{S-s}\right)$$

mithin die Correction

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{S-s}\cdot t.$$

Für die Anzahl der Schwingungen hätte man die Correction

$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{s}{S-s}.$$

Um die Correction des phyſiſchen Pendels wegen der Trägheit zu finden, bedenke man, daß die Länge l_1 des einfachen mit dem in der Luft befindlichen gleichzeitig ſchwingenden Pendels

$$l_1=\frac{\varkappa^2+f^2+\frac{m_1}{m}C}{\varkappa\left(1-\frac{m_1\varkappa_1}{m\varkappa}\right)}$$

ſey (17). Heißt die Länge des einfachen Pendels, womit man die Schwingungsdauer t im leeren Raume beobachtet hat l, ſo iſt

$$l=\frac{\varkappa^2+f^2}{\varkappa}$$

und wenn man $\frac{l}{l_1}=M$ und $\varkappa_1=\varkappa$ ſetzt

$$M=\frac{\varkappa^2+f^2}{\varkappa}\cdot\frac{\varkappa\left(1-\frac{m_1}{m}\right)}{\varkappa^2+\frac{m_1}{m}C+f^2}$$

weil aber die auf den leeren Raum reducirte Schwingungsdauer $t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ iſt, ſo wird

$$t_1=\pi\sqrt{\left\{\frac{l}{g}\cdot\left(\frac{\varkappa^2+f^2}{\varkappa}\cdot\frac{\varkappa\left(1-\frac{m_1}{m}\right)}{\varkappa^2+\frac{m_1}{m}C+f^2}\right)\right\}}.$$

Demnach muß die beobachtete, auf unendlich kleine Bögen, auf die ganze im leeren Raume herrſchende Schwere ꝛc. reducirte Schwingungszeit noch mit

$$\sqrt{\left(\frac{\varkappa^2+f^2}{\varkappa}\right)}\cdot\frac{\varkappa\left(1-\frac{m_1}{m}\right)}{\varkappa^2+\frac{m_1}{m}C+f^2}$$

multiplicirt werden. Statt dieſes Factors kann man aber ohne Scheu ſchreiben

$$1 - \frac{m_1}{2m}(1 + K)$$

wenn man $(\varkappa^2 + f^2)\, C = K$ ſetzt, und das Quadrat von $\frac{m_1}{m}$ vernachläſſiget. Dieſe Größe K iſt es nun, welche einen zweiten Verſuch mit einem leichteren Pendel fordert, wie (27) geſagt wurde.

32. Die Pendellänge, welche an einem beſtimmten Orte durch Beobachtung gefunden wurde, bezieht ſich natürlich auf dieſen. Oft will man aber dieſe Pendellänge auf die Meeresfläche reduciren. Zu dieſem Behufe ſey z die Höhe des Beobachtungsortes über die Meeresfläche, r der Erdhalbmeſſer in der Breite des Beobachtungsortes, g die in dieſem Orte, g_1 die an der Meeresfläche unter derſelben Breite herrſchende Schwere. Da hat man nun

$$g_1 = g\left(\frac{r+z}{r}\right)^2 \text{ oder nahe } g_1 = g\left(1 + \frac{z}{r}\right)$$

und daher die Schwingungszeit

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g\left(1 + \frac{z}{r}\right)}}.$$

33. Aus der durch alle vorhergehenden Correctionen auf einen mathematiſchen Zuſtand zurückgeführten Pendellänge und ihrer Schwingungsdauer läßt ſich nun leicht die Länge λ eines Secundenpendels finden. Man hat nämlich wegen

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ und } 1 = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

$$\lambda = \frac{l}{t^2}.$$

34. Bei einem Reverſionspendel fallen mehrere dieſer Correctionen weg. Wiewohl nämlich ein ſolches Pendel ſtets auf Schneiden oscillirt, ſo braucht man darum doch nicht zu beſorgen, daß das Reſultat wegen der Stumpfheit der Schneiden unrichtig werde, ſobald man das Pendel mit verwechſelten Schneiden ſchwingen läßt und das Mittel aus beiden Verſuchen nimmt. Hat das Pendel die oben (21) beſchriebene ſymmetriſche Einrichtung, ſo fällt auch die Einwirkung der Luft, wodurch das Moment der Trägheit vermehrt wird, aus der Rechnung hinweg, wenn nur Luftdruck und Temperatur während der ganzen zuſammengehörigen

Reihe der Verſuche ſich nicht geändert haben. Es ſeyen s und s_1 die Dichten der Luft, die Dichte, bei welcher m_1 berechnet wurde, als Einheit angenommen, t und t_1 die Schwingungszeiten des Pendels in der Luft, wenn es auf gleiche Temperatur und auf unendlich kleine Schwingungen reducirt iſt. Mittelſt dieſer Bezeichnung hat man aus Verſuchen vor und nach der Verwechslung der Schneiden:

$$\lambda t^2 = \frac{\varkappa^2 + \frac{m_1}{m} Cs + f^2}{\varkappa\left(1 - \frac{m_1}{m} \cdot \frac{\varkappa + \varkappa_1}{2\varkappa} s\right)}$$

$$\lambda t_1^2 = \frac{\varkappa_1^2 + \frac{m_1}{m} Cs_1 + f^2}{\varkappa_1\left(1 - \frac{m_1}{m} \cdot \frac{\varkappa + \varkappa_1}{2\varkappa} \cdot s_1\right)}$$

wobei die Bedeutung von $\varkappa_1$ ꝛc. aus der Analogie bekannt iſt. Hieraus wird

$$\lambda\left(t^2 \varkappa - t^2 \frac{m_1}{m} \cdot \frac{\varkappa + \varkappa_1}{2} \cdot s\right) = \varkappa^2 + \frac{m_1}{m} C + f^2$$

$$\lambda\left(t_1^2 \varkappa_1 - t_1^2 \frac{m_1}{m} \cdot \frac{\varkappa + \varkappa_1}{2} \cdot s_1\right) = \varkappa^2 + \frac{m_1}{m} C + f^2.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab und dividirt durch $\varkappa - \varkappa_1$, ſo wird

$$\lambda\left\{\left(\frac{t^2 + t_1^2}{2}\right) + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa + \varkappa_1}{\varkappa - \varkappa_1}\left[t^2\left(1 - \frac{m_1}{m} s\right) - t_1^2\left(1 - \frac{m_1}{m} s_1\right)\right]\right\}$$
$$= \varkappa + \varkappa_1 + \frac{m_1}{m} C \cdot \frac{s - s_1}{\varkappa + \varkappa_1}.$$

Werden die zuſammengehörigen Verſuche bald nach einander gemacht, ſo wird $s - s_1$ ſehr klein und man kann das letzte Glied vernachläſſigen. Dadurch wird

$$\lambda = \frac{\varkappa + \varkappa_1 + \frac{m_1}{m} C \cdot \frac{s - s_1}{\varkappa - \varkappa_1}}{\frac{t^2 + t_1^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa + \varkappa_1}{\varkappa - \varkappa_1}\left[t^2\left(1 - \frac{m_1}{m} s\right) - t_1^2\left(1 - \frac{m_1}{m} s_1\right)\right]}.$$

Die Länge des Secundenpendels an mehreren Orten der Erde enthält die Tafel XVI.

D. Coniſches Pendel.

35. Zu mancher phyſikaliſchen Unterſuchung bedarf man eines ſchweren Pendels, das ſich nicht, wie das vorhin betrachtete, in

einer Ebene, ſondern in einer Kegelfläche bewegt. Es ſey B (Fig. 74) ein ſchwerer Punct, der an einen nicht ſchweren und nicht trägen Faden CB gebunden iſt und ſich in einer Kegelfläche mit kreisförmiger Baſis BG bewegt, und man ſuche die Geſetze ſeiner Bewegung.

Es iſt klar, daß B durch die Schwere nach BF, durch die Fliehkraft nach BD getrieben wird und nur unter der Bedingung in der Kegelfläche CBG verbleiben kann, wenn die aus beiden Kräften Reſultirende in die Richtung CB fällt. Bezeichnet nun BF die Beſchleunigung der Schwere $= g$, BD die Größe der Fliehkraft $= \frac{c^2}{r}$, wobei c die Geſchwindigkeit, $r = BA$ den Halbmeſſer der Baſis des Kegels bedeutet und ſetzt man die Länge CA des Pendels $= l$, ſo hat man:

$$BD = \frac{c^2}{r}, \quad BF = g.$$

$$BD : BF = BA : CA \text{ oder } g = \frac{c^2}{r} \cdot \frac{l}{r} \text{ mithin}$$

$$c = r\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Heißt P der von B beſchriebene Kreisumfang und t die Zeit eines Umlaufs, ſo iſt, den Geſetzen der Centralbewegung, unter welche die hier betrachtete gehört, gemäß

$$t = \frac{P}{c} = \frac{P}{c}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Es ſtehen demnach die Schwingungszeiten ſolcher Pendel bei gleicher Länge im verkehrten Verhältniſſe des Halbmeſſers der kreisförmigen Baſis, bei gleicher Baſis im geraden Verhältniſſe mit der Quadratwurzel der Länge.

Setzt man für P den Werth $2r\pi$, ſo wird

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Nennt man t_1 die Schwingungsdauer eines einfachen gewöhnlichen Kreispendels von der Länge l, ſo iſt $t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, mithin

$$t = 2t_1$$

oder die Schwingungsdauer eines einfachen coniſchen Pendels doppelt ſo groß als die eines eben ſo langen Kreispendels. Mittelſt die-

ſes Satzes kann man ein zuſammengeſetztes Kegelpendel in ein einfaches verwandeln.

36. Bringt man über einem Kegelpendel, das Secunden ſchlägt, eine horizontale Platte an, deren Umfang in 60 gleiche Theile getheilt iſt und ſetzt mit der Pendelſtange einen Zeiger in Verbindung, welcher mit dem Pendel zugleich einen Umlauf macht; ſo wird dieſer Zeiger Terzien anzeigen. Iſt ein Mechanismus vorhanden, welcher es möglich macht, den Zeiger in jedem Augenblicke zu hemmen, ohne das Pendel in ſeinem Gange zu ſtören und es eben ſo wieder augenblicklich mit demſelben in Verbindung zu ſetzen, ſo dient dieſer Apparat zum Meſſen kleiner Zeittheilchen. Auf einen lange anhaltenden, genau der mittleren Zeit entſprechenden Gang, wie man ihn von Kreispendeln fordert, wird man freilich beim coniſchen Pendel verzichten müſſen, allein es iſt immer möglich, denſelben innerhalb kurzer Zeit ſo regelmäßig zu erhalten, daß man dadurch den Zweck, das Meſſen kurzer Zeittheilchen bis auf Terzien, vollkommen erreicht.

Siehe hierüber: Unterſuchungen über die Länge des Secundenpendels von F. W. Beſſel. Berlin 1828. 4.

Bohnenberger in den naturwiſſenſchaftlichen Abhandlungen 1 B. 1 Hft. Tübingen 1826. S. 1 u. f.

Kater in Phil. transact. London 1818 p. 33.

Voyage autour du monde par L. de Freycinet: Observation du pendule. Paris 1826. 4.

Recueil d'Observations géod. astron. et phys. Paris 1821. 4.

Drittes Kapitel.

Bewegung flüſſiger Körper.

37. Wenn man in die Gleichung

$$\sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta p$$

welche die Bedingungen des Gleichgewichtes flüſſiger Körper enthält, für X, Y, Z ſetzt $X - \frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2y}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2z}{dt^2}$, ſo erhält man nach (2) die allgemeine Gleichung für die Bewegung dieſer Körper. Dieſe Gleichung iſt daher folgende:

$$\sigma\left[\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \right.$$
$$\left. + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = \delta p$$

die man auch ſo ſchreiben kann

$$\delta p - \sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) =$$
$$= \sigma\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,.\,\delta z\right).$$

Sieht man $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ als vollſtändig integrabel an, und ſetzt es gleich dq, ſo wird

$$dq - \frac{\delta p}{\sigma} = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}.\delta\eta + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z.$$

Man denke ſich nun die Geſchwindigkeit eines Elementartheilchens in drei auf einander ſenkrechte mit den Coordinatenaxen x, y, z parallele Geſchwindigkeiten zerlegt, und nenne die mit x parallele Geſchwindigkeit u, die mit y parallele v und die mit z parallele w, und es iſt

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

und wenn u, v, w ſelbſt wieder Functionen der Coordinaten x, y, z und t ſind

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} + u\,.\,\frac{du}{dx} + v\,.\,\frac{du}{dy} + w\,.\,\frac{du}{dz}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} + u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{dv}{dy} + w\,\frac{dv}{dz}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} + u\,\frac{dw}{dx} + v\,\frac{dw}{dy} + w\,\frac{dw}{dz}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in obige Gleichung, ſo erhält man:

$$dq - \frac{\delta p}{\sigma} = \left(\frac{du}{dt} + u\,\frac{du}{dx} + v\,\frac{du}{dy} + w\,\frac{du}{dz}\right)\delta x$$
$$+ \left(\frac{dv}{dt} + u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{dv}{dy} + w\,\frac{dv}{dz}\right)\delta y$$
$$+ \left(\frac{dw}{dt} + u\,\frac{dw}{dx} + v\,\frac{dw}{dy} + w\,\frac{dw}{dt}\right)\delta z.$$

Nimmt man an, es ſey $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ ein vollkommenes integrables Differenzial und ſetzt dieſes gleich $d\varphi$, ſo wird:

$$\frac{d\varphi}{dx} = u, \quad \frac{d\varphi}{dy} = v, \quad \frac{d\varphi}{dz} = w$$

$$d \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot dx + \frac{dv}{dt} \cdot dy + \frac{dw}{dt} \cdot dz$$

$$d \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot dx + \frac{dv}{dx} \cdot dy + \frac{dw}{dx} \cdot dz$$

$$d \cdot \frac{d\varphi}{dy} = \frac{du}{dy} \cdot dx + \frac{dv}{dy} \cdot dy + \frac{dw}{dy} \cdot dz$$

$$d \cdot \frac{d\varphi}{dz} = \frac{du}{dz} \cdot dx + \frac{dv}{dz} \cdot dy + \frac{dw}{dz} \cdot dz$$

und mittelſt dieſer Werthe aus der vorhergehenden Gleichung

$$dq - \frac{\delta p}{\sigma} = d \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} d \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} d \cdot \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} d \cdot \frac{d\varphi}{dz}$$

oder

$$q - \int \frac{\delta p}{\sigma} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \right] \quad (A).$$

Dieſe Gleichung gibt die Geſchwindigkeit u, v, w eines Theilchens, indem $u = \frac{d\varphi}{dx}$, $v = \frac{d\varphi}{dy}$ und $w = \frac{d\varphi}{dz}$ iſt.

38. Die Gleichung (A) iſt unmittelbar aus der Grundformel für das Gleichgewicht der flüſſigen Körper abgeleitet worden, ſie enthält aber die Bedingung der Continuität der Maſſe während der Bewegung noch nicht, eine Bedingung, die aus der abſolut leichten Verſchiebbarkeit der Theile ſolcher Körper, folgt. Dieſe Bedingung wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{d(\sigma\,dx\,dy\,dz)}{dt} = 0 \text{ oder } \frac{d\sigma}{dt} \cdot dx\,dy\,dz + $$

$$+ \sigma \frac{d(dx\,dy\,dz)}{dt} = 0 \ldots\ldots \quad (B).$$

Es handelt ſich nun darum, das Differenzial der Dichte σ und das Differenzial des Volumen $dx\,dy\,dz$ zu finden. Um dieſe Größe zu finden ſtelle $mnhlgf$ (Fig. 75) das parallelepipediſche Volumen $dx\,dy\,dz$ vor, und es ſeyen x, y, z die Coordinaten von m; x, y,

$z+dz$ die Coordinaten von n u. ſ. f. Bei der Bewegung kommt m nach m_1; n nach n_1 u. ſ. f. und das ganze Parallelepiped ändert ſeine Geſtalt. Es ſeyen die einen Coordinaten von m_1 gleich $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ oder $x+udt=x_1$, $y+vdt=y_1$, $z+wdt=z_1$. Sind die von n_1 nach der Ordnung x_2, y_2, z_2, ſo iſt

$$x_2 = x + udt + \frac{du}{dz}\,dz\,dt$$

$$y_2 = y + vdt + \frac{dv}{dz}\,dz\,dt$$

$$z_2 = z + dz + wdt + \frac{dw}{dz}\,dz\,dt$$

und daher

$$m_1 n_1 = \sqrt{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]} =$$
$$= dz + \frac{dw}{dz}\,dz\,dt.$$

Sucht man auf dieſe Art die anderen Kanten des neuen Volumens und daraus das Volumen ſelbſt, ſo findet man:

$$dx\,dy\,dz\left(1+\frac{du}{dx}\,dt+\frac{dv}{dy}\,dt+\frac{dw}{dz}\,dt\right).$$

Zieht man von dieſem das urſprüngliche Volumen $dx\,dy\,dz$ ab, ſo findet man die Änderung desſelben $\frac{d\,(dx\,dy\,dz)}{dt}$, aus welcher man erhält

$$dx\,dy\,dz\left(\frac{du}{dx}\,dt+\frac{dv}{dy}\,dt+\frac{dw}{dz}\,dt\right).$$

Die Dichte σ geht in

$$\sigma+\frac{d\sigma}{dt}\,dt+\frac{d\sigma}{dx}\,udt+\frac{d\sigma}{dy}\,vdt+\frac{d\sigma}{dz}\,wdt \text{ über}$$

und ihre Veränderung iſt daher

$$\frac{d\sigma}{dt}\cdot dt+\frac{d\sigma}{dx}\,udt+\frac{d\sigma}{dy}\,vdt+\frac{d\sigma}{dz}\,wdt.$$

Subſtituirt man nun $\frac{d\sigma}{dt}$ und $\frac{d\,(dy\,dx\,dz)}{dt}$ in (B), ſo wird,

$$\frac{d\sigma}{dt}+\frac{d\sigma}{dx}\,u+\frac{d\sigma}{dy}\,v+\frac{d\sigma}{dz}\,w+\sigma\,\frac{du}{dx}+\sigma\,\frac{dv}{dy}+\sigma\,\frac{dw}{dz}=0$$

oder wenn man die höheren Differenziale wegläßt:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d.\sigma u}{dx} + \frac{d.\sigma v}{dy} + \frac{d.\sigma w}{dz} = 0 \ldots\ldots (C).$$

Setzt man wie vorhin

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}$$

ſo wird aus dieſer Gleichung

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d.\sigma\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d.\sigma\frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d.\sigma\frac{d\varphi}{dz}}{dz} = 0$$

oder

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\sigma}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\sigma}{dz}\cdot\frac{d\varphi}{dz} = 0 \ldots (D).$$

Die Gleichungen (A) und (D) beſtimmen die Bewegung eines flüſſigen Körpers vollkommen.

39. Die vorhergehenden Betrachtungen gelten für flüſſige Körper überhaupt, alſo ſowohl für tropfbare als für ausdehnſame. Sollen ſie ſich blos auf tropfbare beſchränken, ſo muß man wegen der Unzuſammendrückbarkeit derſelben die Dichte und das Volumen jedes bewegten Theilchens als conſtant behandeln, mithin die Variation der Dichte und des Volumens $= 0$ ſetzen. Deßhalb hat man für tropfbare Flüſſigkeiten

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma}{dx}u + \frac{d\sigma}{dy}v + \frac{d\sigma}{dz}w = 0$$

und

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

40. Sollen ſich die vorhergehenden Gleichungen auf ausdehnſame Flüſſigkeiten beziehen, ſo muß man in denſelben die Dichte als Function des auf jedes Theilchen wirkenden Druckes und der Temperatur anſehen. Hat man es mit einer ſolchen Flüſſigkeit von gleichförmiger Temperatur zu thun; ſo ſey p der auf die Fläche $= 1$ wirkende Druck, $\varkappa$ eine von der Natur des ausdehnſamen Körpers abhängende conſtante Größe, und man hat:

$$p = \varkappa\sigma \text{ und } dp = \varkappa d\sigma$$

mithin

$$dq - \frac{\varkappa d\sigma}{\sigma} = dx\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right)$$
$$+ dy\left(\frac{dv}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right)$$
$$+ dz\left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right)$$

oder wenn man das zweite Glied $= M$ ſetzt:

$$dq - \varkappa d \log \sigma = M \; \ldots\ldots\ldots \; (E).$$

Viertes Kapitel.

Einiges über Bewegungen in der Atmoſphäre.

41. Die merkwürdigſten Bewegungen der atmoſphäriſchen Luft ſind jene, wovon die Winde, die Änderungen des Luftdruckes und der Schall hervorgebracht werden. Vom Schalle wird im folgenden Kapitel beſonders gehandelt werden, von den Winden und den Änderungen des Luftdruckes ſoll aber dasjenige hier vorkommen, was ſich auf mathematiſche Principien zurückführen läßt.

A. Vom Winde.

42. Beim Winde kann der Natur der Sache nach die Richtung und die Geſchwindigkeit ein Gegenſtand mathematiſcher Beſtimmung ſeyn, allein, da uns faſt immer die Urſache herrſchender Winde, ihrer Intenſität nach wenigſtens, unbekannt iſt, ſo wäre es ein eitles Bemühen, die Geſchwindigkeit derſelben berechnen zu wollen. Man kann da nicht mehr thun, als dieſe Geſchwindigkeit durch Anemometer zu meſſen. Bisher hat man ſelbſt durch ſolche Inſtrumente zu keinem allgemein giltigen, auf die Meteorologie wohlthätig einwirkenden Reſultate gelangen können, und ſo bleibt es wohl immer intereſſant die Windesſtärke in einzelnen Fällen angeben zu können, ohne daß man dadurch in den Gang der Lufterſcheinungen näher eingeweiht würde. Anders verhält es ſich mit der Richtung der Winde. Bekanntlich wird jeder Ort von einer Weltgegend her durch Winde mehr heimgeſucht als von jeder anderen, und wiewohl der Wind in einem Jahre die ganze Windroſe einigemale durchlauft, ſo hat er doch überall eine beſonders vorherrſchende

Richtung, und es geht aus allen im Jahre Statt findenden Windesrichtungen eine reſultirende Richtung hervor, die nach Schouw's und Dove's ſcharfſinnigen Bemerkungen wichtige Aufſchlüſſe über den Gang der Meteore verſpricht. Wie dieſe mittlere Windesrichtung zu finden ſey, ſoll hier gelehrt werden.

43. Die Richtung eines Windes wird bekanntlich durch die Weltgegend bezeichnet, von welcher er herkommt. Die Anzahl dieſer Richtungen iſt zwar unendlich groß, aber man begnügt ſich meiſtens damit, nur eine beſtimmte Anzahl von Richtungsklaſſen anzunehmen. So nehmen die Seeleute deren 32 oder gar 64 an, die Meteorologen begnügen ſich mit 8 Richtungen und zwar haben ſie vier Hauptrichtungen *N*, *W*, *S*, *O*, und vier Zwiſchenrichtungen *NO*, *SO*, *NW*, *SW*. Ein Wind, deſſen Richtung nicht mit einer von dieſen genau übereinſtimmt, wird als ſolcher angeſehen, dem ſeine Richtung am nächſten kommt. So zählt der Meteorologe den von *NNO* kommenden Wind zum Nordwind, den von *OSO* kommenden zum Oſtwind u. ſ. f. Beobachtet man eine geraume Zeit hindurch täglich ein oder mehrere Male die Richtung des herrſchenden Windes und ſeine Stärke, ſo erhält man durch das Product aus der Anzahl der Beobachtungen, die einen Wind von beſtimmter Richtung gaben, in die Stärke dieſes Windes, die Größe ſeiner Kraft. Iſt die Stärke des Windes nicht gegeben, ſo kann auch die Zahl, wie oft er beobachtet worden iſt, jene Größe ausdrücken. Werden nun dieſe Zahlen durch obige Zeichen *N*, *W*, *S*, *O*, *NW* ꝛc. bezeichnet, ſo kann man die Geſetze der Zuſammenſetzung und Zerlegung der Bewegung auf ſie anwenden. Die Reſultirende aus der Kraft der Weſt- und Oſtwinde iſt demnach $W - O$. Die Reſultirende aus der Kraft des Nord- und Südwindes $N - S$ und die Kraft jedes Zwiſchenwindes kann in zwei zerlegt werden, wovon eine mit Nord oder Süd, die andere mit Weſt oder Oſt zuſammenfällt. So bekommt man die Größe der Kraft aller Winde mit weſtlicher Richtung

$$W + (NW + SW) \cos 45^\circ$$

die Kraft aller Winde mit öſtlicher Richtung

$$O + (SO + NO) \cos 45^\circ$$

mithin die Reſultirende dieſer beiden

$$W - O + (NW + SW - SO - NO) \cos 45^\circ.$$

Auf gleiche Weiſe findet man die Reſultirende aller Winde mit nördlicher und ſüdlicher Richtung

$$N - S + (NW + NO - SW - SO) \cos 45^\circ$$

mithin, wenn man φ den Winkel nennt, welchen die reſultirende Hauptrichtung mit dem Meridian macht, vom Südpuncte an gegen Weſt hin gerechnet,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{W - O + (NW + SW - SO - NO) \cos 45^\circ}{N - S + (NW + NO - SW - SO) \cos 45^\circ}.$$

B. Von Änderungen des Luftdruckes.

44. Der jedesmalige Luftdruck an einer beſtimmten Stelle der Erde hängt von der Höhe dieſes Ortes über dem Meeresſpiegel, von einer oder mehreren regelmäßig wirkenden und von anderen nach keiner erkennbaren Regel wirkenden Kräften ab. Die regelmäßig wirkenden Kräfte erzeugen jene Oſcillationen des Luftdruckes, welche genau nach einem Tage wiederkehren und innerhalb dieſes Zeitraumes zwei Maxima und zwei Minima haben. Gäbe es außer dieſen keine anderen, den Luftdruck modificirenden Einwirkungen, ſo würde ein Zeitraum von 24 Stunden hinreichen, wenigſtens ihr Daſeyn zu erkennen; und würden jene Oſcillationen immer mit derſelben Stärke eintreten, ſo könnte man nach dieſer Zwiſchenzeit auch dieſe Stärke abnehmen. Allein das Hinzutreten der unregelmäßig wirkenden Kräfte ſtört jene Regelmäßigkeit im Gange des Luftdruckes. Um ſie doch zu erkennen, muß man ſo viele auf einen langen Zeitraum ſich erſtreckende Beobachtungen zu Hilfe nehmen, als nöthig ſind, damit aus dem jeder Stunde des Tages entſprechenden Luftdrucke der Einfluß der unregelmäßigen Schwankungen hinwegfalle.

45. Die beſtimmte, regelmäßige Wiederkehr der Oſcillationen des Luftdruckes innerhalb 24 Stunden geſtattet, ſie durch die S. 22 behandelte Gleichung

$$y = a + p_1 \sin\left(P_1 + \frac{t}{k} 2\pi\right) + \\ + p_2 \sin\left(P_2 + \frac{t}{k} 4\pi\right) + \ldots\ldots$$

oder was daſſelbe iſt, durch

$$y = a + a_1 \cos z + b_1 \sin z + a_2 \cos 2z + b_2 \sin 2z + \ldots.$$

auszudrücken. Da man in der Regel ſtündlich beobachtet, ſo hat man $k = 24$ und daher $z = 15^\circ$. Setzt man demnach $z = 15^\circ$, $2z = 30^\circ$, $3z = 45^\circ$ ꝛc., bedenkt ferner, daß man hat $\cos 15^\circ = -\cos 195^\circ = +\cos 345^\circ$ ꝛc. $\sin 15^\circ = \sin 165^\circ = -\sin 195 = -\sin 345^\circ$ ꝛc. ꝛc. und bezeichnet den um 0, 1, 2, 3, 23 ꝛc. Uhr Statt findenden Luftdruck durch 0, 1, 2, 3 .... 23, wobei 0 dem Mittagsſtande entſpricht; ſo erhält man der (S. 25) entwickelten Methode gemäß

$a =$ dem mittleren Barometerſtande

$$a_1 = p_1 \sin P_1 = \tfrac{1}{12} \left\{ \begin{array}{l} 0 - 12 \\ (1 - 11 - 13 + 23) \cos 15^\circ \\ (2 - 10 - 14 + 22) \cos 30^\circ \\ (3 - 9 - 15 + 21) \cos 45^\circ \\ (4 - 8 - 16 + 20) \cos 60^\circ \\ (5 - 7 - 17 + 19) \cos 75^\circ \end{array} \right\}$$

$$b_1 = p_1 \cos P_1 = \tfrac{1}{12} \left\{ \begin{array}{l} 6 - 18 \\ (1 + 11 - 13 - 23) \sin 15^\circ \\ (2 + 10 - 14 - 22) \sin 30^\circ \\ (3 + 9 - 15 - 21) \sin 45^\circ \\ (4 + 8 - 16 - 20) \sin 60^\circ \\ (5 + 7 - 17 - 19) \sin 75^\circ \end{array} \right\}$$

$$a_2 = p_2 \sin P_2 = \tfrac{1}{12} \left\{ \begin{array}{l} 0 - 6 + 12 - 18 \\ (1 - 5 - 7 + 11 + 13 - 17 - 19 + 22) \cos 30 \\ (2 - 4 - 8 + 10 + 14 - 16 - 20 + 22) \cos 60^\circ \end{array} \right.$$

$$b_2 = p_2 \cos P_2 = \tfrac{1}{12} \left\{ \begin{array}{l} 3 - 9 + 15 - 21 \\ (1 + 5 - 7 - 11 + 13 + 17 - 19 - 23) \sin 30^\circ \\ (2 + 4 - 8 - 10 + 14 + 16 - 20 - 22) \sin 60^\circ \end{array} \right.$$

Die beiden größten und kleinſten Werthe findet man aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = 0 = p_1 \cos(15^\circ t + P_1) + 2 p_2 \cos(30^\circ t + P_2).$$

Dieſe Gleichungen hat Hållſtröm (Pogg. Ann. 8. 131 und f. 11. 251 und f.) ſo wie Carlini (Zeitſch. 5. 468) auf die an mehreren Orten angeſtellten Beobachtungen angewendet und daraus für den Barometerſtand, in Millimetern ausgedrückt, die Gleichungen gefunden, welche in Folgendem enthalten ſind:

I. Breite zwiſchen 1° 5′ N. und 1° 34′ S.: Länge 181° 40′ w. von Paris. Meereshöhe 0° Toiſen. Beobachter: Lamanon.

$$\gamma = 761^{mm}.976 + 0.05011 \sin (15° t + 128° 35') + 1.39945 \sin (30° t + 157° 32').$$

II. Amerika. Breite 0. Beob. v. Humboldt.

$$\gamma = 761°.991 + 0.48669 \sin (15° t + 156°) + 0.67580 \sin (30° t + 147' 13').$$

III. Stilles Meer. Breite zwiſchen 10° N. und 10° S. Beob. Horner.

$$\gamma = 755^{mm}.348 + 0.23383 \sin (15° t + 190° 22') + 0.82809 \sin (30° t + 159° 21').$$

IV. Quito. Breite 0° 13′ S. Höhe 1492 T. Beob. v. Humboldt.

$$\gamma = 549^{mm}.296 + 0.6970 \sin (15° t + 81° 51') + 0.6925 \sin (30° t + 135° 41').$$

V. Popayan. Breite 2° 26′ N. Höhe 911 T. Beob. Caldas.

$$\gamma = 618^{mm}.311 + 0.4796 \sin (15° t + 209° 37') + 0.7017 \sin (30° t + 149° 48').$$

VI. Ibagué. Breite 4° 28′ N. Höhe 703 T. Beob. v. Humboldt.

$$\gamma = 658^{mm}.991 + 0.5726 \sin (15 t + 175° 45') + 0.8972 \sin (30 t + 148° 50').$$

VII. Bogota. Breite 4° 36′ N. Höhe 1366. Beob. Bouſſingault.

$$\gamma = 560^{mm}.085 + 0.4947 \sin (15° t + 170° 51') + 0.9810 \sin (30° t + 161° 48').$$

VIII. Payta. Breite 5° 6′ S. Höhe 0 T. Beob. Dupperey.

$$\gamma = 757^{mm}.465 + 1.546 \sin (15° t + 201) + 0.898 \sin (30° t + 136° 57').$$

IX. Sierra Leone. Breite 8° 30′ N. Höhe 0. Beob. Sabine.

$$\gamma = 754^{mm}.072 + 0.5202 \sin (15° t + 308° 52') + 0.8371 \sin (30° t + 104° 43').$$

X. Cumana. Breite 10° 28′ N. Höhe 15 T. Beob. v. Humboldt.

$$\gamma = 756^{mm}.280 + 0.7160 \sin (15° t + 188° 13') + 0.7355 \sin (30° t + 160° 16').$$

XI. Caracas. Breite 10° 31′ N. Höhe 480 T. Beobachter: v. Humboldt.

$$y = 684^{mm}.204 + 0.7057 \sin (15^\circ t + 195^\circ 59') + 0.8393 \sin (30^\circ t + 152^\circ 31')$$

XII. Guayra. Breite 10° 36′ N. Höhe 6 T. Beob. v. Bouſſingault.

$$y + 758^{mm}.523 + 0.9331 \sin (15^\circ + 201^\circ 34') + 1.001 \sin (30^\circ t + 168^\circ 40').$$

XIII. Lima. Breite 12° 3′ S. Höhe 85 T. Beob. v. Humboldt.

$$y = 741^{mm}.752 + 0.8267 \sin (15^\circ t + 226^\circ 22') + 1.133 \sin (30^\circ t + 178^\circ 33').$$

XIV. Callao. Breite 12° 3′ S. Höhe 6 T. Beob. v. Humboldt.

$$y = 757^{mm}.543 + 0.5072 \sin (15^\circ t + 190^\circ 34') + 0.9959 \sin (30^\circ t + 175^\circ 27').$$

XV. Chittledroog. Breite 14° 11′ N. Höhe 400 T. Beob. Kater.

$$y = 695^{mm}.001 + 0.3211 \sin (15^\circ t + 310^\circ 49') + 0.9807 (30^\circ t + 139^\circ 5').$$

XVI. Otaheiti. Breite 17° 29′ S. Höhe 0. Beob. Simonoff.

$$y = 764^{mm}.556 + 0.33762 \sin (15^\circ t + 141^\circ 21') + 0.83153 (30^\circ t + 169^\circ 25').$$

XVII. Stilles Meer. Breite 18° 0. Höhe 0. Beob. Horner.

$$y = 759^{mm}.246 + 0.27592 \sin (15^\circ t + 197^\circ 25') + 0.61607 \sin (30^\circ t + 148^\circ 38').$$

XVIII. Mexico. Breite 19° 26′ N. Höhe 1168 T. Beob. v. Humboldt.

$$y = 583^{mm}.585 + 0.5872 \sin (15^\circ t + 211^\circ 22') + 0.8899 \sin (30^\circ t + 149^\circ 30').$$

XIX. Calcutta. Breite 22° 35′ N. Beob. Balfour.

$$y = 758^{mm}.876 + 0.55078 \sin (15^\circ t + 144^\circ 24') + 0.76893 \sin (30^\circ t + 147^\circ 7').$$

XX. R. Janeiro. Breite 22° 54′ S. Höhe o. Beobachter: Freycinet.

$$y = 765^{mm}.886 + 0.6821 \sin (15° t + 201° 49') + 0.8895 \sin (30° t + 142° 53').$$

XXI. Modena. Breite 44° 39′. Höhe 34 T.

$$y = 754^{mm}.1941 + 0.3837 \sin (15° + 109° 57') + 0.3819 \sin (30° + 40° 59').$$

XXII. Florenz. Breite 43° 47′. Höhe 38 T.

$$y = 755^{mm}.1364 + 1.2014 (\sin 15° t + 162° 20') + 0.1886 (\sin 30° t + 274° 19').$$

XXIII. Bologna. Breite 44° 30′. Höhe 62 T.

$$y = 750.2678 + 0.3469 (\sin 15° t + 112° 35') + 0.2762 \sin (30° t + 14° 11').$$

XXIV. Pavia. Breite 45° 11′. Höhe 64 T.

$$y = 751^{mm}.2009 + 0.9025 \sin (15° t + 138° 9') + 0.2508 \sin (30° t + 306° 36').$$

XXV. Mailand. Breite 45° 28′. Höhe 66 T.

$$y = 748^{mm}.446 + 0.4671 \sin (15° t + 136° 36') + 0.1227 \sin (30° t + 349° 13').$$

XXVI. Turin. Breite 45° 4′. Höhe 106 T.

$$y = 750^{mm}.5732 + 0.6341 \sin (15° t + 157° 30') + 0.2249 \sin (30° t + 20° 50').$$

XXVII. Padua. Breite 45° 24 N. Höhe 5 T. Beob. Chiminello.

$$y = 758^{mm}.680 + 0.13446 \sin (15° t + 167° 11') + 0.26735 \sin (30° t + 136° 3').$$

XXVIII. München. Breite 48° 8′ N. Höhe 240. Beob. Yelin.

$$y = 718^{mm}.411 + 0.11672 \sin (15° t + 298°) + 0.29222 \sin (30° t + 137° 12).$$

XXIX. Paris. Breite 48° 50′ N. Höhe 40. Beob. Arago.

$$y = 755^{mm}.376 + 0.1631 \sin (15° t + 166° 10') + 0.2984 \sin (30° t + 148° 32').$$

XXX. Halle. Breite 51° 29′ N. Höhe 96. Beob. Winkler.

$$y = 754^{mm}.158 + 0.1384 \sin (15° t + 261° 24') + 0.3793 \sin (30° t + 136° 9').$$

XXXI. Åbo. Breite 60° 27′ N. Höhe 4.6. Beobachter: Hällſtröm.

$$y = 759^{mm}.2641 + 0.13103 \sin (15° t + 339° 35') + 0.12070 \sin (30° t + 124° 11').$$

XXXII. Melville. Breite 74° 45′ N. Beob. Parry.

$$y = 758^{mm}.3948 + 0.07255 \sin (15° t + 281° 40') + 0.05416 \sin (30° t + 210°).$$

46. Dieſen Ausdrücken gemäß hängt der Barometerſtand, wenn man von den unregelmäßigen Störungen abſieht, von zwei periodiſch wiederkehrenden Gliedern ab. Die Periode des einen kehrt nach 12 Stunden ſtets wieder, die des anderen nach 24 Stunden, weil erſtere vom einfachen, letztere vom doppelten Stundenwinkel abhängt. Demnach kann man ſich die atmoſphäriſche Ebbe und Fluth aus zwei Ebben und Fluthen beſtehend denken, deren eine in einem Tage einmal, die andere aber zweimal wiederkehrt. Es iſt höchſt wahrſcheinlich, daß erſtere blos von der erwärmenden, letztere von der anziehenden Kraft der Sonne abhängt. Carlini nennt deßhalb jene die phyſiſche, dieſe die dynamiſche Fluth.

47. Die vorhergehenden Gleichungen wurden aus Beobachtungen gewonnen, die nicht alle in derſelben Zeit angeſtellt worden ſind, und deren einige überhaupt in zu geringer Anzahl zu Gebote ſtanden, als daß man verſichert ſeyn könnte, es laſſe ſich aus denſelben der wahre Gang des Barometers mit aller Genauigkeit ableiten. Carlini hat für Mailand und Padua dieſe Gleichungen nach den Winter- und nach den Sommerbeobachtungen insbeſondere entwickelt und ſich die Überzeugung verſchafft, daß ſowohl die numeriſchen Coefficienten als die conſtanten Argumente in dieſen Jahreszeiten verſchieden ausfallen, wie ſich aus folgender Tabelle am beſten erſehen läßt, wo ſich aber die Zahlen auf den in Pariſer Linien ausgedrückten Luftdruck beziehen.

	Mailand		Padua	
	Sommer	Winter	Sommer	Winter
Phyſiſche Fluth. Coefficient	0.1982	0.0667	0.1488	0.0641
Conſt. des Argumentes	174° 44′	120° 44	151° 31′	301° 24′
Dynamiſche Fluth. Coeffic.	0.0993	0.0698	0.1039	0.1621
Conſt. des Argumentes	111° 15′	133° 54′	123° 44′	147° 17′

Ob daſſelbe für andere Orte eben ſo wie für Mailand und Padua Statt finde oder nicht, muß erſt ins Reine gebracht werden, ſo wie überhaupt zur Erlangung einer genauen Kenntniß der täglichen periodiſchen Veränderungen des Luftdruckes durch längere Zeit, wenigſtens durch ein Jahr fortgeſetzte Barometerbeobachtungen geſammelt werden müſſen. Durch Beobachtungen, die ſich nur auf wenige Tage erſtrecken, kann man ſich wohl vom Daſeyn ſolcher Veränderungen überzeugen, allein darüber iſt bereits jeder Zweifel gelöſet; um aber die Zeit des Maximums und Minimums, die Größe der Excurſion, kurz die Gleichung für den Luftdruck ableiten zu können, dazu gehört viel mehr, und nicht einmal unter dem Äquator, wo doch die unregelmäßigen Störungen nicht ſo häufig vorkommen und nur ſchwach wirken, kann man zu dieſer Kenntniß aus einer geringen Anzahl von Beobachtungen gelangen. Übrigens iſt es nicht nothwendig, daß Beobachtungen, welche zu dieſem Zwecke führen ſollen, pünctlich zu beſtimmten Zeiten vorgenommen werden. Wiewohl die obige Formel äquidiſtante Beobachtungen fordert, ſo reicht es hin, längere Zeit hindurch an ſo vielen Stunden des Tages zu beobachten, als es die Umſtände erlauben, weil man die hin und wieder entſtehenden Lücken leicht nach der Übereinſtimmung mit den übrigen Beobachtungen ausfüllen oder durch eine graphiſche Darſtellung der Beobachtungen den Luftdruck für gleiche Zeitintervalle finden kann.

48. Was bisher über den Luftdruck und das Geſetz ſeiner Änderungen aus einander geſetzt wurde, bezieht ſich nur auf die regelmäßigen Schwankungen deſſelben. Außer dieſen unterliegt er noch anderen unregelmäßig eintretenden Oſcillationen. Dieſe hängen aber in der Regel mit der Richtung des herrſchenden Windes ſo innig zuſammen, daß es Dove ſogar verſuchte, den Barometerſtand als Function der Windesrichtung anzuſehen. Bezeichnet y den Barometerſtand bei einem Winde, deſſen Richtung mit der Mittagslinie, vom Südpuncte gegen Weſt hin gerechnet, den Winkel $\frac{x}{n} 2\pi = z$ macht, ſo kann man allgemein ſetzen:

$$y = a + p_1 \sin\left(P_1 + \frac{x}{n} 2\pi\right) + p_2 \sin\left(P_2 + \frac{x}{n} 4\pi\right) + \ldots$$

oder

$$y = a + a_1 \sin z + b_1 \cos z + a_2 \sin 2z + b_2 \cos 2z + \ldots.$$

wo a, a_1, b_1, b_2 ꝛc. Conſtanten ſind, die ſich aus den für jede Windesrichtung beobachteten mittleren Barometerſtänden nach der Methode der kleinſten Quadrate finden laſſen.

Unterſcheidet man nur 8 Winde, ſo iſt $x=8$, $z=45°$. Werden die den einzelnen Windesrichtungen, von Nord angefangen, und die entſprechenden mittleren Barometerſtände durch o, 1, 2 .... 7 ausgedrückt, ſo wird

$$a = \frac{0+1+2+\ldots+7}{8}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1 \sin P_1 = \tfrac{1}{4}[0 - 4 + (1-3-5+7)\sin 45°] \\ b_1 &= p_1 \cos P_1 = \tfrac{1}{4}[2 - 6 + (1+3-5-7)\cos 45°] \\ a_2 &= p_2 \sin P_2 = \tfrac{1}{4}(0 - 2 + 4 - 6) \\ b_2 &= p_2 \cos P_2 = \tfrac{1}{4}(1 - 3 + 5 - 7) \end{aligned}$$

und daher

$$y = a + a_1 \sin(45° x . + P_1) + a_2 \sin(90° x . + P_2) + \ldots$$

Die Gleichung

$$\frac{dy}{dm} = 0 = a_1 \cos(45° x + P_1) + 2 a_2 \cos(90° x + P_2) + \ldots$$

gibt uns die Extreme des Barometerſtandes an.

Man muß aber hierbei bemerken, daß die Vormittägigen barometriſchen Mittel wegen der regelmäßigen Fluth zu groß, die nachmittägigen hingegen zu klein ſind, und daß man die aus Beobachtungen abgeleiteten Mittel vor ihrem Gebrauche erſt von den Einflüſſen der regelmäßigen Schwankungen unabhängig machen muß. Die bis jetzt nach jener Formel berechneten Werthe erſtrecken ſich auf zu wenige Orte, als daß man daraus allgemeine Schlüſſe ziehen könnte. Dove fand den Barometerſtand nach Pariſer Linien] für

Berlin nach Beguelin.

$$\begin{aligned} y = 335''.1875 &+ 1.6908 \sin(45° x + 68° 51') \\ &+ 0.5292 \sin(90° x + 265° 24'). \end{aligned}$$

Paris nach Meſſier.

$$\begin{aligned} y = 336''.10625 &+ 1.2495 \sin(45° x + 68° 22') \\ &+ 0.277 \sin(90° x + 144° 24'). \end{aligned}$$

Middelburg.

$$\begin{aligned} y = 336''.22375 &+ 1.9316 \sin(45° x + 65° 51') \\ &+ 0.40999 \sin(90° x + 272° 27'). \end{aligned}$$

Kopenhagen.

$$y = 337''.78875 + 1.47589 \sin (45^\circ x + 72^\circ 34')$$
$$+ 0.16878 \sin (90^\circ x + 332^\circ 40').$$

Hamburg.

$$y = 335''.8625 + 1.21437 \sin (45^\circ x + 52^\circ 22'')$$
$$+ 0.27949 \sin (90^\circ x + 206^\circ 34').$$

Apenrode.

$$y = 336''.155 + 0.91863 \sin (45^\circ x + 30^\circ 21')$$
$$+ 0.70665 \sin (90 x + 243'' 41').$$

Man kann füglich den zweiten Theil des zweiten Gliedes dieſer Gleichung weglaſſen und demnach den Barometerſtand ausdrücken durch

$$y = a + c \sin x$$

wobei a den mittleren Barometerſtand, c eine Conſtante bedeutet, welche mit der geographiſchen Breite wächſt.

Siehe hierüber: Nouveaux Mém. de l'Acad. royale des sciences. Berlin 1779. p. 36.

Pogg. Annalen. 8. 131; 11. 251; 11. 545.

Fünftes Kapitel.

Bewegung ſchallender Körper (Akuſtik).

A. Fortpflanzung des Schalles.

49. Die Geſetze, nach denen in einer Luftmaſſe Schallwellen erreget werden und ſich fortpflanzen, laſſen ſich aus den allgemeinen Gleichungen ableiten, welche für die Bewegung ausdehnſamer Flüſſigkeiten überhaupt aufgeſtellt wurden; nur nöthiget einen oft die Unmöglichkeit, nach dem gegenwärtigen Standpuncte der mathematiſchen Analyſis gewiſſe Gleichungen allgemein zu integriren oder ſelbſt in beſonderen Fällen das Integral durch einen endlichen Ausdruck darzuſtellen, Vorausſetzungen zu machen, welche in der Erfahrung nicht genau in demſelben Sinne Statt finden und ſtatt einer allgemeinen Auflöſung nur eine ſolche zu geben, die ſich auf einzelne Fälle bezieht.

Es ſey m ein Lufttheilchen, welches durch irgend eine oder mehrere Kräfte in Bewegung geſetzt iſt; nach Verlauf der Zeit

t vom Anfange der Bewegung an gerechnet, befinde es ſich in der Lage, welche durch die drei rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z beſtimmt wird, und habe in demſelben Augenblicke nach der Richtung dieſer Coordinaten die Geſchwindigkeit u, v, w, die Dichte σ und eine Ausdehnſamkeit, welche für die Fläche $= 1$ dem Druck p das Gleichgewicht hält. Setzt man voraus, daß m allenthalben dieſelbe Temperatur habe, ſo iſt nach Mariotte's Geſetz p der Größe σ proportionirt.

Denkt man ſich die Kräfte, welche m afficiren, nach x, y, z in die Partialkräfte X, Y, Z, zerlegt und ſo gerichtet, daß dieſe die Coordinaten zu vergrößern ſuchen, ſo iſt die Größe $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollſtändiges Integral, ſobald jene Kräfte Functionen der Entfernung ihres Angriffspunctes von ihren Mittelpuncten ſind, wie dieſes bei Naturkräften der Fall zu ſeyn pflegt. Man kann daher unter dieſer Vorausſetzung annehmen

$$Xdx + Ydy + Zdz = dq$$

wo q eine Function von x, y, z iſt.

Setzt man ferner voraus, daß ſich die bewegten Lufttheilchen nur wenig von der Lage ihres Gleichgewichtes entfernen, ſo kann man alle Potenzen von u, v, w von der zweiten an vernachläſſigen, $udx + vdy + wdz$ auch als vollſtändiges Integral betrachten, und ſetzen:

$$udx + vdy + wdz = d\varphi$$

wo φ eine Function von u, v, w und t iſt, bei deren Differenziirung nur x, y, z als veränderlich angeſehen worden ſind.

Nach dieſen Vorausſetzungen wird die Bewegung des Theilchens m durch folgende zwei Gleichungen beſtimmt:

$$q - \int \frac{dp}{\sigma} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right) \ldots (A)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d.\sigma\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \frac{d.\sigma\frac{d\varphi}{dy}}{dy} + \frac{d\sigma\frac{d\varphi}{dz}}{dz} = 0 \ldots\ldots (B).$$

50. Dieſe zwei Gleichungen reichen hin, die Unbekannten φ und σ zu beſtimmen und ſie durch x, y, z, t, auszudrücken. p iſt zugleich mit σ gegeben, weil es dieſem proportionirt iſt. Kennt man φ, ſo hat die Beſtimmung von u, v, w keine Schwierigkeit mehr, weil man hat:

$$\frac{d\varphi}{dx} = u, \quad \frac{d\varphi}{dy} = v, \quad \frac{d\varphi}{dz} = w.$$

Zu allen dieſem wird aber erfordert, daß man *(A)* und *(B)* integriren könne. Dieſes vermag man aber nicht allgemein; man erleichtert ſich zwar die Arbeit, weil man ſich, wie es hier geſchieht, auf die Bewegung beſchränkt, welche dem Schalle zum Grunde liegt, aber ſelbſt da läßt ſich das Integral nicht unter einer endlichen Form darſtellen. Aber ſchon die Form, in welcher es ſich darſtellen läßt, geſtattet wichtige Folgerungen in Betreff der Fortpflanzung des Schalles.

51. Man kann wohl von der Schwere der urſprünglich erſchütterten Luft abſehen und in der ganzen Luftmaſſe einerlei Temperatur annehmen. Demnach wirket auf die Luft bei der Fortpflanzung der Schallwelle keine äußere Kraft und man hat $q = 0$. Man kann auch die zweiten Potenzen der Geſchwindigkeiten $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ vernachläſſigen, und ſo aus *(A)* erhalten:

$$\int \frac{dp}{\sigma} + \frac{d\varphi}{dt} = 0 \; \ldots \ldots \; (C).$$

Man nenne die Dichte der Luft, ſo lange ſie in Ruhe iſt, *D*, die Barometerhöhe in der ganzen Luftſäule *h* und ſtelle ſich vor, daß ſich die Dichte *D* bei der Bewegung abwechſelnd um den γ^{ten} Theil vergrößere und verkleinere, ſo daß $\sigma = D\,(1 + \gamma)$ iſt. Heißt *g* die Schwere und nimmt man die Dichte des Queckſilbers zur Einheit an, ſo hat man für den Luftdruck in der ruhenden Luftſäule *gh* und dieſe Größe iſt zugleich das Maß ihrer Ausdehnſamkeit. Sie verwandelt ſich bei der Verdichtung, dem Mariotteſchen Geſetze gemäß in $p = gh\,(1 + \gamma)$, wenn dabei keine Wärme frei wird. Da aber Wärme entwickelt wird, und dieſe der Verdichtung proportionirt geſetzt werden kann, ſo muß man zum vorigen Ausdrucke noch $gh\varkappa$ ſetzen, und man hat demnach

$$p = gh\,(1 + \gamma + \varkappa\gamma)$$
$$dp = gh\,(d\gamma + \varkappa\, d\gamma)$$

mithin

$$\int \frac{dp}{\sigma} = a^2 \log\,(1 + \gamma)$$

wenn man der Kürze halber $\frac{gh}{D}\,(1 + \varkappa) = a^2$ ſetzt.

Dieſer Werth in (*C*) ſubſtituirt, gibt

$$a^2 \log (1 + \gamma) + \frac{d\varphi}{dt} = 0 \, .$$

oder wenn man die Potenzen von γ von der zweiten angefangen vernachläſſiget:

$$a^2 \gamma + \frac{d\varphi}{dt} = 0 \, \ldots\ldots\ldots \, (D).$$

Vernachläſſiget man auch die Producte aus $d\gamma$ in $d\varphi$, ſo wird aus (*B*)

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \, \ldots\ldots \, (E).$$

Eliminirt man aus (*D*) und (*E*) die Größe γ, ſo erlangt man

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \ldots\ldots\ldots \, (F).$$

Dieſe Gleichung iſt die Baſis der gegenwärtigen Unterſuchung. Iſt φ gegeben, ſo erhält man aus ſeinen partiellen Differenzialen in Bezug auf x, y, z die Geſchwindigkeit des Lufttheilchens m nach den Coordinaten x, y, z für jeden Werth von t; auch findet man daraus den Werth von $\frac{d\varphi}{dt}$, der die Verdichtung oder Verdünnung des Lufttheilchens angibt.

Man laſſe den Stoß, wodurch das Theilchen m in Bewegung geſetzt wird, nach der Richtung von x wirken und betrachte auch nur die Fortpflanzung dieſes Stoßes nach x. Da fallen die von y und z abhängigen Glieder obiger Gleichung weg, und man hat die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \ldots\ldots\ldots \, (G).$$

Es ſey nun $\eta = at$, mithin $d\eta = a dt$. Dieſes in (*G*) geſetzt, gibt

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Integrirt man dieſe Gleichung, ſo erhält man

$$\varphi = \text{funct}\,(x - \eta) + \text{funct}\,(x + \eta) \ldots\ldots \, (H).$$

Die Geſchwindigkeit der Luftmaſſe m iſt $\frac{d\varphi}{dx}$. Drückt man ſie durch u aus und ſucht ihren Werth aus (*H*), ſo erhält man die

erſte der nachſtehenden Gleichungen; ſubſtituirt man aber für dt den Werth $\frac{1}{a}\,d\eta$ in (D) und findet wieder $\frac{d\varphi}{d\eta}$ aus (H), ſo ergibt ſich die zweite dieſer Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} u = f(x-\eta) + F(x+\eta) \\ a\gamma = f(x-\eta) - F(x+\eta) \end{array}\right\} \ldots\ldots (I).$$

wo f und F unbeſtimmte Functionen von $x-\eta$ und $x+\eta$ bezeichnen.

52. Iſt die Luft anfänglich in Ruhe, ſo iſt für alle poſitiven Werthe von x, $u=0$ und $a\gamma=0$, ſobald $t=0$ vorausgeſetzt wird. Setzt man dieſes in die Gleichungen (I), ſo erhält man

$$fx = 0 \text{ und } Fx = 0.$$

Da $x+\eta=x+at$ eben ſowohl eine poſitive Größe iſt wie x, ſo kann man ſtatt x ſetzen $x+\eta$, und erhält demnach auch

$$F(x+\eta) = 0.$$

Dieſe Werthe in die Gleichungen (I) geſetzt, geben

$$u = a\gamma = f(x-\eta) = f(x-at) \ldots\ldots\ldots (K).$$

Heißt φt die Geſchwindigkeit, welche dem erſten Lufttheilchen nach Verlauf der Zeit t ertheilt wird, wo φ eine für alle poſitiven Werthe der Veränderlichen gegebene Function bezeichnet, welche durch die, die Bewegung anregende Urſache näher beſtimmt wird; ſo iſt $u=\varphi t$ für $x=0$. Aber aus obiger Gleichung wird für $x=0$, $u=f(-at)$, mithin hat man

$$f(-at) = \varphi t.$$

Weil nach Obigem fx für alle poſitiven Werthe von x gleich Null iſt, ſo muß auch $f(x-at)=u=0$ ſeyn, ſo lange $x>at$ iſt. Sobald aber $at>x$ oder $t>\frac{x}{a}$ iſt, ſtellt $t-\frac{x}{a}$ eine poſitive Größe vor und kann ſtatt t in die Gleichung $f(-at)=\varphi t$ geſetzt werden. Dadurch wird nun aus dieſer Gleichung folgende:

$$f(x-at)=\varphi\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

und daher mittelſt (K)

$$u = a\gamma = \varphi\left(t-\frac{x}{a}\right) \ldots\ldots (L).$$

Aus dieſer Gleichung folgt: 1. Daß ein Lufttheilchen, welchem

x entſpricht, in Bewegung geräth in dem Augenblicke, in welchem $t = \frac{x}{a}$ iſt; denn für den folgenden Augenblick hat $t - \frac{x}{a}$ mithin auch u und $a\gamma$ ſchon einen poſitiven Werth. 2. Die Zeit t, nach deren Verlauf jenes Theilchen in Bewegung geräth, iſt ſeiner Entfernung x vom Anfangspuncte der Erregung proportionirt, und es pflanzt ſich daher dieſe Bewegung gleichförmig fort. Die Geſchwindigkeit dieſer Fortpflanzung, welche von der Geſchwindigkeit der einzelnen Lufttheilchen wohl unterſchieden werden muß, iſt $= a$. 3. Die Geſchwindigkeit u und Änderung der Dichte $a\gamma$, welche den Lufttheilchen zu Theil wird, trifft nach und nach alle anderen in der Richtung des urſprünglichen Stoßes liegenden Theilchen und die Änderungen der Dichte ſind den Geſchwindigkeiten proportionirt. Dauert die Bewegung des erſten Theilchens nur eine beſtimmte Zeit, ſo erſtreckt ſich die Dauer der Bewegung jedes anderen auch auf dieſe Zeit.

53. Man denke ſich nun einen beliebigen Körper, der in Schwingungen begriffen iſt und durch dieſelben auf das bisher betrachtete Lufttheilchen m wirket. Man nenne x die Entfernung eines ſeiner phyſiſchen Puncte von der Lage des Gleichgewichtes, u ſeine Geſchwindigkeit, e ſeine Elaſticität oder Spannkraft, die ihn in die natürliche Lage zurück zu treiben ſucht, und man nehme an, die Kraft, mit der ſie wirkt, ſey ex. Heißt nun t die Zeit, welche von einem beſtimmten Augenblicke an, bis zu dem, für welchen u zu beſtimmen iſt, verfloß, ſo hat man:

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -ex$$

mithin durch Integriren des letzteren Ausdruckes

$$\frac{dx^2}{dt^2} = u^2 = -ex^2 + \text{const.}$$

Zur Beſtimmung der Conſtanten bedenke man, daß für den Fall, wo das ſchwingende Theilchen am weiteſten von der Lage des Gleichgewichtes entfernt iſt, ſeine Geſchwindigkeit $= 0$. Nennt man die halbe Schwingungsweite h, ſo iſt $eh^2 = \text{const}$, mithin

$$u^2 = e(h^2 - x^2) \text{ und } u = \sqrt{[e(h^2 - x^2)]}.$$

Aus $\frac{dx}{dt} = u = \sqrt{[e(h^2 - x^2)]}$ erhält man $dt = \frac{-dx}{\sqrt{[e(h^2 - x^2)]}}$

und durch Integriren

$$t + c = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ arc cos } \frac{x}{h},$$

wobei c die Conſtante der Integration iſt, und daher

$x = h \cos [(t+c)\sqrt{e}]$ und daraus $u = h\sqrt{e} \sin [(t+c)\sqrt{e}]$.

Bedeutet δ die Dauer einer Schwingung des oſcillirenden Körpers, ſo hat man

für $\delta = 0$; $u = 0$; $x = h$ und daher $h = h \cos [(\delta + c)\sqrt{e}]$;

$$(\delta + c)\sqrt{e} = 0$$

$\delta = \frac{1}{2}$; $x = -h$ und daher $-h = h \cos (\delta + \frac{1}{2}\delta + c)\sqrt{e}$;

$$(\delta + \tfrac{1}{2}\delta + c)\sqrt{e} = \pi$$

wo π das bekannte Kreisverhältniß bezeichnet. Daraus erhält man aber:

$$\tfrac{1}{2}\delta\sqrt{e} = \pi \text{ oder } \delta = \frac{2\pi}{\sqrt{e}} \text{ und } \sqrt{e} = \frac{2\pi}{\delta}.$$

Setzt man in den vorhergehenden Gleichungen für e ſeinen Werth, und $h\sqrt{e} = k$, ſo wird

$$x = h \cos 2\pi \left(\frac{t+c}{\delta}\right); \quad u = k \sin 2\pi \left(\frac{t+c}{\delta}\right).$$

Zählt man δ von dem Augenblicke an, wo das ſchwingende Theilchen am weiteſten von der Lage des Gleichgewichtes entfernt iſt, ſo iſt $c = 0$, und daher

$$x = h \cos \frac{2\pi t}{\delta}; \quad u = k \sin \frac{2\pi t}{\delta}.$$

54. Das Lufttheilchen, welches die vibrirenden Puncte des Körpers berührt, worauf ſich dieſe Gleichungen beziehen, erhält durch dieſelben die Geſchwindigkeit u. Dieſe theilt ſie, dem vorhergehenden gemäß, den in gerader Richtung daran grenzenden Lufttheilchen mit. Ein ſolches Theilchen, deſſen Entfernung vom erſteren $= x$ iſt, wird um $\frac{x}{a}$ ſpäter in Bewegung geſetzt, als das erſte. Daher wird man, um obige Gleichung von u für alle in x liegende Lufttheilchen brauchbar zu machen, ſtatt t ſetzen müſſen $t - \frac{x}{a}$ wie es ſchon in (52) geſchehen iſt, und man hat demnach

$$u = k \sin . 2\pi \left(\frac{t - \frac{x}{a}}{\delta}\right).$$

Iſt $\imath$ eine poſitive ganze Zahl oder Null und $t - \frac{x}{a} = \imath\,\delta$, ſo iſt $u = 0$. Setzt man daher für $\imath$ nach und nach die Werthe $\imath = 0$, 1, 2, 3 ꝛc., ſo wird dadurch eine Folge von Puncten in der Linie x bezeichnet, in denen die Luft weder eine Geſchwindigkeit noch eine Abweichung von ihrer natürlichen Dichte hat. Eben ſo erhält u für $\imath = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ꝛc. den größten Werth, und es wird durch Subſtituiren dieſer Werthe von $\imath$ in obiger Gleichung eine andere Folge von Puncten in x beſtimmt, wo die Geſchwindigkeit und Änderung der Dichte am größten iſt. Im allgemeinen erhalten alle jene Puncte in der Linie x, für welche $\imath$ ſtufenweiſe um 1 größer iſt, dieſelbe Geſchwindigkeit und Dichte. Der Abſtand zweier ſolcher Puncte iſt $a\delta = \lambda$. Zwiſchen zwei Puncten, denen die Geſchwindigkeit $= 0$ entſpricht, kommen alle Grade von Geſchwindigkeit vor, die überhaupt der Luft in x eigen ſind. Denkt man ſich daher den oſcillirenden (ſchallenden) Punct rings von Luft umgeben, die allenthalben gleich expanſibel iſt, ſo wird das, was bisher blos in der Richtung x betrachtet wurde, in jeder Richtung vorgehen. Denkt man ſich um den ſchallenden Punct eine Kugel beſchrieben, ſo werden die in ihre Fläche fallenden Theile einerlei Geſchwindigkeit und Verdichtung haben und in zwei ſolchen concentriſchen Kugelflächen, welche durch die Puncte gehen, deren Geſchwindigkeit $= 0$ iſt, liegen lauter Theile, die gerade eine Schwingung vollbracht haben und eine neue beginnen. Den Inbegriff der zwiſchen denſelben befindlichen Lufttheilchen nennt man eine Schallwelle. Die Länge derſelben iſt $a\delta = \lambda$.

Die Wellenlänge λ iſt, wie die Gleichung $\lambda = a\delta$ zeigt, deſto kleiner, je kleiner δ iſt. Daher erzeugen ſchnellere Oſcillationen kürzere Wellen, und weil die Schnelligkeit der Oſcillationen mit der Tonhöhe zuſammenhängt, ſo ſteht dieſe auch mit der Wellenlänge in Verbindung.

55. Die Stärke des Schalles hängt von der Stärke des Stoßes ab, den die Lufttheilchen auf das Gehörorgan ausüben. Dieſer wächſt bei übrigens gleichen Umſtänden mit $k = h\sqrt{e}$. Demnach iſt der Schall deſto intenſiver, je größer die Excurſion der ſchwingenden Theilchen iſt.

56. Bisher wurde der ſchallende Körper als phyſiſcher Punct betrachtet. Beſteht er aus mehreren ſolchen Puncten, ſo bildet

ſich um jeden eine Schallwelle, wie die vorhin betrachtete, aus allen geht aber durch Einhüllung derſelben eine einzige Welle hervor, falls überhaupt alle Theile gleichzeitig ſchwingen. Jeder Punct einer Welle erſcheint ſelbſt wieder als Mittelpunct neuer Elementarwellen, die ſich zu einer einzigen Welle zuſammenſetzen. Iſt z. B. *AB* (Fig. 76) der Durchſchnitt einer um den ſchallenden Punct *C* entſtandenen ſphäriſchen Welle, ſo gehen von jedem ihrer Puncte *a*, *b*, *c*, *d* ꝛc. Elementarwellen aus, und die Curve *ED*, welche ſie einhüllt, iſt gleichſam die erweiterte Welle *AB*.

Es ſey $\eta^2 = r^2 - a^2$ die Gleichung des Kreiſes *BA*, *r* ſein Halbmeſſer, ρ der Radius der Elementarwelle und die Gleichung ihres Kreiſes $(x-a)^2 + [y - \sqrt{(r^2-a^2)}]^2 = \rho^2$. Differenziirt man letztere in Beziehung auf *a*, ſo erhält man

$$(x-a) - [y - \sqrt{(r^2-a^2)}]\frac{a}{\sqrt{(r^2-a^2)}} = 0.$$

Daraus findet man

$$a = \frac{rx}{\sqrt{(r^2-y^2)}}.$$

Dieſer Werth in die Gleichung des Kreiſes *AB* geſetzt, gibt

$$x^2 + y^2 = (r+\rho)^2$$

alſo die Gleichung eines Kreiſes vom Halbmeſſer $r+\rho$.

57. Die Geſchwindigkeit des Schalles in der Luft iſt (51) gegeben durch

$$a = \sqrt{\left(\frac{gh}{D}(1+\varkappa)\right)} \;\ldots\ldots\; (M).$$

Würde beim Verdichten keine Wärme entwickelt, ſo hätte man $\varkappa = 0$, mithin

$$a = \sqrt{\frac{gh}{D}}.$$

Setzt man $\frac{h}{D} = H$, ſo hat man

$$a = \sqrt{Hg}$$

die bekannte Newton'ſche Formel.

58. Bei einer anderen Temperatur, in einem Orte, wo *g* einen veränderten Werth hat, wo wegen eines anderen Barometerſtandes das Verhältniß zwiſchen der Dichte der Luft und des Queckſilbers anders ausfällt, wird die Geſchwindigkeit *a* auch einen anderen Werth bekommen, wenn man auch vorausſetzt, daß $\varkappa$ da-

bei beſtändig geblieben iſt. Auch gilt obige Formel nur für trockene Luft.

Für einen Beobachtungsort, deſſen Breite φ iſt, geht g in $g\,(1 - 0.002837 \cos 2\varphi)$ über. Iſt D das Verhältniß zwiſchen der Dichte der Luft und des Queckſilbers bei 0° C und $0^{m}.76$ Luftdruck, ſo hat es nach Biot und Arago den Werth $\frac{1}{10466.82}$. Findet aber der Luftdruck h, und die Temperatur τ Statt, ſo wird

$$D = \frac{h}{10466.82 \times 0.76\,(1 + 0.00375\,\tau)}.$$

Iſt e die Spannkraft der in der Luft befindlichen Dünſte, ſo kommt auf Rechnung derſelben der Druck $\frac{3}{8}e$ und man hat für dieſen Feuchtigkeitszuſtand

$$D = \frac{h - \frac{3}{8}e}{10466.82 \times 0.76\,(1 + 0.00375\,\tau)}.$$

Setzt man dieſen Werth in (M), ſo wird

$$a = \sqrt{\left(\frac{hg\,(1 - 0.002837 \cos 2\varphi)\,(10466.82 \times 0.76)\,(0.00375\,\tau)\,(1 + \varkappa)}{h - \frac{3}{8}e}\right)} \,..\,(N).$$

59. Nun handelt es ſich noch darum, $\varkappa$ zu beſtimmen. Zu dieſem Behufe denke man ſich ein Luftvolumen von der Dichte D und der Temperatur τ unter dem Drucke gh. Wird dieſe Luft ſo zuſammengedrückt, daß ſie die Dichte $D\,(1 + \gamma)$ erlangt, ſo wird ihre Temperatur bis $\tau + \omega$ ſteigen, und jene Dichte iſt zugleich durch Änderung der Temperatur und des Druckes hervorgebracht. Soll ſie bei der Temperatur τ die Dichte $D\,(1 + \gamma)$ annehmen, ſo muß ſie unter dem Drucke $gh\,(1 + \gamma)$ ſtehen. Erwärmt man ſie bei dieſem Drucke von τ bis $\tau + \omega$, ſo dehnt ſie ſich aus und nimmt die Dichte

$$\frac{D\,(1 + \gamma)\,(1 + 0.00375\,\tau)}{1 + 0.00375\,(\tau + \omega)}$$

an. Soll ſie ohne Temperaturänderung die Dichte $D\,(1 + \gamma)$ erhalten, ſo wird dazu ein Druck erfordert, von der Größe

$$\frac{gh\,(1 + \gamma)\,[1 + 0.00375\,(\tau + \omega)]}{1 + 0.00375\,\tau}.$$

Bei den Änderungen der Dichte, wie ſie bei der Schallfortpflanzung Statt finden, kann man füglich die mit ihnen verbundenen Temperaturänderungen der Verdichtung oder Verdünnung pro-

portionirt ſetzen. Es ſey demnach $\omega = m\gamma$. Vernachläſſiget man die Quadrate von γ, ſo bekommt man ſtatt des letzteren Ausdruckes

$$gh\left(1+\gamma+\frac{0.00375\,m\,\gamma}{1+0.00375\,\tau}\right).$$

Aber früher (52) wurde für dieſe Dichte der Ausdruck

$$gh\,(1+\gamma+\varkappa\gamma)$$

gefunden. Sucht man aus dieſen zwei Gleichungen $\varkappa$, ſo bekommt man

$$\varkappa = \frac{0.00375\,m}{1+0.00375\,\tau} = \frac{0.00375\,\omega}{1+0.00375\,\tau}\cdot\frac{1}{\gamma}.$$

Demnach erhält man aus (M)

$$a = \sqrt{\left\{\frac{gh}{D}\left(1+\frac{0.00375\,\omega}{1+0.00375\,\tau}\cdot\frac{1}{\gamma}\right)\right\}} \quad \ldots\ldots (O).$$

60. Der Werth von ω läßt ſich aus einem ſehr ſinnreichen Verſuche von Clement und Desormes ableiten, der dem Weſen nach in Folgendem beſtand: Eine in einem verſchloſſenen Gefäße enthaltene Luftmaſſe von der Temperatur τ, der Dichte D und unter dem Drucke b, wurde um einen Theil vermindert, ſo, daß ſie die Dichte D_1 annahm und den Druck b_1 aushalten konnte. Sobald ſie $\tau°$ hatte, wurde ſie mit der äußeren Luft in Communication geſetzt, damit ſich ihre Dichte, Temperatur und der auf ſie wirkende Druck vermehrte, und letzterer wieder b wurde. Sobald dieſes Statt fand, wurde die Communication mit der äußeren Luft wieder unterbrochen, und ihre Dichte D_2 und ihre Temperatur $\tau+\omega$ beobachtet. Als ſie wieder die vorige Temperatur τ angenommen hatte, wurde der innere Druck vermindert, und in b_2 verwandelt, während die Dichte D_2 unverändert blieb. Man hatte daher

beim 1. Th. des Verſuches	die Temp.	τ	die Dichte	D	den Druck	b
— 2.	——	τ	——	D_1	——	b_1
— 3.	——	$\tau+\omega$	——	D_2	——	b
— 4.	——	τ	——	D_2	——	b_2.

Die Dichte D war innerhalb $\frac{1}{2}$ Secunde in D_1 verwandelt, ſo daß das Gefäß von der frei gewordenen Wärme nur unangebbar wenig aufnehmen konnte und man wohl ω als die der Verdichtung $\frac{D_2-D_1}{D_1}$ entſprechende Wärmemenge anſehen konnte.

Es iſt demnach

$$\frac{D_2 - D_1}{D_1} = \gamma.$$

Aber wegen $\frac{D_1}{D_2} = \frac{b_1}{b_2}$ iſt auch

$$\frac{D_2 - D_1}{D_1} = \frac{b_2 - b_1}{b} = \gamma$$

mithin γ gegeben. Ferner iſt

$$\frac{b}{b_2} = \frac{1 + 0.00375\,(\tau + \omega)}{1 + 0.00375\,\tau}$$

mithin aus beiden Gleichungen

$$\frac{0.00375\,\omega}{(1 + 0.00375\,\tau)\,\gamma} = \frac{(b - b_2)\,b_1}{(b_2 - b_1)\,b_2}$$

und daher, wenn man dieſen Werth in (O) ſubſtituirt und der Kürze halber $1 + \frac{(b - b_2)\,b_1}{(b_2 - b_1)\,b_2} = l$ ſetzt:

$$a = \sqrt{\left(\frac{gh}{D} \cdot l\right)} \;\ldots\ldots\; (P).$$

Bei dem erwähnten Verſuche war $b = 0^{mm}.7665$, $b - b_1 = 0.01381$, $b - b_2 = 0.00361$, mithin

$$l = 1\,3492.$$

Es herrſchte bei dieſem Verſuche die Temperatur $\tau = 12^\circ.5$ und es war $\frac{h}{D} = 8327^m.66$, wenn man $g = 9^m.8087$ ſetzt. Daher iſt

$$a = 331^m.97.$$

Die Mitglieder des Längenbureau in Paris fanden bei einer Temperatur von $15^\circ.9$ und einem Hygrometerſtande von 72° $a = 340^m.89$. Für dieſe Umſtände gibt die Rechnung die Geſchwindigkeit $a = 334^m.66$, mithin die Differenz zwiſchen der Rechnung und der Beobachtung von $6^m.23$, eine Größe, die leicht Beobachtungsfehlern zugeſchrieben werden kann.

Legt man der Beſtimmung des Werthes von $\varkappa$ ſtatt des obigen Verſuches einen anderen von Gay-Luſſac und Welter zu Grunde, bei dem der Barometerſtand $0^m.757$ betrug, und wo ſich aus vier Beobachtungen nur eine Differenz ergab, die $\frac{1}{136}$ des Mittels gleich war; ſo findet man

$$l = 1.3748.$$

Wird dieſer Werth in Rechnung genommen, ſo reducirt ſich obige Differenz gar auf $3^m.174$.

Die genaueſten Verſuche über Schallfortpflanzung ſind die von Moll und van Beck in Holland angeſtellten. Dieſe geben für die auf 0° C reducirte, trockene Luft $a = 332.05$, wenn der letztere Werth von l angewendet wird, mithin um $4^m.24$ mehr als die Rechnung verlangt, eine Differenz, die bei ſo delicaten Unterſuchungen immer noch als ſehr klein anzuſehen iſt.

61. Es ſey γ die Verdichtung, welche die Luft erleidet, wenn ihre Temperatur um ſo wenig vermindert wird, während ſie noch unter demſelben Drucke ſteht. Man bezeichne dieſe Temperaturänderung durch n, ſo daß man erhält

$$\gamma = \frac{0.00375\, n}{1 + 0.00375\, \tau}$$

wo τ die anfängliche Temperatur der Luft bezeichnet. Setzt man dieſen Werth in die Gleichung (O), ſo erhält man

$$a = \sqrt{\left[\frac{gh}{D}\left(1 + \frac{\omega}{n}\right)\right]}.$$

Es ſey nun N die Wärmemenge, welche man einer beſtimmten Luftmaſſe ertheilen muß, um beim Drucke h ihre Temperatur von $\tau - \omega$ auf τ zu bringen. Drückt man dieſe Luft zuſammen, bis ſie ihr voriges Volumen wieder erlangt hat, ſo wird ſie eine Verdichtung erleiden und ihre Temperatur wird von τ bis $\tau + \omega$ ſteigen. Wartet man nun die Rückkehr der vorigen Temperatur wieder ab, ſo wird der Druck wieder h. Während dieſer Zeit verliert die Luft eine Wärmemenge, die man der Temperaturänderung $n + \omega$ proportionirt ſetzen, und daher durch $c\,(n + \omega)$ ausdrücken kann, wo c die Wärmemenge bedeutet, welche man der Luftmaſſe $= 1$ mittheilen muß, um ihre Temperatur um 1° C zu erhöhen. Hier iſt alſo

$$N = c\,(\omega + n) \text{ oder } \frac{N}{cn} = 1 + \frac{\omega}{n}.$$

Die Größe $\frac{N}{cn}$ drückt das Verhältniß zwiſchen der ſpecifiſchen Wärme der Luft bei conſtantem Drucke zu dem unter conſtantem Volumen aus. Bezeichnet man dieſes Verhältniß mit l, ſo hat man wieder

$$a = \sqrt{\left(\frac{gh}{D} \cdot l\right)}.$$

62. Faßt man alles zuſammen, was hier über die Geſchwindigkeit des Schalles in der Luft verhandelt wurde; ſo erhält man folgenden vollſtändigen Ausdruck für die Geſchwindigkeit in Metern:

$$a = \sqrt{\left(\frac{hg\,(1 - 0.002837 \cos 2\varphi)\,(10466.82 \times 0.76)\,(1 + 0.00375\,\tau)\,l}{h - \frac{3}{8}e}\right)} \;.. (Q).$$

wo $g = 9^{m}.8088$, $l = 1.3748$ iſt.

Wollte man nach dieſer Formel auch die Geſchwindigkeit des Schalles in anderen Gaſen beſtimmen, ſo müßte unter anderen auch l für dieſelben bekannt ſeyn. Es iſt wenig Hoffnung vorhanden, daß wir bald zur Kenntniß dieſer Größe aus directen Verſuchen gelangen werden, vielmehr bemüht man ſich, dieſe Größe aus der durch irgend ein Mittel gefundenen Geſchwindigkeit des Schalles in den Gaſen kennen zu lernen, wovon in der Folge die Rede ſeyn wird.

63. Wenn man die Ergebniſſe aller Verſuche von Werth, durch welche die Geſchwindigkeit des Schalles in der Luft beſtimmt wurde, nach der vorhergehenden Formel auf 0° C reducirt; ſo findet man folgende Werthe:

Beobachter	Beobachtungsort	Geſchwindigkeit des Schalles in Metern
Parry und Forſter	Port Bowen	333.15
——	detto	333.71
——	detto	332.85
Moll und van Beck	Holland	332.05
Stampfer und Myrbach	Öſterreich	333.25
Arago, Mathieu ꝛc.	Frankreich	331.05
Benzenberg	Deutſchland	333.70
Epinoza und Bauza	Chili	356.14
Gregory	England	335.14
Franz. Akademiker	Frankreich	332.93

Berechnet man hiervon, nach Hinweglaſſung der in Chili gemachten Betrachtungen, den Mittelwerth, ſo findet man $333^{m}.01$ als den durch Erfahrung gegebenen genaueſten Werth. Eine Sammlung der Werthe von a in mehrere Mitteln enthält die Tafel XVII.

B. Reflexion des Schalles.

64. Man denke ſich eine cylindriſche Röhre, nehme an, daß ſich in ihr zwei verſchiedene ausdehnſame Flüſſigkeiten befinden, die ſowohl in der Ruhe als während ihrer Bewegung in einer auf der Axe der Röhre ſenkrechten Ebene an einander grenzen, und unterſuche die Bewegung der Luft in dieſer Röhre in der Vorausſetzung, daß dieſelbe für alle in demſelben Querſchnitte liegenden Theile gleich iſt. Es ſey x die Entfernung einer beliebigen Schichte der einen Flüſſigkeit von einem Ende der Röhre und es erſtrecke ſich die erſte Flüſſigkeit von $x=0$ bis $x=l$, die andere von $x=l$ bis $x=\infty$. Ferner ſey, in der erſten Flüſſigkeit a die Geſchwindigkeit des Schalles, u die Geſchwindigkeit der Theile der Wellen, γ ihre Verdichtung, eben ſo ſeyen in der zweiten Flüſſigkeit dieſelben Größen mit a_1, u_1, γ_1, bezeichnet und es werde die Zeit t vom Anfange der Bewegung an gerechnet. Setzt man $\eta=at$ und $a_1=na$, ſo iſt nach (I)

$$u=f(x-\eta)+F(x+\eta),\quad u_1=f_1(x-n\eta)+F_1(x+n\eta)$$
$$a\gamma=f(x-\eta)-F(x+\eta),\quad a_1\gamma_1=f_1(x-n\eta)-F_1(x+n\eta)$$

wo f, f_1, F, F_1, wieder unbeſtimmte Functionen bedeuten.

Da, wo beide Flüſſigkeiten an einander grenzen, wo $x=l$ iſt, haben beide Fluida offenbar einerlei Geſchwindigkeit und Ausdehnſamkeit. Es iſt daher für $x=l$.

$$u_1 = u$$
$$f(l-\eta)+F(l+\eta)=f_1(l-n\eta)+F_1(l+n\eta) \quad \ldots\ (R).$$

Es ſeyen D und E die natürliche Dichte und Ausdehnſamkeit der erſten Flüſſigkeit, D_1 und E_1 dieſelben Größen bei der zweiten. Dieſe Größen gehen während der Bewegung, wo eine Verdichtung oder Verdünnung eintritt, in $D(1+\gamma)$, $E(1+\gamma)$, $D_1(1+\gamma_1)$, $E_1(1+\gamma_1)$ über, wobei man von der, während der Verdichtung frei werdenden Wärme abſieht. Wird aber auch auf dieſe Rückſicht genommen und vorausgeſetzt, daß ſich dieſe Größen bei der erſten Flüſſigkeit vermöge dieſes Einfluſſes um den $\varkappa^{\text{ten}}$, bei der zweiten um den $\varkappa_1^{\text{ten}}$ Theil ändern; ſo bekommt man für die Ausdehnſamkeit beider Flüſſigkeiten die Werthe

$$E(1+\varkappa\gamma)(1+\gamma) \text{ und } E_1(1+\varkappa_1\gamma_1)(1+\gamma_1).$$

Vernachläſſiget man die Quadrate von $\varkappa$ und bedenkt, daß

an der Grenze beider Flüſſigkeiten die Ausdehnſamkeiten gleich ſind, ſo bekommt man

$$E\,[1+(1+\varkappa)\,\gamma] = E_1\,[1+(1+\varkappa_1)\,\gamma_1]$$

oder wegen $E = E_1$ auch $(1+\varkappa)\,\gamma = (1+\varkappa_1)\gamma_1$, und daher auch

$$a\,n\,(1+\varkappa)\,\gamma = a_1\,(1+\varkappa_1)\,\gamma_1.$$

Setzt man für $a\gamma$ und $a_1\gamma_1$ obige Werthe, für x den beſonderen Werth l und heißt man der Kürze wegen,

$$\frac{1+\varkappa_1}{n\,(1+\varkappa)} = \frac{a(1+\varkappa_1)}{a_1\,(1+\varkappa)} = c$$

ſo erhält man für alle poſitiven Werthe von η

$$f\,(l-\eta) - F\,(l+\eta) = c\,[f_1\,(l-n\eta)] - F_1\,[(l+n\eta)] \ldots (S).$$

65. Man nehme nun auch an, die urſprüngliche Verdichtung und Geſchwindigkeit der zweiten Flüſſigkeit ſey $= 0$, ſo hat man für alle Werthe von x, die größer ſind als l, $u_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$. Deßhalb iſt auch von $x = l$ bis $x = \infty$ $f_1\,x = 0$, $F_1 x = 0$, und daher auch, weil η ſtets poſitiv iſt $f_1\,(l+n\eta) = 0$, $F_1\,(l+n\eta) = 0$.

Eliminirt man $f_1\,(l-n\eta)$ aus den Gleichungen (R) und (S), ſo bekommt man

$$f\,(l-\eta) - F\,(l+\eta) = c\,[f\,(l-\eta) + F\,(l+\eta)]$$

mithin auch $a\gamma = c\,u$ für $x = l$.

66. Die vorhergehende Gleichung gibt

$$f\,(l-\eta) = \frac{1+c}{1-c}\,F\,(l+\eta).$$

Setzt man dieſen Werth in (R) und bedenket, daß für jeden Werth von x, der größer iſt als l, die Gleichung $F\,(x+n\eta) = 0$ Statt findet, ſo erhält man

$$f_1\,(l-n\eta) = \frac{2}{1-c}\,F\,(l+\eta).$$

Da dieſe Gleichung für alle poſitiven Werthe von η gilt, mithin auch, wenn man ſtatt η ſetzt $\frac{n\eta+l-x}{n}$, wo $n\eta+l > x$ iſt, ſo hat man

$$f_1\,(x-n\eta) = \frac{2}{1-c}\,F\left(\frac{l+nl+n\eta-x}{n}\right).$$

Da aber für $x > l$ auch $F(x + n\eta) = 0$ iſt, ſo erhält man aus obigem Werthe von u_1 und $a_1\gamma_1$

$$u_1 = a_1\gamma_1 = f_1(x - n\eta)$$

und daher

$$u_1 = a_1\gamma_1 = \frac{2}{1-c} F\left(\frac{l + nl + n\eta - x}{n}\right).$$

Man darf aber nicht vergeſſen, daß dieſer Werth von u_1 erſt eintritt, wenn $n\eta + l = a_1 t + l = x$ oder $t = \dfrac{x-l}{a_1}$ iſt. Vor dieſer Epoche hat man $u_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$.

Für die erſte Flüſſigkeit iſt ſtets $x < l$; man kann daher in $f(l - \eta)$ ſtatt η ſetzen $\eta + l - x$, und dadurch erhalten

$$f(x - \eta) = \frac{1+c}{1-c} F(2l - x + \eta).$$

Dieſer Werth in die Gleichungen für u und $a\gamma$ geſetzt, macht

$$u = \frac{1+c}{1-c} F(2l - x + at) + F(x + at)$$

$$a\gamma = \frac{1+c}{1-c} F(2l - x + at) - F(x - at).$$

Demnach hängen u und γ nur von der Function F ab.

67. Nimmt man an, daß beim Beginn der Bewegung keine der zwei Flüſſigkeiten an irgend einem Puncte eine Verdichtung erleidet; ſo gibt die Gleichung, welche gerade vorhin entwickelt wurde, für $t = 0$

$$a\gamma = \frac{1+c}{1-c} F(2l - x) - Fx = 0$$

mithin auch für $x = 0$ bis $x = l$

$$F(2l - x) = 0 \text{ und } Fx = 0.$$

Theilt man nun der Schichte, für welche $x = 0$ iſt, eine Geſchwindigkeit mit, die nach Verlauf der Zeit t die Größe φt hat und die nur eine Zeit δ lang anhält, welche viel kleiner iſt, als diejenige, in welcher der Schall den Weg l in der erſten Flüſſigkeit zurücklegt; ſo hat man für $x = 0$ von $t = 0$ bis $t = \delta$, $u = \varphi t$. Da iſt aber auch $F(at) = 0$, mithin

$$u = \frac{1+c}{1-c} F(2l + at) = \varphi t \;\ldots\ldots\; (T).$$

68. Die Schichte der erſten Flüſſigkeit, welche der Entfernung x von der Öffnung entſpricht, geräth zweimal in Bewegung. Das erſtemal, wenn $t = \frac{x}{a}$ iſt, das zweitemal, wenn $t = \frac{2l - x}{a}$ iſt. Die erſte Bewegung dauert von $t = \frac{x}{a}$ bis $t = \frac{x}{a} + \delta$, und während dieſer Zeit iſt

$$u = a\gamma = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Die zweite dauert wieder eine Zeit δ. Bezeichnet man die Geſchwindigkeit und Dichte in dieſer Epoche mit u_2 und γ_2, ſo erhält man:

$$u_2 = -a\gamma_2 = F(x + at)$$

oder vermöge (T)

$$u_2 = -a\gamma_2 = \frac{1-c}{1+c}\varphi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right).$$

Die Schichten der zweiten Flüſſigkeit gerathen nur einmal in Bewegung und zwar jene, welche der Diſtanz x entſpricht, dann, wenn $l + nl + a_1 t - x = 2nl$ oder $t = \frac{x + nl - l}{a_1}$ iſt. Auch dieſe Bewegung dauert nur durch die Zeit δ, und man hat aus (T)

$$u_1 = a_1\gamma_1 = \frac{2}{1+c}\varphi\left(t - \frac{x + nl - l}{a_1}\right).$$

Demnach wird ein Schallſtrahl an der Trennungsfläche der zwei Mittel in zwei Theile zerlegt, wovon einer in das neue Mittel eindringt, der andere hingegen in das alte zurückkehrt, mithin reflectirt wird.

69. Der Werth von u entſpricht dem directen, u_2 hingegen dem reflectirten Schallſtrahle. Vergleicht man beide für einerlei φ, ſo findet man

$$u_2 = \frac{1-c}{1+c}u \text{ oder } (1+c)\,u_2 = (1-c)\,u.$$

Es ſtehen daher die den Theilchen eigenen Geſchwindigkeiten in dem Verhältniſſe $1 - c : 1 + c$ und der Schall iſt durch Reflexion in dem Verhältniſſe $(1-c)^2 : (1+c)^2$ geſchwächt worden, wenn man die Intenſität des Schalles dem Quadrate der Geſchwindigkeit, welche den Wellentheilen zukommt, proportional ſetzt. Vergleicht

man für einerlei Werth von φ die Werthe von u_1 und u_2, ſo hat man

$$u_1 = \frac{2u}{1+c}, \text{ mithin } u_1 - u_2 = u.$$

Daher iſt die Summe der Geſchwindigkeiten der Theile in der directen und reflectirten Welle nach ihrer Trennung gleich der Geſchwindigkeit der Theile vor der Trennung.

70. Die Schlüſſe, welche ſich auf die Bewegung einer Luftſäule in einer Röhre beziehen, laſſen ſich leicht auf die Bewegung derſelben in der freien Luft ausdehnen; ja es läßt ſich auch leicht einſehen, was Statt finden muß, wenn ſich eine ſolche Luftſäule bis zu einem feſten oder tropfbaren zur Fortpflanzung des Schalles geeigneten Körper erſtreckt. Auch da muß die Theilung der Welle in eine directe und in eine reflectirte eintreten, wie im vorhin betrachteten Falle, weil die Elaſticität des feſten oder tropfbaren Körpers die Stelle der Ausdehnſamkeit des Luftförmigen vertritt.

Stoßt eine Schallwelle ſchief an die Trennungsfläche zweier akuſtiſch heterogener Mittel, ſo denke man ſich die Richtung und Geſchwindigkeit der Theile der Welle in zwei zerlegt, wovon eine in der Richtung der zur Trennungsfläche Normalen, die andere in einer auf dieſer Senkrechten liegt. Erſtere muß offenbar nach den bisher bewieſenen Geſetzen reflectirt werden, während die andere nichts zur Reflexion beiträgt. Setzt man nach geſchehener Reflexion die normale Geſchwindigkeit mit der früher außer Acht gelaſſenen zuſammen; ſo erhält man die Richtung der Theile der ganzen Welle nach der Reflexion, und ſieht ein, daß der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich ſeyn muß.

71. Auf dieſem Geſetze der Reflexion des Schalles beruht die Einrichtung jener Inſtrumente, wodurch man den urſprünglichen Schall für unſer Gehörorgan verſtärkt, unter denen das Sprachrohr und das Hörrohr vorzüglich wichtig ſind, und daher eigens betrachtet werden müſſen.

Durch ein Sprachrohr ſollen die Schallwellen, welche vom Munde des Sprechenden ausgehen und bei ihrer natürlichen Ausbreitung das Ohr des Hörenden verfehlen würden, durch die Reflexion ſo modificirt werden, daß ſie von demſelben aufgenommen werden. Man gibt demſelben am beſten eine kegelförmige Geſtalt, weil ſie zur Erreichung des beabſichtigten Zweckes vollkommen ge-

eignet iſt, und überdieß leicht von jedem auch nur mittelmäßigen Künſtler verfertiget werden kann. Um ſowohl die Zweckmäßigkeit der coniſchen Geſtalt überhaupt als auch das Nähere über dieſelbe einzuſehen, ſey $ABED$ (Fig. 77) ein Durchſchnitt eines Sprachrohres, das einen abgeſtumpften Kegel vorſtellt. Iſt F ein ſchallender Punct, ſo werden die von ihm ausgehenden Schallwellen an den Wänden AB, ED wiederholt reflectirt. Die einmal von AB reflectirten Schallſtrahlen divergiren, als kämen ſie von einem Puncte f_1 her, der in einer auf AB durch F geführten Senkrechten liegt, und ſich eben ſo weit hinter AB befindet, als F vor AB liegt. Eben ſo divergiren die zweimal reflectirten Strahlen von f_2, die dreimal reflectirten von f_3 ꝛc. her, and mit dem zuerſt auf ED auffallenden verhält es ſich auf ähnliche Weiſe. Alle dieſe Puncte f_1, f_2, f_3 ꝛc. haben, wie leicht zu erſehen iſt, gleiche Abſtände von C und liegen daher in einem Kreiſe vom Halbmeſſer $CA = CE = a$. Es iſt demnach der Erfolg ſo, als wenn ſtatt des ſchallenden Punctes F mehrere in der Peripherie des Kreiſes f_1, f_2, f_3, liegende ihre Wellen ohne Reflexion vorwärts ſendeten. Zieht man die Tangente zum Kreiſe durch B und D, nämlich qBx, hDy, ſo ſieht man leicht, daß innerhalb $BxDy$ Schallſtrahlen liegen, welche eine, andere, die zwei, andere, die drei Reflexionen erlitten haben, kurz, daß dieſer Raum, und nur dieſer, Strahlen von allen Puncten f_1, f_2, f_3 ꝛc. enthalte. Dieſer verengt ſich immer mehr und mehr, ſobald $BD < 2a$; wenn aber $BD = 2a$ iſt, ſo bleibt er in jeder Entfernung von gleichem Gehalte. Daher ſoll in einem Sprachrohre die Öffnung BD ſtets dem Durchmeſſer des Kreiſes gleichen, deſſen Halbmeſſer der Länge CA des mangelnden Kegelſtückes gleich iſt. Die Öffnung $AE = \beta$ braucht nicht größer zu ſeyn als 2.5 Z. um den Mund bequem anſetzen zu können.

72. Der Winkel des Kegels $BCD = \Psi$, ſeine Länge $CB = l$ und ſeine Öffnung $BD = 2a$ ſtehen in enger Verbindung mit einander. Man hat nämlich

$$BG = a = l \sin \tfrac{1}{2} \Psi, \quad AE = \alpha = 2.5 = 2a \sin \tfrac{1}{2} \Psi$$

mithin auch

$$2.5 = 2l \sin^2 \tfrac{1}{2} \Psi.$$

Ferner alle Schallſtrahlen, welche beim Gebrauche dieſes Inſtrumentes auf AE eingeſchränkt werden, würden ſich ohne Ge-

brauch desſelben in eine Hemiſphäre ergießen. Demnach iſt die Verſtärkung m des Schalles durch das Hörrohr gleich $\frac{Fq^2}{AF^2}$.

Da aber $Fq^2 = 2a^2$, $FA^2 = a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\Psi$, ſo hat man

$$m = \frac{2}{\sin^2 \frac{1}{2}\Psi}.$$

Man ſetze die Länge $FG = \lambda$, und behalte die vorhin angenommenen Bedeutungen von a, α und l. Demnach iſt

$$\frac{2a}{\alpha} = \frac{\lambda + a}{a} = \frac{\lambda}{a} + 1 \text{ und daher } \lambda = \frac{2a^2}{\alpha} - a.$$

Folgendes Täfelchen enthält die Werthe von λ für beſtimmte Werthe von $2a$ als der hinteren Öffnung des Rohres in der Vorausſetzung, daß die vordere Öffnung = 1 iſt, nebſt der dazu gehörigen Verſtärkungszahl.

Durchmeſſer der größeren Öffnung $2a$	Länge des Rohres λ	Verſtärkungszahl m
2	1	8
3	3	18
4	6	32
5	10	50
6	15	72
7	21	98
8	28	128
9	36	162
10	45	200
11	55	242
12	66	288
13	78	338
14	91	392
15	105	450
16	120	512

73. Verſchieden von einem Sprachrohre muß ein Hörrohr gebaut ſeyn. Es ſey $ABED$ (Fig. 78) eine coniſche Röhre, die als Hörrohr gebraucht werden ſoll und GB ein parallel mit der Axe Cx des Kegels auffallender Strahl, der in H, I, K ꝛc. reflectirt wird und zuletzt durch die in AE angebrachte Öffnung ins Ohr

gelangt. Heißt $BCx = \vartheta$, ſo iſt $CBH = \vartheta$, $BHD = 3\vartheta$, $HIB = 5\vartheta$, $IKD = 7\vartheta$ ꝛc. mithin der Winkel, den der Strahl nach n Reflexionen mit der reflectirenden Wand macht $= (2n-1)\vartheta$. Dieſer Winkel darf nicht größer ſeyn, als 90° und man darf höchſtens ſetzen

$$(2n-1)\vartheta = 90°.$$

Man hat ferner

$$CB:CH = \sin 3\vartheta : \sin\vartheta$$
$$CH:CI = \sin 5\vartheta : \sin 3\vartheta$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$CK:CA = \sin(2n-1)\vartheta : \sin(2n-3)\vartheta$$

mithin

$$CB:CA = \sin(2n-1)\vartheta : \sin\vartheta$$

und

$$CA = \frac{CB \,.\, \sin\vartheta}{\sin(2n-1)\vartheta} = CB \sin\vartheta.$$

Es iſt ferner

$$BM = CB\sin\vartheta,\ Am = CA.\sin\vartheta$$

und die Verſtärkungszahl $m = \frac{BM^2}{Am^2}$.

Die Öffnung am engeren Ende braucht nur 0.6 3. weit zu ſeyn. Demnach iſt

$$0.3 = CA\sin\vartheta$$

oder wenn man für CA obigen Werth ſetzt:

$$CB = \frac{0.3}{\sin\vartheta^2}.$$

Man kann ſtatt des coniſchen Hörrohres auch mit Vortheil ein paraboliſches brauchen.

C. Schwingungen der Luft in Pfeifen.

74. Die Geſetze der Schwingungen der Luft in cylindriſchen Pfeifen laſſen ſich aus denſelben Gleichungen ableiten, aus denen wir die Geſetze der Schallfortpflanzung in der Luft abgeleitet haben, nur muß man die Länge l der Röhre, worin die Luft ſchwingt, und die bei der Fortpflanzung als unendlich groß angenommen wurde, in die Rechnung einführen, welches dadurch geſchieht, daß man x nur jene Werthe ertheilt, die zwiſchen 0 und l liegen, und auf das Verhältniß zwiſchen der Verdichtung der Luft und der ihr

eigenen Geſchwindigkeit, welches ſtehende Schwingungen von fortſchreitenden unterſcheidet, Rückſicht nimmt.

75. Man ſetze, unter Beibehaltung aller vorhin gebrauchten Bedeutungen der Buchſtaben u, γ, x, y, l, F, f, ꝛc. für $x=l$,

$$a\gamma = \varkappa u$$

wo $\varkappa$ eine conſtante Größe bezeichnet, und man hat, weil für $x=l$, $\varkappa u = \varkappa[f(l-\eta)+F(l+\eta)]$, $a\gamma = f(l-\eta)-F(l-\eta)$ iſt

$$f(l-\eta) = \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\, F(l+\eta).$$

Da nun x nur bis $x=l$ wachſen kann, ſo bleibt $\eta+l-x$ ſtets eine poſitive Größe und man kann ſie ſtatt η in die Gleichung ſetzen. Dadurch erhält man:

$$f(x-\eta) = \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\, F(2l-x+\eta).$$

Subſtituirt man dieſen Werth in (I) und ſetzt für η ſeinen Werth at, ſo wird

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\, F(2l-x+at)+F(x+at) \\ a\gamma &= \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\, F(2l-x+at)-F(x-at) \end{aligned}\right\}\ldots(U).$$

76. Um den Zuſtand der Luftſäule am Ende der Pfeife zu erkennen, ſetze man $x=l$, und man erhält:

$$u = \left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}+1\right) F(l+at)$$

$$a\gamma = \left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}-1\right) F(l+at).$$

Sollte demnach am Ende der Pfeife $u=0$ ſeyn, ſo müßte $\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}+1=0$ ſeyn, welches nur möglich iſt, wenn 1 gegen $\varkappa$ verſchwindend klein, mithin $\varkappa$ unendlich groß iſt. Dazu wird aber erfordert, daß die Pfeife mit einem ganz unbiegſamen Deckel verſehen iſt, den man in der Natur vergebens ſucht. Man findet höchſtens einen ſolchen, der nur ſehr wenig biegſam iſt. Für dieſen erlangt $\varkappa$ zwar einen ſehr großen, aber doch nicht unendlich großen Werth. Setzt man $\varkappa=0$; ſo wird auch $a\gamma=0$ und $\gamma=0$, aber auch dieſen Werth kann man $\varkappa$ nicht geben, weil die Verdichtung

am offenen Ende der Pfeife wohl ſehr klein, aber gewiß nicht $=0$ iſt. Demnach wird für eine gedeckte Pfeife $\varkappa$ ſehr groß, für eine offene ſehr klein und die allgemeinen Gleichungen werden für offene und gedeckte Pfeifen gelten, je nachdem $\varkappa$ als ſehr klein oder als ſehr groß angenommen wird.

77. Die Geſchwindigkeit der Luftſchichte, welcher $x=0$ entſpricht, iſt für jeden Werth von t als bekannt anzunehmen. Nennt man ſie φt, ſo hat man

$$\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} F(2l+at) + F(at) = \varphi t.$$

und es handelt ſich darum, die Function F zu finden.

Es ſey nun n eine ganze poſitive Zahl oder 0 und z eine ganze Zahl, die kleiner iſt als $2l$, ferner ſetze man $2nl+z=at$ und

$$\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = b \text{ oder } \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} = -\frac{1}{b}.$$

Dieſe Werthe in die vorhergehende Gleichung geſetzt, geben:

$$F[2(n+1)\,l+z] = bF(2nl+z) - b\varphi\left(\frac{2nl+z}{a}\right)$$

Entwickelt man dieſe Gleichung für die natürliche Zahlreihe der Größe n von $n=0$ angefangen und ſubſtituirt in jeden ſich ſo ergebenden Werth den nächſt vorhergehenden; ſo erhält man die allgemeine Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} F[2(n+1)l+z) &= b^{n+1} Fz + b\varphi\left(\frac{2nl+z}{a}\right) - \\ &- b^2\varphi\left(\frac{2(n-1)l+z}{a}\right) \\ &- b^3\varphi\left(\frac{n(n-2)\,l+z}{a}\right) \ldots - b^{n+1}\varphi\left(\frac{z}{a}\right) \end{aligned}\right\} V.$$

Hierbei darf man nicht vergeſſen, daß φt und F nur kleine Werthe annehmen können, weil alle dieſe Gleichungen nur unter der Vorausſetzung gelten, daß u und γ ſehr klein ſind.

78. An beiden Enden der Röhre herrſcht zwar daſſelbe Verhältniß zwiſchen der Geſchwindigkeit und Verdichtung, jedoch hat der Exponent dieſes Verhältniſſes nicht an beiden daſſelbe Zeichen. Für $x=l$ iſt nämlich $a\gamma=\varkappa u$, und es iſt ſowohl $\varkappa$ als $a\gamma$ poſitiv. Da nun eine Verdichtung erfolgt, wenn die Luft in die Pfeife hineindringt, und eine Verdünnung, wenn ſie herausgeht

ſo muß natürlich für dieſelbe Richtung der ſchwingenden Luftſchichte an einem Ende eine Verdünnung eintreten, wo am anderen eine Verdichtung Statt findet. Setzt man in (U) $ay = -\varkappa u$ und $x=0$, ſo bekommt man

$$F(2l+at) = \left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2 F(at).$$

Weil aber $at = 2nl+z$, $\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = b$ iſt, ſo wird aus dieſer Gleichung

$$F[2(n+1)l+z] = b^2 F(2nl+z).$$

Setzt man nach der Ordnung $n=0, 1, 2, 3 \ldots$ ſo erhält man

$$F(2l+z) = b^2 F(z)$$
$$F(4l+z) = b^2 F(2l+z) = b^4 F(z)$$
$$F(6l+z) = b^2 F(4l+z) = b^4 F(z)$$

und allgemein

$$F[2(n+1)l+z] = b^{2+2n} F(z).$$

Es nehmen daher die Werthe der Function F, mithin auch die von u und y wie die Glieder einer geometriſchen Proportion c , deren Exponent b iſt, während die Zeit wie die Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion zunimmt. Daher iſt es begreiflich, daß in einer faſt unmerklichen Zeit die Bewegung der Luft für uns nicht mehr wahrnehmbar ſeyn wird und deßhalb bei Blasinſtrumenten kein Nachklingen Statt finden kann, wie es bei Saiteninſtrumenten bemerkt wird.

79. Man weiß vorläufig, daß φt nach Verlauf einer gewiſſen Zeit wieder denſelben Werth annimmt, und kann daher ſetzen (53)

$$\varphi t = k \sin \frac{2\pi a t}{\lambda}$$

wo k eine Conſtante, π das bekannte Kreisverhältniß iſt. Die Dauer einer Oſcillation am Anfange der Röhre iſt $\frac{\lambda}{a}$ und λ drückt den Raum aus, den der Schall während einer Oſcillation mit der Geſchwindigkeit a zurücklegt.

Hat n einmal einen ſehr großen Werth erlangt, ſo wird man faſt zu demſelben Reſultate gelangen, man mag die Theile des zweiten Gliedes der Gleichung (V) mit dem Gliede b^{n+1} abbrechen,

oder ſie ins Unendliche fortlaufen laſſen. Vernachläſſiget man das Glied, welches Fz enthält und b^{n+1} zum Factor hat, und ſetzt at ſtatt $2nl+z$, ſo wird

$$F(2l+at) = -kb\left(\sin\frac{2\pi at}{\lambda} + b\sin.\frac{2\pi(at-2l)}{\lambda} + b^2\sin.\frac{2\pi(at-4l)}{\lambda} + \ldots\right)$$

aus der man durch Summiren erhält:

$$F(2l+at) = \frac{-kb\left(\sin.\frac{2\pi at}{\lambda} - b\sin.\frac{2\pi(at+2l)}{\lambda}\right)}{1-2b\cos.\frac{4\pi l}{\lambda}+b^2} \qquad (X).$$

Aus dieſer Gleichung erſieht man, daß der Werth der Function F eben ſo periodiſch wird, wie der von φ, und daß die ganze Luftſäule in Schwingungen von der Dauer $\frac{\lambda}{a}$ geräth. Auch iſt klar, daß u und γ nur dann ins Bereich der Akuſtik gehörige Werthe erlangen, wenn der Nenner $1-2b\cos\frac{4\pi l}{\lambda}+b^2$ nicht ſehr klein iſt.

80. Bei einer offenen Pfeife iſt $\varkappa$ ſehr klein, mithin b nahe $=-1$, und deßhalb der Nenner in (X) gleich $2\left(\cos\frac{4\pi l}{\lambda}+1\right)$ $=4\cos^2\frac{2\pi l}{\lambda}$. Bei einer gedeckten hingegen iſt $\varkappa$ ſehr groß oder $b=1$, und demnach dieſer Nenner $=4\sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}$. Demnach muß, wenn die Formel für ſchallende Schwingungen gelten ſoll, bei geſchloſſenen Röhren $\lambda=\frac{2l}{m+1}$, bei einer offenen $\lambda=\frac{4l}{2m+1}$ ſeyn, wo m eine ganze poſitive Zahl oder Null bedeutet. Daher können in einer offenen Pfeife von der Länge l nur Schwingungen von der Dauer $\frac{4l}{(2m+1)a}$, in einer gedeckten eben ſo langen nur Schwingungen von der Dauer $\frac{2l}{(2m+1)a}$ Statt finden und

es iſt in jenen nur eine ungerade, in dieſen nur eine gerade Anzahl Schwingungsknoten möglich.

81. Um den Ort der Knoten und der kleinſten Verdichtung ꝛc. zu finden, ſetze man für offene Pfeifen $b = -1$, für gedeckte $b = +1$ und ſuche aus (X) und (U) den Ort, wo $u = 0$, und $\gamma = 0$ iſt. Für offene Pfeifen bekommt man aus (X)

$$F(at + 2l) = \frac{k \sin. \frac{2\pi(at+l)}{\lambda}}{2 \cos \frac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Setzt man zugleich in (U) $\varkappa = -1$ und eliminirt man F, ſo wird

$$u = \frac{k \cos \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \sin \frac{2\pi a t}{\lambda}}{\cos \frac{2\pi l}{\lambda}}$$

$$a\gamma = \frac{k \sin. \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} \cos \frac{2\pi a t}{\lambda}}{\cos \frac{2\pi l}{\lambda}}$$

mithin für den Ort, wo $u = 0$ iſt,

$$\cos \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} = 0, \text{ oder } l - x = \frac{(2m+1)\lambda}{4}$$

für jenen, wo $\gamma = 0$ iſt

$$\sin. \frac{2\pi(l-x)}{\lambda} = 0, \text{ oder } l - x = \frac{m\lambda}{2}.$$

Für eine gedeckte Pfeife findet man u und $a\gamma$ auf ähnliche Weiſe.

D. Schwingungen elaſtiſcher Saiten.

82. Die Geſetze der Bewegung einer elaſtiſchen Saite laſſen ſich aus den allgemeinen Gleichungen ableiten, welche für elaſtiſche Körper überhaupt entwickelt worden ſind. Setzt man nämlich in die Gleichung N (S. 193) für X, Y, Z die Werthe.

$$X - \frac{d^2\alpha}{dt^2},\quad Y - \frac{d^2\beta}{dt^2},\quad Z - \frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

ſo hat man ſie dem hier in Rede ſtehenden Fall angepaßt. Setzt man überdieß noch voraus, daß die Saite die Lage ihres Gleichgewichtes nur wenig verläßt und man daher $ds = dx$ hat, und die Dichte

σ ſo wie den Querſchnitt o der Saite als conſtant annehmen kann, ſo erhält man:

$$\left(X - \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\sigma = \frac{dS}{dx}$$

$$\left(Y - \frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\sigma = \frac{dS}{dx}\frac{dy}{dx} + S\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\left(Z - \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)\sigma = \frac{dS}{dx}\frac{dz}{dx} + S\frac{d^2z}{dx^2}$$

wenn aber keine äußeren Kräfte darauf wirken und jede der Größen X, Y, Z gleich o iſt

$$\sigma\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{dS}{dx} = 0$$

$$\sigma\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{dS}{dx}\frac{dy}{dx} + S\frac{dy^2}{dx^2} = 0$$

$$\sigma\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{dS}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + S\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

83. Während der Schwingung der Saite tritt außer der, durch die bloße Spannung erzeugten conſtanten Verlängerung auch noch eine andere ein, die eine Function der Zeit t iſt. Die Verrückung der Stelle, welcher x entſpricht, vermög der Spannung iſt $\frac{\lambda x}{l}$ wenn λ die Verlängerung der ganzen Saite, l die Länge derſelben iſt. Iſt ϑ die von dem Ausſchlag der Saite herrührende Verrückung, ſo erhält man

$$\alpha = \frac{\lambda x}{l} + \vartheta$$

und

$$S = -\frac{5e\lambda}{2l} - \frac{5e}{2}\frac{d\vartheta}{dx}$$

wo e und S die in S. 193 angegebene Bedeutung haben. Setzt man für S aus den vorhergehenden Gleichungen den Werth, vernachläſſiget die zugleich von ϑ, y oder z abhängigen Glieder, und nimmt der Kürze halber $\frac{5e}{2\sigma} = a^2$, $\frac{a^2\lambda}{l} = \frac{5e\lambda}{2\sigma l} = b^2$, ſo erhält man

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = a^2\frac{d^2\vartheta}{dx^2},\ \frac{d^2y}{dt^2} = b^2\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dt^2} = b^2\frac{d^2z}{dx^2}\ldots(W).$$

Die erſte dieſer Gleichungen beſtimmt die Geſetze der longitudinalen, die zwei letzten die der transverſalen Schwingungen.

84. Um die Geſetze der longitudinalen Schwingungen zu erhalten, muß man die erſte der vorhergehenden Gleichungen integriren. Man erhält:

$$\delta = f(x+at) + F(x-at) \ldots\ldots\ldots (X)$$

wo f und F unbeſtimmte Functionen bezeichnen. Iſt man im Stande δ für alle Werthe von x von $x=0$ bis $x=l$, und für alle Werthe von $t=0$ bis $t=\infty$ anzugeben, ſo hat man eine vollſtändige Kenntniß der longitudinalen Schwingungen. Dazu gehört aber, daß δ ſowohl als auch die Geſchwindigkeit $\frac{d\delta}{dt}$ mithin auch fx und Fx für den Anfang der Bewegung gegeben ſeyen. Man hat für $x=0$ die Gleichung

$$f(at) - F(-at) = 0 \text{ oder } f(at) = F(-at)$$

woraus man erſieht, daß F und f von einerlei Natur ſind, und daß ſich obige Gleichung ſo darſtellen läßt:

$$\delta = f(x+at) - f(x-at).$$

Ferner hat man für $x=l$ wieder $\delta=0$, mithin

$$f(at+l) - f(l-at) = 0 \text{ oder } f(at+l) = -f(at-l).$$

Demnach hat δ denſelben Werth aber mit entgegengeſetzten Zeichen, wenn t um die Größe l zugenommen hat. Da at der Größe nach nicht beſchränkt, nur ſtets poſitiv iſt, ſo kann man dafür $at+nl$ ſetzen, wo n eine ganze poſitive Zahl oder Null bedeutet, und ſo erhalten

$$f[(n+1)l+at] = f[(n-1)l+at].$$

Demnach bekommt f immer wieder denſelben Werth, wenn at um $2l$ zugenommen hat. Daher hat man

$$f(at) = f(at+2l) = f(at+4l) \ldots\ldots$$

und

$$f(at+x) = f(at+2l+x) = f(at+4l+x) \ldots\ldots$$

Daſſelbe gilt auch für F, und es bekommt daher δ wieder genau denſelben Werth, wenn t um $2l$ zugenommen hat.

Setzt man $x=0$, ſo wird

$$f(x) = f(2l+x) = f(4l+x) = \text{ꝛc.}$$

und eben ſo

$$F(x) = F(-2l+x) = F(-4l+x) = \text{ꝛc.}$$

Da nun fx und Fx gegeben ſind, ſo hat man dadurch auch alle Werthe, welche dem Vorhergehenden gemäß demſelben gleich ſind.

Da δ denſelben Werth wieder erlangt, wenn at um $2l$ zugenommen hat, mithin nach Verlauf der Zeit l, ſo iſt für die Zeit einer Schwingung (eines Her- und Hinganges)

$$t = \frac{2l}{a} \text{ d. h. } t = \frac{2l}{\sqrt{\frac{5e}{2\sigma}}}$$

und die Anzahl der Schwingungen, die in der Zeit $= 1$ zurückgelegt werden, iſt

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{5e}{2\sigma}}.$$

85. Die Geſetze der transverſalen Schwingungen findet man durch Integriren der zweiten und dritten Gleichung (W). Auch hier findet man:

$$y = f(x+bt) + F(x-bt)$$

wo wieder fx, Fx ſo wie die anfängliche Geſchwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ gegeben ſeyn müſſen. Übrigens lernt man die Geſetze dieſer Schwingungen durch daſſelbe Verfahren kennen, wie die der longitudinalen.

Für die Dauer dieſer Schwingungen hat man

$$t = \frac{2l}{b} = 2l\sqrt{\frac{2\sigma l}{5e\lambda}}.$$

Iſt g die Acceleration der Schwere, p das Gewicht der Saite von der Länge $= 1$, o ihr Querſchnitt und q dasjenige Gewicht, welches die Saite, um die es ſich handelt, ſpannt, ſo hat man $p = g\sigma o$, oder $\sigma = \frac{p}{go}$, ferner $\frac{5e\lambda}{2l} = \frac{q}{o}$ (S. 194) oder $\frac{2l}{5e\lambda} = \frac{o}{q}$.

Setzt man dieſe Werthe in obigen Ausdruck, ſo wird

$$t = 2l\sqrt{\frac{p}{gq}}.$$

und für die, in einer Zeiteinheit vollbrachte Anzahl der Schwingungen N_1

$$N_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{gq}{p}}.$$

Vergleicht man die Werthe N und N_1, um daraus den Tonverhältniß bei longitudinalen und transverſalen Schwingungen derſelben Saite zu finden, ſo erhält man:

$$\frac{N_1}{N} = \sqrt{\frac{\lambda}{l}}.$$

Bei einem Verſuche, den Cagniard-Latour angeſtellt hatte, um die Richtigkeit dieſes Ausdruckes zu prüfen, war $l = 14^m.8$ und man erhielt $\frac{N_1}{N} = \frac{188}{l}$ und $\lambda = l\sqrt{\frac{N_1}{N}} = 0.052$. Durch directe Meſſungen von λ fand man 0.05.

86. Bisher wurde die Saite nach ihrer ganzen Länge ſchwingend angenommen. Bekanntlich kann ſie aber auch mit Schwingungsknoten ſchwingen. Dieſes iſt der Fall, wenn die erſte Anregung der Schwingungen eine ſolche Abtheilung in ſchwingende Theile beſtimmt und das, was bisher von der ganzen Saite angenommen wurde, wie z. B. daß bei longitudinalen Schwingungen $\delta = 0$ iſt für $x = 0$ und $x = l$ ꝛc. auch für einzelne Theile gilt, und z. B. gleich anfangs $\delta = 0$ iſt für $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}l$ ꝛc. Es iſt klar, daß ſich die Sache ſo behandeln läßt, als wenn die ganze Saite im Oſcilliren begriffen wäre, und darum keiner beſonderen Behandlung bedarf.

E. Schwingungen elaſtiſcher Stäbe, Platten und Membranen.

87. Die Geſetze der Schwingungen elaſtiſcher Stäbe laſſen ſich aus den für das Gleichgewicht derſelben entwickelten Formeln ableiten. Für einen cylindriſchen Stab wurde die Gleichung $X + a^2 \frac{d^2\alpha}{dx^2} = 0$ gefunden, wo α X und a die früher angenommenen Werthe haben. Setzt man für X die Kraft $X - \frac{d^2\alpha}{dt^2}$, wo t die Zeit bedeutet; ſo erhält man für die Bewegung nach der Richtung der Axe, alſo für Längenſchwingungen eine Gleichung. Wenn

keine äußere Kraft auf den Stab wirket, alſo $X = 0$ iſt, nimmt dieſe Gleichung folgende Form an:

$$\frac{d^2 \alpha}{d t^2} + a^2 \frac{d^2 \alpha}{d x^2} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (Y).$$

Dieſer Ausdruck ſtimmt mit dem für Längenſchwingungen der Saiten gefundenen völlig überein, woraus zu erſehen iſt, daß die Schwingungen der Stäbe nach ihrer Länge auch dieſelben Geſetze befolgen, wie die der Saiten.

Iſt l die Länge des Stabes, ſo iſt die Anzahl der in einer Zeiteinheit vollbrachten Schwingungen, ſo lange der Stab der ganzen Länge nach ſchwingt und an beiden Enden frei oder an beiden befeſtiget iſt $\frac{a}{2l}$, hingegen $\frac{a}{4l}$, wenn er an einem Ende frei am anderen befeſtiget iſt ꝛc. Ob ein oder mehrere Schwingungsknoten entſtehen oder nicht, hängt davon ab, ob ſich der Stab bei der erſten Anregung in Theile abtheilt oder nicht, wie bei Saiten. Ungeachtet dieſer Übereinſtimmung mit Saiten geht doch bei longitudinal ſchwingenden Stäben etwas vor, das bei Saiten nicht Statt findet. Nämlich bei erſteren werden die Längenſchwingungen von anderen begleitet, die nach einer auf der Axe des Stabes ſenkrechten Richtung erfolgen und daher mit Recht normale Schwingungen genannt werden können. Das Daſeyn dieſer Schwingungen iſt daraus klar, daß jede Verſchiebung der Theile nach der Länge des Stabes von einer anderen nach einer darauf ſenkrechten Richtung begleitet iſt, wie dieſes die Gleichung $4\varphi = -\frac{d\alpha}{dx}$ näher beſtimmt. Setzt man, was ſich aus dieſer Gleichung für $\frac{d\alpha^2}{dx^2}$ ergibt, in (Y), ſo erhält man die allgemeine Gleichung für dieſe Schwingungen, aus der man erſieht, daß für ſie a denſelben Werth hat wie für Längenſchwingungen und daß ſie daher mit dieſen iſochron ſind. Der Ort eines Schwingungsknotens für eine ſolche Schwingung wird durch $\varphi = 0$, alſo durch $\frac{d\alpha}{dx} = 0$ beſtimmt, während der Ort eines Knotens bei Längenſchwingungen durch $\alpha = 0$ angegeben wird. Da für letztere dort, wo $\frac{d\alpha}{dx} = 0$ iſt, α den größten Werth hat, ſo folgt daraus, daß der Ort eines Knotens der normalen Schwin-

gungen dorthin fällt, wo für longitudinale ein Schwingungsbauch eintritt.

88. Für den Stand des Gleichgewichtes elaſtiſcher Stäbe wurde auch die Gleichung $\Psi + b^2 \frac{d^2 \psi}{d x^2} = 0$ gefunden, wo Ψ wieder die Kraft bedeutet, welche eine Drehung der Theile des Stabes um die Axe bewirket, b ψ und x die S. 198 angegebenen Bedeutungen haben. Setzt man wieder ſtatt Ψ die Größe $\Psi - \frac{d^2 \psi}{d t^2}$, ſo erhält man für $\Psi = 0$ den Ausdruck

$$\frac{d^2 \psi}{d t^2} - b^2 \frac{d^2 \psi}{d x^2} = 0.$$

Dieſe Gleichung enthält die Geſetze der drehenden Schwingungen.

Da die Gleichung der Form nach mit der für Längenſchwingungen entwickelten übereinſtimmt, ſo müſſen auch die Geſetze der drehenden Schwingungen mit denen der Längenſchwingungen zuſammenfallen.

89. Heißt n die Anzahl der Schwingungen, welche ein longitudinal ſchwingender Stab in einer Zeiteinheit macht, N hingegen die eines eben ſo langen in drehenden Schwingungen begriffenen, ſo hat man

$$\frac{n}{N} = \frac{a}{b} = \sqrt{\tfrac{5}{2}} = 1.5811.$$

Chladni fand durch Verſuche $\frac{n}{N} = \frac{3}{2} = 1.3333$, Savart hingegen $= 1.6668$, der Mittelwerth von beiden iſt 1.5, alſo mit obiger Zahl nahe genug übereinſtimmend.

90. Nun wäre noch übrig, die Geſetze der transverſalen Schwingungen elaſtiſcher Stäbe, ſo wie die elaſtiſcher Membranen und Platten aus den allgemeinen Geſetzen des Gleichgewichtes abzuleiten. Wir wollen uns aber mit der Formel begnügen, welche man auf dieſem Wege für Stäbe und Membranen findet, um andere Unterſuchungen nicht ganz unterdrücken zu müſſen.

Poiſſon findet für die Anzahl Schwingungen eines transverſal ſchwingenden beiderſeits freien Stabes, welche in einer Zeiteinheit vollbracht wird

$$n_1 = 3.5608 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{5c}{2\sigma}}$$

für longitudinale Schwingungen hingegen

$$n = \frac{a}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{5e}{2\sigma}}$$

mithin

$$\frac{n_{,}}{n} = 3.5608\ \frac{r}{l}.$$

Für einen einerſeits befeſtigten Stab, der in einer beſtimmten Zeit n longitudinale und $n_{,}$ drehende Schwingungen macht, hat man

$$\frac{n}{n_{,}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Savart beſtimmte an einem meſſingenen Stab, für welchen $l = \frac{1}{8}$ ($0^{m}.825$), $r = 2^{mm}.4$, $n = 34133$ war, n und $n_{,}$ durch Verſuche, und fand $n = 34133$, $n_{,} = 2844$. Die Rechnung gab für $n_{,} = 2829$ mithin nur um 25 Schwingungen weniger. An einem kupfernen Stab, wo $l = \frac{1}{8}$ ($0^{m}.825$), $r = 1^{mm}.7$ war, fand er $n = 36864$, $n_{,} = 2133$ und obige Formel gab $n_{,} = 2164$, alſo um 31 Oſc. zu viel. Ein eiſerner Stab endlich, für welchen man hatte: $l = \frac{1}{8}$ ($0^{m}.88$), $r = 2^{mm}.25$ machte $n = 45514$, $n_{,} = 3686$. Die Rechnung gab $n_{,} = 3683$, mithin gar nur eine Differenz von drei Schwingungen.

Nennt man die Spannung einer elaſtiſchen Membrane T, ihr Gewicht p und die Acceleration der Schwere g, ſo iſt die Anzahl der Schwingungen in einer Zeiteinheit für eine quadratförmige Membrane $\sqrt{\frac{Tg}{2p}}$, und für eine kreisförmige von demſelben Gewichte und der Spannung $0.6784\sqrt{\frac{Tg}{p}}$, mithin gibt das Verhältniß beider zum Quotienten 0.9593.

F. Akuſtiſche Verſuche.

91. Unter allen akuſtiſchen Verſuchen ſind jene, wodurch man die Schallgeſchwindigkeiten in der Luft kennen lernen will, die umſtändlichſten. Sie fordern viele und höchſt genaue Inſtrumente und eine ungemeine Aufmerkſamkeit. Bekanntlich beſteht der unmittelbare Zweck ſolcher Verſuche in der Beſtimmung der Zeit von dem Augenblicke an gerechnet, wo man das die Schallerregung begleitende und mit derſelben gleichzeitig eintretende Phä-

nomen ſieht, bis dahin, wo man den Schall hört. Alle Maßregeln müſſen demnach dahin zielen, die Sicherheit und Schärfe dieſer Meſſung zu erhöhen, und es müſſen alle Umſtände berückſichtiget werden, welche auf dieſe Größe Einfluß nehmen, damit man ſie in Rechnung bringen und das Reſultat auf einen Normalzuſtand zurückführen kann.

92. Das Terrain, welches zu ſolchen Verſuchen gewählt wird, ſoll zwei Stationen darbieten, die hinreichend weit von einander entfernt ſind, und deren jede von der anderen deutlich, wenigſtens mittelſt eines Fernrohres geſehen werden kann. Ihre Entfernung von einander muß aufs genaueſte gemeſſen ſeyn. Bei den genaueſten Verſuchen dieſer Art, die van Beck und Moll angeſtellt haben, betrug die Entfernung dieſer zwei Stationen 17669^{m}.28, bei den letzten Verſuchen der franzöſiſchen Akademiker 18612^{m}, bei Myrbachs und Stampfers Verſuchen 30601 Pariſer Fuß; andere wurden aber bei viel kürzeren Baſen vorgenommen. Das Terrain ſoll nicht ſtarken Winden ausgeſetzt ſeyn und der Boden, längs welchem der Schall hingeht, um von einer Station zur anderen zu gelangen, möglichſt überall dieſelbe Erwärmungsfähigkeit beſitzen, damit der Schall durch möglichſt gleich warme und gleich feuchte Luft geht oder das Mittel der in beiden Stationen beobachteten Temperaturen als mittlere des ganzen Schallweges angeſehen werden kann; auch ſollen keine, ein Geräuſch erregenden oder den Schall ſtark reflectirenden Gegenſtände in der Nähe ſeyn, um den abſichtlich erregten Schall deutlich und ohne Täuſchung wahrnehmen zu können.

93. Die beſte zu ſolchen Verſuchen geeignete Zeit iſt die Nacht nach einem nicht zu warmen, windſtillen Tage, an welcher der Himmel mit leichten Wolken gleichförmig überzogen iſt. Je ruhiger die Luft iſt, deſto ſicherer kann man einen glücklichen Erfolg der Verſuche erwarten. Eine gänzliche Ruhe der Luft iſt in einem ſo ausgedehnten Terrain nicht zu erwarten, darum ſoll man vorzüglich eine Zeit wählen, wo ſich keine Windſtöße zeigen und ein ziemlich gleichförmiger Zug der Luft Statt findet. Es iſt gut, wenn die Richtung dieſes Zuges die Geſichtslinie von einer Station zur anderen durchkreuzt, weil man ſonſt gar leicht nur den Schall von einer Station in der anderen hört, wie dieſes bei den holländiſchen Verſuchen oft eintrat.

94. Die zu ſolchen Verſuchen nöthigen Inſtrumente ſind:

1. ein Barometer, 2. ein Thermometer, 3. ein Hygrometer, 4. ein genauer Zeitmeſſer, 5. ein Apparat zur Schallerregung. Zur Schallerregung braucht man in der Regel Kanonen, deren Caliber ſich nach der Größe der Baſis richtet. Die franzöſiſchen Akademiker wählten Sechspfünder, bei den holländiſchen Verſuchen brauchte man Zwölfpfünder mit 6 Pf. Pulver. Gregory hat ſtatt Kanonen eine große Glocke gebraucht.

Als Zeitmeſſer kann man zwar jeden Chronometer brauchen, der etwa Fünftelſecunden abnehmen läßt, aber die beſten Dienſte thut ein coniſches Pendel (S. 315), mit dem man Terzien zählen kann. Es thut auch eine gute Sackuhr gute Dienſte, wenn man die Dauer eines Schlages der Unruhe vorläufig genau kennen gelernt hat. Gut iſt es, wenn die Zeitmeſſer zum Sperren eingerichtet ſind, damit man ſie in dem Augenblicke, wo man das, den Schall begleitende Phänomen ſieht, durch einen leichten Druck in Gang ſetzen, und ſobald man den Schall hört, ſie wieder hemmen kann. Jeder dieſer Apparate muß ſich in jeder Station befinden, damit man in beiden zugleich den Schall erregen und beobachten kann, ein Mittel, wodurch man dem ſchädlichen Einfluſſe des Windes noch am beſten begegnet.

95. Wenn die Beobachtung gemacht werden ſoll, handelt es ſich vorzüglich darum, an beiden Stationen gleichzeitig den Schall zu erregen. Mittelſt Kanonen iſt dieſes keineswegs leicht, jedoch hat man es bei den Verſuchen der holländiſchen Gelehrten dahin gebracht, daß beide Schüſſe höchſtens zwei Secunden hinter einander erfolgten. Das Mittel, wodurch ſie zu dieſem Zwecke gelangten, beſtand darin: An beiden Stationen hatte ein Officier den Chronometer vor ſich auf einem nahe an der Kanone ſtehenden Tiſche liegen, und ein anderer ſtand mit der Lunte am Zündloche in Bereitſchaft. Im rechten Augenblicke faßte jener Officier den Arm deſſen, der die Kanone abzufeuern hatte, und brachte die Lunte auf das Pulver. Mittelſt eines Percuſſionsſchloſſes würde man ohne Zweifel noch mehr Schärfe erreicht haben. Es iſt von ſelbſt einleuchtend, daß man hinter einander mehrere Verſuche dieſer Art anſtellen, für jeden den Luftdruck, die Lufttemperatur, die Luftfeuchtigkeit beobachten, und aus den gefundenen Daten die Schallgeſchwindigkeit von 0° C und für ganz trockene Luft mittelſt der Formel (Q) berechnen müſſe. Was man durch die beſten Ver-

ſuche dieſer Art für Reſultate gefunden hat, und wie dieſe mit der reinen Theorie übereinſtimmen, iſt aus (63) klar.

96. Die Schallgeſchwindigkeit in anderen Gaſen kann man nicht unmittelbar beſtimmen, weil man keinen ſo großen Raum mit denſelben füllen kann, als zu ſolchen Verſuchen Noth thut. Man gelangt aber zum Ziele, wenn man das Verhältniß der Geſchwindigkeiten in verſchiedenen Gaſen zu der in der atmoſphäriſchen Luft ſucht, und daraus die wahre Geſchwindigkeit in den betreffenden Gaſen berechnet. Das Verhältniß der Schallgeſchwindigkeit in verſchiedenen Gaſen findet man aus der Tonhöhe, die eine Pfeife, mit einem beſtimmten Gaſe gefüllt, von demſelben umgeben und mit demſelben angeblaſen, gibt. Solche Verſuche haben zuerſt Chladni und der Freyherr von Jacquin, am genaueſten aber Dulong angeſtellt. Es iſt dazu vor allem nothwendig dieſe Gaſe in vollkommen reinem Zuſtande zu erhalten, eine beiderſeits offene mit einem eingetheilten genau paſſenden Kolben verſehene Pfeife zu wählen, deren Dimenſionen ſo beſchaffen ſind, daß ſie den Grundton leicht und voll angibt. Dieſe Pfeife wird in einen luftdichten, mit dem betreffenden Gaſe gefüllten Kaſten befeſtiget und durch einen Gaſometer das zum Anblaſen nöthige Gas in einem gleichförmigen Strom zugeleitet. Man läßt zuerſt die Pfeife im offenen Zuſtande anſprechen, ſo daß die darin befindliche Luft mit einem Schwingungsknoten oſcillirt, ſchiebt hierauf, ohne den Luftſtrom zu unterbrechen, den Kolben ſo weit in die Röhre hinein, bis derſelbe Ton ſich wieder hören läßt. Die Tonhöhe kann man zwar aus der Conſonanz mit dem Tone einer Stimmgabel, beſſer und ſicherer aber mit einer Syrene beſtimmen, wobei man alles berückſichtiget, was die Unveränderlichkeit der Tonhöhe erhöht, wie in der Folge gezeigt werden ſoll. Dulong hat ſich überzeugt, daß ſich die Länge der oſcillirenden Luftſäule nicht mit der Natur der Gaſe ändere. Hat man daher mit atmoſphäriſcher Luft und mit einem anderen Gaſe den Verſuch gemacht, ſo verhalten ſich die Schwingungszahlen, welche ihren Tönen entſprechen, wie die Schallgeſchwindigkeiten in den betreffenden Luftarten.

97. Über die Geſchwindigkeit des Schalles in tropfbaren Flüſſigkeiten iſt außer Colladon's und Sturm's Verſuchen über den Schall im Waſſer, wenig geleiſtet worden; doch iſt die Unterſuchung dieſer Gelehrten lehrreich genug, um hier angeführt zu werden: Es wurden im Genferſee zwei Stationen ausgemittelt,

zwiſchen denen ſich keine Untiefen, keine Strömungen befanden und wo das Waſſer beſonders rein war. Ihre Entfernung betrug 13487^m. An einer Station wurde aus einem Schiffe eine $0^m.7$ hohe und etwas weniger breite Glocke 1^m tief ins Waſſer geſenkt und mit einem Hammer verſehen, der durch einen Winkelhebel in Bewegung geſetzt werden konnte. In dem Augenblicke, wo der Hammer an die Glocke ſchlug, wurde durch denſelben Winkelhebel, der den Hammer regierte, mittelſt Knallpulver ein Feuerſignal erregt, das man an der anderen Station ſehen konnte. Um an dieſer Station den Schall der Glocke außer dem Waſſer deutlich zu hören, mußte man jener Schwächung des Schalles vorzüglich zu begegnen ſuchen, welche beim Übergange deſſelben von einem Mittel ins andere einzutreten pflegt, um ſo mehr, als man die Erfahrung gemacht hatte, daß er ohne beſondere Berückſichtigung dieſes Umſtandes ſchon in der Entfernung von 200^m—300^m nicht mehr wahrnehmbar iſt. Zu dieſem Ende wurde eine 5^m lange blecherne Röhre, die in verticaler Richtung im Waſſer ſchwamm und unten in einen weiten und horizontalen, mit einer Platte geſchloſſenen Trichter (Fig. 79) auslief, ſo ins Waſſer geſtellt, daß jener Trichter gegen den Urſprung des Schalles hingekehrt war, und an das obere, ſchief abgeſchnittene Ende das Ohr des Beobachters angehalten. Als Zeitmeſſer diente ein Chronometer, der $\frac{1}{4}$S. angab. Aus der Vergleichung des vom Schall durchlaufenen Raumes mit der dazu verwendeten Zeit ergab ſich dann leicht die Geſchwindigkeit des Schalles im Waſſer (1435^m) für die bei den Verſuchen herrſchende Temperatur ($8^\circ.1$ C). Eine Vergleichung dieſer Geſchwindigkeit mit der aus der reinen Theorie abgeleiteten, zeigt nur eine Differenz von 8^m zum Beweiſe, daß hier die Einwirkung der bei der Schallfortpflanzung frei gewordenen Wärme nicht ſo groß iſt, als daß ſie einer beſonderen Berückſichtigung bedürfte und daß man höchſt wahrſcheinlich für alle tropfbaren Flüſſigkeiten, deren Modulus der Elaſticität bekannt iſt, die Schallgeſchwindigkeit blos aus der reinen Theorie mit Sicherheit entnehmen kann, ohne der Kenntniß jener Wärmeentwicklung zu bedürfen.

98. Auch die Geſchwindigkeit des Schalles in feſten Körpern ließe ſich durch Verſuche beſtimmen, wenn man einen ſolchen Körper von hinreichender Länge zu Gebote hätte. Einen Verſuch dieſer Art hat Biot mit den zu einer Waſſerleitung beſtimmten eiſernen Röhren angeſtellt, deren Länge mit Einſchluß der zur Verbindung der ein-

zelnen Stücke nöthigen Bleiringe 197^{m}.27 betrug. Es wurde an einem Ende in der Röhre eine Glocke aufgehängt und ein Hammer ſo eingerichtet, daß er an die Glocke und zugleich an die Röhre ſchlug. Der Ton der Glocke pflanzte ſich durch die Luft, der Ton der Röhre durch ihre Maſſe fort, und ein Beobachter am anderen Ende konnte leicht die Zeit beſtimmen, welche zwiſchen der Ankunft des Tones der Röhre und der Glocke verfloß. Da man die Geſchwindigkeit des Glockentones in der Luft kannte, ſo ließ ſich aus dieſer Zeit und der bekannten Röhrenlänge die Geſchwindigkeit des Schalles im Eiſen beſtimmen. Allein unglücklicher Weiſe bediente ſich Biot bei dieſen Verſuchen einer Secundenuhr, aus deren Schlägen man den genannten Zeitunterſchied nicht mit der erforderlichen Genauigkeit finden konnte, daher es auch kam, daß bei Verſuchen mit ungleich langen Röhrenſtücken einmal das Reſultat für die Geſchwindigkeit doppelt ſo groß ausfiel als ein anderesmal. Hätte man als Zeitmeſſer ein coniſches Pendel gebraucht, ſo wäre man beſſer zum Ziele gelangt.

Ein anderes leichter anwendbares Mittel zu demſelben Zwecke liefert die Tonhöhe longitudinal ſchwingender elaſtiſcher Stäbe. Ein drittes Mittel liefert endlich die Kenntniß des Modulus der Elaſticität, allein es iſt nicht ausgemacht ob man den Einfluß der bei der Schallfortpflanzung Statt habenden Wärmeentwickelung auch wie bei den tropfbaren Körpern vernachläſſigen könne. Die Tafel XVII enthält auch die Geſchwindigkeit des Schalles in feſten und tropfbaren Körpern.

99. Außer den Verſuchen, welche man anſtellt, um die Geſchwindigkeit des Schalles zu beſtimmen, werden auch noch andere unternommen, um die Höhe des Tones ſelbſttönender Körper zu unterſuchen, und das Verhältniß desſelben zu der Anzahl der Schwingungen, welche der ſchallende Körper in einer beſtimmten Zeit macht, zu beſtimmen.

100. Die Beſtimmung der Schwingungsanzahl, welche einem Tone von beſtimmter Höhe entſpricht, kann auf mehreren Wegen erreicht werden, und zwar:

1) Mittelſt der ſogenannten Syrene, die im Weſentlichen in der Naturlehre Abſch. II. Kap. V. beſchrieben iſt. Es darf hier nur noch bemerkt werden, daß man zu genauen Meſſungen die rotirende Scheibe mittelſt einer Schraube ohne Ende mit einem Zeigerwerke in Verbindung ſetzen und wieder auslöſen

kann, wie aus Fig. 80 zu erſehen iſt. Wird nun, ſobald die Syrene einen beſtimmten Ton gibt, durch einen leichten Druck die rotirende Scheibe derſelben mit dem Zeigerwerke in Verbindung gebracht, gleichzeitig ein Chronometer in Bewegung geſetzt, und nach Verlauf einer gewiſſen Zeit jene Verbindung wieder aufgehoben, ſo kennt man die Umdrehungszahl der Scheibe in der genannten Zeit. Aus dieſer und der Anzahl der Öffnungen in der fixen und beweglichen Platte des Inſtrumentes, aus welchen die Luft entweicht, kann man ohne Schwierigkeit die in einer Secunde erfolgende Anzahl der Luftſtöße berechnen, welche mit der Schwingungsanzahl des begleitenden Tones zuſammenfällt. Dabei hat man aber dafür zu ſorgen, daß die rotirende Scheibe der Syrene ein hinreichendes Gewicht habe, um ihre Bewegung ohne Änderung, einige Zeit beizubehalten, wenn auch die Kraft, wodurch ſie bewirkt wird, kleinen Änderungen unterliegen ſollte. Es iſt wohl am beſten, wenn die Öffnungen ſchief durch die Platten gehen, und der Luftſtrom ſelbſt ohne Beihilfe einer anderen mechaniſchen Kraft die Rotation unterhält, nachdem ſie durch einen momentanen Stoß erzeugt worden iſt. Durch dieſes Mittel hat Cagniard de Latour folgende Schwingungszahlen für die nebenſtehenden Tonhöhen gefunden:

Benennung	Schwingungszahl		Benennung	Schwingungszahl	
	abſolute	relative		abſolute	relative
$\bar{a}$	427	—	$\bar{\bar{g}}$	765	$\frac{3}{2}$
$\bar{h}$	477	—	$\bar{\bar{a}}$	855	$\frac{5}{3}$
$\bar{\bar{c}}$	511	1	$\bar{\bar{h}}$	955	$\frac{15}{8}$
$\bar{\bar{d}}$	567	$\frac{9}{8}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$	1023	2
$\bar{\bar{e}}$	630	$\frac{5}{4}$	$\bar{\bar{\bar{d}}}$	1125	$\frac{9}{4}$
$\bar{\bar{f}}$	675	$\frac{4}{3}$			

Die relativen Schwingungszahlen ſind in den kleinſten Zahlen mit möglichſter Annäherung angegeben.

2) Zu demſelben Ziele führt ein homogener, etwa $\frac{1}{2}$ Linie dicker, $\frac{1}{2}$ Zoll breiter Meſſingſtab, der an einem Ende in einen Schraubſtock eingeſpannt und durch einen Schlag in transverſale

Schwingungen verſetzt wird. Man macht ihn ſo lange, daß er in einer Secunde vier Schwingungen vollbringt. Unter dieſen Umſtänden kann man die Anzahl der Schwingungen genau mit der dazu verwendeten Zeit vergleichen. Mißt man nun die Länge des von dem Backen des Schraubſtockes hervorragenden Stückes genau, und verkürzt es hierauf ſo lange, bis es einen Ton gibt, der mit einem anderen fixen Ton z. B. dem einer Stimmgabel genau in Einklang iſt, und mißt ſeine Länge wieder, ſo kann man nach der Formel S. 364 die Schwingungsanzahl für 1 S. berechnen. Die Schwierigkeit, die Länge des freien Stückes genau zu meſſen, macht, daß man durch dieſes Mittel kein beſonders ſcharfes Reſultat erlangt.

3) Ein drittes Mittel zur Beſtimmung der Schwingungsanzahl, die einem beſtimmten Tone entſpricht, bieten geſpannte Saiten dar. Man ſpannt nämlich eine gleichförmig dicke Metallſaite auf ein verticales Monochord auf, an welchem man die Saitenlänge zwiſchen den zwei Stegen mittelſt eines Nonius bis auf 0.001 Z. meſſen kann, bringt ihren Ton mit dem einer reinen Stimmgabel zum Einklang, und berechnet dann die Anzahl der Schwingungen der Saite. Zu dieſem Ende müſſen aber die zur Rechnung nöthigen Größen mit großer Schärfe bekannt ſeyn. Die Rechnung wird nach der in S. 362 entwickelten Formel geführt.

Dieſes Mittel hat Fiſcher in Berlin mit großer Genauigkeit angewendet.

101. Das Wichtigſte und beinahe auch das Schwerſte bei ſolchen Verſuchen iſt, die zwei mit einander zu vergleichenden Töne zur vollkommenen Übereinſtimmung zu bringen. Da es leichter iſt, zu erkennen, ob zwei Töne genau um eine Octave von einander abſtehen, als über ihren vollkommenen Einklang zu urtheilen; ſo verfährt man beſſer, wenn man bei Verſuchen zum Behufe der Schwingungsanzahl eines Tones mit dem fixen Tone ſeine Octave vergleicht. Wenn man zwei Töne nahe an das Intervall einer Octave gebracht hat, ſo bemerkt man, falls ſie nicht zu ſtark ſind, das ſogenannte Schweben derſelben und die Schwebungen werden immer langſamer, je näher die Töne dem Intervalle der Octave kommen. Halten nun dieſe Töne hinreichend lang an, ſo kann man ſelbſt langſame Schwebungen noch wahrnehmen und daraus ſchließen, daß ſie noch nicht im rechten Intervalle ſtehen, hingegen aus dem gänzlichen Unterbleiben der Schwebungen die Folge ziehen, daß ſie dem beabſichtigten Intervalle ſehr nahe ſtehen, oder dasſelbe bereits

erreicht haben. Bei Verſuchen mit klingenden Stäben erhält man ſehr anhaltende Töne und kann daher mittelſt Beobachtung der Schwebungen ein ſehr ſcharfes Reſultat erhalten, bei Verſuchen mit Saiten hingegen, wo die Schwingungen nur kurze Zeit anhalten, läßt ſich keine ſo große Genauigkeit erlangen und es bleibt nichts übrig, als den Verſuch oft genug mit großer Sorgfalt zu wiederhohlen, und aus dem vom Mittel am meiſten abweichenden Reſultate zu erſehen, ob man der Grenze, welche erreicht werden muß, nahe ſtehe oder nicht.

Auch darf man bei derlei Verſuchen nicht vergeſſen, daß die Schwingungsanzahl auch von der Größe der Schwingungsbahn abhängt und nur bei kleinen Schwingungsbahnen vorausgeſetzt werden dürfe, alle Schwingungen ſeyen gleichzeitig. Schon aus dieſem Grunde darf man ſich nicht mit Schwingungen befaſſen, die in zu großen Elongationen vor ſich gehen.

102. Man mag über Schwingungen tönender Körper, zu was immer für einem Zwecke Verſuche anſtellen, ſo muß man, um die Einwirkung jedes Nebenumſtandes gehörig würdigen zu können, gewiſſe Rückſichten wohl im Auge behalten, die durch die Natur des tönenden Körpers beſtimmt werden.

Bei Verſuchen, wo die Luft der ſchallende Körper iſt, verdient das Material der Pfeife, worin die Luft ſchwingt, die Dicke ihrer Wände, ihre Geſtalt, die Art des Anblaſens und die Beſchaffenheit der Luft eine beſondere Rückſicht. Handelt es ſich um reine Luftſchwingungen, ſo ſoll das Material der Pfeife möglichſt wenig mitklingen und darf der Luft keine Hinderniſſe in den Weg ſetzen. Darum wählt man zu ſolchen Pfeifen Röhren mit dicken aber beſonders inwendig glatten Wänden, die, wenn ſie aus Holz beſtehen, noch dazu mit Leim überzogen ſind. Nicht jedes Verhältniß der Dimenſionen gibt einen reinen und vollen Ton, ſondern man muß durch Verſuche das rechte Verhältniß ausmitteln.

Bläſt man die Luft mit dem Munde an, ſo erhöht man meiſtens ihre Temperatur und ſteigert dadurch die Tonhöhe, ſetzt man ſie durch einen ſchwingenden Körper, z. B. durch eine Stimmgabel in Bewegung, ſo verengt man dadurch die Öffnung der Röhre und modificirt dadurch den Ton. Zu genauen Verſuchen muß man ſtets das Anblaſen einem durch einen Gaſometer regulirten Luftſtrome überlaſſen.

Bei Verſuchen mit Zungenpfeifen hat man nicht blos die Di-

menſionen der Luftſäule, ſondern auch die der ſchwingenden elaſtiſchen Zunge zu berückſichtigen, weil beide auf einander einwirken und ihre Oſcillationen ſich gleichzeitig modificiren, wie ſich aus Webers ſchönen Verſuchen (Pogg. A. Bd. 16) zeigt. Soll eine Zunge verkürzt werden, ſo darf man dieſes nicht mit einer beweglichen Krücke thun, wie es gewöhnlich zu geſchehen pflegt, denn eine ſolche Krücke hemmt die Schwingungen des Zungenſtücks nicht vollkommen, ſondern es iſt eine ſtärkere Befeſtigung derſelben mittelſt einer beſonderen Klemme nothwendig.

Die abſolute Anzahl der Schwingungen einer Luftſäule läßt ſich aus der Pfeifenlänge nicht mit Sicherheit abnehmen, wiewohl ſich das Verhältniß der Tonhöhen einer Säule aus verſchiedenen Gaſen zur Beſtimmung der Schallgeſchwindigkeit in denſelben brauchen läßt.

103. Bei Verſuchen mit ſtarren Körpern hat man vorzüglich auf die Gleichförmigkeit ihrer Dimenſionen und Dichte zu ſehen. Ungleich dichte Saiten oder Stäbe geben ſtets einen unreinen Ton, unregelmäßige Platten laſſen ſich durchaus nicht zum Tönen bringen, ſolche, deren Dicke nicht allenthalben dieſelbe iſt, ſchwingen unregelmäßig und die auf ihnen zu erzeugenden Klangfiguren erhalten nie die Reinheit und Nettigkeit, welche man zu erhalten wünſcht. Darum wählt man zu akuſtiſchen Verſuchen mit Saiten, nie Darmſaiten, ſondern ſtets Metallſaiten, zieht den durch Hämmern in die gehörige Form gebrachten Stäben jene vor, die durch ein Zieheiſen gegangen ſind und ſelbſt bei Metallplatten muß man wünſchen ſolche zu erhalten, die ihre Elaſticität nicht vorhergegangenen Hammerſchlägen, ſondern einem Walzwerke verdanken. Bei Glasplatten vermeidet man ſolche, die gar dick und daher meiſtens auch ungleich dick ſind, und zieht darum das gewöhnliche Fenſterglas, wenn es frei von Kiesknöpfen und Streifen iſt, den ſtets dickeren Spiegelplatten vor. Man benimmt ihnen vor dem Verſuche mittelſt einer Feile oder eines Schleifſteines den ſcharfen Rand.

104. Auch das Erregungsmittel des Schalles iſt nicht gleichgiltig. Ein in Rückſicht ſeiner Form und anderweitigen Beſchaffenheit zu reinen Klängen geeigneter Körper gibt doch nur ein unreines Getöne, wenn man ihn auf eine nicht paſſende Weiſe ſchlägt. Die beſten Erregungsmittel ſind: Das Streichen mit einem durch Kolophonium rauh gemachten Violinbogen, mit naſſen Fingern, einem naſſen Tuche, Filz, Leder oder Korkholz, Schlagen mit

einem hölzernen mit Leder gepolſterten Hammer oder endlich die unmittelbare Mittheilung der ſchwingenden Bewegung durch einen elaſtiſchen (gläſernen) Stab, der mit dem zu erregenden Körper innig verbunden iſt und der durch eines der vorhergehenden Mittel ſelbſt zum Schwingen gebracht wird. Das letztere Mittel iſt beſonders da anwendbar, wo die Form des Körpers, der tönen ſoll, der Anwendung eines unmittelbar wirkenden Schlages oder Striches nicht zuſagt. Man darf bei ſeiner Anwendung nicht vergeſſen, daß die Schwingungen des Hilfsſtabes in paralleler Richtung in den zum Tönen zu bringenden Körper übergehen und man bei einer rechtwinkeligen Verbindung derſelben in letzterem transverſale Schwingungen erregt, wenn in erſterem longitudinale hervorgebracht werden, und umgekehrt, ſo wie daß der Schwingungszuſtand eines Körpers hauptſächlich vom erſten Zuſtande der Bewegung abhänge, und daher die Stärke der erregenden Kraft dem jedesmaligen Zwecke angemeſſen ſeyn müſſe. Darum führen ſchnelle und ſtarke Streiche und Schläge leicht zur Erregung von Schwingungsknoten. Daß überhaupt jedes Erregungsmittel nach der Richtung wirken müſſe, nach welcher die Theile ſchwingen ſollen, ſo wie, daß es da am beſten angebracht ſey, wo die Theile am freieſten ſind und durch die kleinſte Kraft angeregt werden können, iſt für ſich klar. Darum ſtreicht man eine Saite meiſtens in der Mitte, wenn nicht beſondere Umſtände ein anderes Verfahren nothwendig machen, darum wird eine Platte, ein Trinkglas, eine Glocke am Rande geſtrichen, gerieben oder geſchlagen rc.

105. Jeder ſchallende Körper wird an einer oder an mehreren Stellen befeſtiget. Dieſe Befeſtigung ſoll der Fortpflanzung der ſtehenden Schwingung über die befeſtigte Stelle hinaus möglichſt Einhalt thun und beim Meſſen des ſchwingenden Stückes keinen Zweifel verurſachen. Saiten befeſtiget man an feſten, möglichſt ſcharf begrenzten Auflagen, Metallſtäbe werden unmittelbar in einen Schraubſtock eingeklemmt, Glasſtäbe vorläufig zwiſchen zwei Korkſtücke gelegt und mit dieſen in die Klemme gebracht, oft hält man ſie auch blos zwiſchen zwei Fingern. Bei ſchwingenden Platten iſt letzteres das beſte Mittel, aber nur für kleine Platten anwendbar, für größere hat man eigene Schraubenzwingen, die an einem Tiſche befeſtiget werden, wie Fig. 81 zeigt.

106. Der Ton, welchen ein ſchallender Körper hören läßt, reicht ſelten hin, den Schwingungszuſtand der einzelnen Theile

genau kennen zu lernen. Darum wendet man jene Mittel an, durch welche die ruhenden Stellen von den bewegten durch ſichtbare Zeichen geſchieden erſcheinen und die ſogenannten Klangfiguren zum Vorſchein kommen. Bei Platten und breiten Stäben wendet man feinen trockenen farbigen Sand, Hexenmehl, eine dünne Waſſerſchichte, bei runden oder gar ſchmalen Stäben feine, papierene, ſchmale Ringe, bei Saiten papierene Reiter an. Glocken füllt man mit Waſſer oder überzieht ſie mit feuchtem anklebenden Sande, das Ende eines ſchwingenden Stabes, die Zinken einer Stimmgabel ſtellt man in Waſſer oder polirt ſie am Ende und läßt Sonnenlicht darauf fallen, ſteckt ein Stück glimmenden Schwamm daran, um aus dem Kreiſeln des Waſſers, oder den Figuren, welche die polirte oder glühende Stelle macht, auf die Schwingung ſchließen zu können. Auch das Bild der Sonne, wie es in einer ſchwingenden polirten Scheibe erſcheint, kann über dieſen Zuſtand Aufklärung geben. Je feiner der aufgeſtreute Sand iſt, deſto kleinere Abtheilungen des ſchwingenden Körpers zeigt er an. Da die gewöhnlichen Klangfiguren nur den Abtheilungen in große Parthien entſprechen, ſo können ſie nur mit gröberem Sande ſichtbar gemacht werden. Waſſer zeigt wegen ſeiner faſt ins Unendliche gehenden Verſchiebbarkeit die Bewegung der kleinſten Theile.

107. Zur Erzeugung reiner Klangfiguren iſt nothwendig, nur wenig Sand anzuwenden und denſelben möglichſt gleichförmig zu vertheilen, einen gleichmäßigen, ſich ſtets parallel bleibenden, ſanften Bogenſtrich zu führen, der immer dieſelbe Stelle trifft, und durch geringes Neigen der Stelle, welche am meiſten von Sand entblößt iſt, der vollen Ausbildung der Figur zu Hilfe zu kommen. Glasplatten brauchen einen anhaltenden, Metallplatten einen raſchen Bogenſtrich, weil erſtere bei weitem nicht ſo lange fortklingen als letztere; erſtere verſagen oft wegen anhängender Feuchtigkeit ihren Dienſt. In dieſem Falle muß man ſie mit einem Tuche abtrocknen, aber ſich dabei wohl in Acht nehmen, daß man nicht durch ſtarkes Reiben etwa Electricität errege und dadurch die Adhäſion des Sandes vermehre.

Mém. de l'Académie des sciences Tom. II.
Journal de l'école polytechnique à Paris, cah. 14.
Ann. de Chim. et de Phys, Tom. 23.

Vierter Abſchnitt.

Das Licht.

Erſtes Kapitel.

Leuchtende Körper und Modificationen des Lichtes überhaupt.

1. Die Lehre vom Lichte (Optik) iſt einer der intereſſanteſten Theile der ganzen Naturlehre, man mag ſeine theoretiſche oder ſeine practiſche Seite betrachten. Die Optik gewährt jenes Vergnügen in vollem Maße, welches die Erkenntniß von Wahrheiten überhaupt begleitet, ſie erklärt uns die Pracht der Farben, lehrt das Entſtehen jenes wunderbaren Bildes im Auge und den Bau der optiſchen Inſtrumente, der Fernröhre und Mikroſkope, welche unſeren Blick in's Übermeßliche tragen und im kleinſten Sonnenſtäubchen noch ein organiſches Ganzes erblicken laſſen.

2. Die Quellen des Lichtes ſind die leuchtenden Körper. Jeder derſelben kann als Aggregat phyſiſcher Puncte angeſehen werden, die nach allen Richtungen Strahlen ausſenden. Es haben aber weder alle, von demſelben Puncte ausfahrenden Strahlen gleiche Intenſität, noch ſenden verſchiedene Puncte gleich intenſive Strahlen aus. Man muß daher jedem Strahle oder jedem leuchtenden Puncte eine eigene Leuchtkraft zuſchreiben. Die Beleuchtung, welche durch einen leuchtenden Körper einer ſehr kleinen dunklen Fläche zu Theil wird, hängt demnach ab von der Menge der, das Licht auf dieſelbe ſendenden Puncte, d. i. von dem Stücke der leuchtenden Fläche, welches der beleuchteten zugekehrt iſt, von der Leuchtkraft der einzelnen Puncte und vom Quadrate der Entfernung beider Flächen von einander. Haben alle Puncte dieſelbe Leuchtkraft $=L$ und heißt die leuchtende Fläche $=A$, die gegenſeitige Entfernung $=D$; ſo hat man als Ausdruck der Beleuchtung für ſenkrecht einfallende Strahlen

$$\frac{LA}{D^2}.$$

Iſt die beleuchtete Fläche nicht ſo klein, daß man allen Puncten derſelben eine gleiche Entfernung vom leuchtenden Körper beilegen kann, ſo muß man einen ähnlichen Ausdruck für jedes Stück dieſer Fläche, deſſen alle Puncte vom leuchtenden Körper gleich weit entfernt ſind, finden, und ihre Summe als Ausdruck der Beleuchtung anſehen. Steht die Beleuchtungsfläche ſchief gegen die einfallenden Strahlen, ſo iſt die ihr zu Theil werdende Beleuchtung im Verhältniſſe des Sinus des Neigungswinkels der Strahlen kleiner als für ſenkrecht einfallende Strahlen. Heißt der Neigungswinkel der Strahlen a, ſo erhält man als Werth der Beleuchtung

$$\frac{LA}{D^2} \cdot \sin a$$

LA bezeichnet die geſammte, von der leuchtenden Fläche nach einer beſtimmten Richtung ausgehende Lichtmenge $= M$, und man bekommt daher ſtatt des vorhergehenden Ausdruckes den folgenden:

$$\frac{M \sin a}{D^2}.$$

3. Um den Gebrauch dieſer Formel einzuſehen, denke man ſich eine kleine Papierfläche n (Fig. 82) auf einem horizontalen Tiſche und vor derſelben eine brennende Kerze mo. Je kürzer die Kerze wird, deſto näher kommt ſie der zu beleuchtenden Fläche, deſto ſchiefer fallen aber ihre Strahlen auf dieſelbe. Daher muß es eine beſtimmte Höhe geben, für welche die Papierfläche am ſtärkſten beleuchtet wird oder für welche $\frac{M \sin a}{D^2}$ ein Maximum wird. Um dieſe Höhe zu finden, ſetze man $on = D$, $nm = B$, und es iſt $mo = \sqrt{(D^2 - B^2)}$, mithin

$$\frac{M \sin a}{D^2} = \frac{M\sqrt{(D^2-B^2)}}{D^3}$$

Setzt man das Differenzial dieſes Ausdruckes, in welchem M conſtant iſt, gleich o; ſo erhält man:

$$\frac{6B^2}{D^7} - \frac{4}{D^5} = 0 \text{ oder } D = B\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

und die geſuchte Höhe

$$om = \sqrt{(D^2 - B^2)} = \frac{B}{\sqrt{2}} = 0{.}707\,B.$$

4. Alles bisherige bezieht ſich auf die abſolute von einem leuchtenden Körper ausfahrende Lichtmenge und auf ſein wirk-

liches Leuchtvermögen. Von dieſen muß aber die ſcheinbare Lichtmenge und das ſcheinbare Leuchtvermögen wohl unterſchieden werden. Man verſteht unter erſterem die von einem Objecte ins Auge gelangende Lichtmenge, und unter letzterem den Grad der Klarheit des Bildes des Objectes im Auge. Daß ſcheinbare Größen von den wirklichen ſtark abweichen können, iſt für ſich klar.

5. Die ſcheinbare Leuchtkraft $= \lambda$ iſt gleich der ſcheinbaren Lichtmenge $= \mu$ getheilt durch die Größe des Bildes im Auge $= \omega$, und da letzteres der ſcheinbaren Größe des Gegenſtandes $= \frac{A}{D^2}$ gleich iſt, ſo hat man

$$\lambda = \frac{\mu}{\omega} = \frac{\mu D^2}{A}.$$

Aber zugleich iſt

$$\mu = \frac{LA}{D^2},$$

mithin

$$\lambda = L$$

d. h. die ſcheinbare Leuchtkraft iſt von der Entfernung unabhängig, und es erſcheint ein Object in jeder Entfernung gleich ſtark leuchtend. Dabei wird aber vorausgeſetzt, daß das Licht auf dem Wege zum Auge keinen Verluſt erleidet.

6. Man kann dem Vorhergehenden gemäß die abſolute Leuchtkraft verſchiedener Puncte nach ihrer ſcheinbaren beſtimmen und vergleichen. Leuchtende Körper, wie z. B. die Sonne, eine weiß glühende prismatiſche oder cylindriſche Eiſenſtange ſcheinen an den Rändern eben ſo leuchtend wie in der Mitte, haben alſo an dieſen Stellen einerlei Leuchtkraft. Da aber vom Rande aus mehr Strahlen ins Auge gelangen als von der Mitte, und zwar im Verhältniß des Sinus des Ausſtrahlungswinkels mehr, ſo müſſen die Strahlen in demſelben Verhältniſſe ſchwächer werden, und man kann ſagen: Die Lichtausſendung iſt dem Sinus des Emiſſionswinkels proportionirt.

7. Bliebe ein Lichtſtrahl ſtets im leeren Raume, ſo würde er ſich unverändert in gerader Richtung mit gleichförmiger Geſchwindigkeit fortpflanzen. Dasſelbe würde in einem vollkommen gleichartigen, abſolut dichten Mittel erfolgen. So wie er aber von einem Mittel in ein anderes übergeht, erleidet er Veränderungen. Man

kann dieſe Veränderungen füglich in zwei Klaſſen theilen. Die einen betreffen die Richtung des Strahles und laſſen ſich auf Änderungen ſeiner Geſchwindigkeit zurückführen, bei der anderen erlangt der Strahl Eigenſchaften, die er früher nicht hatte, ohne eine Änderung ſeiner Richtung zu erfahren.

In die Reihe der erſteren gehören: Die Reflexion, die Brechung nebſt der Farbenzerſtreuung, in die der letzteren die Abſorption, Interferenz, Beugung und Polariſation. Es iſt nun unſere Abſicht, die Geſetze aller dieſer Modificationen, in ſo fern ſie nicht in den gewöhnlichen Compendien behandelt werden, darzuſtellen.

Zweites Kapitel.

Modificationen des Lichtes.

A. Reflexion des Lichtes.

8. Die Grundgeſetze der Reflexion des Lichtes ſind: 1. der reflectirte Strahl liegt in der Einfallsebene, 2. der Reflexionswinkel iſt dem Einfallswinkel gleich.

Den Verſuch, woraus ſich dieſe Geſetze ergeben, ſtellt man am leichteſten mit dem in Fig. 83 dargeſtellten Apparate an. *AB* iſt eine mit Stellſchrauben verſehene Metallplatte, in deren Mitte ein Planſpiegel *C* eingelaſſen iſt, und über welcher ſich, ſenkrecht auf ſie ein getheilter Kreisbogen erhebt, der 180° hält. Vom oberſten Puncte dieſes Bogens hängt ein Loth *D* mit einer feinen Spitze herab und zeigt auf einen Punct des Spiegels. Zu beiden Seiten des Lothes laſſen ſich an dieſem Bogen Diopter *E* und *F* mit feinen Ausſchnitten verſchieben. Stellt man die Platte *AB* und dadurch zugleich auch den Spiegel *C* horizontal und bringt die Diopter *F* auf einen Theilſtrich des Bogens, die Diopter *E* auf einen anderen vom Nullpuncte *O* der Theilung eben ſo weit abſtehenden, ſo ſieht das hinter *E* befindliche Auge an der Stelle des Spiegels, wohin die Spitze des Lothes *D* weiſet, die Öffnung der Diopter *F*, die Größe des Bogens *OF* mag übrigens welche immer ſeyn. Es muß daher der durch die Öffnung der Diopter *F* nach dem vom Loth bezeichneten Punct des Spiegels hinfahrende Strahl *FC* durch Reflexion die Richtung *CE* bekommen.

9. Wenn man dieſe Geſetze auf Spiegel von bekannter Geſtalt anwendet, ſo findet man leicht die Richtung der reflectirten

Strahlen, ihre Neigung gegen eine beſtimmte Axe und den Ort, wo ſie ſich etwa vereinigen oder zu vereinigen ſcheinen, nebſt allen mathematiſchen Eigenſchaften ſolcher Vereinigungsſtellen.

Es ſey AB (Fig. 84) die erzeugende Curve einer ſpiegelnden Rotationsfläche, SCx die Rotationsaxe und S ein in derſelben befindlicher leuchtender Punct, welcher Strahlen auf die Spiegelfläche ſendet. SC ſey ein ſolcher Strahl und SD ein zweiter. Der erſtere wird offenbar in ſich ſelbſt reflectirt; der letztere bekommt durch die Reflexion die Richtung DH, welche man findet, wenn man zum Einfallspuncte D die Tangente DE, darauf die ſenkrechte DF zieht und $SDL = LDM$ macht. Die Lage dieſes Strahles iſt bekannt, wenn der Einfallspunct D und derjenige Punct H gegeben iſt, wo der verlängerte Strahl MD die Axe ſchneidet. Erſterer iſt mit jedem Strahl bekannt, letzterer wird durch die Linie SH beſtimmt. Um dieſe zu finden, ziehe man DG ſenkrecht auf Sx, nenne $SG = x$, $DG = y$, $SH = A$, und man hat:

$$HDE = SDE = DEF - DSF$$

$$GDH = GDE - HDE = 90^\circ - DEF - (DEF - DSF) =$$
$$= 90^\circ - (2\,DEF - DSF)$$

$$GH = DG . \text{tang}\, GDH = DG . \cot\,(2\,DEF - DSF)$$

$$SH = SG - HG = SG - GD \cot (2\,DEF - DSF).$$

Ferner iſt

$$\text{tang}\, DSF = \frac{y}{x} \text{ und } DSF = \text{arc tang}\, \frac{y}{x}$$

$$\text{tang}\, DEG = \frac{dy}{dx} \text{ und } DEG = \text{arc tang}\, \frac{dy}{dx}$$

mithin

$$A = x - y \cot \left(2 \text{ arc tang}\, \frac{dy}{dx} - \text{arc tang}\, . \frac{y}{x}\right)$$

weil aber

$$2 \text{ arc tang}\, \frac{dy}{dx} = \frac{2 . \frac{dy}{dx}}{1 - \frac{dy^2}{dx^2}}; \text{ ſo iſt}$$

$$2 \text{ arc tang}\, . \frac{dy}{dx} - \text{arc tang}\, \frac{y}{x} =$$

$$= \text{arc tang}\, \frac{2 . \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{1 - \frac{dy^2}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx} . \frac{y}{x}} =$$

$$= \text{arc tang} \frac{2 \cdot \frac{dy}{dx} x - y \left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right) x + 2 \frac{dy}{dx} \cdot y}$$

und daher

$$\cot \left(2 \text{ arc tang} \cdot \frac{dy}{dx} - \text{arc tang} \frac{y}{x}\right) =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right) x + 2 \frac{dy}{dx} y}{2 \frac{dy}{dx} x - y \left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

deßhalb iſt

$$A = x - y \left\{ \frac{\left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right) x + 2y \frac{dy}{dx}}{2x \frac{dy}{dx} - y \left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left\{ \frac{\left(x + \frac{dy}{dx} y\right) \left(\frac{dy}{dx} x - y\right)}{2x \frac{dy}{dx} - \left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right) y} \right\} \ldots\ldots (A).$$

Um den Winkel $DHF = \varphi$, den der reflectirte Strahl mit der Axe macht, zu finden, hat man:

$$DHF = 90° - HDG = 2DEF - DSF$$

mithin

$$\varphi = 2 \text{ arc tang} \cdot \frac{dy}{dx} - \text{arc tang} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{2x \frac{dy}{dx} - y \left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right) x + 2y \frac{dy}{dx}} \ldots\ldots\ldots (B).$$

10. Sollen alle von S ausfahrenden Strahlen durch den Spiegel ſo reflectirt werden, daß ſie nach einem einzigen Punct hinzielen, ſo muß ein ſolches Verhältniß zwiſchen x und y, dx und dy Statt finden, daß A einen conſtanten Werth erhält. Man ſetze ihn $= c$ und denke ſich ſtatt x geſchrieben $x - c$, wodurch nur der Anfangspunct der Coordinaten verſetzt wird, und man erhält

$$\frac{dy}{dx} (x^2 - y^2 - c^2) = \left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right) xy.$$

Man führe nun eine neue Variable z ein und ſetze $\frac{dy}{dx}y = xz$. Wird obige Gleichung mit y multiplicirt und für $\frac{ydy}{dx}$ der Werth xz geſetzt, ſo erhält man:

$$z(x^2 - y^2 - c^2) = y^2 - x^2 z^2$$

und hieraus

$$y^2 = \frac{x^2 z - c^2 z + x^2 z^2}{1+z} = x^2 z - \frac{c^2 z}{1+z}.$$

Differenzirt man dieſe Gleichung, ſo iſt

$$2y\,dy = 2xz\,dx + \left(x^2 - \frac{c^2}{(1+z)^2}\right)dz$$

und wegen $y\,dy = xz\,dx$

$$\left(x^2 - \frac{c^2}{(1+z)^2}\right)dz = 0.$$

Dieſer Gleichung wird entſprochen, ſowohl wenn man $x^2 - \frac{c^2}{(1+z)^2} = 0$, als wenn man $dz = 0$ ſetzt. Durch erſteres gelangt man aber nur zu einer beſonderen Auflöſung, darum muß geſetzt werden

$$dz = 0 \text{ mithin } z = \text{const} = -m = \frac{y\,dy}{x\,dx}$$

daher durch Integriren

$$y^2 = m(n^2 - x^2)$$

wo n die Conſtante der letzten Integration iſt. Da dieſes die allgemeine Gleichung der Kegelſchnittscurven iſt, ſo muß ein Spiegel, der die oben erwähnte optiſche Eigenſchaft beſitzen ſoll, die Krümmung eines Kegelſchnittes haben. Der Punct, von welchem die Strahlen ausgehen müſſen, um auf ſolche Weiſe modificirt zu werden, liegt bei der Ellipſe und Hyperbel in einem Brennpuncte, und der Vereinigungspunct der Strahlen im anderen, bei der Parabel letzterer in einer unendlich großen Entfernung vom Spiegel, bei der Kugel im Mittelpuncte derſelben. Dieſes läßt ſich ſchon aus der Natur der Kegelſchnittscurven erkennen, allein obiger Satz zeigt zugleich, daß keine andere Curve dieſe Eigenſchaft beſitze.

11. Sphäriſche Spiegel vermögen nur alle jene Strahlen durch Reflexion in einen Punct zu ſammeln, welche vom Centrum ihres Erzeugungskreiſes ausgehen; alle von einem anderen Puncte ausgehenden kommen nach der Reflexion nicht wieder in einem Puncte

zuſammen, ſondern erleiden eine **Abweichung**. Dieſe läßt ſich aus der Formel *A* finden; man kann ſie aber auch unmittelbar entwickeln. Es ſey *AB* (Fig. 85) ein Bogen des Erzeugungskreiſes eines Hohlſpiegels, *S* ein leuchtender Punct vor demſelben, *C* ſein Krümmungsmittelpunct, *SCD* ſeine Axe und *SA* ein Lichtſtrahl, der die ſpiegelnde Fläche am äußerſten Rande trifft und nach der Richtung *AF* reflectirt wird, ſo daß er die Axe in *F* ſchneidet.

Man nenne $SD = a$, $FD = \alpha$, $CD = 2p$ und ſuche einen Ausdruck für die Bildweite *DF*. Man ziehe den Halbmeſſer *CA*, und man hat

$$SAC = CAF$$

ferner

$$SA : AF = SC : CF$$
$$SA : AF = \sin AFD : \sin ASF$$

mithin

$$SC : CF = \sin AFD : \sin ASF$$

oder

$$a - 2p : 2p - \alpha = \sin AFD : \sin ASF.$$

Setzt man nun annäherungsweiſe $DE = \frac{AE^2}{4p} = \frac{y^2}{4p}$, wo *AE* die halbe Öffnung des Spiegels bedeutet, ſo iſt

$$\sin AFD = \frac{AE}{AF} = \frac{y}{\sqrt{\left[y^2 + \left(\alpha - \frac{y^2}{4p}\right)^2\right]}} =$$

$$\text{nahe} = \frac{y}{\sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{2p-\alpha}{2p} \cdot y^2\right)}}$$

$$\sin ASF = \frac{AE}{SA} = \frac{y}{\sqrt{\left[y^2 + \left(a - \frac{y^2}{4p}\right)^2\right]}} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{\left(a^2 + \frac{2p-a}{2p} y^2\right)}}.$$

Setzt man dieſe Werthe in obige Proportion und verwandelt ſie in eine Gleichung, ſo wird

$$(a-2p)\sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{2p-\alpha}{2p} y^2\right)} =$$

$$= (2p-\alpha)\sqrt{\left(a^2 - \frac{a-2p}{2p} y^2\right)}.$$

Bricht man bei der Entwickelung der Wurzelgröße mit y^2 ab, ſo erhält man

$$(a-2p)\alpha-(2p-\alpha)a=-\frac{(a-2p)(2p-\alpha)}{4p}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\right)y^2$$

und hieraus

$$\alpha=\frac{ap}{a-p}-\frac{(a-2p)(2p-\alpha)}{8p(a-p)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)y^2\ldots(C).$$

Im zweiten Gliede dieſer Gleichung iſt der erſte Theil von der Öffnung y unabhängig, der zweite hingegen wächſt mit dem Quadrate derſelben. Für Centralſtrahlen iſt $y=0$, mithin

$$\alpha=\frac{ap}{a-p} \text{ oder } \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}=\frac{1}{p}.$$

Setzt man dieſen Werth für $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}$, ſo wird aus (C)

$$\alpha=\frac{ap}{a-p}-\frac{(a-\alpha)^2}{8a^2p}y^2.$$

Der letzte Theil dieſer Gleichung zeigt an, um wie viel der Vereinigungspunct der Strahlen, welche die Puncte des Spiegels treffen, deren Entfernung von der Axe $=y$ iſt, dem Spiegel näher liegt als der Vereinigungspunct der Centralſtrahlen. Man nennt dieſe Größe die Längenabweichung.

12. Iſt H der Vereinigungspunct der Centralſtrahlen, ſo vereinigen ſich die Strahlen, welche um A herum auffallen, erſt in G und GH heißt die Breitenabweichung dieſer Strahlen. Aus dieſem erſieht man, daß alle Strahlen, die von S ausgehen und zwiſchen A und D rings um die Axe den Spiegel treffen, bei ihrer größten Vereinigung doch nur innerhalb eines Kreiſes liegen, deſſen Halbmeſſer GH iſt. Man hat

$$GH=FH.\tang HFG=\frac{(a-\alpha)^2y^2}{8a^2p}\cdot\frac{y}{\alpha}=\frac{(a-\alpha)^2}{8a^2\alpha p}y^3. \quad (D).$$

Die Breitenabweichung wächſt demnach mit der dritten Potenz der Öffnung, während die Längenabweichung nur mit ihrer zweiten Potenz zunimmt.

13. Setzt man in einer oder der anderen dieſer Formeln p negativ, ſo gilt ſie für einen convexen Spiegel. Wird $p=\infty$ ge-

ſetzt, ſo bezieht ſie ſich auf einen ebenen Spiegel, und man erhält für dieſen immer

$$a = -a.$$

Es gibt alſo in einem ſolchen Spiegel keine Abweichung.

14. Sobald die reflectirten Strahlen ſich nicht in einem Puncte vereinigen, müſſen ſie gegen die Axe verſchieden geneigt ſeyn und daher ſich ſelbſt ſchneiden. Die Durchſchnittspuncte zweier unmittelbar an einander grenzender Strahlen liegen in einer krummen Fläche, welche man **Brennfläche** nennt. Sie charakteriſirt ſich durch eine ſtärkere Beleuchtung als der benachbarte Raum, und iſt ſo wie die Spiegelfläche eine Rotationsfläche, wird daher durch die erzeugende Curve vollkommen beſtimmt ſeyn. Es ſey MN (Fig. 86) die erzeugende Curve eines Spiegels, S ein leuchtender Punct, welcher die Strahlen SA, SB, SC, SD ꝛc. auf den Spiegel ſendet. Dieſe nehmen nach der Reflexion die Richtungen Aa, Bb, Cc ꝛc., und die Puncte a, b, c, liegen in der Brennlinie. Man ſieht leicht ein, daß jeder reflectirte Strahl dieſe Linie berührt. Ihre Gleichung findet man auf folgende Weiſe:

Es ſeyen x, y die Coordinaten eines reflectirten Strahles, x_1, y_1 die Coordinaten des Punctes, wo er den Spiegel trifft und q die Tangente des Winkels, den er mit der Axe macht, und man hat:

$$y_1 - y = q\,(x_1 - x).$$

Für den nächſt folgenden Strahl erhält man:

$$y_1 - (y + dy) = (q + dq)\,[x_1 - (x + dx)].$$

Wird von dieſer Gleichung jene abgezogen, ſo erhält man:

$$-\,dy = (x_1 - x)\,dq - q\,dx$$

und aus dieſer und der erſteren Gleichung findet man:

$$x_1 = x + \frac{q - \frac{dy}{dx}}{dq}\,dx$$

$$y_1 = y + q \cdot \frac{q - \frac{dy}{dx}}{dq} \cdot dx$$

wo der Werth q durch (B) gegeben iſt.

Iſt der Spiegel ſphäriſch, ſein Halbmeſſer $= \rho$ und fallen auf denſelben parallele Strahlen auf, ſo erhält man

$$x^2 + y^2,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{(\rho^2 - x^2)}},\ q = -\frac{\rho^2}{(\rho^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

mithin

$$x_1 = x + \frac{\frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{2q} = \frac{3\rho^2 - 2x^2}{2\rho^2}\, x$$

$$y_1 = y + \frac{dy}{q\,dx} = \frac{(\rho^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2} = \frac{y^3}{\rho^2}.$$

Setzt man, um die Rechnung zu vereinfachen, $\rho = 1$, ſo wird

$$4x_1^2 = 9x^2 - 12x^4 + 4x^6$$
$$4y_1^2 = 4 - 12x^2 + 12x^4 - 4x^6$$

und daraus durch Summiren

$$4(x_1^2 + y_1^2) = 4 - 3x^2 \text{ oder } x^2 = \tfrac{4}{3}(1 - x_1^2 - y_1^2)$$

und daraus

$$(4x_1^2 + 4y_1^2 - 1)^3 = 27 y_1^2$$

welches die Gleichung einer Epicycloide iſt, deren erzeugender Kreis $\frac{1}{4}\rho$ zum Halbmeſſer hat. Die Brennlinie iſt in Fig. 87 dargeſtellt.

15. Befindet ſich vor dem ſphäriſchen Spiegel MN (Fig. 88), deſſen Krümmungsmittelpunct C iſt, ein Gegenſtand AB, ſo entſteht durch Reflexion von B das Bild in b von A in a, und das Bild des ganzen Gegenſtandes AB iſt ba. Heißt man $BA = z$, $ba = z_1$, ſo iſt unter Beibehaltung der vorhin angenommenen Bedeutungen von a, α und p

$$z : z_1 = a - 2p : 2p - \alpha$$

d. i.

$$z_1 = \frac{2p - \alpha}{a - 2p} \cdot z$$

oder wenn man für p ſeinen Werth aus $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$ ſetzt:

$$z_1 = \frac{\alpha}{a} \cdot z.$$

Denkt man ſich das Auge in D, ſo iſt der Winkel, unter dem man AB ſieht, nahe $\frac{z}{a} = \varphi$, und daher

$$z_1 = \alpha\varphi.$$

16. Man denke ſich AB als geradlinigen Gegenſtand, und ſuche die Geſtalt des Bildes ab. Den früheren Bezeichnungen gemäß hat man: $Na = \alpha$, $NC = 2p$, $AN = a$ und

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a} = \frac{1}{p}.$$

Setzt man $CB = q$, $CA = s$, $Ca = q_1$, ſo wird aus dieſer Gleichung

$$\frac{1}{2p - q_1} + \frac{1}{2p + s} = \frac{1}{p}$$

d. i.

$$\frac{1}{2p} + \frac{q_1}{2p\,(2p - q_1)} + \frac{1}{2p} - \frac{s}{2p\,(2p + s)} = \frac{1}{p}$$

oder

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s}.$$

Iſt nun $ACB = \Psi$, ſo wird $s = \frac{q}{\cos \Psi}$, und daher

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \,.\, \cos \psi.$$

Setzt man $p = m\,(1 - e^2)$ d. i. $\frac{1}{p} = \frac{1}{m\,(1 - e^2)} \ldots (a)$

ferner

$$q = \frac{p}{e} = \frac{m\,(1 - e^2)}{e} \text{ d. i. } \frac{1}{q} = \frac{e}{m\,(1 - e^2)} \ldots (b)$$

ſo wird aus obiger Gleichung

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{m\,(1 - e^2)} + \frac{e}{m\,(1 - e^2)} \cos \psi.$$

Dieſes iſt aber die Gleichung einer Kegelſchnittslinie für Polarcoordinaten; es hat daher das Bild eines geraden Gegenſtandes vor einem Hohlſpiegel die Geſtalt einer Kegelſchnittslinie.

Aus den Gleichungen (a) und (b) wird $\frac{p}{q} = e$.

Iſt nun $e < 1$ d. i. $p < q$, ſo hat das Bild die Geſtalt einer Ellipſe; für $e > 1$ oder $p > q$, gleicht es einer Hyperbel; für $e = 1$ oder $p = q$ einer Kreislinie, endlich für $e = 0$ einer Parabel.

17. Fällt ein reflectirter Strahl auf einen zweiten Spiegel auf, ſo erleidet er natürlich dieſelbe Modification, als wenn ſich an der Stelle des erſten Bildes ein Object befände, und es läßt ſich nach dem Vorhergehenden die Lage und Beſchaffenheit des ſecundären Bildes ꝛc. finden.

Geſetzt es befinde ſich ein Object S (Fig. 89) zwiſchen zwei gegen einander geneigten Planſpiegeln CA und CB, deren Neigungswinkel $ACB = \mu$ heißt, und man nehme an, die gerade Linie CS,

welche von C nach dem Objecte S als Punct betrachtet, gezogen wird, theile dieſen Winkel in zwei Theile $ACS = m$ und $BCS = n$.

Iſt nun SD eine auf CA ſenkrechte, die bis S_1 verlängert wird, ſo daß $SD = DS_1$ iſt, ſo iſt S_1 das erſte Bild von S; zieht man ferner von S_1 die auf CB ſenkrechte $S_1 S_2$ und macht wieder $ES_2 = ES_1$, ſo bezeichnet S_2 den Ort des zweiten Bildes. Auf gleiche Weiſe findet man den Ort des 3., 4. ꝛc. Bildes. Durch ein gleiches Verfahren wird auch das Bilderſyſtem ausgemittelt, das von dem zuerſt im zweiten Spiegel entſtandenen Bilde s_1 abhängt. Zieht man von allen dieſen Bildern eine gerade Linie nach C, ſo iſt jede derſelben gleich SC, d. h. es erſcheinen alle Bilder in einerlei Entfernung von der Kante des Neigungswinkels der Spiegel; alle derſelben liegen mithin in einem Kreiſe, deſſen Mittelpunct C iſt. Auch ſieht man leicht ein, daß man hat:

$$\begin{array}{ll} ACS_1 = m & ACs_1 = \mu + n \\ ACS_2 = 2\mu + m & ACs_2 = \mu + n \\ ACS_3 = 2\mu + m & ACs_3 = 3\mu + n \\ ACS_4 = 4\mu + m & ACs_4 = 3\mu + u \\ - - - - - - - - & - - - - - - - \\ - - - - - - - - & - - - - - - - \end{array}$$

und hieraus

$$\begin{array}{ll} S\,CS_1 = 2m & S\,Cs_1 = 2n \\ S_1 Cs_2 = 2n & s_1 CS_2 = 2m \\ s_2 CS_3 = 2m & S_2 Cs_3 = 2n \\ - - - - - - & - - - - - - \\ - - - - - - & - - - - - - \end{array}$$

Es beträgt daher der Kreisbogen zwiſchen je zwei zunächſt auf einander folgenden Bildern abwechſelnd $2m$ und $2n$, alſo liegen die Bilder ſymmetriſch um C.

Steht der Gegenſtand mitten zwiſchen den zwei Spiegeln, ſo daß $m = n$ iſt, ſo hat man eine ganz vollkommene Symmetrie der Bilder. Um ihre mögliche Anzahl zu finden, ſuche man die Winkel, welche die einzelnen, hinter AC gelegenen Linien $S_1 C$, $S_3 C$ ꝛc., $s_2 C$, ꝛc. mit CS machen, und eben ſo diejenigen Winkel, welche die Linien $s_1 C$, $s_3 C$ ꝛc. $S_2 C$ ꝛc. mit derſelben Linie CS bilden. Da erhält man:

$$\begin{array}{ll} S_1 CS = 2m & s_1 CS = 2n \\ s_2 CS = 2\mu & S_2 CS = 2\mu \end{array}$$

$$S_3 CS = 2\mu + 2m \qquad s_3\, CS = 2\mu + 2n$$
$$s_4\, CS = 4\mu \qquad S_1 CS = 4\mu$$
$$S_5 CS = 4\mu + 2m \qquad s_5\, CS = 4\mu + 2n$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Es ſey nun μ ein aliquoter Theil von $360° = 2\pi$, mithin $\frac{2\pi}{\mu} = \nu$, wo ν eine ganze poſitive Zahl bedeutet. Iſt ν eine gerade Zahl, ſo iſt der Kreisbogen zwiſchen S und dem ν^{ten} Bilde hinter AC und dem ν^{ten} hinter BC gleich $\nu\mu = 2\pi$ und es fallen beide Bilder an denſelben Punct der SC. Iſt ν eine ungerade Zahl, ſo iſt dieſer Kreisbogen für das ν^{te} Bild hinter AC gleich $(\nu - 1)\mu + 2m$, für das ν^{te} hinter BC gleich $(\nu - 1)\mu + 2n$, mithin wieder beide zuſammen gleich $\nu\mu = 2\pi$.

Hieraus folgt, daß in beiden Fällen die Anzahl der möglichen Bilder $\nu - 1$, d. h. $\frac{2\pi}{\mu} - 1$ iſt.

18. Es ſey MN (Fig. 90) ein ſphäriſcher Hohlſpiegel, vor welchem ſich ein leuchtender Gegenſtand AB befindet; der von A ausgehende Strahl AM ſchneidet nach der Reflexion die Axe AO in a, die von den übrigen Puncten des Objectes AB ausfahrenden Strahlen erleiden eine ähnliche Modification, und ſo entſteht das Bild ab. Von dieſem gelangen die Strahlen auf einen zweiten Hohlſpiegel mn; durch welchen das Bild cd des Bildes ab entſteht. Man ſuche nun die Lage und Größe der Bilder. Zu dieſem Behufe nehme man an, es haben a_1, α_1, p_1 dieſelbe Bedeutung für den zweiten Spiegel mn, wie a, α, p für den erſten, ſetze die halbe Öffnung des erſteren x, des zweiten x_1, und endlich ihre gegenſeitige Entfernung h. Demnach hat man

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{p_1}, \quad \alpha + a_1 = h.$$

$$\varphi = MaO = \frac{x}{\alpha}, \quad \varphi_1 = odn = \frac{on}{od} = \frac{a_1 x}{\alpha \alpha_1}.$$

ferner die nöthige Öffnung x_1 des zweiten Spiegels, um den Strahl AM noch aufnehmen zu können, $x_1 = \frac{a_1 x}{\alpha}$.

Iſt z die Größe des Objectes AB, z_1 die des erſten und z_2 die des zweiten Bildes, ſo wird

$$z_1 = \frac{a}{a} z, \quad z_2 = \frac{a_1}{a_1} \cdot z_1 = \frac{a a_1}{a a_1} \cdot z.$$

Durch dieſe Gleichungen iſt die Lage und Größe der beiden Bilder gegeben.

19. Bei jedem Spiegel kommt das Material und ſeine Form in Betrachtung. Die gewöhnlichen, ſowohl die ebenen als die gekrümmten Spiegel werden meiſtens aus Glas gemacht, das auf der Rückſeite mit Zinnamalgam belegt iſt; weil aber dieſe ſtets zwei, oft ſogar mehrere Bilder geben, ſo kann man ſie ſelten bei optiſchen Unterſuchungen mit Vortheil anwenden, ſondern nimmt zu Metallſpiegeln oder zu ſolchen ſeine Zuflucht, die aus ſchwarzem, ganz undurchſichtigem Glaſe verfertiget ſind. Manchmal begnügt man ſich mit einem Spiegel aus weißem Glaſe, der aber an der Rückſeite zur Aufhebung der Reflexionsfähigkeit mit ſchwarzer Farbe (Kienruß und Siegellack) überſtrichen iſt. Unter den Metallſpiegeln haben zwar die ganz aus Platin verfertigten oder blos mit dieſem Metall überzogenen den Vorzug einer großen Dauerhaftigkeit und ſchönen Weiße, man kann aber auch aus anderen Metallcompoſitionen eine weiße und einen hohen Grad der Politur annehmende Spiegelmaſſe verfertigen. Eine ſolche Maſſe erhält man aus

32 Th. Kupfer, 16 Th. Zinn, 17 Th. Meſſing, 1 Th. Arſenik (Edwards)
3 Th. Kupfer und $1\frac{1}{4}$ Th. Zinn
6 Th. Meſſing und 1 Th. Zinn
3 Th. Kupfer, $1\frac{3}{4}$ Th. Zinn, 3 Th. Meſſing
3 Th. Zink, 4 Th. Zinn
39 Th. Kupfer, 16 Th. Zinn (Simon).

Der Freyherr von Jacquin benützt mit Vortheil zur Spiegelerzeugung die Abſchnitte von den mit Silber plattirten Kupferröhren, welche man zu Zugfernröhren verwendet (aus 190 Th. Kupfer und 10 Th. Silber), indem er ihnen 100 Th. Zinn zuſetzt.

20. Die Form eines ſphäriſchen Spiegels wird durch ſeinen Krümmungshalbmeſſer beſtimmt. Die Größe dieſes Halbmeſſers beſtimmt man am beſten aus der Brennweite, die, wie aus dem Vorhergehenden klar iſt, dem halben Radius gleich iſt. Um dieſe zu beſtimmen, befeſtige man den Spiegel an einen verticalen Träger *AB* (Fig. 91), der an einem horizontalen Maßſtabe *CB* befeſtiget iſt,

deſſen Nullpunct an dem der Axe entſprechenden Puncte *a* des Spiegels ſteht; ein anderer verticaler Träger *D* läßt ſich auf *CB* verſchieben, und iſt mit einem weißen Scheibchen *e* verbunden, welches wieder dem inneren Rande der Schiebröhre *f* entſpricht. Fallen nun von einem ſehr weit entfernten Gegenſtande Strahlen auf den Hohlſpiegel, ſo vereinigen ſie ſich zu einem verkleinerten Bilde vor demſelben. Schiebt man den Träger *D* auf *CB* ſo, daß dieſes Bild auf dem Scheibchen *e* deutlich erſcheint, ſo iſt *of* die Größe des halben Radius, vorausgeſetzt, daß der Spiegel eine ſo geringe Öffnung hat, daß man ſeine Längenabweichung außer Acht laſſen kann. Darum muß man auch immer die Öffnung des Spiegels durch einen Schirm gehörig verringern.

Ein anderes noch vorzüglicheres Verfahren iſt folgendes: Man bringe am Scheibchen *e* einen farbigen Punct an, richte dann ein Fernrohr auf einen weit entfernten Gegenſtand, z. B. auf ein Geſtirn und verſchiebe die Ocularröhre ſo lange, bis man das Object mit der größten Deutlichkeit ſieht. In dieſem Falle iſt man gewiß, daß parallele Strahlen auf das Objectiv fallen. Nun richte man dieſes Fernrohr ohne Veränderung des Oculares auf den Spiegel und verſchiebe den Träger *D* ſo lange, bis man auch die Zeichnung auf *e* völlig deutlich im Spiegel ſieht, wo dann wieder parallele Strahlen auf das Object des Fernrohres fallen und demnach die Zeichnung in der Brennweite ſich befindet. Es iſt gut das Fernrohr in verſchiedenen Entfernungen vom Spiegel aufzuſtellen und die Beobachtung zu machen. Dieſes Verfahren läßt ſich auch auf einen Convexſpiegel anwenden. Von einem anderen Mittel in der Folge.

21. Außer den ſphäriſchen Spiegeln werden auch noch ebene vorzüglich gebraucht, und es kommt in vielen Fällen ſehr viel darauf an, daß letztere ſehr genau eben ſind. Ob dieſes der Fall iſt, erkennt man auf folgende Weiſe: Man richte ein Fernrohr auf einen weit entfernten Gegenſtand und adjuſtire ſein Ocular ſo, daß man denſelben deutlich im Geſichtsfelde ſieht. Hierauf ſtelle man den Planſpiegel ſo in der Nähe des Fernrohres auf, daß von demſelben Objecte Strahlen darauf fallen und man mittelſt des Fernrohres das Bild desſelben im Spiegel ſehen kann. Iſt der Spiegel eben, ſo ändert er die Neigung der Strahlen gegen einander nicht, und man ſieht das Bild des Objectes deutlich bei der vorigen Stellung des Oculares.

Bei der mindeſten Concavität oder Convexität werden die

divergirend oder parallel auffallenden Strahlen in ihrer Neigung geändert, und man muß das Ocular vom Objecte entfernen, oder es demſelben nähern, wenn man wieder ein deutliches Bild erhalten will. Es iſt klar, daß man auf ſolche Weiſe alle Stellen des Spiegels prüfen muß, indem man auf einmal nur jenes Stück derſelben als eben oder uneben erkennt, hinter welchem das Bild erſcheint.

B. Einfache Brechung des Lichtes mit Farbenzerſtreuung.

22. Alle Probleme, welche den Weg eines Lichtſtrahls durch einen durchſichtigen Körper betreffen, laſſen ſich als rein geometriſche Aufgaben behandeln, wenn man nur das allgemeine Brechungsgeſetz, daß der gebrochene Strahl in der Einfallsebene liegt und daß der Sinus der Einfallswinkel zu dem des Brechungswinkels in demſelben brechenden Mittel in einem beſtändigen Verhältniſſe ſteht, auf jeden einzelnen Fall anwendet und dabei einen einfachen Lichtſtrahl als mathematiſche Linie betrachtet. Hier ſoll zuerſt die Brechung des Lichtes in Mitteln mit parallelen Flächen, dann in dreiſeitigen Prismen und endlich in Linſen unterſucht werden.

23. Ein Lichtſtrahl, welcher ſchief durch ein brechendes Mittel gegangen iſt, das von parallelen Wänden begrenzt iſt, hat zwar eine Richtung, die mit der vor ſeinem Eintritte in dieſes Mittel parallel iſt, allein er wird doch von ſeinem Wege abgelenkt, ſo daß der Punct, von welchem die Strahlen auf dieſes Mittel fallen, nach der Brechung näher am Mittel zu liegen ſcheint, als er wirklich liegt. Der Parallelismus des einfallenden und austretenden Strahles wird als etwas für ſich klares und in jedem optiſchen Elementarwerke bewieſenes vorausgeſetzt, und nur der letzte Punct näher erörtert. Es ſey MN (Fig. 92) das brechende Mittel, C der leuchtende Punct, von welchem ein Strahl CAB ſenkrecht durch dasſelbe geht, während ein anderer CD ſchief auffällt und nach der Richtung DE fortgeht, als wenn er vom Puncte F herkäme, hierauf aber wieder beim Austritte aus MN die Richtung EH einſchlägt, als wäre er von G gekommen.

Iſt hier CA nach F verlängert, ſo iſt $ACD = \rho$ der Einfallswinkel beim Eintritte in das Mittel, $AFD = \sigma$ der Brechungswinkel nach der erſten Brechung, mithin auch der Einfallswinkel für die zweite Trennungsfläche der zwei an einander grenzenden

Mittel, ferner AGE der Brechungswinkel beim Austritte aus dem Mittel MN, und man hat:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{1}{\text{tang}\,\rho},\quad \frac{AD}{AF} = \text{tang}\,\sigma, \text{ mithin}$$

$$\frac{AC}{AF} = \frac{\text{tang}\,.\,\sigma}{\text{tang}\,.\,\rho}.$$

Iſt der Strahl CD nicht ſtark gegen CA geneigt, ſo kann man die Tangenten von ρ und σ den Sinuſſen dieſer Winkel proportionirt ſetzen. Heißt daher n das Brechungsverhältniß beim Eintritt des Lichtſtrahls in das Mittel MN, mithin $\frac{1}{n}$ dasſelbe bei ſeinem Austritte, ſo wird

$$\frac{\text{tang}\,\sigma}{\text{tang}\,\rho} = \frac{\sin\,\sigma}{\sin\,\rho} = \frac{1}{n} \text{ und } AF = n\,.\,AC.$$

Eben ſo findet man

$$BG = \frac{1}{n}\,.\,BF.$$

Drückt c die Dicke AB des brechenden Mittels aus und a die Entfernung CA des leuchtenden Punctes C von demſelben, ſo iſt

$$BG = \frac{1}{n}(AB + AF) = \frac{1}{n}(c + na)$$

$$AG = BG - AB = a + \frac{n-1}{n}\,.\,c$$

mithin

$$CG = CA - AG = \frac{n-1}{n}\,c.$$

24. Die Folge von Puncten, in denen ſich zwei der einander unendlich nahe liegenden Strahlen ſchneiden, beſtimmt, ſo wie bei der Reflexion des Lichtes, die ſogenannte Brennfläche. Da nun die dioptriſche Brennfläche mit der catoptriſchen einerlei Urſprung hat, ſo muß wohl auch das Verfahren, die Gleichung der Brennlinie zu finden, in beiden Fällen dasſelbe ſeyn.

Es ſey nun AB (Fig. 93) der Durchſchnitt der Trennungsfläche zweier Mittel mit einer Ebene, welche durch den leuchtenden Punct S geht und auf jener ſenkrecht ſteht. Aus der Natur der Brennlinie geht hervor, daß ſie als gefunden angeſehen werden kann, wenn man die Curve kennt, welche von jedem der gebroche-

nen Strahlen berührt wird. Es ſey nun SEx ein auf AB ſenkrecht auffallender Strahl, und $SE = a$ das Stück desſelben, welches die Entfernung des leuchtenden Punctes von AB vorſtellt, SC ein anderer auffallender, CD derſelbe gebrochene Strahl und FG das Einfallsloch in C, ferner nenne man $SCG = \alpha$, $DCF = \beta$ und das Brechungsverhältniß beim Eintritt in dieſes Mittel $\frac{1}{n}$, und man hat

$$\sin\alpha = n\sin\beta.$$

Betrachtet man E als Anfangspunct der Coordinaten und nimmt Sx als Axe der y, EB als Axe der x an, und heißt die Coordinaten irgend eines Punctes x_1 und y_1, ſo iſt die Gleichung einer geraden Linie, welche durch dieſen Punct geht:

$$y - y_1 = C(x - x_1).$$

Soll dieſe Gleichung für CD gelten, ſo müſſen x_1 und y_1 die Coordinaten von C ſeyn, und man hat:

$$y_1 = o,\ x_1 = a\,\mathrm{tang}\,\alpha,\ c = \cot.\beta$$

mithin

$$y = (x - a\,\mathrm{tang}\,\alpha)\cot.\beta$$

oder weil $\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{(n^2 - \sin^2\beta)}}$ und
$\sin\beta.\cot.\beta = \cos\beta$ iſt

$$y = x.\cot\beta - \frac{a\sin\beta}{\sqrt{(n^2 - \sin^2\beta)}}.\cot\beta \ \ldots.\ (a).$$

Differenziirt man dieſe Gleichung nach β, ſo wird]

$$o = -\frac{x}{\sin^2\beta} + \frac{(n^2 - 1)\,a\sin\beta}{(n^2 - \sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}} \ \ldots..\ (b).$$

Wird hieraus der Werth von x in (a) geſetzt, ſo erhält man

$$y = -\frac{n^2 a\cos^3\beta}{(n^2 - \sin^2.\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\frac{ny}{a} = -\frac{n^3.\cos^3\beta}{(n^2 - \sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \left(\frac{ny}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{n^2.\cos^2\beta}{n^2 - \sin^2\beta} \ldots (c).$$

Setzt man $n^2 - 1 = m^2$, ſo wird aus (b)

$$\frac{mx}{a} = \frac{m^3\sin^3\beta}{(n^2 - \sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \left(\frac{mx}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{m^2.\sin^2\beta}{n^2 - \sin^2\beta} \ldots (d).$$

und aus (c) und (d)

$$\left(\frac{ny}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{mx}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{n^2\cos^2\beta^2 + m^2\sin^2\beta}{n^2 - \sin^2\beta}.$$

d. i.

$$\left(\frac{ny}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{mx}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Bei näherer Unterſuchung findet man, daß die Gleichung, welche die der Brennlinie im betrachteten Fall iſt, für $n > 1$ der Developpirten einer Ellipſe entſpricht, deren Mittelpunct in E, deren Brennpunct in S liegt, und die zur großen Halbaxe na, zur kleinen ma hat. Für $n < 1$ drückt ſie die Developpirte einer Hyperbel aus, die wieder in S einen Focus hat.

25. In einem Mittel, welches von nicht parallelen Wänden begrenzt iſt, wird ein Lichtſtrahl mehr von ſeiner urſprünglichen Bahn abgelenkt, als in einem, deſſen Wände mit einander gleichlaufend ſind. Beſteht er nun aus Theilen von verſchiedener Brechbarkeit, wie dieſes mit dem weißen Strahle der Fall iſt, ſo müſſen dieſe Theile, die bei immer geringerer Ablenkung noch zu nahe an einander liegen, um bemerkt werden zu können, bei der größern gehörig aus einander rücken und bemerkbar werden. Man kann demnach die Ablenkung jedes einzelnen Theiles für ſich ins Auge faſſen und ſelbſt in dem Falle, wo man es mit nicht homogenem, zerlegbarem Lichte zu thun hat, die Sache ſo behandeln, als ob man mit einfachem, homogenem Lichte operirte.

26. Es ſey nun ABC (Fig. 94) ein Durchſchnitt eines dreiſeitigen Prisma's, Sa ein Lichtſtrahl, der in der Ebene des Durchſchnittes einfällt. Zieht man in a das Einfallsloth be, ſo mag ac einer der Theile des Strahles ſeyn, in die er durch Brechung zerlegt wird. Errichtet man in c wieder das Einfallsloth gd, ſo wird cf die Richtung des austretenden Strahles und wenn ſich das Auge in f befindet, ſieht es den Punct S zweimal, und zwar mittelſt des directen Strahles nach fS, mittelſt des gebrochenen nach fs. Man führe nun folgende Bedeutungen ein: $ACB = \Psi$, $Sab = \sigma$, $fcd = \rho$, $eac = \sigma_1$, $eca = \rho_1$ und das Brechungsverhältniß beim Übergange aus der Luft in die Maſſe des Prisma's $1 : n$, und man erhält

$$aeg + aec = aec + ACB \text{ oder } aeg = \Psi;$$

$$\sigma_1 = \Psi - \rho_1 \quad \sin\rho = n\sin\rho_1$$

$$\sin\sigma = n \sin\sigma_1 = n\,(\sin\Psi\cos\rho_1 - \sin\rho_1\cos\Psi)$$

oder

$$\sin\sigma = n\,[\sin\Psi\sqrt{(1-\sin^2\rho_1)} - \sin\rho_1\cos\Psi]$$

und wenn man für $\sin\rho_1$ ſeinen Werth ſetzt:

$$\sin\sigma = \sin\Psi.\sqrt{(n^2-\sin^2\rho)} - \sin\rho\cos\Psi$$

woraus man dann leicht findet:

$$n^2 = \frac{(\sin\sigma+\sin\rho\cos\psi)^2}{\sin^2\psi} + \sin^2\rho \;\ldots.\; (E).$$

Verläßt der Strahl das Prisma unter demſelben Winkel, unter welchem er eintritt, oder iſt

$$\rho = \sigma$$

ſo wird dieſe Formel noch einfacher. Man führe zum Behufe dieſer Umſtaltung der Formel noch folgende Bedeutungen ein:

$fhx = \gamma$, $fSx = \lambda$, $Sfs = \varkappa$ und man hat

$$aeg = \Psi = \rho_1 + \sigma_1$$

$$\gamma = \rho - \rho_1 + \sigma - \sigma_1 = \rho + \sigma - \Psi$$

und weil $\rho = \sigma$ iſt

$$\frac{\gamma+\psi}{2} = \rho \text{ oder wegen } \gamma = \lambda + \varkappa$$

$$\rho = \frac{\lambda+\varkappa+\psi}{2}.$$

Dieſer Ausdruck in obige Gleichung geſetzt, gibt

$$n^2 = \sin^2 . \frac{\varkappa+\lambda+\psi}{2} + \sin^2\left(\frac{\varkappa+\lambda+\psi}{2}\right)\left(\frac{1+\cos\psi}{\sin\psi}\right)$$

oder

$$n = \frac{\sin\frac{\varkappa+\lambda+\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}.$$

Iſt die Entfernung des leuchtenden Gegenſtandes vom Auge unendlich groß, ſo hat man $\lambda = 0$, mithin

$$n = \frac{\sin . \frac{\varkappa+\psi}{2}}{\sin . \frac{\psi}{2}} \;\ldots\ldots\; (F).$$

Hier iſt nun zugleich $\varkappa = \gamma =$ dem Ablenkungswinkel. Geht n in $n + dn$ über, ſo wird aus $\frac{\sin\frac{\gamma+\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$ der Ausdruck

$$\frac{\sin\frac{\gamma+\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} + \frac{\frac{1}{2}d\gamma\cos\left(\frac{\gamma+\psi}{2}\right)}{\sin\frac{\psi}{2}} \text{ oder man hat}$$

$$dn = \frac{\frac{1}{2}d\gamma\left(\cos\frac{\gamma+\psi}{2}\right)}{\sin\frac{\psi}{2}} \ldots\ldots\ldots (G).$$

Dieſer Ausdruck lehrt, daß ein kreisrundes Bild durch Brechung in ein ovales verwandelt werden muß, falls das Licht aus Theilen von verſchiedener Brechbarkeit beſteht.

27. Die Formel E zeigt, daß, weil n für denſelben Strahl unter jedem Einfallswinkel einen beſtändigen Werth hat, jede Änderung von σ eine entgegengeſetzte von ρ hervorbringt, daß daher beim Drehen des Prisma's um ſeine Axe ein Werth von σ erlangt wird, für welchen das gebrochene Bild am wenigſten von den directen abweicht. Um dieſen Werth zu finden, differenziire man γ in

$$\gamma = \rho + \sigma - \Psi$$

nach ρ und σ und man hat

$$d\gamma = d\rho + d\sigma$$

aber

$$\sin\sigma = n\sin\sigma_1,\ d\sigma\cos\sigma = n\,d\sigma_1\cos\sigma_1 \text{ oder } d\sigma_1 = \frac{\cos\sigma}{n\cos\sigma_1}.d\sigma$$

ferner

$$\sin\rho = n\sin\rho_1,\ d\rho\cos\rho = n\,d\rho_1\cos\rho_1 \text{ oder } d\rho = \frac{n\cos\rho_1}{\cos\rho}.d\rho_1$$

endlich iſt

$$\Psi = \sigma_1 + \rho_1 \text{ mithin } 0 = d\sigma_1 + d\rho_1 \text{ oder } d\sigma_1 = -d\rho_1$$

und mittelſt dieſer Werthe

$$d\rho = -\frac{n\cos\rho_1\cos\sigma}{\cos\sigma_1\cos\rho}.d\sigma \text{ und endlich}$$

$$d\gamma = \left(1 - \frac{\cos\rho_1\cos\sigma}{\cos\sigma_1\cos\rho}\right)d\sigma.$$

Für $d\gamma = 0$ hat man daher $\frac{\cos\rho_1\cos\sigma}{\cos\sigma_1\cos\rho} = 1$, wodurch angezeigt wird, daß $\cos\rho_1 = \cos\sigma_1$, $\cos\rho = \cos\sigma$ oder $\rho_1 = \sigma_1$, $\rho = \sigma$ ſeyn muß. Es finden demnach für dieſen beſonderen Fall folgende Umſtände Statt:

1) Der einfallende Strahl macht mit der Vorderfläche des Prisma's, und der austretende mit der Hinterfläche desſelben einerlei Winkel. 2. Die Winkel, welche der Strahl nach der erſten Brechung mit den beiden Seitenwänden des Prisma's macht, ſind von einerlei Größe und jeder gleicht dem halben brechenden Winkel des Prisma's $\left(\frac{\Psi}{2}\right)$. 3. Von der geſammten Ablenkung des Strahles kommt auf Rechnung der Seitenwand die Hälfte, und man hat für dieſen Fall die Gleichung (G).

28. Nebſt den Prismen ſind die **Linſen** die wichtigſten, lichtbrechenden Körper. Es ſey S (Fig. 95) ein leuchtender Punct, der auf die Linſe MN Strahlen ſendet. Man betrachte zwei derſelben SA und SB, wovon der erſtere in der Axe der Linſe liegt, und verfolge ihren Weg durch die Linſe. Der Strahl SA geht ungebrochen durch, der Strahl SB aber erleidet in B eine Ablenkung, die man bekanntlich findet, wenn man das Einfallsloth BC zieht, und den Brechungswinkel CBE in das rechte Verhältniß zum Einfallswinkel CBD ſetzt, wo dann BE der geſuchte Strahl iſt. Wird eben ſo auf den Punct F das Einfallsloth GF gezogen und auf ähnliche Art verfahren, ſo erhält man die Richtung des die Linſe verlaſſenden Strahles und ſeine Neigung LKF gegen die Axe derſelben. Um für LK einen analythiſchen Ausdruck zu finden, führe man folgende Bezeichnungen an:

$a = SA$ die Entfernung des leuchtenden Punctes S von der Linſe.
$b = SB$ die Länge des Strahles, der B trifft.
$f = BC$ der Krümmungshalbmeſſer der erſten Fläche.
$g = GF$ der Krümmungshalbmeſſer der zweiten Fläche.
$c = AL$ die Dicke der Linſe.
r und s der Einfalls- und Brechungswinkel an der erſten Fläche.
$r_{,}$ und $s_{,}$ dieſelben Größen für die zweite Fläche.
$k = AE$ die Vereinigungsweite der Strahlen nach der erſten Brechung
$\alpha = LK$ dieſelbe Größe nach der zweiten Brechung.

$$BCS = \Psi,\ FKS = \zeta,\ FES = \varepsilon.$$

$n:1$ das Brechungsverhältniß beim Übergang des Lichtes von der Luft in Glas für einen beſtimmten Strahl.

Dieſes vorausgeſetzt, hat man:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin.BCS = \frac{SB}{SC}.\sin SBC \text{ oder } \sin.\psi = \frac{b}{a+f}.\sin r \\ \sin.DBE = \frac{1}{n}.\sin SBC \text{ oder } \sin s = \frac{1}{n}.\sin r \\ BEC = BCS - CBE \text{ oder } \varepsilon = \psi - s \\ AE = AC + CE \text{ oder } k = f + \frac{f.\sin s}{\sin \varepsilon} \end{array}\right\} (a).$$

Auf gleiche Weiſe findet man für die zweite brechende Fläche:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin GFE = \frac{GE}{GF}.\sin FEG \text{ d. i. } \sin r_1 = \frac{k+g-c}{g}.\sin \varepsilon \\ n \sin HFK = .\sin HFE \text{ d. i. } \sin s_1 = n \sin r_1 \\ FKG = FEK - HFK + HFE \text{ d. i. } \zeta = \varepsilon - r_1 + s_1 \\ LK = GK - GL \text{ d. i. } \alpha = g.\frac{\sin s_1}{\sin \zeta} - g. \end{array}\right\} (b).$$

Nimmt man an, der Strahl SB falle in einer geringen Entfernung von der Axe auf die Linſe, ſo kann man $b = a$, $\sin r = r$, $\sin s = s$ ꝛc. ſetzen. Dadurch erhält man aus

$$\psi = \frac{ar}{a+f},\quad s = \frac{r}{n},\quad \varepsilon = \psi - s \text{ und } k = f + \frac{fs}{\varepsilon}$$

und aus allen dieſen zuſammen

$$k = \frac{naf}{na-a-f}.$$

Die Gleichungen (b) geben unter derſelben Vorausſetzung

$$r_1 = \frac{k+g-c}{g}.\varepsilon,\quad s_1 = nr_1$$

$$\alpha = \frac{gs_1}{\zeta} - g = \frac{gs_1}{\varepsilon - s_1 + r_1} - g = \frac{gr_1 - gr\left(\frac{n-1}{n}\right)}{r\left(\frac{n-1}{n}\right) + (n-1)r_1}$$

oder wenn man ſtatt r_1 obigen Werth ſetzt:

$$\alpha = \frac{(k-c)g}{ng + (n-1)(k-c)}$$

und daher

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{n}{k-c} + \frac{n-1}{g}.$$

Wenn man $\frac{n}{k-c}$ in eine Reihe verwandelt, aber die Glie-

der wegläßt, in welchen c die zweite Potenz überſchreitet, ſo erhält man:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{n}{k} + \frac{c\,n}{k^2} + \frac{n-1}{g}$$

oder wenn man ſtatt k den Werth ſetzt

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{na-a-f}{af} + \frac{c\,(na-a-f)^2}{na^2f^2} + \frac{n-1}{g}$$

oder nach gehöriger Entwicklung

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a} = \frac{n-1}{f} + \frac{n-1}{g} + \frac{c\,(na-a-f)^2}{na^2f^2} \ldots (H).$$

Setzt man die Dicke der Linſe $c = 0$; ſo erhält man

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = (n-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)$$

oder wenn man

$$(n-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right) = \frac{1}{p}$$

ſetzt, wo p die Brennweite bedeutet, ſo erhält man die bekannte Formel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}$$

für Centralſtrahlen, die durch weitere Analyſe den Gang dieſer Strahlen für jeden Grad ihrer Brechbarkeit nachweiſet.

29. Der Werth von p hängt, wie man ſieht, von n oder vom Brechungsverhältniſſe ab. Je größer dieſer Werth iſt, deſto kleiner wird p und mithin auch α. Daher werden ſich die brechbarſten Strahlen in einer geringeren Entfernung von der Linſe ſchneiden als die minder brechbaren und es gibt für jeden Grad der Brechbarkeit, ſelbſt unter ſonſt gleichen Umſtänden, eine andere Vereinigungsweite des Lichtes. Schneiden von den Strahlen, die vom Puncte S auf die Linſe AB (Fig. 96) fallen, die brechbarſten die Axe in v, die am wenigſten brechbaren in r und endlich die von mittlerer Brechbarkeit in f, ſo iſt rf und vf die chromatiſche Längenabweichung der Linſe. Alle dieſe Strahlen vereinigen ſich nicht mehr in einem Puncte, ſondern bei ihrer größten Concentration liegen ſie innerhalb eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer cf oder df iſt und welcher Abweichungskreis genannt wird. Die Größe cf oder df heißt die Breitenabweichung. Endlich führen die Winkel fAv und fAr den Namen Abweichungswinkel.

30. Wenn die Längenabweichung gefunden werden ſoll, ſo hat man zu bedenken, daß die Größe p in $p+dp$ übergeht, wenn ſich n in $n+dn$ verwandelt. Um nun für eine Änderung von n um das Stück dn die entſprechende Änderung der Brennweite $=dp$ zu finden, wende man das Verfahren des Differenzirens an, das eine hinreichende Genauigkeit gewährt, weil dn und dp, wenn auch nicht unendlich klein, doch ſehr klein ſind. Man findet auf dieſem Wege aus

$$\frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)$$

$$dp = -\frac{dn}{n-1}\cdot p.$$

Eben ſo aus $\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}$

$$d\alpha = \frac{\alpha^2\,dp}{p^2}$$

oder wenn man für dp den Werth ſetzt:

$$d\alpha = -\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{\alpha^2}{p}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (I).$$

Der Halbmeſſer des Abweichungskreiſes wird auf folgende Weiſe gefunden: Es iſt, wenn man die Dicke der Linſe vernachläſſiget

$$AE : cf = Er : fr = Ev : fv$$

mithin

$$AE : cf = Er + Ev : fr + fv$$

weil aber $fr = fv$ geſetzt werden kann

$$AE : cf = Ef : fr.$$

Heißt nun $AE = x$, $Ef = \alpha$, $fr = d\alpha$, ſo wird

$$x : cf = \alpha : d\alpha \text{ und } cf = \frac{d\alpha}{\alpha}\cdot x$$

oder wenn man ſtatt $d\alpha$ den oben gefundenen Werth ſetzt:

$$cf = -\frac{\alpha}{p}\,\frac{dn}{n-1}\cdot x\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (K).$$

Zur Beſtimmung des Abweichungswinkels hat man:

$$vAf = SvA - SfA$$

aber SfA iſt der Winkel, welcher vorhin mit ε bezeichnet wurde und für den man hat $\varepsilon = \frac{x}{\alpha}$, mithin wird der Abweichungswinkel

$$d\xi = -\frac{da}{a^2}\,x = \frac{dn}{(n-1)\,p}\,.\,x \;.\;.\;.\;.\;.\; (L).$$

Setzt man $n = 1.55$; $dn = 0.01$; ſo wird $\dfrac{dn}{n-1} = \frac{1}{55}$

und $d\alpha = -\frac{1}{55}\,\dfrac{\alpha^2}{p}$, $cf = \frac{1}{55}\,.\,\dfrac{\alpha}{p}\,x$, $d\xi = \frac{1}{55}\,\dfrac{x}{p}$.

31. Alle Geſetze, welche bis jetzt über die Brechung des Lichtes in Linſen aufgeſtellt wurden, beziehen ſich nur auf Centralſtrahlen, weil die Formeln, woraus ſie abgeleitet wurden, durch die in (S. 400) gemachte Beſchränkung, wodurch die Sinuſſe ihren Winkeln proportional geſetzt wurden, nur auf ſolche Strahlen anwendbar ſind. Wenn man daher einfaches Licht unter den gehörigen Umſtänden auf eine Linſe fallen läßt und nebſt den Centralſtrahlen auch andere den Rand der Linſe treffen; ſo werden ſich doch nur erſtere in einem Punct vereinigen und es wird eben ſo viele Vereinigungspuncte von Strahlen geben, als es Winkel gibt, welche die Randſtrahlen mit der Axe der Linſe machen. Dieſe Verſchiedenheit der Vereinigungspuncte, welche man die Abweichung wegen der Kugelgeſtalt oder die ſphäriſche Abweichung nennt, bewirkt in den von Linſen gemachten Bildern eben ſo eine Undeutlichkeit, wie es die chromatiſche Abweichung thut, und man muß wiſſen, wodurch ſie ſich vermindern oder aufheben läßt. Dazu iſt aber nothwendig, daß man für dieſe Art der Abweichung einen Ausdruck kenne. Dieſer wird in Folgendem geſucht.

32. Es ſey MN (Fig. 97) eine ſphäriſche Fläche, deren Krümmungsmittelpunct ſich in C befindet und deren Halbmeſſer $AC = f$ heißt. Von S kommen Strahlen auf dieſe Fläche; die centralen ſchneiden ſich nach der Brechung in e, die Randſtrahlen wie SD, welche mit der Axe den Winkel DSC machen, in E und es iſt Ee die geſuchte Abweichung.

Man hat aus den Dreiecken SDC und CDE

$$SD = SC\,.\,\frac{\sin DCS}{\sin SDC},\quad CE = ED\,.\,\frac{\sin CDE}{\sin DCE}$$

ferner aus dem Grundgeſetze der Brechung

$$n = \frac{\sin SDE}{\sin SDC}.$$

Multiplicirt man dieſe drei Gleichungen mit einander, ſo wird

$$n\,.\,CE\,.\,SD = SC\,.\,DE \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (a).$$

26 *

Man hat nun

$$SD^2 = CD^2 + SC^2 - 2\,CD.SC.\cos DCS$$
$$DE^2 = CD^2 + CE^2 + 2\,CD.CE.\cos DCS.$$

Setzt man nun $SA = a$, $Ae = k$, $AE = h$ und $1 - \cos DCS = \sin\text{vers}\, DCS = s$, ſo iſt

$$SD^2 = a^2 + 2f(a+f)s,\quad DE^2 = h^2 - 2f(h-f)s$$

und daher obige Gleichung

$$n(h-f)\sqrt{[a^2+2f(a+f)s]} = (a+f)\sqrt{[h^2-2f(h-f)s]} \quad (b).$$

Da man für $s = 0$, $h = k$ hat, ſo kann man dem Taylor'ſchen Lehrſatze gemäß ſetzen:

$$h = k + \frac{dh}{ds}s + \ldots \text{ oder } h - k = Ee = \frac{dh}{ds}.s + \ldots$$

wo alle übrigen Glieder vernachläſſiget werden können, weil s immer als ſehr klein vorausgeſetzt wird. Es handelt ſich nun darum $\frac{dh}{ds}$ zu finden. Man differenziire (b) nach h und s, und man erhält:

$$ndh\sqrt{[a^2+2f(a+f)s]} + \frac{nf(h-f)(a+f)ds}{\sqrt{[a^2+2f(a+f)s]}} =$$
$$= \frac{(a+f)\,[(h-fs)dh - f(h-f)ds]}{\sqrt{[h^2-2f(h-f)s]}}.$$

Setzt man $s = 0$, ſo wird $h = k$ und

$$nadh + \frac{nf(k-f)(a+f)ds}{a} =$$
$$= \frac{(a+f)\,[kdh - f(k-f)ds]}{k}$$

und hieraus

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{f(k-f)(a+f)(nk+a)}{ak\,[(n-1)a-f]}.$$

Nennt man die halbe Öffnung $DF = x$, ſo iſt $s = \sin\text{vers}\, DCS = \frac{x}{2f^2}$. mithin die Abweichung

$$\frac{dh}{ds}s = -\frac{(k-f)(a+f)(nk+a)}{2akf\,[(n-1)a-f]}.x^2.$$

Setzt man für f den Werth $\frac{a(n-1)k}{k+an}$, ſo wird

$$Ee = \frac{dh}{ds} s = - \frac{(nk + a)(a + k)^2}{2(n-1)^2 a^3 k} x^2 \ldots\ldots (c).$$

Mit Hilfe dieſes Satzes läßt ſich nun die ſphäriſche Abweichung einer Linſe berechnen, wie man aus Folgendem erſieht. Die Strahlen erleiden an der erſten Fläche eine Abweichung; fielen ſie nun central auf die zweite Fläche der Linſe, ſo würden ſie doch die Axe nicht an dem Puncte treffen, wo ſie ohne alle Abweichung an der Vorderfläche dieſelbe ſchnitten, weil ſie durch die erſte Abweichung ſo modificirt werden, als kämen ſie von einem ferneren Puncte her; allein ſie erleiden auch an der zweiten Fläche eine Abweichung, und ſo beſteht die ganze Abweichung in einer Linſe aus der Variation $d\alpha$ der Größe α vermöge der Abweichung an der Vorderfläche, und aus jener vermöge der Abweichung an der Hinterfläche der Linſe.

Zur Beſtimmung des erſten Theiles hat man

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{n-1}{f} + \frac{n}{k} \text{ und hieraus } \frac{d\alpha}{\alpha^2} = \frac{n\,dk}{k^2}.$$

Daher iſt

$$d\alpha = - \frac{n a^2 (nk + a)(a + k)^2}{2(n-1)^2 a^3 k^3} x^2.$$

Vertauſcht man in der Formel c die Größen n, a, k mit $\frac{1}{n}$, $-k, \alpha$, ſo findet man daraus die Abweichung an der zweiten Linſenfläche, nämlich

$$- \frac{n(nk - \alpha)(k - \alpha)^2}{2(n-1)^2 \alpha k^3} x^2$$

und daher die geſammte Abweichung $= v$

$$v = - \left(\frac{n\alpha^2 (nk + a)(a + k)^2}{2(n-1)^2 a^3 k^3} + \frac{n(nk - \alpha)(k - \alpha)^2}{2(n-1)^2 \alpha k^3} \right) x^2 \; (L).$$

Wenn man die beiden Radien der Linſe einander gleich und mit entgegengeſetzten Zeichen nimmt, ſo erhält man $\frac{1}{a} = -\frac{1}{\alpha}$ oder $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} = 0$. Für dieſe Vorausſetzung geht aber die Linſe in eine Schale mit parallelen Wänden über, die abweichungsfrei iſt, und für welche man alſo $v = 0$ hat. Darum muß der obige Werth von v durch $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$ ohne Reſt theilbar ſeyn. Wenn man die Diviſion verrichtet und alles ordnet, ſo erhält man als Quotienten

$$n\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\frac{2n+1}{k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{n+2}{k^2}$$

mithin

$$v=-\frac{n\alpha^2}{2(n-1)^2p}\left\{n\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2n+1}{k}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}\right)+\frac{n+2}{k^2}\right\}x^2\ldots\ldots(d).$$

Es iſt klar, daß v eine Function von k ſey. Um demnach für k den Werth zu finden, der v zu einem Minimum macht, ſo muß man $\frac{dv}{dk}=0$ ſetzen. Auf dieſe Weiſe erhält man:

$$\frac{(2n+1)}{k^2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}\right)=\frac{2(n+2)}{k^3}$$

oder

$$\frac{1}{k}=\frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}\right).$$

Setzt man dieſen Werth in die Gleichung (d) ſo erhält man als Werth der kleinſten Abweichung

$$v=-\frac{n\alpha^2}{2(n-1)^2p}\left\{n\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{(2n+1)^2}{4(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}\right)\right\}x^2\ldots\ldots(e)$$

oder für parallele Strahlen, wo $a=\infty$, $\alpha=p$ iſt

$$v=-\frac{n(4n-1)}{8p(n+2)(n-1)^2}\cdot x^2.$$

33. Die Abweichungsformel zeigt ſchon, daß die Größe der Abweichung vom Verhältniſſe der zwei Halbmeſſer abhängt. Um nun jenes Verhältniß derſelben zu finden, für welches die Abweichung am kleinſten iſt, hat man

$$\frac{n-1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{n}{k},\quad\frac{n-1}{g}=\frac{1}{\alpha}-\frac{n}{k}.$$

Setzt man hier für k den Werth, welcher $\frac{dv}{dk}=0$ entſpricht, ſo wird

$$\frac{n-1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{n(2n+1)}{2(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{n-1}{g} = \frac{1}{\alpha} - \frac{n(2n+1)}{2(n+2)}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right)$$

und hieraus durch Diviſion

$$\frac{f}{g} = \frac{n(2n+1)\alpha - (2n^2-n-4)a}{n(2n+1)a - (2n^2-n-4)\alpha}.$$

Für $a=\infty$ und $n=1.53$, erhält man $\frac{f}{g} = \frac{1}{7.33}$ d. h. der Halbmeſſer der Vorderfläche muß ſich zum Halbmeſſer der Hinterfläche wie $100:733$ verhalten.

34. Man kann den Ausdruck für die Abweichung dahin umſtalten, daß man daraus alſogleich ihren kleinſten Werth erſieht. Man hat nämlich

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a\alpha} + \frac{1}{\alpha^2},\ \frac{1}{p^2} - \frac{4}{a\alpha} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a\alpha} + $$
$$+ \frac{1}{\alpha^2} = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right)^2 \text{ und hieraus } \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{3}{a\alpha}.$$

Setzt man dieſen Werth in (e), ſo bekommt man als Ausdruck der kleinſten Abweichung

$$-\frac{n(4n-1)}{8(n+2)(n-1)^2} \cdot \frac{\alpha^2 x^2}{p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{4(n-1)^2}{4n-1} \cdot \frac{1}{a\alpha}\right).$$

Man kann nun die Abweichung überhaupt durch die Formel ausdrücken:

$$v = -\frac{n(4n-1)}{8(n+2)(n-1)^2} \cdot \frac{\alpha^2 x^2}{p}\left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{4(n-1)^2}{4n-1} \cdot \frac{1}{a\alpha}\right) \quad (f)$$

wo λ für die kleinſte Abweichung $= 1$ iſt, für jede andere aber um ſo mehr von der Einheit abweicht, je mehr die vorhandene Abweichung das Minimum überſchreitet.

Setzt man $\mu = \frac{n(4n-1)}{8(n+2)(n-1)^2}$, $\varepsilon = \frac{4(n-1)^2}{4n-1}$

ſo wird

$$v = -\frac{\mu\alpha^2 x^2}{p}\left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\varepsilon}{a\alpha}\right) = Vx^2 \ldots\ldots (M)$$

wenn man

$$\frac{\mu\alpha^2}{p}\left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\varepsilon}{a\alpha}\right) = V \text{ ſetzt.}$$

Um den Werth von λ zu finden, braucht man nur die Glei-

chung (*d*) mit (*f*) zu vergleichen. Nach (*d*) hat man für die Brechung an der erſten Fläche

$$v = -\frac{n\alpha^2 x^2}{2(n-1)^2 p} \cdot \left\{ n\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{a^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2n+1}{k}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right) + \frac{n+2}{k^2} \right\}.$$

Dieſes mit (*f*) verglichen, gibt:

$$\frac{4n-1}{p^2}\lambda = 4n(n+2)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{a^2}\right) -$$

$$-\frac{4(n+2)(2n+1)}{k}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right) + \frac{4(n+2)^2}{k^2} - \frac{4(n-1)^2}{a\alpha}$$

woraus man λ leicht findet.

Sucht man für ein beſtimmtes Brechungsverhältniß, z. B. für 1.53 den Werth von λ für verſchieden geformte Linſen in der Vorausſetzung parallel auffallender Strahlen ($a = \infty$), ſo erhält man:

Für eine Planconvexlinſe, mit der ebenen Fläche gegen das Object gekehrt

$$\lambda = 4.200.$$

Für eine ſolche, mit der convexen Fläche gegen das Object gekehrt

$$\lambda = 1.081.$$

Für eine Planconcavlinſe, mit der Planſeite gegen das Object gekehrt

$$\lambda = 4.200.$$

Für eine ſolche, mit der concaven Seite gegen das Object gekehrt

$$\lambda = 1.081.$$

Für eine gleichſchenkelige biconvexe oder biconcave Linſe

$$\lambda = 1.567.$$

Es iſt demnach eine Planconvexlinſe oder eine Planconcavlinſe mit der gekrümmten Fläche gegen das Object gekehrt faſt ſo gut wie eine Linſe von der beſten Form, für welche man $\lambda = 1$ hat.

35. Wenn ſich die Centralſtrahlen, welche von *S* (Fig. 98) kommen und durch die Linſe *AB* gehen, in *C* vereinigen, hingegen die Strahlen, welche den Punct *A* der Linſe treffen, die Axe in *D* ſchneiden, ſo iſt *DC* die Längenabweichung und *CE*, welche ſenkrecht auf *SC* ſteht, die Seitenabweichung. *CE* bezeichnet

zugleich den Halbmeſſer des Kreiſes, innerhalb welchem alle zwiſchen A und F die Linſe treffenden Strahlen ihren Weg nehmen. Er wird beſtimmt, wie folgt:

$$CE = \frac{DC \,.\, AF}{DF} = \frac{Vx^3}{DF}.$$

36. Fällt außer dem Strahl SA noch der Strahl Sa auf a, ſo ſchneidet dieſer nach der Brechung die Axe in d und die Strahlen AE und ad ſchneiden ſich in G. Man ziehe Ge ſenkrecht auf FC und ſuche DE und Ge. Man nenne $Fa = x_1$, $Ge = R$, und man hat:

$Cd = Vx_1^2$; $DC = Vx^2$ mithin $Dd = V(x^2 - x_1^2)$. Zugleich iſt aber $R = De.\text{tang}.eDG$; $R = de\ \text{tang}.edG$ und daher $De.\text{tang}\,eDG = de.\text{tang}\,edG$. Aber tang eDG = tang ADF

$= \frac{x}{FD}$ = nahe $\frac{x}{FC}$; tang $edG = \frac{x_1}{FC}$, mithin

$$De.x = de.x_1; de = De.\frac{x}{x_1}; De + de = De\left(1 + \frac{x}{x_1}\right);$$

$$Dd = De\left(\frac{x + x_1}{x_1}\right) \text{ mithin } De = Dd \,.\, \frac{x_1}{x + x_1} =$$

$$= \frac{V(x^2 - x_1^2)\,x_1}{x + x_1} = V(x - x_1)\,x_1 \text{ und daher}$$

$$R = \frac{V(x - x_1)\,x x_1}{FC}.$$

Um den größten Werth von R zu finden, differenziire man dieſen Ausdruck nach x_1, und verfahre nach der bekannten Regel. Man erhält

$$x_1 = \tfrac{1}{2} x$$

mithin der geſuchte Werth von R

$$R = \frac{Vx^3}{4.CF}.$$

Dieſe Größe heißt der Halbmeſſer der Kugelabweichung und iſt der Maßſtab für die von der ſphäriſchen Abweichung herrührende Undeutlichkeit. Man ſieht ihn aus der Entfernung b unter dem Winkel

$$\frac{Vx^3}{4b.CF} \quad \ldots\ldots \quad (N)$$

oder in Minuten ausgedrückt, unter dem Winkel

$$\frac{3438}{4} \cdot \frac{Vx^3}{b \, . \, CF}.$$

Beträgt dieſe Größe nicht mehr als eine Secunde, ſo kann man das Bild als vollkommen deutlich (von Seite der ſphäriſchen Abweichung) anſehen.

37. Man denke ſich mehrere Linſen A, B, C ꝛc. (Fig. 99) in einer ſolchen Stellung, daß ihre Axen in die gemeinſchaftliche gerade Linie Sx fallen, nehme von der erſten A und zwar in der Axe einen leuchtenden Punct S an, der Licht auf ſie ſendet und ſuche einen analytiſchen Ausdruck für die einzelnen Größen, welche den Ort und die Beſchaffenheit der Bilder angeben. Es ſey S der in der Axe liegende Punct des Objectes und SA der Strahl, welcher den Rand der erſten Linſe trifft, mithin unter allen von demſelben Puncte ausgehenden am meiſten von der Axe abweicht. Dieſer Strahl wird nach der Brechung in A die Axe der Linſen in D ſchneiden und die zweite Linſe B treffen, wenn ihre Öffnung hinreichend groß iſt; in dieſer Linſe wird er neuerdings gebrochen, ſchneidet die Axe abermals in E, gelangt auf C u. ſ. f. bis er durch alle Linſen gegangen iſt.

Man nenne nun, wie bisher a die Entfernung des leuchtenden Punctes von der Linſe, α die Vereinigungsweite der Strahlen nach der erſten Brechung und p die Brennweite der erſten Linſe; ferner betrachte man das von einer Linſe gemachte Bild als Gegenſtand für die zunächſt darauf folgende Linſe und bezeichne für die anderen Linſen in der Ordnung, wie ſie auf einander folgen, mit a_1, a_2, a_3 ꝛc. α_1, α_2, α_3 ꝛc., p_1, p_2, p_3 ꝛc. dieſelben Größen, welche bei der erſten a, α, p hießen; ferner nenne man die Entfernung der erſten Linſe von der zweiten h, die der zweiten von der dritten h_1 u. ſ. f. Sind nun $(n+1)$ Linſen vorhanden und wird die Dicke jeder einzelnen vernachläſſiget; ſo erhält man folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{p_1} \\ \frac{1}{a_2} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{p_2} \\ - - - - - \\ \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{p_n} \end{array}\right\} (a) \text{ und } \left.\begin{array}{l} \alpha + a_1 = h \\ \alpha_1 + a_2 = h_1 \\ \alpha_2 + a_3 = h_2 \\ - - - - - - - - \\ \alpha_{n-1} + a_n = h_{n-1} \end{array}\right\} (b)$$

Die Anzahl der Gleichungen (a) iſt $n+1$, die der Gleichungen (b) n, mithin ihre Geſammtzahl $2n+1$, die Anzahl der Unbekannten iſt $2n+2$, mithin jede derſelben beſtimmt, und auch leicht zu finden.

38. Damit die Bilder hinreichende *Helligkeit* erlangen, müſſen die Öffnungen der Linſen, welche auf die erſte folgen, ſo beſchaffen ſeyn, daß jede noch den Randſtrahl SA auffängt. Die hierzu nöthige Öffnung heißt man die *Öffnung wegen der Helligkeit*. Nennt man ſie nach der Ordnung, in der ſie auf einander folgen, von der dem Objecte nächſten angefangen x, x_1, x_2 und bezeichnet mit φ, φ_1, φ_2 nach derſelben Folge die Tangenten der Winkel (die man meiſtens mit den Winkeln ſelbſt verwechſeln kann), welche der Strahl SA vor und nach jeder Brechung mit der Axe Sx macht, ſo erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \frac{x}{a} \\ \varphi_1 = \frac{x_1}{a_1} \\ \varphi_2 = \frac{x_2}{a_2} \\ - - - \\ - - - \\ \varphi_n = \frac{a_n}{a_n} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{x}{\alpha} \\ \varphi_2 = \frac{x_1}{\alpha_1} \\ \varphi_3 = \frac{x_3}{\alpha_2} \\ - - - - \\ - - - - \\ \varphi_n = \frac{x_n}{\alpha_{n-1}} \end{array}\right\}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke, welche die Öffnungen der Linſen mit dem gebrochenen Strahl und der Axe bilden, erhält man:

$$x_1 = \frac{a_1}{\alpha} x,\ x_2 = \frac{a_2}{\alpha_1} x_1 = \frac{a_1 a_2}{\alpha \alpha_1} x;\ x_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{\alpha \alpha_1 \alpha_2} . x$$

$$x_n = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n}{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \ldots . \alpha_{n-1}} x \ldots . (O)$$

und hieraus mittelſt der vorhergehenden Gleichungen:

$$\varphi_1 = \frac{x}{\alpha},\ \varphi_2 = \frac{a_1}{\alpha \alpha_1} x,\ \varphi_3 = \frac{a_1 a_2}{\alpha \alpha_1 \alpha_2} x$$

und allgemein

$$\varphi_n = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots . a_{n-1}}{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \ldots . \alpha_{n-1}} x \ldots . (P).$$

Bei dieſen und den folgenden Formeln, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird, bezieht ſich n immer auf die Stelle

der Linſe, welche ihr zukommt, von der zweiten angefangen. Nennt man die erſte, dem Objecte gegenüberſtehende die Objectivlinſe, und die nächſt folgenden die Ocularlinſen, ſo beziehen ſich die mit Exponenten bezeichneten Buchſtaben auf die letzteren, und zwar zeigt dieſer Exponent ſelbſt den Rang des betreffenden Glaſes an.

39. Es ſey ST (Fig. 100) ein vor der Linſe A befindliches Object, von welchem durch Brechung in dem ganzen Linſenſyſteme A, B, C, D ꝛc. die Bilder Dd, Cc, Ff ꝛc. entſtehen. Man bezeichne den Winkel TMS mit ψ ſo, daß die Größe des Gegenſtandes $= a\,\psi$ wird, und ſuche die Größe der einzelnen Bilder. Man bekommt zuerſt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke TMS und DMd, $Dd = \frac{\alpha}{a} ST = \alpha\,\psi$; ferner aus einem gleichen Grunde $Ee = \frac{\alpha_1}{a_1} Dd$, $Ff = \frac{\alpha_2}{a_2} Ee$ u. ſ. f., ſo daß man für die geſuchten Größen folgende Ausdrücke erhält:

Bild vom erſten Oculare $\frac{\alpha\,\alpha_1}{a_1}\,\psi$

„ zweiten „ $\frac{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2}{a_1\,a_2}\,\psi$

„ n^{ten} „ $\frac{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n}{a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_n}\,\psi \;\ldots\; (Q).$

Was die Lage dieſer Bilder anbelangt, ſo iſt für ſich klar, daß die des erſten Bildes verkehrt, die des zweiten aufrecht iſt, und überhaupt jedes der Zahl nach ungerade Bild verkehrt, jedes gerade hingegen aufrecht erſcheint, wenn ſich überhaupt das Object außerhalb der Brennweite der Objectivlinſe und jedes andere Bild außerhalb der Brennweite des nächſten Oculares befindet, und alle dieſe Ausdrücke poſitiv ſind. Für negative gilt das Gegentheil.

40. Man ſieht leicht ein, daß ein hinter dem letzten Glaſe befindliches Auge nur dann das ganze Object auf einmal überſehen kann, wenn die vom äußerſten Puncte T desſelben kommenden Strahlen durch alle Linſen gehen können. Dazu gehören aber beſtimmte Öffnungen der Oculare, die von den vorhin (38) betrachteten verſchieden ſind, und ſtets größer ausfallen als jene. Man nennt ſie die Öffnungen wegen des Geſichtsfeldes. Hat die Objectivlinſe eine ſolche Öffnung, daß ſie noch den Strahl SA auf-

nehmen kann, ſo braucht man wegen der Helligkeit die Öffnungen Bb, $c\gamma_{,}$, δd, während die Öffnungen wegen des Geſichtsfeldes Bb, Cc, Dd ſeyn müſſen. Letztere müſſen den Brennweiten der Linſen entſprechend genommen werden und ſind ſtets als ein Theil derſelben anzuſehen. Sind die Brennweiten der einzelnen Linſen $p_{,}$, $p_{,,}$, p_3 ꝛc., ſo kann man ihre Öffnungen durch $z_{,}p_{,}$, $z_{,,}p_{,,}$, $z_3 p_3$ ꝛc. ausdrücken, wo die z ſtets eigentliche Brüche ſeyn werden.

41. Man bezeichne die Winkel bNB, COc ꝛc. unter welchen der zu T gehörige Hauptſtrahl die Axe ſchneidet nach der Ordnung mit $\psi_{,}$, $\psi_{,,}$, ψ_3 ꝛc. und ſuche mittelſt derſelben die Lage des Hauptſtrahles gegen die Axe nach der Brechung. Zu dieſem Behufe hat man: $\frac{1}{p_{,}} = \frac{1}{Mb} + \frac{1}{bN}$ oder $bN = \frac{Mb\,.\,p_{,}}{Mb - p_{,}}$; aber weil $Mb = \frac{Bb}{\text{tang}\,DMd} = \frac{p_{,}z_{,}}{\text{tang}\,\psi}$ oder nahe $Mb = \frac{p_{,}z_{,}}{\psi}$ iſt, ſo erhält man $bN = \frac{p_{,}z_{,}}{z_{,} - \psi}$. Ferner iſt $\frac{1}{p_{,,}} = \frac{1}{Nc} + \frac{1}{cO}$ und $Nc = \frac{Cc\,.\,Nb}{Bb} = \frac{p_{,}z_{,}}{z_{,} - \psi} \cdot \frac{p_{,,}z_{,,}}{p_{,}z_{,}} = \frac{p_{,,}z_{,,}}{z_{,} - \psi}$, mithin $cO = \frac{z_{,,}p_{,,}}{z_{,,} - z_{,} + \psi}$ u. ſ. f.

Man erhält demnach

für ein Oculare $\frac{z_{,}p_{,}}{z_{,} - \psi}$

„ zwei „ $\frac{z_{,,}p_{,,}}{z_{,,} - z_{,} + \psi}$

„ drei „ $\frac{z_3 p_3}{z_3 - z_{,,} + z_{,} - \psi}$

„ n^{ten} „ $\frac{z_n p_n}{z_n - z_{n-1} \ldots\ldots \pm z \mp \psi}$ . . . . (R).

Ferner iſt $\text{tang}\,\psi_{,} = \frac{Bb}{Nb} = \frac{z_{,}p_{,}}{Nb} = z_{,} - \psi$ oder $\psi_{,} = z_{,} - \psi$; $\text{tang}\,\psi_{,,} = Co$ oder $\psi_{,,} = z_{,,} - z_{,} + \psi$ und daher allgemein

für n Oculare $\psi_n = z_n - z_{n-1} \ldots\ldots \pm z_{,} \mp \psi$

wo das obere Zeichen für einen ungeraden, das untere für einen geraden Werth von n gilt.

42. Die Entfernung jedes Bildes von dem Puncte, wo die daſſelbe bildenden Strahlen die Axe ſchneiden, findet man aus der

Ähnlichkeit der Dreiecke NBb, NEe ꝛc. aus welchen man zuerſt hat: $Ee:Bb = NE:Nb$ oder $NE = \frac{Ee\,.\,Nb}{Bb}$. Aber Nb und Bb und Ee ſind bereits bekannt, mithin bedarf es nur einer einfachen Subſtitution zur Beſtimmung von NE. Eben ſo geht es mit der Beſtimmung von OF ꝛc. Man erhält:

für das erſte Ocularbild $\frac{\alpha\alpha_1}{a_1} \cdot \frac{\psi}{z_1 - \psi}$

„ zweite „ $\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{a_1 a_2} \cdot \frac{\psi}{z_2 - z_1 + \psi}$

„ n^{te} „ $\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot \frac{\psi}{(z_n - z_{n-1} \ldots \pm z_1 \mp \psi)}$.

43. Die Öffnungen der Linſen laſſen ſich durch die Vereinigungsweiten der Strahlen und durch den Winkel ψ ausdrücken. Man hat nämlich

$$z_1 p_1 = (\alpha + a_1)\,\psi = h\psi$$

$$z_2 p_2 = \left(\frac{\alpha\alpha_1}{a_1} - a_2\right)\psi + a_2 z_1 \quad \ldots \quad (S)$$

$$z_n p_n = \left(\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} - a_n\right)\psi + (z_{n-1} - z_{n-1} \ldots \pm z_1)\,a_n.$$

Der erſte Ausdruck iſt für ſich klar. Zur Deduction des zweiten hat man

$Cc:cN = Cc - Ee:cE$ und daraus $p_2 z_2 = \left(\frac{\alpha\alpha_1}{a_1} - a_2\right)\psi + a_2 z_2$.

Die folgenden Ausdrücke erhält man auf ähnlichem Wege.

44. Das letzte Bild erſcheint meiſtens unter einem anderen und zwar am häufigſten unter einem größeren Geſichtswinkel, als der Gegenſtand ſelbſt. Der Quotient aus dem Geſichtswinkel des letzten Bildes und dem des Gegenſtandes gibt die **Vergrößerungszahl**. Für ein Auge, das ſich im optiſchen Mittelpuncte des Objectives befindet, erſcheint der halbe Gegenſtand unter dem Winkel ψ und $a\,\psi$ iſt die wahre Größe ſeines Bildes. Wird dieſes aus der Entfernung l angeſehen, ſo erſcheint es unter dem Winkel $\frac{a\,\psi}{l}$, demnach iſt die Vergrößerung m durch die Gleichung $m = \frac{l}{a}$ gegeben.

Für ein Syſtem von zwei Linſen muß ſich das Auge dort be-

finden, wo der Hauptſtrahl die Axe zum zweitenmale ſchneidet (N in Fig. 100). Der Winkel, unter welchem dieſes geſchieht, iſt $z - \psi$, mithin die Vergrößerung durch die zweite Linſe (das erſte Ocular) $\frac{z - \psi}{\psi}$ und die von beiden Linſen bewirkte

$$m = \frac{l}{a} \cdot \frac{z - \psi}{\psi}.$$

Eben ſo findet man für ein Syſtem aus zwei Ocularen

$$m = \frac{l}{a} \cdot \frac{z_1 - z + \psi}{\psi}$$

und allgemein für ein Syſtem von n Ocularen

$$m = \frac{l}{a} \cdot \frac{z_{n-1} - z_{n-2} \ldots . \pm z \mp \psi}{\psi} \quad \ldots (T)$$

wo das obere Zeichen für ungerade, das untere für gerade Werthe von n gilt.

Nennt man b die Entfernung des Punctes, wo der Hauptſtrahl zum letzten Male die Axe ſchneidet, vom letzten Bilde, ſo bekommt man mittelſt der in 42 entwickelten Werthe für ein Syſtem von

2 Linſen $m = \frac{l}{a} \cdot \frac{\alpha \alpha_1}{a_1 b}$

3 „ $m = \frac{l}{a} \cdot \frac{\alpha \alpha_1 \alpha_2}{a_1 a_2 b}$

n „ $m = \frac{l}{a} \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots . \alpha_{n-1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots . a_{n-1} b} \quad \ldots (U).$

45. Sucht man aus der Formel (T) ψ, welches die Größe des halben Geſichtsfeldes bezeichnet; ſo erhält man

$$\psi = \frac{l (z_{n-1} - z_{n-2} + \ldots\ldots \pm z)}{(m a \pm l)} \quad \ldots (V)$$

wo wieder das obere Zeichen für eine gerade, das untere für eine ungerade Anzahl Linſen gilt, die erſte mit eingerechnet. Soll nun das Auge dieſes Geſichtsfeld genießen, ſo muß es die Axen aller Strahlenkegel erhalten, welche von jedem Puncte des Objectes auf das Objectiv fallen, welches der Fall ſeyn wird, wenn es ſich an der Stelle befindet, wo alle Strahlen die Axe ſchneiden, d. h. bei zwei Linſen in N, bei dreien in O ꝛc. Die Entfernung dieſer Puncte

vom letzten Glaſe $=f$, mithin der Ort des Auges läßt ſich aus (R) finden, und man hat allgemein

$$f = \frac{p_n\, z_n}{z_n - z_{n-1} \ldots \pm z \mp \psi} \ldots\ (X).$$

Setzt man im Nenner den Werth, welcher ſich aus (S) ergibt, ſo erhält man:

$$f = \frac{p_n\, z_n}{m\psi}.$$

46. Durch Linſen wird nicht blos der Geſichtswinkel, unter welchem ein Object erſcheint, ſondern auch ſeine Helligkeit modificirt. Kommt jeder Strahl, der von einem leuchtenden Puncte auf die erſte Linſe fällt, auch ins Auge, ſo wird die Helligkeit des letzten Bildes die mit freiem Auge in dem Verhältniſſe übertreffen, in welchem das Quadrat der Öffnung der erſten Linſe zu dem der Öffnung der Pupille ſteht, weil im erſteren Fall der ins Auge kommende Lichtkegel die Öffnung der erſten Linſe, im letzten die Pupille zur Baſis hat. Nennt man demnach die Helligkeit mit freiem Auge $=1$, die mit einem Syſteme von Linſen erzielte c, die Öffnung der Pupille ω, die des Objectives x, ſo iſt $c = \frac{x^2}{\omega^2}$. Allein das Bild auf der Netzhaut wird m^2 mal größer, wenn man durch die Linſen ſieht, als wenn man das Object frei anſieht und daher wird die Helligkeit in demſelben Verhältniſſe kleiner, mithin iſt

$$c = \frac{x^2}{m^2\,\omega^2}.$$

Setzt man mit Prechtl $\omega = 0.033.$, ſo iſt

$$c = \frac{x^2}{0.0009 \,.\, m^2} \ldots\ldots\ (Y).$$

47. Es erübriget nun noch jene Gebrechen der durch Linſen gemachten Bilder der Größe nach zu beſtimmen, welche von der chromatiſchen und ſphäriſchen Abweichung herrühren, damit man die Bedingungen daraus abnehmen kann, unter welchen ſie ſich vermindern oder gar aufheben laſſen.

Es ſeyen n, n_1, n_2 die Exponenten der Brechungsverhältniſſe für Strahlen von mittlerer Brechbarkeit in den einzelnen unmittelbar auf einander folgenden Linſen, von der dem Objecte zunächſt gelegenen angefangen, und dn, dn_1, dn_2 die Variationen dieſer

Größen für die am meiſten oder am wenigſten brechbaren Strahlen und es wird die Längenabweichung $d\alpha$ für die erſte Linſe durch den Ausdruck

$$d\alpha = -\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{\alpha^2}{p}$$

bezeichnet werden. Da für die zweite Linſe $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\alpha_1}=\frac{1}{p_1}$ iſt, ſo erhält man durch Differenziiren

$$\frac{dp_1}{p_1^2}=\frac{da_1}{a_1^2}+\frac{d\alpha_1}{\alpha_1^2}$$

weil aber $\alpha+a_1=h$ mithin $da_1=-d\alpha=\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{\alpha^2}{p}$ iſt und man auch $dp_1^2=-\frac{dn_1}{n-1}\cdot p_1^2$ hat, ſo wird durch Subſtitution dieſes Werthes in obige Gleichung die chromatiſche Längenabweichung für zwei Linſen

$$d\alpha_1 = -\left(\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p}+\frac{dn_1}{n_1-1}\cdot\frac{a_1^2}{\alpha^2 p_1}\right)\frac{\alpha^2\alpha_1^2}{a_1^2}.$$

Auf demſelben Wege findet man für drei Linſen

$$d\alpha_1 = -\left(\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p}+\frac{dn_1}{n_1-1}\frac{a_1^2}{\alpha^2 p_1}+\frac{dn_2}{n_2-1}\cdot\frac{a_1^2 a_2^2}{\alpha^2\alpha_1^2}\cdot\frac{1}{p_2}\right)\frac{\alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2}{a_1^2 a_2^2}$$

u. ſ. w.

Die Winkelabweichung erhält man, wenn man den Werth des Winkels, den der betreffende Strahl nach der Brechung mit der Axe macht, differenziirt. Heißen dieſe Winkel für die mittleren Strahlen nach der durch die erſte, zweite, dritte ꝛc. Linſe erlittenen Brechung φ_1, φ_2, φ_3 ꝛc., ſo hat man nach (38)

$$\varphi_1 = \frac{x}{\alpha},\quad \varphi_2 = \frac{a_1 x}{\alpha\alpha_1},\quad \varphi_3 = \frac{a_1 a_2 x}{\alpha\alpha_1\alpha_2}$$

$$d\varphi_1 = -\frac{d\alpha}{\alpha^2}x = \frac{dn}{n-1}\cdot\frac{x}{p}.$$

Für zwei Linſen iſt $\frac{d\varphi_2}{\varphi_2}=\frac{da_1}{a_1}-\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac{d\alpha_1}{\alpha_1}$ oder weil wieder $da_1=-d\alpha_1$ und $d\alpha_1$ aus obiger Gleichung bekannt iſt,

$$d\varphi_2 = \left(\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p}+\frac{dn_1}{n_1-1}\cdot\frac{a_1^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{p_1}\right)\frac{\alpha x}{a_1}.$$

Eben ſo wird für drei Linſen

$$d\varphi_3 = \left(\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p} + \frac{dn_1}{n_1-1}\cdot\frac{a_1^2}{a^2}\cdot\frac{1}{p_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{dn_2}{n_2-1}\,\frac{a_1^2 a_2^2}{a^2 \alpha_1^2}\cdot\frac{1}{p_2}\right)\frac{\alpha\alpha_1}{a_1 a_2}\cdot x \;\ldots\ldots\; (Z).$$

Beſtehen alle Linſen aus einerlei Maſſe, ſo iſt $n = n_1 = n_2$ ꝛc., $dn = dn_1 = dn_2$ ꝛc. und darum

$$d\varphi_3 = \frac{dn}{n-1}\left(\frac{1}{p} + \frac{a_1^2}{a^2}\cdot\frac{1}{p_1} + \ldots \frac{a_1^2 a_2^2}{a^2 \alpha_1^2}\cdot\frac{1}{p_2}\right)\frac{\alpha\alpha_1}{a_1 a_2}\, x.$$

48. Das Vorhergehende bezieht ſich zwar unmittelbar nur auf die Abweichung eines Punctes, welcher in der Axe liegt, es läßt ſich aber auch auf Puncte außer der Axe ausdehnen. Um die Wirkung der bei mehreren Linſen Statt findenden Abweichung für Puncte außer der Axe deutlich einzuſehen, ſey TS (Fig. 101) ein vor einem Linſenſyſteme befindliches Object. Durch die erſte Linſe A entſtehen von demſelben ſo viele Bilder, als verſchieden brechbare Strahlen von ST ausgehen, das größte iſt das rothe rr, das kleinſte das violette vv. Kommt nun das Licht von jedem dieſer Bilder auf die zweite Linſe B, ſo wird der rothe von T kommende Strahl die Axe in b, der violette hingegen in c ſchneiden, die von mittlerer Brechbarkeit ſie aber in f treffen. Da nun dieſe Strahlen unter verſchiedenen Winkeln ins Auge kommen, ſo erſcheinen auch die Bilder von verſchiedener Größe und das Object erſcheint mit einem farbigen Rande.

Die Änderung jenes Winkels, welche aus der Verſchiedenheit des Brechungsexponenten für verſchiedenfarbiges Licht hervorgeht, findet man aus den Gleichungen:

$\Psi_1 = z - \Psi$; $\Psi_2 = z_1 - z + \Psi$; $\Psi_3 = z_2 - z_1 + z - \Psi$ ꝛc.

aus denen man erhält:

$d\Psi_1 = -dz$; $d\Psi_2 = dz_1 - dz$; $d\Psi_3 = dz_2 - dz_1 + dz$.

Zur näheren Beſtimmung von dz_1, dz_2 ꝛc. hat man die Gleichungen (S), aus deren erſterer man erhält:

$$z_1\,dp_1 + p_1\,dz_1 = 0 \text{ oder } dz_1 = -\frac{z_1\,dp_1}{p_1}.$$

Setzt man ſtatt $\frac{dp_1}{p_1}$ den Werth aus dem Differenziale der

Gleichung $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1}$, wobei man $da_1 = -d\alpha_1$ hat; ſo erhält man

$$d\psi_1 = \frac{z_1\, dn_1}{n_1 - 1}.$$

Auf demſelben Wege findet man:

$$\left.\begin{aligned} d\psi_2 &= \frac{z_1\, dn_1}{n_1 - 1} + \frac{a_2 z_2}{\alpha_1} \cdot \frac{dn_2}{n_2 - 1} \\ d\psi_3 &= \frac{z_1\, dn_1}{n_1 - 1} + \frac{a_2 z_2}{\alpha_1} \cdot \frac{dn_2}{n_2 - 1} + \frac{a_2 a_3 z_3}{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \frac{dn_3'}{n_3 - 1} \end{aligned}\right\} (A).$$

49. Außer der chromatiſchen Abweichung findet bekanntlich auch noch eine ſphäriſche Statt und dieſe läßt ſich wie jene durch beſtimmte Formeln darſtellen.

Nach (M) wird die ſphäriſche Abweichung bei einer einzigen Linſe durch

$$v = -\frac{\mu \alpha^2 x^2}{p}\left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\varepsilon}{a\alpha}\right)$$

oder wenn man $\frac{\mu}{p}\left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\varepsilon}{a\alpha}\right) = P$ ſetzt, durch

$$v = P\alpha^2 x^2$$

ausgedrückt, wo λ, μ, ε, p, n, α, x die ſchon früher (34) angenommenen Bedeutungen haben. Gelangt das Licht auf eine zweite Linſe, ſo kann dieſe die Strahlen aus zwei Gründen nicht in einen Punct zuſammenbringen: 1. weil die Strahlen nicht von einem Puncte ausgehend auf ſie gelangen, 2. weil ſie ſelbſt eine Abweichung hervorbringt. Zur Beſtimmung des Antheils der geſammten Abweichung in der zweiten Linſe, welcher auf Rechnung des erſten Grundes kommt, hat man $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\alpha_1}$ und $\frac{a_1^2}{da_1} = -\frac{\alpha_1^2}{d\alpha_1}$. Aber da_1 iſt die Abweichung, welche von der erſten Linſe herrührt, darum iſt der geſuchte Antheil

$$\frac{\alpha^2 \alpha_1^2}{a_1^2} P x^2.$$

Bedeutet P_1, v_1 und x_1 in Betreff der Abweichung bei der zweiten Linſe das, was P, v, x für die erſte iſt, ſo iſt die von der zweiten Linſe aus dem zweiten oben angegebenen Grunde hervorgebrachte

Abweichung $v_1 = P_1 \alpha_1^2 x_1^2$; aber $x_1 = \frac{a_1}{\alpha} x$ und daher auch $v_1 = \frac{a_1^2 \alpha_1^2}{\alpha^2} P_1 x^2$, mithin die geſuchte Abweichung bei einem Syſteme von zwei Linſen

$$-\alpha_1^2 x^2 \left(\frac{\alpha^2}{a_1^2} P + \frac{a_1^2}{\alpha^2} P_1\right).$$

Eben ſo findet man für drei Linſen die Abweichung

$$-\alpha_2^2 x^2 \left[\left(\frac{\alpha\,\alpha_1}{a_1\,a_2}\right)^2 P + \left(\frac{a_1\,\alpha_1}{\alpha\,a_2}\right)^2 P_1 + \left(\frac{a_1\,a_2}{\alpha\,\alpha_1}\right)^2 P_2\right]$$

woraus das Geſetz für eine größere Linſenanzahl klar iſt.

Nennt man λ_1, μ_1, ε_1, λ_2, μ_2, ε_2 für die zweite und dritte Linſe, das, was für die erſte λ, μ, ε war, ſo erhält man:

$$P = \frac{\mu}{p}\left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\varepsilon}{a\,\alpha}\right);\ P_1 = \frac{\mu_1}{p_1}\left(\frac{\lambda_1}{p_1^2} + \frac{\varepsilon_1}{a_1\,\alpha_1}\right);$$

$$P_2 = \frac{\mu_2}{p_2}\left(\frac{\lambda_2}{p_2^2} + \frac{\varepsilon_2}{a_2\,\alpha_2}\right).$$

Beſtehen alle Linſen aus einerlei Glas, ſo iſt $\mu = \mu_1 = \mu_2$ ꝛc.

Setzt man in obige Gleichung die Werthe aus (U), ſo wird die Abweichung

für zwei Linſen:

$$-\frac{m^2 a^2 b^2 x^2}{l^2}\left[P + \left(\frac{a_1}{\alpha}\right)^4 P_1\right]$$

für drei Linſen:

$$-\frac{m^2 a^2 b^2 x^2}{l^2}\left[P + \left(\frac{a_1}{\alpha}\right)^4 P_1 + \left(\frac{a_1\,a_2}{\alpha\,\alpha_1}\right)^4 P_2\right].$$

50. Der Halbmeſſer des Abweichungskreiſes wird für ein Syſtem von Linſen nach dem in 36 gebrauchten Verfahren gefunden. Man erhält

für zwei Linſen:

$$R = \frac{m\,a\,x^3}{4l}\left[P + \left(\frac{a_1}{\alpha}\right)^4 P_1\right]$$

für drei Linſen:

$$R = \frac{m\,a\,x^3}{4\,l}\left[P + \left(\frac{a_1}{\alpha}\right)^4 P_1 + \left(\frac{a_1\,a_2}{\alpha\,\alpha_1}\right)^4 P_2\right]$$

u. ſ. f. Allgemein erhält man für jede Anzahl von Linſen:

$$R = \frac{m a x^3}{4l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{p}\left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\varepsilon}{a\alpha}\right) + \frac{\mu_1}{p_1}\left(\frac{\lambda_1}{p_1^2} + \frac{\varepsilon_1}{a_1 \alpha_1}\right) \frac{a_1^4}{\alpha^4} \\ + \frac{\mu_2}{p_2}\left(\frac{\lambda_2}{p_2^2} + \frac{\varepsilon_2}{a_2 \alpha_2}\right) \frac{a_1^4 a_2^4}{\alpha^4 \alpha_1^4} + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

wo ſo viel Glieder zu nehmen ſind, als man Linſen hat. Setzt man $a = \infty$, $\alpha = p$ und $\left(\frac{a_1}{p_1}\right)^2 \lambda_1 + \frac{\varepsilon_1 a_1}{\alpha_1} = Q_1$; $\left(\frac{a_2}{p_2}\right)^4 \lambda_2 + \frac{\varepsilon_2 a_2}{\alpha_2} = Q_2$ u. ſ. w., ſo wird für dieſen Fall

$$R = \frac{m x^3}{4 p^4} \left[\mu \lambda p + \frac{\mu_1 a_1^2}{p_1} Q_1 + \frac{\mu_2 a_2^2}{p_2} \cdot \left(\frac{a_1}{\alpha_1}\right)^2 Q_2 + \frac{\mu_3 a_3^2}{p_3} \left(\frac{a_1 a_2}{\alpha_1 \alpha_2}\right)^4 Q_3 + \ldots\ldots\right] \ldots . \quad (B).$$

C. Verſuche über Farbenzerſtreuung.

51. Bei Verſuchen über Farbenzerſtreuung geht man in der Regel nicht blos darauf aus, Farbenerſcheinungen hervorzubringen, ſondern man berückſichtiget die Zerlegung der zuſammengeſetzten Strahlen in einfache. Der Erreichung dieſer Abſicht ſteht mancher Umſtand im Wege, ohne deſſen genaue Berückſichtigung man nie zum Ziele gelangt. Darum ſollen hier die nöthigen Vorſichten angegeben werden.

Die Öffnung, durch welche man das Licht in den Raum leitet, worin man den Verſuch anſtellen will, ſoll, um eine hinreichende Lichtſtärke zu geſtatten, nicht gar klein ſeyn; um aber homogenes Licht durch ein Prisma zu erhalten, ſoll der Durchmeſſer, der in einer auf der Axe des Prisma's ſenkrechten Ebene liegt, verſchwindend klein ſeyn; denn jede angebbare Dimenſion der Öffnung nach dieſer Richtung verurſachet eine Vermiſchung der homogenen Farben im Spectrum. Iſt z. B. *A* (Fig. 102) das Prisma, *SS* der auf der Axe desſelben ſenkrechte Querſchnitt der Öffnung und *Sa*, *Sb* die äußerſten auf *A* fallenden Strahlen, ſo gibt jeder dieſer Strahlen ein Farbenbild. Das von *Sa* fällt auf der Tafel, worauf man es auffängt, in den Raum $\alpha\beta$, das von *Sb* in den Raum $\gamma\delta$ und das der zwiſchen *Sa* und *Sb* liegenden Strahlen iſt zwiſchen α und δ enthalten, es fällt jeder Theil eines ſolchen Spectrums in den Raum eines anderen und dadurch wird die Homogeneität des Lichtes aufgehoben.

Ein anderer der Erzielung eines homogenen Farbenbildes hinderlicher Umſtand iſt die Ausdehnung des leuchtenden Körpers, deſſen Licht unterſucht werden ſoll. Gewöhnlich braucht man Sonnenlicht und die Sonne erſcheint nahe unter einem Durchmeſſer von 30′. Läßt man demnach auch nur durch eine Öffnung, die einem Puncte gleicht, zum Behufe eines Verſuches mit einem Prisma, in ein verfinſtertes Zimmer directes Sonnenlicht dringen, ſo fahren die Strahlen, nachdem ſie die Öffnung verlaſſen haben, aus einander und es kommen nicht blos mehrere derſelben zugleich auf das Prisma, ſondern ſie haben auch eine verſchiedene Neigung gegen die Vorderfläche desſelben, welches begreiflicher Weiſe die Homogeneität der einzelnen Farben des Hauptſpectrums ſehr beeinträchtigen muß.

Endlich ſind ſelten die Seitenflächen der Prismen vollkommen plan, deren Maſſe vollkommen homogen und an jeder Stelle mit gleichem Brechungsvermögen begabt, ſo daß bei vielen Prismen unter übrigens günſtigen Umſtänden doch keine homogenen Farben erzielt werden können.

52. Aus dem Vorhergehenden kann man leicht die Maßregeln entnehmen, welche bei Verſuchen über Farbenzerſtreuung unerläßlich ſind. Vor allem wird nothwendig ſeyn, die Fenſteröffnung möglichſt klein zu machen und zwar in der auf der Axe des Prisma's ſenkrechten Richtung. Wählt man ein ſehr kleines rundes Lichtloch, ſo wird das Spectrum auch nur eine dem Durchmeſſer desſelben gleiche Breite haben und deßhalb keine genaue Unterſuchung der einzelnen Farben geſtatten. Eine hohe und ſchmale Öffnung und eine verticale Stellung des Prisma's iſt am zweckmäßigſten.

Um dem widrigen Einfluſſe der Größe des Sonnendurchmeſſers auszuweichen, kann man das Licht, bevor es auf das Prisma gelangt, mit einer Convexlinſe concentriren, in deſſen Brennpuncte ein vielmal verkleinertes Sonnenbild erſcheinen wird, und überdieß noch, wenn es einem nicht um bedeutende Lichtſtärke zu thun iſt, das Licht nach der Concentration abermals durch einen Schirm mit einer kleinen Öffnung gehen laſſen, wie Fig. 103 zeigt; endlich läßt man das Licht in der Nähe der Kante des brechenden Winkels ins Prisma eindringen, um den im ſelben zurückzulegenden Weg möglichſt zu verkürzen und den Einfluß einer etwaigen Heterogeneität der Materie zu ſchwächen. Allein durch alle dieſe Mittel erhält man zwar ein Spectrum, deſſen Farben weniger heterogen ſind, als die

eines ſolchen, das man ohne Beachtung dieſer Vorſichten erhält; vollkommen homogen werden die Farben aber nur durch das zuerſt von Fraunhofer angegebene Verfahren.

Das Weſentliche desſelben beſteht darin, daß man das Licht, nachdem es im Prisma die Brechung und Zerſtreuung erlitten hat, durch eine achromatiſche Sammellinſe leitet, damit alle von einem Puncte ausgehenden homogenen Strahlen wieder in einen Punct geſammelt werden, und das durch ſie gemachte Bild entweder mit einer Tafel auffängt oder zur Erlangung einer größeren Lichtſtärke mit einer Sammellinſe anſieht. Das letzte Verfahren gewährt zugleich den Vortheil, daß man das ganze Phänomen vergrößert ſieht. Es iſt leicht einzuſehen, daß man ſich dazu gleich eines achromatiſchen aſtronomiſchen Fernrohres bedienen kann, und daß ſich in dieſem Falle die Erſcheinung viel reiner ausnehmen muß, weil das Ocular mit ſeinem Objective ſchon zweckmäßig verbunden, und eines gegen das andere gehörig abgeglichen iſt, um ein reines deutliches Bild zu gewähren.

53. Dieſem gemäß iſt nun folgender zu genanntem Zwecke vorzüglich brauchbarer Apparat, wie ihn das hieſige Muſeum aus den Händen des großen Fraunhofers erhielt, eingerichtet: *AB* (Fig. 104) iſt ein vorzüglich gutes achromatiſches Fernrohr, an deſſen durchbrochenem Objectivdeckel ein vollkommen wellenfreies Flintglasprisma mit genau ebenen Wänden und einem Winkel von etwa 60° ſo angebracht wird, daß der Strahl, welcher ſich nach der Brechung in der Axe dieſes Rohres befindet, unter demſelben Winkel auffallen muß, unter welchem er austritt. Zur leichteren Stellung dieſes Inſtrumentes befindet ſich vor dem Rohr ein Diopter *C*, das ſich unter einem Winkel gegen die Axe des Rohres ſtellen läßt, welcher demjenigen gleich iſt, unter dem die Strahlen das Rohr treffen müſſen, wenn ſie nach der Brechung ins Fernrohr gelangen und in deſſen Geſichtsfelde erſcheinen ſollen.

Beim Gebrauche dieſes Inſtrumentes bringt man am Fenſterladen eine verticale, höchſtens 20 Secunden breite Spalte an und leitet durch ſie, am beſten mittelſt eines Helioſtats einen horizontalen Lichtſtreifen auf das am Objective des genannten Fernrohres befeſtigte Prisma, deſſen Axe genau vertical geſtellt iſt, ſo daß die Brechung in horizontaler Richtung erfolgt, nachdem man, bevor das Prisma angeſetzt wurde, das Ocular ſo gerichtet hat, daß man die Öffnung am Fenſter deutlich durch dasſelbe ſieht. Da erblickt

man im Geſichtsfelde des Inſtrumentes ein horizontal liegendes Farbenbild mit unzähligen verticalen Linien, die viel dunkler ſind, als ihr Grund, deren einige völlig ſchwarz erſcheinen, wie ſie in der Fig. 105 abgebildet ſind. Einige ſind dicker als die anderen und löſen ſich bei einer ſtärkeren Vergrößerung in zwei und mehrere auf; ſie erſcheinen nicht an den Grenzen der einzelnen Farben, aber doch immer an derſelben Stelle, das Prisma mag aus was immer für einem Material beſtehen, deſſen brechender Winkel und die Öffnung am Fenſter wie immer verändert werden, nur wenn man ſtatt des Sonnenlichtes das Licht eines anderen leuchtenden Körpers anwendet, verändern ſie ihren Platz oder verſchwinden ganz und es kommen andere, nicht immer dunkle an ihre Stelle. In der abgebildeten Figur iſt ungefähr bei *A* das rothe, bei *I* das violette Ende des Farbenbildes. In *A* iſt eine ſehr ſcharf begrenzte Linie, bei *a* ſind mehrere Linien, die gleichſam einen Streifen bilden, *B* und *C* erſcheint ſcharf begrenzt, ſchwarz und dick, zwiſchen *B* und *C* zählte Fraunhofer 9 ſehr feine ſcharf begrenzte Linien. *D* beſteht aus 2 ſtarken Linien, die eine helle Linie trennt, zwiſchen *C* und *D* liegen ungefähr 30 feine Linien. *E* beſteht aus mehreren Linien, wovon die mittlere ſtärker iſt als die übrigen, innerhalb *D* und *E* laſſen ſich etwa 84 Linien von verſchiedener Stärke wahrnehmen. *F* iſt eine ſtarke Linie; der Raum zwiſchen *E* und *F* iſt mit mehreren Linien beſetzt, zwiſchen *E* und *b* ſind ungefähr 24 Linien, bei *b* drei ſehr ſtarke Linien, worunter 2 durch eine helle ſchmale Linie getrennt ſind, zwiſchen *b* und *F* zählte Fraunhofer 52 Linien. Bei *G* befinden ſich viele Linien, einige darunter ſind ſehr ſtark, zwiſchen *F* und *G* liegen etwa 185 Linien von verſchiedener Stärke. Bei *H* befinden ſich 2 Streifen, die aus vielen Linien beſtehen, und in der Mitte eine ſehr ſchwarze ſtarke Linie haben. Zwiſchen *G* und *H* ſind 190 Linien wahrnehmbar. Auch zwiſchen *H* und *I* trifft man viele Linien an, ſo daß man zwiſchen *B* und *H* ungefähr 574 Linien zählen kann.

Wenn man die Öffnung am Fenſter vergrößert, werden dieſe Linien matter und wenn dieſe etwa 40″ breit iſt, verſchwinden ſie ganz. Die Urſache dieſer Erſcheinung iſt leicht einzuſehen. Die dunklen Linien würden offenbar am beſten wahrnehmbar erſcheinen, wenn dieſe Öffnung nur eine Lichtlinie wäre; bei dem gewöhnlichen Verfahren, wo dieſe Öffnung eine angebbare, wenn auch nicht bedeutende Breite hat, beſteht ſie gleichſam aus einem Syſtem pa-

ralleler Lichtlinien, deren jede ihr eigenes Farbenbild mit den darin befindlichen dunklen Linien gibt. Iſt demnach die Öffnung ſo breit, als der breiteſte dieſer Streifen, ſo fällt in den Raum, welchen der Streifen einer Lichtlinie einimmt, das Licht von dem anderen und macht erſteren unkenntlich; noch mehr muß dieſes mit den minder breiten Streifen der Fall ſeyn. Darum darf man die Öffnung am Fenſter nicht breiter machen, als zur Erlangung einer hinreichenden Lichtſtärke in dem beabſichtigten Bilde nöthig iſt; aus dieſem Grunde reicht man auch bei den helleren Theilen des Farbenbildes, z. B. beim Gelben mit einer ungemein ſchmalen Öffnung ſattſam aus.

Da im Fernrohre das Bild der brechbareren Strahlen eine andere Entfernung vom Oculare haben muß, als das der minder brechbaren, ſo wird man auch bei derſelben Stellung des Oculares nicht alle Streifen gleich gut ſehen können. Iſt das Ocular ſo geſtellt, daß man die Linien im rothen Theile des Farbenbildes deutlich ſieht, ſo muß man es etwas hineinſchieben, um die Linien im gelben und noch mehr, um die im blauen deutlich zu ſehen.

Iſt das Prisma nicht unveränderlich gegen das Objectivglas geſtellt, und man ſieht die dunklen Linien im Fernrohre deutlich, wenn der Strahl das Prisma unter demſelben Winkel verläßt, unter welchem er eintritt; ſo braucht man das Prisma nur etwas um ſeine Axe zu drehen und die Gleichheit dieſer Winkel zu ſtören, und es werden dieſe Linien verſchwinden, aber wieder erſcheinen, wenn die Stellung des Oculares geändert wird, und zwar muß dieſes hineingeſchoben werden, wenn der Einfallswinkel vergrößert, hingegen herausgezogen, wenn er verkleinert worden war. Die Urſache dieſer Erſcheinung iſt nicht ſchwer einzuſehen. Wenn der Einfallswinkel dem Austrittswinkel gleich iſt, ſo verlaſſen die Strahlen das Prisma mit derſelben Divergenz, mit der es ſie aufnahm und das Bild im Fernrohre erſcheint an derſelben Stelle, wie ohne Prisma, daher es auch deutlich geſehen wird, wenn man vorläufig das Ocular ſo geſtellt hat, daß man die Öffnung am Fenſter, von welcher eigentlich die Lichtſtrahlen ausgehen, deutlich ſieht. So wie man aber den Einfallswinkel größer macht, ſo divergiren die gebrochenen Strahlen weniger als die auffallenden, ſcheinen daher von einem weiter entlegenen Puncte herzukommen und das vom Objective entworfene Bild iſt weiter vom Oculare entfernt. Das Gegentheil muß erfolgen, wenn der Einfallswinkel kleiner gemacht wird.

54. Wenn man den hier beſchriebenen Verſuch ſtatt mit Sonnenlicht mit dem Lichte eines Sternes anſtellen will, der nur als Punct erſcheint; ſo braucht man nebſt dem vorhin beſchriebenen Apparate noch ein Glas, das auf einer Seite vollkommen eben iſt, auf der anderen aber eine cylindriſche Convexität hat und an das Objectiv des Fernrohres angebracht wird. Das Farbenbild eines Sternes hat nämlich keine wahrnehmbare Breite, ſondern erſcheint nur als Linie, die an verſchiedenen Stellen verſchiedenfarbig iſt, es laſſen ſich darum auch keine Querlinien darin erkennen. Wird aber obiges Glas ſo geſtellt, daß die Axe des Cylinders mit der Baſis des Prisma's parallel lauft, ſo wird die Breite des Farbenbildes vergrößert, während deſſen Länge unverändert bleibt, und darum kann man die Querlinien ſehen.

55. Das Farbenbild, welches auf die vorher beſchriebene Weiſe erzeugt wird, hat nebſt der ſchon genannten Eigenthümlichkeit noch das Beſondere, daß daran der Unterſchied der Intenſität der verſchiedenfarbigen Theile mehr hervorſticht, als in dem auf die gewöhnliche Weiſe erzeugten Spectrum. Wenn man z. B. das Licht des grünen oder blauen Theiles recht wohl vertragen kann, ſo blendet das Rothe und noch mehr das Gelbe ſo ſtark, daß man es kaum auszuhalten vermag, und man faſt immer genöthiget iſt, die Öffnung am Fenſterladen ſchmäler zu machen. Darum iſt dieſes homogene Farbenbild vorzugsweiſe geeignet zur Beſtimmung der relativen Intenſität des verſchiedenfarbigen Lichtes. Auch dieſe Beſtimmung verdanken wir Fraunhofer. Er bediente ſich dazu folgender Vorrichtung: In einem Fernrohre *A* (Fig. 106) wird an der Stelle, wohin das vom Objective gemachte Bild fällt, ein kleiner unter 45° gegen die Axe des Rohres geneigter metallener Planſpiegel angebracht, deſſen verticaler Rand ſcharf begrenzt iſt, und das Geſichtsfeld durchſchneidet. Dieſen Rand ſieht man durch das Ocular ſehr ſcharf. Seitwärts am Ocularrohre iſt ein durchſchnittenes Rohr ſo angebracht, daß es auf dem Rand des Spiegels und der Axe des Fernrohres ſenkrecht ſteht, und im Einſchnitte ein anderes engeres Rohr *B* aufnimmt, welches ſich in dieſem Ausſchnitte in verticaler Richtung verſchieben läßt. In dem Theile des engen Rohres, welcher der Axe des weiteren entſpricht, befindet ſich eine kleine Flamme, die von einem communicirenden Öhlgefäße genährt wird und durch eine kleine runde Öffnung Licht auf den Spiegel ſendet. Daher ſieht man in der einen Hälfte des Geſichtsfeldes des Fern-

rohres den von der Flamme beleuchteten Spiegel und in der anderen Hälfte desſelben eine der Farben des prismatiſchen Farbenbildes. Die Beleuchtung des Spiegels kann man durch Annäherung der Flamme verſtärken und durch Entfernung derſelben ſchwächen, und daher ſie ſo modificiren, daß der ſcharfe Rand des Spiegels bei derſelben Stellung des Oculares am wenigſten deutlich erſcheint. In dieſem Falle kann man füglich annehmen, daß der Spiegel eben ſo ſtark beleuchtet iſt, wie der daneben erſcheinende Theil des Farbenbildes. Nimmt man nun an, die Intenſität der Beleuchtung des Spiegels ſtehe im verkehrten Verhältniſſe mit dem Quadrate der Entfernung der Lampe von demſelben, ſo kann man wohl die relativen Lichtſtärken der einzelnen Theile des Farbenbildes durch Zahlen ausdrücken. Fraunhofer machte bei dieſen Verſuchen die Öffnung am Fenſter ſo groß, daß die dunklen Streifen im Farbenbilde nicht geſehen würden, ließ das Sonnenlicht vor dem Fenſterladen von einer rauhen Glasplatte reflectiren, und brachte auch zwiſchen der Flamme und dem Planſpiegel eine ſolche matte Platte an, durch welche erſt der Spiegel beleuchtet wurde und maß dann immer die Entfernung der Flamme von dieſem Glaſe. Auf dieſem Wege erhielt er folgende Zahlenwerthe für die Intenſität der farbigen Theile des Spectrums, die ein Mittel aus vier Verſuchen ſind:

Intenſität	bei	$B = 0.032$
		$C = 0.094$
		$D = 0.64$
	zwiſchen D und	$E = 1.00$
	bei	$E = 0.48$
	„	$F = 0.17$
	„	$G = 0.031$
	„	$H = 0.0056.$

Durch die Curve MNO (Fig. 105) werden dieſe Intenſitäten graphiſch dargeſtellt, die Intenſitäten des Lichtes ſtellen die Ordinaten, und die gemeſſenen Bögen am Farbenbilde von der Gattung Flintglas, deſſen ſich bei dieſen Verſuchen Fraunhofer bediente, die Abſciſſen vor. Demnach kann man die Lichtmenge, welche innerhalb des Raumes BC, CD ꝛc. vertheilt iſt, durch den Flächenraum MNO ausdrücken. Nimmt man die Lichtmenge in dem Raume DE als Einheit an, ſo hat man

die Lichtmenge im Raume $BC = 0.021$
„ „ $CD = 0.299$
„ „ $DE = 1.000$
„ „ $EF = 0.328$
„ „ $FG = 0.185$
„ „ $GH = 0.035$.

Die mittlere Lichtſtärke iſt 0.3113 und dieſe wird demnach zwiſchen EF und FG, aber nahe an EF fallen.

D. Brechung ohne Farbenzerſtreuung.

56. Wo eine ſtarke Ablenkung des Lichtes durch Brechung Statt findet, dort tritt auch eine Farbenzerſtreuung ein. Wäre die Größe der Ablenkung durch Brechung der Farbenzerſtreuung in verſchiedenen Körpern überhaupt proportionirt, ſo würde man die Farbenzerſtreuung nicht aufheben können, ohne zugleich die Brechung aufzuheben. Es beruht daher die Möglichkeit einer ſtarken Brechung ohne merkliche Farbenzerſtreuung darauf, daß einige Subſtanzen das Licht ſtärker zerſtreuen als andere, ohne es darum in demſelben Verhältniſſe ſtärker zu brechen. Dieſes iſt beim Crown- und Flintglaſe und bei vielen anderen feſten uud flüſſigen Körpern der Fall. Hier ſoll nun die Theorie der Zuſammenſetzung achromatiſcher Prismen und Linſen näher dargeſtellt werden, als derjenigen Körper, bei denen es beſonders wichtig iſt, eine Brechung ohne Farbenzerſtreuung zu erhalten.

57. Man nehme ein Prisma aus Crownglas oder einem anderen Stoff mit einem kleinen brechenden Winkel $= \psi$, nenne n den Exponenten des Brechungsverhältniſſes für die mittleren, $n + dn$ denſelben für die äußerſten Strahlen des Spectrums, wo dn poſitiv oder negativ genommen werden muß, je nachdem es ſich auf Strahlen von violettem oder rothem Ende desſelben bezieht; ſo iſt der Winkel, den die gebrochenen mittleren Strahlen mit den ungebrochenen machen $(n - 1)\,\psi$ und derſelbe für die äußerſten Strahlen $(n + dn - 1)\,\psi$. Denn iſt der brechende Winkel eines Prisma ſehr klein, ſo kann man unter Vorausſetzung der in 26 angenommenen Bedeutungen die Größen ψ, ρ, σ, γ und n ſetzen

$$\rho = n\rho_{,}\,,\quad \sigma = n\sigma_{,}$$

mithin $\rho + \sigma = n(\rho_{,} + \sigma_{,}) = n\psi$ und weil allgemein $\gamma = \rho + \sigma - \psi$ iſt, daraus erhalten

$$\gamma = (n - 1)\,\psi.$$

Für ein anderes Prisma, etwa aus Flintglas, für welches ψ_1, n_1 und dn_1 dieſelben Werthe haben, wie ψ, n und dn im vorigen, iſt die Ablenkung derſelben Strahlen $(n_1 - 1)\,\psi_1$ und $(n_1 + dn_1 - 1)\,\psi_1$. Dieſelbe Ablenkung wird in dieſem Prisma Statt finden, wenn die ſchon im erſten gebrochenen Strahlen auf das zweite gelangen und letzteres an erſteres ſich anſchließt, weil ſie in der Vorausſetzung kleiner brechender Winkel vom Einfallswinkel der Strahlen unabhängig iſt, und die Ablenkung im Doppelprisma wird das Reſultat der Ablenkung beider zugleich ſeyn. Werden demnach dieſe zwei Prismen ſo an einander geſchloſſen, daß ihre brechenden Winkel eine entgegengeſetzte Lage haben, ſo wird die Ablenkung im Doppelprisma für die mittleren Strahlen $(n-1)\,\psi - (n_1 - 1)\,\psi_1$ und für die äußerſten $(n + dn - 1)\,\psi - (n_1 + dn_1 - 1)\,\psi_1$.

Sollen nun nach der Brechung die äußerſten Strahlen mit den mittleren zuſammenfallen und daher das Prisma nahe achromatiſch ſeyn, ſo muß die Bedingung eintreten:

$$(n-1)\,\psi - (n_1 - 1)\,\psi_1 = (n + dn - 1)\,\psi - (n_1 + dn_1 - 1)\,\psi_1$$

d. i.

$$dn\,.\,\psi = dn_1\,.\,\psi_1 \text{ oder } \frac{dn}{dn_1} = \frac{\psi_1}{\psi}.$$

58. Auf dem hier betretenen Wege ergibt ſich auch die Theorie der achromatiſchen Linſen. Denkt man ſich zwei Linſen hart an einander geſtellt und nennt die Brennweite der erſten von der Seite des leuchtenden Körpers an gezählt, p, die der zweiten p_1; ſo iſt der reciproke Werth der Vereinigungsweite der Doppellinſe $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}$; denn die Strahlen, welche die erſte Linſe verlaſſen, gelangen ſo auf die zweite, als kämen ſie von einem Puncte her, deſſen Entfernung $= -p$ iſt, wenn man die Linſendicke vernachläſſiget. Heißt demnach die Vereinigungsweite der Doppellinſe α, ſo iſt $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1}$ oder $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}$.

Auf gleiche Weiſe lernet man einſehen, daß man für die Vereinigungsweite einer aus n einfachen Linſen beſtehenden zuſammengeſetzten Linſe, bei welcher p_2, p_3 ꝛc. die Brennweiten der einzelnen Beſtandlinſen ſind, den Ausdruck

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots\ldots \frac{1}{p_n} \text{ hat.}$$

59. Man betrachte nun eine aus zwei Stücken beſtehende Linſe, deren eines aus Crownglas, das andere aus Flintglas beſteht, heiße n den Exponenten des Brechungsverhältniſſes für die mittleren Strahlen in der erſten, $n_{,}$ dieſelbe Größe in der zweiten Linſe, und $n + dn$, $n_{,} + dn_{,}$ dieſe Exponenten für die äußerſten Strahlen des Spectrums, ferner f und g die Halbmeſſer der erſten, $f_{,}$ und $g_{,}$ die der zweiten oder Flintglaslinſe. Dieſem gemäß hat man die reciproke Vereinigungsweite für die mittleren Strahlen:

$$(n-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)+(n_{,}-1)\left(\frac{1}{f_{,}}+\frac{1}{g_{,}}\right)$$

für die äußerſten hingegen:

$$(n+dn-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)+(n_{,}+dn_{,}-1)\left(\frac{1}{f_{,}}+\frac{1}{g_{,}}\right).$$

Sollen die äußerſten und mittleren Strahlen zuſammenfallen, ſo wird

$$(n-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)+(n_{,}-1)\left(\frac{1}{f_{,}}+\frac{1}{g_{,}}\right)=$$

$$=(n+dn-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)+(n_{,}+dn_{,}-1)\left(\frac{1}{f_{,}}+\frac{1}{g_{,}}\right)$$

mithin

$$dn\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)=-dn_{,}\left(\frac{1}{f_{,}}+\frac{1}{g_{,}}\right);$$

weil aber $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}=\frac{1}{p\,(n-1)}$ und $\frac{1}{f_{,}}+\frac{1}{g_{,}}=\frac{1}{p_{,}\,(n_{,}-1)}$ iſt, vorausgeſetzt, daß p und $p_{,}$ die Brennweiten der zwei Linſen ausdrücken, ſo erhält man:

$$\frac{dn}{n-1}\cdot\frac{1}{p}=-\frac{dn_{,}}{n_{,}-1}\cdot\frac{1}{p_{,}}.$$

Das negative Zeichen des zweiten Gliedes zeigt an, daß eine der zwei Linſen eine Zerſtreuungslinſe ſeyn muß. Welche von beiden, das hängt davon ab, ob die Doppellinſe eine Sammel- oder Zerſtreuungslinſe ſeyn ſoll. Für den erſten Fall, der in der Ausübung faſt ausſchließlich vorkommt, muß die Flintglaslinſe die concave ſeyn; denn weil Flintglas das Licht mehr zerſtreut als Crownglas, und daher $dn_{,} > dn$ iſt, während n und $n_{,}$ faſt einerlei Werth haben, ſo iſt $p_{,} > p$, alſo die Linſe mit der Brennweite p, d. h. die Crownglaslinſe vorwaltend.

Aus dem hier bewieſenen Geſetze ergibt ſich, daß der Achromatismus einer Doppellinſe einzig vom Verhältniſſe der Brennweiten der Beſtandlinſen abhängt, aber von den Krümmungshalbmeſſern, wodurch dieſe Brennweiten erzielt werden, ganz unabhängig iſt.

60. Bisher wurde immer geſagt, dn beziehe ſich auf die äußerſten Strahlen des Farbenbildes. So müßte dieſe Größe auch immer genommen werden, wenn alle Theile des Farbenbildes gleich ſtarkes, oder wenn man lieber will, gleich dichtes Licht enthielten. Allein bekanntlich iſt die Dichte des Lichtes an verſchiedenen Stellen des Spectrums ſehr verſchieden und nimmt beſonders gegen das violette Ende desſelben ungemein ſtark ab; ja es läßt ſich nach dieſer Seite hin die Grenze desſelben gar nicht genau angeben. Sieht man das ganze Spectrum auf einmal an, ſo wird das Auge, durch das ſtärkere gelbe Licht überreizt, an mancher Stelle kein Licht mehr bemerken, wo man beim ausſchließlichen Anblicke des violetten Theiles allein doch noch eine ſchwache Tingirung wahrnimmt. Demnach wäre es auch practiſch unmöglich, dn und $dn_{,}$ auf die äußerſten Ränder des Farbenbildes zu beziehen. Die ungleiche Dichte des verſchiedenfarbigen Lichtes macht es nothwendig, bei der Beſtimmung des Verhältniſſes $dn : dn_{,}$ auf ſie Rückſicht zu nehmen, weil die Abweichung der dichteren Strahlen dem deutlichen Sehen bei übrigens gleichen Umſtänden mehr ſchadet, als die der minder dichten.

Um nun das rechte Verhältniß $dn : dn_{,}$ zu finden, nehme man an, die übrig gebliebene Abweichung ſchade in dem Verhältniſſe der Dichte der abweichenden Strahlen und drücke die Lichtmenge in den Räumen BC, CD, DE ꝛc. (Fig. 105) durch M, N, O ꝛc. und die Zerſtreuungsexponenten, welche dieſen Strahlen entſprechen, durch β, γ, δ, q aus. Setzt man nun $\frac{dn_{,}}{dn} = x$, ſo geht obiges Verhältniß in $1 : x$ über, und es iſt die Bedingung zu erreichen, daß

$$(x-\beta) M + (x-\gamma) N + (x-\delta) O + \ldots\ldots = 0$$

iſt. Hieraus findet man:

$$x = \frac{M\beta + N\gamma + O\delta + \ldots}{M + N + O + \ldots}.$$

Es läßt ſich demnach aus den für jede Glasart durch Verſuche beſtimmbaren Größen β, γ, δ ꝛc. und aus den nach 55 bekannten

Werthen von M, N, O ꝛc. x finden. Doch liegt dieſem die Hypotheſe zum Grunde, daß die Abweichung der übrigen Strahlen der Deutlichkeit im Verhältniſſe ihrer Dichte ſchade. Fraunhofer fand, daß man bei zwei Glasarten, bei denen durch Rechnung $x = 2.012$ gefunden wurde, die größte Deutlichkeit erzielt, wenn man $x = 1.98$ ſetzt; demnach müſſen die weniger dichten Strahlen etwas mehr als im Verhältniſſe ihrer Dichte abweichen.

61. Sowohl bei den vorher betrachteten achromatiſchen Prismen als bei Linſen ging man nur darauf aus, die äußerſten Strahlen des Farbenbildes mit den mittleren zu vereinigen. Die zwiſchen den mittleren und äußeren Strahlen liegenden könnten nur dann zugleich mit den erſteren vereiniget werden, wenn in beiden brechenden Subſtanzen das Verhältniß der Farbenzerſtreuung für alle farbige Strahlen von derſelben Größe, mithin die gleichfarbigen Stellen ihrer Farbenbilder einander proportionirt wären. Kaum dürfte man zwei Subſtanzen finden, bei denen dieſe Proportionalität Statt findet und daher bleibt bei ſogenannten achromatiſchen Apparaten immer noch eine Farbenzerſtreuung übrig. Ein von denſelben verurſachtes Farbenbild nennt man ein ſecundäres. In dieſem ſind jene Farben die vorherrſchenden, für welche die Zerſtreuung im Verhältniß zu jener der äußeren Farben des Hauptſpectrums am größten oder am kleinſten iſt. So z. B. ſieht man mit einem Doppelprisma aus Flintglas und Waſſer von den gehörigen brechenden Winkeln eine weiße Linie mit einem rothen und grünen Saume, weil das Waſſerprisma die grünen Strahlen in einem größeren Verhältniſſe zerſtreut als die äußerſten. Brewſter hat eine große Anzahl Körper in dieſer Beziehung unterſucht und ſie in eine Tafel zuſammengetragen, deren zwei zuſammen ein ſecundäres Spectrum mit vorherrſchendem Grün geben, und dieſes Spectrum erſcheint deſto größer, je weiter die zwei Körper in dieſer Tafel von einander abſtehen. Man kann dieſe Tafel zugleich als ein Verzeichniß jener Stoffe anſehen, die ſich zu achromatiſchen Apparaten verwenden laſſen, und in dieſer Beziehung deſto tauglicher ſind, je näher ſie an einander ſtehen. Hier folgt die Tafel:

1 Schwefelſäure.	5 Schwefelwaſſerſtoffſäure.
2 Phosphorſäure.	6 Waſſer.
3 Schwefelige Säure.	7 Eis.
4 Phosphorige Säure.	8 Weißes vom Ey.

9 Bergkryſtall.
10 Salpeterſäure.
11 Blauſäure.
12 Salzſäure.
13 Salpetrige Säure.
14 Eſſigſäure.
15 Äpfelſäure.
16 Zitronenſäure.
17 Flußſpath.
18 Topas (blauer).
19 Beryll.
20 Selenit.
21 Leucit.
22 Turmalin.
23 Borax.
24 Boraxglas.
25 Äther.
26 Alkohol.
27 Arabiſches Gummi.
28 Crownglas.
29 Mandelöhl.
30 Weinſteinſaures Kali und Soda.
31 Wachholdergummi.
32 Steinſalz.
33 Kalkſpath.
34 Bernſteinöhl.
35 Wachholderöhl.
36 Spermacetöhl.
37 Rübsöhl.
38 Olivenöhl.
39 Zirkon.
40 Flintglas.
41 Rhodiumöhl.
42 Roßmarinöhl.
43 Bockshornöhl.
44 Copaivabalſam.
45 Nußöhl.
46 Sebenbaumöhl
47 Rautenöhl.
48 Buchelöhl.
49 Salpeter.
50 Diamant.
51 Harz, gemeines.
52 Copalgummi.
53 Caſtorfett.
54 Chamillenöhl.
55 Dillſamenöhl.
56 Wermuth.
57 Majoranöhl.
58 Bergamotöhl.
59 Pfeffermünzöhl.
60 Thymianöhl.
61 Muſcatnußöhl.
62 Feldkümmelöhl.
63 Limoniöhl.
64 Bernſtein.
65 Frauenmünzöhl.
66 Hyſſopöhl.
67 Mohnöhl.
68 Flohkrautöhl.
69 Salbeiöhl.
70 Terpentinöhl.
71 Canadabalſam.
72 Lavendelöhl.
73 Salzſaurer Spießglanz.
74 Gewürznelkenöhl.
75 Fenchelſamenöhl.
76 Rothes Glas.
77 Orangefarbiges Glas.
78 Opalfarbiges Glas.
79 Bleizucker geſchmolzen.
80 Ambra.
81 Saſſafrasöhl.
82 Kümmelöhl.
83 Anießſamenöhl.
84 Bittermandelöhl.
85 Kohlenſaures Blei.

86 Tolubalſam.
87 Schwefelalkohol.
88 Schwefel.
89 Ricinusöhl.

E. Beſtimmung des Brechungsverhältniſſes und der Farbenzerſtreuung.

62. Jede Brechung iſt ihrer Natur nach von einer Farbenzerſtreuung begleitet, allein letztere iſt für unſer Auge nur dann bemerkbar, wenn die farbigen Theile ſtark von einander getrennt erſcheinen. Da iſt aber auch gerade die Ablenkung des gebrochenen Strahles am größten und am leichteſten mit Sicherheit zu meſſen. Darum liefern genaue Mittel zur Beſtimmung des Verhältniſſes zwiſchen dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels, d. i. der Größe n zugleich die Data zur Berechnung der Farbenzerſtreuung. Indeß gibt es doch auch einige Mittel, welche das Brechungsverhältniß der mittleren Strahlen ziemlich genau angeben, ohne eine beſondere Farbenzerſtreuung zu bewirken.

63. Ein einfaches, aber keineswegs genaues Mittel, das Brechungsverhältniß auszumitteln, beſteht darin, daß man von einer Linſe, die aus dem Stoffe beſteht, deſſen Brechungsverhältniß man kennen lernen will, die Vereinigungsweite der gebrochenen Strahlen für eine gegebene Entfernung des leuchtenden Punctes beſtimmt und dann der Werth von n aus der Formel H geſucht wird, aus welcher man mit Vernachläſſigung der Linſendicke

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{f}+\frac{1}{g}}+1=n,$$

oder wenn die Strahlen von einem unendlich weit entlegenen Gegenſtande kommen $\frac{1}{p\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)}+1=n$ findet. Zur practiſchen Ausführung dieſer Methode dient ein Maßſtab AB (Fig. 107), auf welchem ſich zwei ſenkrechte Säulchen C und D erheben, deren eines D feſt ſteht und an der nach C gekehrten Seite ein flaches Scheibchen hat, während ſich das andere C verſchieben und in jeder Lage wieder mittelſt einer Stellſchraube befeſtigen läßt. Zweckmäßig iſt es, wenn man ihm mittelſt einer Schraube eine feine Bewegung ertheilen kann. Oben hat es eine metallene Hülſe, welche zur Aufnahme der Linſe beſtimmt iſt. Läßt man von einem ſehr weit ent-

fernten Gegenſtande Licht auf dieſe Linſe fallen und nähert ſie der Scheibe an D ſo weit, daß das Bild dieſes Gegenſtandes auf derſelben rein und möglichſt deutlich erſcheint, ſo gibt die Entfernung der beiden Träger, mit gehöriger Rückſicht auf die Dicke der Linſe, nach der zweiten der vorhergehenden Formeln den Werth von n an.

64. Durch das vorhergehende Verfahren lernt man den Brechungsexponenten für eine Linſe nie ſo genau kennen, als es in vielen Fällen nöthig iſt; darum iſt es gut, ein Mittel zu kennen, wodurch man aus dem beiläufigen Werthe von n den genauen findet. Dieſes Verfahren hat zuerſt Stampfer angewendet; es beruht auf Folgendem: Wenn von einem leuchtenden Puncte Strahlen auf eine Linſe fallen, ſo dringt ein Theil derſelben in die Linſe ein, erreicht ihre Hinterfläche, wird da zum Theile gegen die Vorderfläche reflectirt, und durch dieſe neuerdings gebrochen. In der gehörigen Stellung ſieht man daher das Bild des Gegenſtandes in der Linſe, und man kann, von einem Puncte der Axe aus, den Winkel meſſen, welchen die nach dem Objecte und nach dem Bilde gerichtete Geſichtslinie macht. Noch ſchärfer wird das Reſultat, wenn man zwei von einem Puncte der Axe der Linſe gleichweit abſtehende Objecte wählt und die Winkel mißt, welche die nach beiden Objecten ſowohl als nach beiden Bildern gezogenen Geſichtslinien mit einander einſchließen, welche Winkel offenbar den doppelten Werth der vorhergehenden haben werden. Man iſt nun im Stande, aus dem Wege des Strahles, von dem Puncte in der Axe angefangen, von wo aus man die Winkel nahm, den genäherten Werth von n trigonometriſch zu berechnen, das Reſultat der Rechnung mit dem der Meſſung zu vergleichen und hieraus auf die Verbeſſerung zu ſchließen, die an n vorzunehmen iſt, um es auf den wahren Werth zu bringen.

Zum Meſſen der genannten Winkel bedient man ſich am beſten eines Theodoliths; als leuchtendes Object nimmt man am beſten kleine, runde, an der inneren Seite der Glastafel eines Fenſters aufgeklebte Scheibchen aus ſchwarzem Papier mit einem Durchmeſſer von 1 — 3 L. Man thut gut, die Glastafeln von Außen mit feinem weißen Papier zu überziehen, um die Objecte hell und ſcharf genug zu ſehen und das Fernrohr auf ſie einſtellen zu können. Die Linſe befeſtiget man an ein Geſtell, mittelſt welchem man ſie in horizontaler und verticaler Richtung etwas drehen kann. Sie ſoll wenigſtens einen Durchmeſſer von 1 — 2 Z. haben und es müſſen

ſowohl ihre Krümmungshalbmeſſer als ihre Dicke genau bekannt ſeyn. Man ſtellt ſie immer ſo, daß die beiden an der Hinterfläche entſtehenden Bilder in einem größten Durchſchnitt des Glaſes und vom Rande gleichweit entfernt erſcheinen. Man erhält die rechte Stellung leicht, indem man den Abſtand der Bilder vom Rande mit dem Theodolith mißt. Daß die Objecte, der Theodolith und die Bilder in derſelben Ebene liegen müſſen, iſt von ſelbſt klar.

65. Es ſey nun Fig. 108 eine beiderſeits convexe Linſe, L eines der zwei Objecte, welches den Strahl LK auf die Linſe ſendet, der in K gebrochen wird, nach B gelangt, daſelbſt eine Reflexion nach A und hier eine Brechung nach M erleidet, wo ſich der Theodolith befindet. Das zweite Object Q gibt ein ähnliches Bild in der Richtung MP. Die zu meſſenden Winkel ſind nun $QML = 2\alpha$, $AMP = 2\beta$. Die zu meſſenden Entfernungen ME, welche nahe gleich MA iſt $= A$, $ML = MQ = B$.

Aus der trigonometriſchen Berechnung des Weges des Strahles, von M aus, ergeben ſich folgende Gleichungen, bei denen die rechts ſtehenden nur kürzer ausgedrückte Werthe der links ſtehenden ſind:

1) Für die brechende Vorderfläche:

$$\sin MAC = \frac{CM.\sin AMC}{CA} \quad \text{d. h.} \quad \sin\alpha = \frac{A+f}{f}\sin\beta$$

$$\sin MAD = \frac{\sin MAC}{n} \quad \text{„} \quad \sin\alpha_1 = \frac{\sin\alpha}{\mu}$$

$$ADC = MAx - AMD - CAD \quad \text{„} \quad \varphi = \alpha - \beta - \alpha_1$$

$$DC = \frac{CA.\sin DAC}{\sin ADC} \quad \text{„} \quad D = \frac{f.\sin\alpha_1}{\sin\varphi}.$$

2) Für die reflectirende Hinterfläche

$$\sin HBD = \frac{HD\sin BDH}{HB} \quad \text{d. h.} \quad \sin b = \frac{\sin\varphi\,(f+g-c+D)}{g}$$

$$BGD = ABG - BDG \quad \text{„} \quad b_1 = 2b - \varphi$$

$$HG = \frac{HB.\sin HBG}{\sin HGB} \quad \text{„} \quad E = \frac{g\sin b}{\sin b_1}$$

3) Für die zum zweitenmale brechende Vorderfläche

$$\sin GKC = \frac{GC.\sin CGK}{KC} \quad \text{d. h.} \quad \sin e = \frac{(f+g-c-E)}{f}\sin b_1$$

$$\sin LKy = n\sin GKC \quad \text{„} \quad \sin e_1 = n\sin e$$

$HNK = NKC + NGK - GKC$ d. i. $\phi = e_1 + b_1 - e$

$$NC = \frac{KC . \sin NKC}{\sin KNC} \quad ,, \quad F = \frac{f . \sin e_1}{\sin \phi}.$$

Die von L auf die Axe gezogene Senkrechte LO läßt ſich nur aus dem Vorhergehenden berechnen, aber auch aus den gemeſſenen Werthen finden. Mittelſt des letzteren Mittels hat man

$$LO = B \sin \alpha.$$

Mittelſt des erſteren wird $ON = OM + ME + EC - CN = B \cos \alpha + A + f - F$ bekannt, und daher iſt auch

$$LO = ON . \text{tang}\, \phi = (B \cos \alpha + A + f - F) \text{tang}\, \phi$$

als gegeben anzuſehen.

Iſt demnach für n der wahre Werth gewählt worden, ſo hat man

$$(B \cos \alpha + A + f - F) \text{tang}\, \phi - B \sin \alpha = 0.$$

Hat man aber für dieſen Ausdruck für einen Werth von n erhalten u, für $n + dn$ aber u_1, ſo wird durch Interpoliren für den wahren Werth von n_1

$$n_1 = n + \frac{u\, dn}{u - u_1}.$$

Für concave Linſen gelten dieſelben Formeln, wenn man den Halbmeſſer der hohlen Fläche negativ nimmt.

66. Auf einem ähnlichen Grundſatze beruht auch das ſinnreiche Verfahren, welches Breweſter zur Beſtimmung des Brechungsverhältniſſes tropfbarer Flüſſigkeiten anwendete und neueſtens von Marx empfohlen wurde. Um dieſes Verfahren einzuſehen, denke man ſich ein zuſammengeſetztes Mikroſkop, das aus einem convexen Objective und einem dazu paſſenden Oculare beſteht. Die Objectivfaſſung ſey ſo beſchaffen, daß man auf die Linſe eine Schichte der zu unterſuchenden Flüſſigkeit geben kann und der Träger des Mikroſkopes ſey mit einer Scale verſehen, die in Linien getheilt, und überdieß noch mit einem Nonius verſehen iſt, um etwa $\frac{1}{10}$ L. meſſen zu können. Soll durch dieſes Inſtrument ein Object deutlich geſehen werden, ſo muß es eine ſolche Entfernung vom Objective haben, daß das, durch letzteres entworfene Bild an einen beſtimmten Platz vor das Ocular zu ſtehen komme. Wird nun von Innen auf das Objectivglas etwas von einer Flüſſigkeit gegeben, ſo wird ſich dieſe von unten an die convexe Seite der Linſe anlegen, von oben eine horizontale Ebene bilden und ſo die Form einer concavplanen Linſe

annehmen, deren Krümmungshalbmeſſer mit dem der inneren Fläche des Objectivglaſes zuſammenfällt und daher als bekannt angenommen werden kann. Durch dieſe Concavlinſe wird die Brennweite des Objectives vergrößert und man wird den Gegenſtand, welcher ſich vor demſelben befindet, weiter davon entfernen müſſen, um durch das Ocular ein deutliches Bild zu ſehen. Mißt man dieſe Entfernung genau, ſo kann man aus ihr, aus der Entfernung des Gegenſtandes vom Objective in dem Falle, wo man ihn ohne Flüſſigkeit deutlich ſieht, und aus der Brennweite des Objectives das Brechungsverhältniß der Flüſſigkeit berechnen, wie folgende Betrachtung lehrt: Es ſey p die Brennweite des Objectivglaſes für ſich allein, p_1 die Brennweite der flüſſigen Concavlinſe, und p_2 die Brennweite der convexplanen Doppellinſe; ferner heiße a die Entfernung des Gegenſtandes vom einfachen Objectivglaſe, a_1 dieſelbe vom Doppelobjective, α die Entfernung des Bildes von demſelben in beiden Fällen und f der Halbmeſſer der Hinterfläche des einfachen Objectives, ſo hat man:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_2},\ \frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{p_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\alpha}$$

und hieraus nach Wegſchaffung der Größen α, p und p_2

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}$$

aber weil $\frac{1}{p_1} = \frac{n-1}{f}$, wo n das Brechungsverhältniß der gebrauchten Flüſſigkeit iſt

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} \text{ und daher } n = f\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) + 1.$$

67. Genaue Reſultate geben jene Mittel, bei denen man das Brechungsverhältniß aus der Ablenkung eines Strahles in einem dreiſeitigen Prisma beobachtet und hieraus den Werth von n nach der Formel (F) deducirt. Iſt der brechende Winkel des Prisma's φ nur klein, ſo erleidet das Licht keine ſtarke Farbenzerſtreuung und man kann den austretenden Strahl wie einen einfachen behandeln, indem, falls ein Lichtkegel mit cylindriſcher Baſis einfällt, auch der austretende Lichtbüſchel noch nahe dieſe Geſtalt hat, und man über die Wahl des mittleren Strahles nicht in Verlegenheit kommen kann; iſt aber der brechende Winkel bedeutend, ſo wird in dem entſtehenden Farbenbilde der gelbe Strahl als der mittlere

angenommen, und der ihm entſprechende Werth nach der Formel (F) berechnet. Dazu iſt aber eine Vorrichtung nothwendig, mittelſt welcher man die Eintritts- und Austrittswinkel des Lichtſtrahles beſtimmt.

68. Eine recht zweckmäßige Vorrichtung dieſer Art gibt Barlow an; ſie iſt in Fig. 109 abgebildet und beſteht aus einem verticalen, getheilten Kreiſe, der auf einem Poſtamente ruht, welches ſich mittelſt Schrauben gehörig ſtellen und auch mittelſt einer Zugröhre um die verticale Axe drehen läßt. In der Ebene des getheilten Kreiſes ſind zwei Arme angebracht, wovon ſich jeder für ſich um die horizontale Axe drehen läßt, in welcher der Mittelpunct der Theilung jenes Kreiſes liegt. Am Ende iſt jeder dieſer Arme unter einem rechten Winkel gebogen und enthält einen ſchmalen Ausſchnitt als Diopter, ſeitwärts neben dem Mittelpuncte des Kreiſes befindet ſich ein Rahmen, der in a beſonders abgebildet iſt. In denſelben paßt eine Glasplatte mit vollkommen parallelen Wänden, auf welcher eine Linie verzeichnet iſt, die in der Verlängerung der Axe des Kreiſes liegen muß. In dieſe Lage läßt ſie ſich mittelſt eigener Schrauben bringen, welche an der Rahme angebracht ſind.

Will man nun mit dieſem Inſtrumente die Ablenkung eines Lichtſtrahles in einem dreiſeitigen Prisma meſſen, ſo legt man dieſes auf die Glasplatte ſo, daß die Kante am brechenden Winkel in die darauf verzeichnete gerade Linie fällt; hierauf neigt man eine der zwei Diopter am Kreiſe unter die Horizontallinie, und läßt von einem weißen in der Nähe befindlichen Papier ſtarkes Licht darauf fallen, richtet hierauf die obere Diopter ſo, daß das Auge hinter ihrem Ausſchnitte das Licht bekommt, welches durch die erſte Diopter und das Prisma gegangen iſt, und zugleich beide Ausſchnitte von der Kante am brechenden Winkel des Prisma halbirt werden. Lieſt man nun die Winkel am Kreiſe ab, welche die zwei Diopterarme mit dem horizontalen Durchmeſſer machen, ſo hat man die zur Berechnung des Brechungsverhältniſſes nöthigen Daten.

Die Theorie dieſes Verfahrens iſt ſehr einfach: Iſt AOB (Fig. 110) der getheilte Kreis, AB ſein horizontaler Durchmeſſer, C ſein Mittelpunct, aCb das Prisma, SC der einfallende, CO der gebrochene Strahl, und ſetzt man $BCS = e$, $BCO = \eta$, $aCb = \psi$, ſo hat man nach (26)

$$\sigma = 90 - e,\ \rho = 90^\circ + \psi - \eta,\ \text{alſo}$$
$$\sin\sigma = \cos e,\ \sin\rho = \cos(\eta - \psi)$$

und daher nach (*E*)

$$n = \sqrt{\left(\frac{[\cos e + \cos(\eta - \psi)\cos\psi]^2}{\sin\psi} + \cos(\eta - \psi)^2\right)}.$$

Ein ähnliches, ebenfalls ſehr zweckmäßiges Inſtrument zu dieſem Zwecke hat auch Prechtl (Dioptrik. Wien 1828 S. 124) angegeben.

69. Ich bediene mich zum Meſſen der Winkel σ und ρ, um die es ſich hier eigentlich handelt, mit Vortheil eines Theodoliths. Auf das Objectivglas des Fernrohres paßt ein Deckel, der ſtatt des gewöhnlichen metallenen Bodens eine ebene Glasplatte mit vollkommen parallelen Wänden hat. Ich richte das Fernrohr, nachdem dieſer Deckel aufgeſetzt worden iſt, auf einen leuchtenden Gegenſtand, am beſten auf ein hohes und ſchmales am Fenſter angebrachtes Zeichen, halte dann ohne etwas zu verrücken, das Prisma mit einer Fläche feſt an das Planglas ſo, daß die Kante am brechenden Winkel vertical ſteht und ſehe, welches Object nun in der Mitte des Geſichtsfeldes erſcheint, nehme das Prisma weg, drehe das Fernrohr um die verticale Axe, bis derſelbe Gegenſtand auch ohne Prisma in deſſen Geſichtsfelde erſcheint und leſe den hierzu nöthigen Brechungswinkel ab. Bei kleinen Prismen decke ich den Reſt des Objectives mit Papier, damit kein directes Licht in dasſelbe kommen kann. Um die Formel zu finden, nach welcher man dieſem Verfahren gemäß n berechnet, ſey A (Fig. 111) das Theodolithfernrohr, d ein Punct in demſelben, wo die verticale Drehungsaxe der optiſchen Axe begegnet, ab das Planglas am Deckel, acb das darauf liegende Prisma. So lange das Objectiv frei iſt, kommt das Licht vom Puncte S nach d; ſo wie aber das Prisma das Objectiv deckt, kann nur Licht von S_1 dahin gelangen. Soll nach Wegnahme des Prisma's, S_1 noch in d erſcheinen, ſo muß das Rohr um den Winkel S_1dS gedreht werden. Kennt man durch unmittelbare Meſſung S_1d und S_1e und den Winkel SeS_1, ſo erhält man den Winkel S_1dS durch die Gleichung $\sin SeS_1 = \frac{S_1d}{S_1e} . \sin S_1dS$. Man hat nun $\sigma = SeS_1 - cba = e - \psi$, $\rho = 0$, und hat daher

$$n = \frac{\sin(e - \psi)}{\sin\psi}.$$

70. Die bisher angeführte Methode mit einem Prisma läßt

ſich zwar an und für ſich nur auf feſte Körper anwenden; allein man kann ſie leicht auch auf tropfbare und ausdehnſame ausdehnen, wenn man ein hohles Glasprisma mit vollkommen parallelen Wänden zur Hand hat, das man mit der zu prüfenden Flüſſigkeit anfüllt, und dann verfährt, als hätte man es mit einem maſſiven feſten Prisma zu thun. Nur in dem Falle, wo man ausdehnſame Flüſſigkeiten auf dieſem Wege, der für ſie auch der einzige brauchbare iſt, unterſuchen will, iſt wegen des geringen Brechungsvermögens ſolcher Körper eine ganz beſondere Sorgfalt erforderlich, und man muß auch im Stande ſeyn, die Dichte dieſer Stoffe im Prisma in jedem Augenblick angeben zu können; darum iſt es nöthig, das Prisma mit einem Barometer und Thermometer zu verſehen. Biot und Arago und neueſtens Dulong haben Verſuche dieſer Art mit vorzüglicher Genauigkeit angeſtellt. Der Apparat, deſſen ſich die erſteren bedienten, iſt in Fig. 112 abgebildet. *A* iſt das Prisma, das ſich an eine Luftpumpe anſchrauben und luftdicht ſchließen läßt, und das durch Waſſerwagen, die man auf zwei Flügeln *B* anbringt, in eine horizontale Stellung gebracht werden kann. Das Prisma beſteht eigentlich aus einer Glasröhre, die an beiden Enden ſchief gegen ihre Axe abgeſchnitten und mittelſt ebener Platten geſchloſſen iſt.

71. Die Rechnung, nach welcher das Brechungsverhältniß der Gaſe ausgemittelt wird, iſt folgende: Es ſeyen *abcd* und *efgh*, die beiden Seitengläſer (Fig. 113), deren Wände den brechenden Winkel ψ einſchließen. Es falle ein Lichtſtrahl nach der Richtung *Sk* ein, mache mit dem Einfallslothe den Winkel *a* und werde ſo gebrochen, daß er mit demſelben den Winkel *b* einſchließt, unter welchem daher dieſer Strahl die Fläche *cd* trifft, beim Austritt aus dieſer Fläche werde er ſo gebrochen, daß der Brechungswinkel $= c$ wird und der Strahl unter dem Winkel *d* auf *ef* fällt, mit dem Winkel *e* im zweiten Glaſe weiter geht und endlich unter dem Winkel *f* austritt. Es nimmt daher der Strahl einen ſolchen Weg durch das Prisma, daß er nach der Brechung mit ſeiner urſprünglichen Richtung *SO* einen Winkel *g* einſchließt. Es ſey nun das Brechungsverhältniß beim Eintritt von atmoſphäriſcher Luft in Glas $1:n$. Sind beide Glasplatten von einerlei Beſchaffenheit und Dichte, ſo gilt dieſes Brechungsverhältniß für beide. Das Brechungsverhältniß von Glas in die Gasart im Prisma oder in den leeren Raum

ſey $n(1-\omega):1$, wo ω nur ein kleiner Bruch iſt, deſſen höhere Potenzen nicht in Betrachtung kommen. Man hat daher

$$\sin b = n \sin a, \quad \sin c = \frac{\sin b}{n(1-\omega)} = \frac{\sin a}{1-\omega}$$

$$\sin e = n(1-\omega)\sin d, \quad \sin f = \frac{\sin e}{n} = (1-\omega)\sin d.$$

Iſt das Prisma gegen den einfallenden Strahl ſo geneigt, daß die Brechung ein kleinſtes wird, ſo iſt $a = f$, $c = d = \frac{1}{2}\psi$, $\frac{g}{2} = a \pm c$, wo das obere Zeichen gilt, wenn das im Prisma enthaltene Gas das Licht weniger bricht als die atmoſphäriſche Luft und das untere, wenn das Gegentheil Statt findet. Wir wollen den Ausdruck für den zweiten Fall einrichten und $\frac{g}{2} = a - c$ ſetzen, woraus dann folgt:

$$a = \frac{g}{2} + c = \frac{g}{2} + \frac{\psi}{2} \text{ und } \sin a = \sin\left(\frac{g}{2} + \frac{\psi}{2}\right).$$

Man hat ferner

$$\sin c = \sin\frac{\psi}{2} = \frac{\sin a}{1-\omega} = \frac{1}{1-\omega}\,.\,\sin\left(\frac{g}{2} + \frac{\psi}{2}\right)$$

d. i.

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{1}{1-\omega}\left(\sin\frac{g}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{g}{2}\right)$$

oder

$$1-\omega = \left(\cos\frac{g}{2} + \frac{\sin\frac{g}{2}}{\text{tang.}\frac{\psi}{2}}\right).$$

Weil g für Gasarten ſtets nur ein kleiner Winkel iſt, ſo iſt es geſtattet zu ſetzen:

$$\sin\frac{g}{2} = \frac{g}{2}, \quad \cos\frac{g}{2} = \sqrt{\left(1 - \frac{g^2}{4}\right)} = 1 - \tfrac{1}{8}g^2.$$

Man erhält daher:

$$1 - \omega = 1 - \tfrac{1}{8}g^2 + \frac{g}{2\,\text{tang}\frac{\psi}{2}}$$

und

$$\omega = \frac{g^2}{8} - \frac{g}{2\,\text{tang}\frac{\psi}{2}}.$$

Hier iſt vorausgeſetzt worden, daß die Glaswände des Prisma's vollkommen parallel ſind. Ob dieſes der Fall iſt oder nicht, erkennt man leicht daraus, daß man das Prisma mit atmoſphäriſcher Luft von gleicher Beſchaffenheit mit der äußeren füllt und beobachtet, ob eine Ablenkung eines Lichtſtrahls Statt findet, oder nicht. Im erſten Falle ſind die Wände nicht parallel und man muß den Einfluß der Neigung der Seitenwände in Rechnung bringen. Dieſes geſchieht dadurch, daß man den Ablenkungswinkel genau mißt und ihn zur Größe g addirt, wenn dieſe Ablenkung mit der vom unterſuchten Gaſe herrührenden auf einerlei Seite fällt, widrigenfalls ihn von derſelben Größe abzieht.

72. Wenn das Prisma ganz luftleer gemacht und dann der Ablenkungswinkel eines durchgehenden Lichtſtrahls gemeſſen wird, ſo kann man ſchon aus dieſem einzigen Factum das Brechungsverhältniß der atmoſphäriſchen Luft beſtimmen, und aus dieſem und der Ablenkung eines Strahls in dem mit einer Gasart gefüllten Prisma auf das der Gasart ſchließen. Dieſe Methode hat aber eine ſchwierige Seite darin, daß man aus dem Prisma die Luft nur mittelſt einer Luftpumpe herausziehen kann, durch welche nie ein luftleerer Raum hervorgebracht wird. Es kommt einem aber dabei das durch Erfahrung bewährte Geſetz zu Statten, daß das Brechungsvermögen einer Subſtanz oder der Werth von $(n^2 - 1)$ für dieſelbe mit ihrer Dichte in geradem Verhältniſſe wächſt. Setzt man für die Dichte eines Gaſes $= 1$ den Werth $(n - \omega)^2 - 1 = p$, ſo iſt ſie für die Dichte δ gleich $p\,\delta = P$.

Iſt nun für irgend ein Gas von der Dichte δ_1, in welches ein Lichtſtrahl vom leeren Raume kommt $\frac{\sin^2 a}{\sin^2 b} - 1 = P$ und für ein anderes $\frac{\sin^2 a}{\sin^2 c} - 1 = P_1$, ſo wird

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \sqrt{(P+1)},\ \frac{\sin a}{\sin c} = \sqrt{(P_1+1)} \text{ und}$$

$$\frac{\sin c}{\sin b} = \sqrt{\left(\frac{1+P}{1+P_1}\right)}$$

wenn aber $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{1}{1-\omega}$ iſt, ſo wird

$$\sqrt{\left(\frac{1+P}{1+P_1}\right)} = \frac{1}{1-\omega} \text{ und } P_1 = (1+P)(1-\omega)^2 - 1.$$

Wenn P_1 das Brechungsvermögen der atmoſphäriſchen Luft bei der Dichte δ_1, P_2 daſſelbe für eine Gasart von der Dichte δ_2 bezeichnet, ſo iſt $P = \frac{P_1 \delta}{\delta_1}$ und $P_1 = \frac{P_2 \delta_1}{\delta_2}$. Dieſe Werthe in obige Gleichung geſetzt geben

$$\frac{P_2 \delta_1}{\delta_2} = (1-\omega)^2 \left(1 + \frac{P_1 \delta}{\delta_1}\right) - 1 \text{ oder}$$

$$P_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} \left\{ (1-\omega)^2 \left(1 + \frac{P_1 \delta}{\delta_1}\right) - 1 \right\}.$$

Iſt nun δ_1 die Dichte der atmoſphäriſchen Luft bei einem Barometerſtande von $0^m.76$ und der Temperatur $0°$ C, b die auf $0°$ reducirte Barometerhöhe in der äußeren Luft, b_1 die in einem Gaſe, t die Lufttemperatur, t_1 die Temperatur des Gaſes, ſo iſt:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{0.76}{b_1}(1 + 0.00375\, t_1), \quad \frac{\delta}{\delta_1} = \frac{b}{0.76\,(1 + 0.00375\, t)}.$$

Dieſe Werthe in obige Formel geſetzt geben

$$P_2 = \frac{0.76}{b_1}(1 + 0.00375\, t_1)$$

$$\left\{ (1-\omega)^2 \left(1 + \frac{P_1 b}{0.76\,(1 + 0.00375\, t)}\right) - 1 \right\}.$$

73. Handelt es ſich nicht um den abſoluten Werth des Brechungsexponenten, ſondern um ſein Verhältniß zu irgend einem ſchon bekannten, ſo kann man mit Vortheil das von Dulong angegebene Verfahren anwenden. Es wird ein hohles Prisma mit zwei ebenen Glaswänden und einem brechenden Winkel von 145° mit einem Apparate in ſolche Verbindung geſetzt, daß man daraus die atmoſphäriſche Luft entfernen und irgend ein anderes Gas einfüllen, daſſelbe nach Belieben verdünnen und verdichten, und in jedem Falle die Dichte und Temperatur angeben kann. Füllt man das Prisma zuerſt mit atmoſphäriſcher Luft und ſieht durch daſſelbe mittelſt eines feſt aufgeſtellten Fernrohres auf ein fernes Ziel, entfernt dann die atmoſphäriſche Luft und erſetzt ſie durch ein anderes Gas; ſo wird man es durch Verdichten oder Vedünnen deſſelben bald dahin bringen, daß durch das Prisma das Ziel an derſelben Stelle des Geſichtsfeldes erſcheint, mithin die Brechung gerade ſo wie in atmoſphäriſcher Luft erfolgt. Setzt man nun als erwieſen voraus, daß das Brechungsvermögen in demſelben Verhältniſſe wächſt, in

welchem die Dichte des Gaſes zunimmt und umgekehrt, ſo wird man leicht die Größe der Brechungsexponenten aller Gaſe, mit denen dieſer Verſuch angeſtellt wurde, bei derſelben Dichte, in Bezug auf atmoſphäriſche Luft berechnen können. Dieſes Verfahren hat den Vorzug, daß es von jeder Bogentheilung am Inſtrumente, vom genauen Parallelismus der Wände des Prisma's, von der Beſtimmung ſeines brechenden Winkels ꝛc. unabhängig iſt, und da zugleich obige Proportionalität zwiſchen dem Brechungsvermögen und der Dichte des Gaſes als bewieſen vorausgeſetzt werden kann, ſo läßt es ſich mit großem Vortheil für jedes Gas anwenden, für welches das Brechungsverhältniß noch nicht völlig bekannt iſt.

74. Ein ſehr ſcharfſinniges Mittel, das Brechungsverhältniß feſter und tropfbarer Körper zu beſtimmen, iſt von Wollaſton angegeben. Es beruht auf der Beſtimmung des Einfallswinkels, der nicht weiter vergrößert werden darf, ohne daß die Brechung in eine Reflexion übergeht.

Zur näheren Darſtellung dieſer Methode dient folgendes: Es ſey A (Fig. 114) der Körper, deſſen Brechungsverhältniß unterſucht werden ſoll, und der zu dieſem Zwecke an der unteren Fläche eines vierſeitigen, rechtwinkeligen Glasprisma's B befeſtiget iſt. Es falle ein Strahl in der Richtung ab auf das Glas, gehe nach der Brechung in der Richtung bc weiter, und werde an der Berührungsfläche der zwei Körper nach cd zurückgeworfen ſo, daß er beim Austritt die Richtung de annimmt. Man ſetze nun voraus, daß A das Licht weniger bricht als das Glas. Heißt das Brechungsverhältniß beim Übergange aus der Luft in die Subſtanz A, $n:1$, beim Übergange von Luft in Glas $n_1:1$, ſo iſt für den Einfallswinkel $\frac{1}{2}dcb=\gamma$ bei welchem die Reflexion anfängt, $\sin\gamma=\frac{n}{n_1}$. Man ſieht leicht ein, daß der Strahl unter demſelben Winkel α in das Glas eintritt, unter welchem er es verläßt und daß der Winkel β, unter welchem der Strahl nach der erſten Brechung gegen pq geneigt iſt, dem gleichet, welchen er nach der Reflexion mit mn macht. Man hat daher:

$$\gamma=90°-\beta,\quad \cos\gamma=\sin\beta=\frac{1}{n_1}\sin\alpha,\ \text{und}$$

$$\cos\gamma^2=\frac{\sin^2\alpha}{n_1^2}=1-\sin^2\gamma$$

d. i.

$$1 - \frac{n^2}{n_1^{\,2}} = \frac{\sin^2\alpha}{n_1^{\,2}} \text{ mithin } n^2 = n_1^{\,2} - \sin^2\alpha \text{ und}$$
$$n = \sqrt{(n_1^{\,2} - \sin^2\alpha)}.$$

75. Um den Werth von n ohne Rechnung zu finden, hat Wollaſton ein eigenes Inſtrument angegeben. Um die Einrichtung desſelben einzuſehen, denke man ſich ein rechtwinkeliges Dreieck def (Fig. 114), wovon de in der Richtung des ausfahrenden Strahles, fd aber in der Richtung des Einfallslothes auf mn liegt und wo $ef:de = n_1:1$ iſt. Da hat man nun

$$de:eg = 1:\sin\alpha, \text{ mithin } ef:eg = n_1:\sin\alpha.$$

und

$$ef^2:eg^2 = n_1^{\,2}:\sin^2\alpha \text{ oder } ef^2:ef^2 - eg^2 = n_1^{\,2}:n_1^{\,2} - \sin\alpha^2$$
$$\text{d. i. } de:fg = 1:\sqrt{(n_1^{\,2} - \sin\alpha^2)} \text{ und } fg = n.de.$$

Dieſes Inſtrument ſtellt Fig. 115 dar. Auf einer Tafel ab iſt ein glattes Bret cd befeſtiget, das in der Mitte ausgehöhlt iſt, um den zu unterſuchenden Körper A aufnehmen, und darauf den Glaswürfel ſo ſtellen zu können, daß er zugleich auf dem Brete aufliegt. An dieſes Bret iſt ein anderes cf mittelſt einer Charnier befeſtiget, an dieſes auf gleiche Weiſe ein drittes fg, daran ein viertes gh und von der Mitte des Bretes fg geht eine in einer Charnier bewegliche Stütze ik nach gh herab. cf, welches die Stelle der Linie de in der vorigen Figur vertritt, iſt 10 Z. lang und hat 2 Abſehen, fg ſtellt die Linie ef der vorigen Zeichnung vor, und hat bei Wollaſtons Inſtrument, der ein Prisma von Flintglas brauchte, bei dem $n_1 = 1.583$ war, eine Länge von 15.83 Z. Man muß es ſtets ſo einrichten, daß man $cf:fg = 1:n_1$ hat. gh wird in gleiche Theile getheilt, deren jeder gleich fc iſt.

Beim Gebrauche wird fc in eine ſolche Lage gebracht, daß man von dem Farbenſaume, der ſich beim Aufhören der totalen Reflexion zeigt, das Gelb durch das Abſehen wahrnimmt, als die Farbe von mittlerer Brechbarkeit, und die Zahl abgeleſen, welche k auf gh abſchneidet. Dieſe Zahl gibt das Brechungsverhältniß ſelbſt an.

76. Wollaſton hat dieſes Inſtrument auch für undurchſichtige Körper gebraucht, und ihr Brechungsverhältniß nach demſelben Grundſatze beſtimmt, wie das der Durchſichtigen. Indeß hat Laplace aus theoretiſchen Gründen gezeigt, daß man für undurch-

ſichtige Körper anders verfahren müſſe, weil man für dieſe nicht $n = \sqrt{(n_1^2 - \sin\alpha^2)}$, ſondern $n = \sqrt{(n_1^2 - 2\sin^2\alpha)}$ hat. Malus unterſuchte nach dieſer Regel das Brechungsverhältniß des Bienenwachſes, das er ſowohl im feſten und undurchſichtigen, als auch im flüſſigen durchſichtigen Zuſtande haben konnte, und fand Laplace's Behauptung beſtätiget.

Man kann ſich jedoch auch für ſolche Körper der vorhin angegebenen Vorrichtung bedienen, allein ſie gibt das Reſultat nicht ohne alle Rechnung, wie im vorigen Falle, erleichtert dieſelbe aber bedeutend. Es iſt nämlich (Fig. 114)

$$ef : \sqrt{(2fg^2 - ef^2)} = n_1 : \sqrt{(n_1^2 - 2\sin^2\alpha)}$$

alſo

$$de : \sqrt{(2fg^2 - ef^2)} = 1 : \sqrt{(n_1^2 - 2\sin\alpha^2)}.$$

Heißt die Leiſte, welche bei Wollaſton 15.83 Z. hatte, l, ſo iſt $\sqrt{(2fg^2 - ef^2)} = \sqrt{(2fg^2 - l^2)}$ noch zu berechnen, um den Werth zu erhalten, den man ſucht.

77. Durch alle dieſe Mittel lernt man wohl das Brechungsverhältniß für die mittleren Strahlen, nicht aber für jeden einzelnen Strahl kennen. Wäre das Farbenbild ſelbſt oder die einzelnen darin befindlichen Farben ſcharf begrenzt, ſo könnte man wohl die Ablenkungswinkel jedes einzelnen farbigen Strahles ausmitteln; in Ermanglung einer ſolchen ſcharfen Begrenzung muß man einen anderen Weg einſchlagen. Auf dieſen wird man durch die in einem aus homogenem Lichte beſtehenden Farbenbilde vorhandenen dunklen Linien geführt, die ſtets an derſelben Stelle jeder einzelnen Farbe vorkommen, die brechende Subſtanz mag wie immer beſchaffen ſeyn. Genaue Reſultate erhält man auf folgende Weiſe: Man bringe an einem geſchloſſenen Fenſterladen eine ſchmale aber lange Öffnung an, durch welche directes Sonnenlicht mittelſt eines Helioſtats ins Zimmer dringt und ſtelle ein dreieckiges Prisma A (Fig. 116) hinter dieſelbe, damit ein horizontales Farbenbild entſtehe. In den Weg dieſer Strahlen ſtelle man auf einer horizontalen getheilten Scheibe B, die hinreichend weit von A entfernt iſt, ein zweites Prisma C, deſſen Zerſtreuungsvermögen unterſucht werden ſoll. Dieſe Scheibe iſt mit einem Theodolith D verbunden, in deſſen Fernrohr E die zum zweitenmale gebrochenen farbigen Strahlen gelangen können. Man begreift leicht, daß man, da die Bögen zwiſchen je zwei dunklen Linien im Farbenbilde vorzüglich ſcharf begrenzt erſcheinen, dieſelben

leicht genau meſſen kann. Thut man dieſes für mehrere brechende Mittel, ſo kennt man aus dem Verhältniſſe der Bögen zwiſchen je zwei homologen Linien auch das der Zerſtreuung des Lichtes von gleicher Brechbarkeit. Fraunhofer wählte als fixe Grenzpuncte des Farbenbildes die Stellen, wo ſich die dunklen Linien B, C, D, E, F, G und H (Fig. 105) befinden, und maß daher die Bögen BC, CD, DE ꝛc. Weil man da das Ocular verrücken muß, um bei verſchiedenem Lichte dieſe dunklen Linien zu ſehen, ſo kann man mit Sicherheit ſtets nur kleine Bögen meſſen, nicht aber Bögen wie BF oder BH. Will man das Brechungsverhältniß für einzelne Strahlen ausmitteln, ſo ſoll bei jedem derſelben der Strahl das Prisma unter demſelben Winkel verlaſſen, unter dem er eintritt. Dieſer Winkel hat offenbar für jede Stelle des Farbenbildes eine andere Größe; man wählt aber immer den, welcher den Strahlen entſpricht, die mitten zwiſchen den zwei dunklen Linien ſich befinden, deren Entfernung in Bogen man meſſen will. Die Formel

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \psi)}{\sin \frac{1}{2}\psi}$$

führt dann zum Reſultate.

Um den Winkel γ meſſen zu können, wird auf die Scheibe B ein Riegel mit einem auf ihm befeſtigten Fernrohr aufgelegt, an dem zwei ſtählerne Spitzen genau parallel mit der Axe des Fernrohres vorſtehen. Dieſe werden mit der erſten Fläche des Prisma's genau in Berührung gebracht, im welchem Falle dann dieſe Fläche mit der Axe des Rohres und mit dem Riegel parallel läuft. Man kann auch dadurch zum Ziele gelangen, daß man das Prisma C ſo weit mit der Scheibe dreht, bis der darauf fallende Lichtſtrahl in ſich ſelbſt reflectirt wird, in welchem Falle die reflectirende Ebene auf der Richtung dieſes Strahles ſenkrecht ſteht.

Hat man dn aus obiger Formel gefunden, ſo ergibt ſich aus $\frac{dn}{n-1}$ das geſuchte Zerſtreuungsverhältniß.

78. Ein anderes minder genaues, aber ſehr ſinnreiches Mittel zur Beſtimmung der Farbenzerſtreuung eines Körpers hat Herſchel angegeben. Man bringe an einem Fenſterladen zwei Öffnungen A und B (Fig. 117) an, wovon die eine doppelt ſo hoch iſt, als die andere und deren Entfernung $= m$ von einander genau bekannt iſt, ſtelle hinter denſelben ein Prisma von dem Stoffe auf,

um deſſen Zerſtreuungsverhältniß es ſich handelt, ſo daß, wenn man durch dasſelbe auf jene Öffnungen ſieht, die Ablenkung des Lichtes ein Minimum ſey und dieſelbe von der niederen gegen die höhere Öffnung erfolge. Da wird man von jeder ein rothes und ein violettes Bild wahrnehmen, wie *a* und *b*. Nun entferne man das Prisma vom Fenſter, ohne den Einfallswinkel des Lichtes zu ändern, bis das violette Bild der längeren Öffnung genau auf das rothe der kürzeren zu liegen kommt und meſſe die Entfernung *M* des Prisma's vom Fenſter. Da iſt nun nach *G* (S. 398)

$$\frac{m}{M} = \sin\gamma = d\gamma$$

mithin

$$dn = \frac{m}{2M}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\left(\text{arc}\sin\frac{m}{M} + \psi\right)}{\sin\frac{1}{2}\psi}.$$

Dieſe Methode ſetzt zwar voraus, daß man die Grenzen der Farben des Spectrums genau zu erkennen im Stande ſey, welches ſtreng genommen nicht der Fall iſt, allein wenn man nur das Licht von einer ſolchen Grenze auf das Auge wirken läßt, alles übrige aber durch einen Schirm abhält, ſo kann man doch eine Genauigkeit des Urtheils erreichen, welche für viele Fälle hinreichend iſt.

79. Oft handelt es ſich nur darum anzugeben, welcher von zwei Körpern ein größeres Brechungs- oder Zerſtreuungsvermögen beſitzt, oder das Verhältniß dieſer Vermögen in zwei Körpern zu beſtimmen, ohne die Kenntniß ihrer abſoluten Größe nöthig zu haben. Dieſe Aufgabe kann man in der Regel leichter löſen, als die vorhergehenden.

Hat man von zwei Subſtanzen dreiſeitige Prismen von gleichen brechenden Winkeln und legt man ſie ſo auf einander, daß ſie ein vierſeitiges Prisma mit parallelen Wänden bilden, ſo müſſen ſie, vor das Auge gehalten, ein Object an derſelben Stelle unverrückt zeigen, wenn ſie ein gleiches Brechungsvermögen haben ſollen. Es iſt leicht einzuſehen, daß im Falle einer Verrückung des Bildes dasjenige Prisma das Licht ſtärker bricht, von deſſen brechendem Winkel das Bild entfernt wird. Beſitzen zwei ſolche Prismen einerlei Farbenzerſtreuung, ſo zeigen ſie in der genannten Lage auch keinen farbigen Saum an den Objecten. Bemerkt man einen ſolchen Saum, ſo hat dasjenige Prisma das ſtärkere Zerſtreuungsvermögen, gegen deſſen brechenden Winkel das Roth dieſes Saumes liegt.

80. Das Verhältniß der Farbenzerſtreuung zweier Körper erfährt man nahe, wenn man von ihnen Prismen macht und den brechenden Winkel des einen ſo lange ändert, bis das Doppelprisma, das ſie geben, wenn man ſie, die brechenden Winkel einander entgegengeſetzt, über einander legt, ein farbenloſes Bild gibt. In dieſem Falle ſtehen die Zerſtreuungsverhältniſſe im verkehrten Verhältniß ihrer brechenden Winkel.

81. Mit dieſem Verfahren verwandt iſt das von Boscowich angegebene, das Verhältniß des Zerſtreuungsvermögens flüſſiger Körper zu beſtimmen. Er empfiehlt dazu ein hohles Prisma mit veränderlichem brechenden Winkel, legt ein Glasprisma (Fig. 118) verkehrt daran, füllt in erſteres die zu prüfende Flüſſigkeit, und ändert den brechenden Winkel des flüſſigen Prisma's ſo lange, bis ein Strahl, der auf das erſtere ſenkrecht auffällt, unzerlegt durch beide Prismen geht. Man kann auch, wie Boscowich gethan, Waſſer, deſſen Zerſtreuungsvermögen man kennt, in das hohle Prisma einfüllen, und an dieſes ein Prisma von der Glasart anlegen, deren zerſtreuende Kraft man kennen lernen will.

Um die zur Berechnung dieſer Größe nöthige Formel zu erhalten, ſey abc (Fig. 119) das Waſſerprisma, adb das daran liegende Glasprisma, erſteres habe in dem Falle, wo die äußerſten Strahlen beider Farbenbilder zuſammenfallen, den brechenden Winkel $abc = \psi_{,}$, letzteres den Winkel $dab = \psi$. Es falle ein Lichtſtrahl Sl ſenkrecht auf die Fläche ad. Dieſer geht ungebrochen nach ab, wird daſelbſt unter dem Einfallswinkel anlangen, welcher dem brechenden Winkel ψ gleich iſt, und ſo gebrochen werden, daß er mit dem Einfallslothe den Winkel x macht, hierauf ſeinen Weg fortſetzen, die Wand cb unter dem Einfallswinkel r treffen, und dieſelbe unter dem Brechungswinkel η verlaſſen. Heißt das Brechungsverhältniß beim Eintritt des Lichtes von Außen in das erſte Prisma $1 : n_{,}$, beim Eintritt von Außen ins zweite Prisma $1 : n$, mithin beim Übergange vom erſten Prisma ins zweite $n_{,} : n$, ſo hat man:

$$n_{,} \sin x = n \,.\, \sin \psi,\ \sin \eta = n_{,} \sin (\psi_{,} - x) \text{ und}$$
$$\eta = \psi_{,} - \psi + r$$

Ferner durch Differenziiren der erſten Gleichung:

$$dn_{,} \,.\, \sin x + n_{,}\, dx \cos x = dn \,.\, \sin \psi \text{ und hieraus}$$

$$n_{,} dx = \frac{dn \sin \psi - dn_{,} \,.\, \sin x}{\cos x} = \frac{n_{,} dn}{n \cot x} - \frac{dn_{,}}{\cot. x}.$$

Ferner wird durch Differenziiren der zwei letzten obigen Gleichungen

$$d\eta \cos\eta = dn_{,} . \sin(\psi_{,} - x) - n_{,} dx . \cos(\psi_{,} - x); \; d\eta = dr$$

und hiemit

$$\frac{dr \cos\eta}{\cos(\psi_{,} - x)} = dn_{,} . \tang(\psi_{,} - x) - n_{,} dx$$

oder für $n_{,} dx$ obigen Werth geſetzt:

$$\frac{dr . \cos\eta}{\cos(\psi_{,} - x)} = dn_{,} . \tang(\psi_{,} - x) - \frac{n_{,} dx}{n \cot x} + \frac{dn_{,}}{\cot . x}$$

daher für $dr = 0$

$$dn_{,} . \tang(\psi_{,} - x) + \frac{dn_{,}}{\cot . x} = \frac{n_{,} dn}{n \cot . x}$$

und

$$\frac{dn}{dn_{,}} = \frac{n}{n_{,}} \left(\frac{\tang . (\psi_{,} - x)}{\tang . x} + 1 \right),$$

wo x durch die Gleichung $\sin x = \frac{n}{n_{,}} . \sin\psi$ gegeben iſt.

82. Auf demſelben Grundſatze beruht auch Brewſter's Verfahren, das Zerſtreuungsverhältniß zweier Stoffe zu finden, welches auf folgende Weiſe praktiſch ausgeführt wird. Man legt die zwei Prismen mit verkehrten brechenden Winkeln auf einander und ſieht durch dieſelben auf einen entfernten Gegenſtand. Erſcheint dieſer farbenlos, ſo iſt das Verhältniß ihrer brechenden Winkel ohnehin das ihres Zerſtreuungsverhältniſſes; tritt dieſer Fall nicht ein, ſo dreht man eines der beiden Prismen, ohne es aus der Berührung mit dem anderen zu bringen, bis das geſehene Object mit farbenloſen Rändern erſcheint. Man bedient ſich hierzu mit Vortheil folgender Vorrichtung: *AB* (Fig. 120) iſt eine Röhre, die ſich mittelſt einer Klemme wie ein gewöhnliches Zugfernrohr auf einem Poſtamente befeſtigen läßt und auf beiden Seiten offen iſt. Auf ein Ende paßt ein durchbohrter Deckel, innerhalb welchem eines der zwei Prismen *E* befeſtiget wird, die man unterſuchen will. An derſelben Seite läßt ſich über dieſe eine zweite Röhre *CD* mit einem in Grade getheilten Deckel ſchieben, innerhalb welchem das zweite Prisma *F* angebracht werden kann. Immer ſoll dasjenige, welches das ſtärkere Zerſtreuungsvermögen hat, das äußere ſeyn. Dem getheilten Rande gegenüber iſt auf der Röhre *AB* ein verticaler Stift als Index angebracht,

der zugleich mit einem Nonius verſehen ſeyn kann und zum Meſſen des Winkels dient, um welchen man die äußere Röhre gedreht hat.

83. Beim Beginn des Verſuches wird die äußere Röhre weggenommen und das Prisma *E* ſo gerichtet, daß die Kante des brechenden Winkels vertical ſteht; daß dieſes der Fall ſey, erkennt man, wenn man durch das Prisma auf einen frei hängenden verticalen Faden hinſieht; erſcheint deſſen Bild durch das Prisma in der Verlängerung desſelben mit freiem Auge geſehen, ſo iſt die rechte Stellung des Prisma's getroffen, wo nicht, ſo muß man letzteres mittelſt des Deckels ſo weit drehen, bis dieſes Statt findet. Iſt dieſes erreicht, ſo wird das zweite Prisma *F* über das erſte angebracht und wieder wie das vorige geſtellt, jedoch ſo, daß ſein brechender Winkel eine entgegengeſetzte Lage hat. Sind beide Prismen gut geſtellt, ſo ſieht man durch ſie auf eine ſchwarze Tafel, auf welcher ein kleines weißes Rechteck verzeichnet iſt und dreht die Röhre *CD* mit dem daran befeſtigten Prisma ſo weit, bis die Ränder dieſes Rechteckes ganz farbenlos erſcheinen, und notirt den hierzu nöthigen Drehungswinkel.

Die Übereinſtimmung dieſes Verfahrens mit dem vorhergehenden erſieht man aus Folgendem. Zwei Prismen erſcheinen dann für uns hinreichend achromatiſch, wenn ſie gleich lange Farbenbilder geben, in denen die Farben eine entgegengeſetzte Lage haben. Wenn daher die brechenden Winkel der Prismen nicht von der Art ſind, daß dieſes ohne weitere Änderung derſelben Statt findet, ſo iſt ein Farbenbild länger als das andere und man muß Mittel ſuchen, das längere Farbenbild zu verkürzen. Dieſes geſchieht entweder durch Verkleinerung des brechenden Winkels, wie es im vorigen Falle geſchah, oder auch durch Drehen des Prisma's; denn dadurch bekommt das Farbenbild eine ſchiefe Lage und deſſen horizontale Länge wird in demſelben Verhältniſſe vermindert, in welchem der Coſinus des Drehungswinkels wächſt. Heißt daher der Brechungswinkel des zu drehenden Prisma ψ_2, der Drehungswinkel μ, ſo vertritt dieſes Prisma die Stelle eines anderen von demſelben Materiale mit verticaler Kante, deſſen brechender Winkel ψ_1 durch die Gleichung

$$\tang \psi_1 = \tang. \psi_2 . \cos \mu$$

iſt. Demnach hat man zur Berechnung des Zerſtreuungsverhältniſſes die Gleichungen

$$x = \frac{n}{n_1} . \sin \psi; \ \tang \psi_1 = \tang \psi_2 \cos \mu,$$

$$\frac{dn}{dn_{\prime}} = \frac{n}{n_{\prime}}\left(\frac{\tang(\psi_{\prime} - x)}{\tang . x} + 1\right).$$

Die Tafeln XVIII und XIX enthalten mehrere Körper mit den ihnen entſprechenden Brechungs- und Zerſtreuungsexponenten.

F. Interferenz des Lichtes.

84. Daß zwei Lichtſtrahlen bei ihrer Durchkreuzung auf einander einwirken, ſich interferiren, hat zuerſt Young aus ſeiner Anſicht über die Natur des Lichtes vermuthet, und weil er ſah, daß ſich aus der Annahme dieſer Einwirkung viele verwickelte Lichtphänomene mit großer Leichtigkeit erklären laſſen, das Princip der Interferenz an die Spitze ſeiner optiſchen Unterſuchungen geſtellt. Erſt ſpäter hat er durch einen directen Verſuch die Statthaftigkeit dieſes Princips nachgewieſen. Seine Verſuchsweiſe iſt aber mit großen Schwierigkeiten verbunden und gibt kein vollkommen reines Reſultat. Fresnel hat zuerſt gelehrt, den Interferenzverſuch genau anzuſtellen, allein der Apparat, deſſen er ſich dazu bediente, mag wohl, in der Art eingerichtet, wie er ihn beſchrieb, in ſeinen Händen gute Dienſte geleiſtet haben, aber ein nicht ſehr geübter Experimentator wird ohne Zweifel mit demſelben nie vollkommen Herr des bezweckten Phänomens werden, und ſelbſt im glücklichſten Falle wird dieſes nicht mit der gehörigen Schärfe meßbar ſeyn, während man durch einige Abänderungen dieſes Apparates und durch Anwendung einiger neuer Vorſichtsmaßregeln beim Gebrauch desſelben das Interferenzphänomen leicht und vollkommen rein darſtellen kann.

85. Fresnel's Apparat beſteht bekanntlich aus zwei nur wenig gegen einander geneigten Planſpiegeln, die man mittelſt Wachs auf ein Poſtament befeſtiget und in eine ſolche Lage bringt, daß ein von einem leuchtenden Puncte ausgehender, auf ſie fallender Strahlenkegel in verticalem Sinne gegen beide gleich geneigt iſt. Als leuchtenden Punct wählt Fresnel das Sonnenbild im Brennpuncte einer guten, ſtarken Sammellinſe, und das Phänomen ſelbſt wird durch eine andere Sammellinſe angeſehen. Statt dieſes leuchtenden Punctes wähle man lieber eine verticale Lichtlinie, die man erhält, wenn man mittelſt eines Helioſtats durch eine hohe und ſchmale Spalte am Fenſterladen einen horizontalen Lichtbüſchel leitet und ihn gleich an der Spalte durch ein Glas, welches ein Segment eines Kreiscylinders von der Höhe der Öffnung vorſtellt, ge-

hen läßt. Dieſer Lichtbüſchel wird in einiger Entfernung vom Glaſe zu einer verticalen Lichtlinie vereinigt, von welcher die Strahlen in horizontalem Sinne divergiren und auf die Spiegel geleitet werden können. Die Spiegel ſelbſt werden am beſten aus ſchwarzem Glaſe verfertiget und wenn ſie vollkommen eben ſind, in eine Faſſung ſo eingeſetzt, wie Fig. 121 zeigt. *AB* iſt eine ebene Metallplatte, die den Spiegeln zur verticalen Unterlage dient und an welche ſie mittelſt eigener Klammern *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* angedrückt werden, während Stifte wie *i*, *k*, *l*, verhindern, daß ſie nicht längs derſelben hingleiten können. Ähnliche Stifte halten einen der zwei Spiegel etwas von der Platte *AB* entfernt, damit er ſich feſt an die Klammer *c* anlege, während der andere durch eine Feder herausgedrückt wird und an die Klammer *d* ſich anſtemmt. Die in *d* angebrachte Schraube dient dazu, die Neigung der Spiegel gegen einander zu ändern, die zu *h* gehörige aber, um die Linie, in welcher beide an einander ſtoßen, mit der Ebene der Platte *AB*, alſo auch mit *MN* parallel zu machen. Das Interferenzphänomen ſieht man am beſten durch ein gutes achromatiſches Fernrohr an, bringt aber am Objective desſelben rechts und links einen verticalen Schirm an, ſo daß von demſelben nur ein Streifen von der halben Größe der ganzen Öffnung übrig bleibt.

86. Will man mit dieſem Apparate den Verſuch machen, ſo leitet man die vom cylindriſchen Glaſe kommenden Strahlen auf die Spiegel, ſieht mittelſt des Fernrohres in dieſelben hinein, und richtet das Ocular ſo, daß man die Bilder der Lichtlinie in jedem Spiegel deutlich ſieht. Stehen dieſe zwei Bilder zu weit von einander ab, ſo vermindert man mittelſt der Schraube *d* die Neigung der Spiegel gegen einander, bis die rechte Entfernung der Bilder erreicht iſt, und ſieht dann zu, daß der von jeder Öffnung ausgehende Lichtſtreifen in die Richtung des anderen falle, welches man leicht durch gehörige Stellung der Schraube *h* erreicht. Stets müſſen beide Öffnungen zugleich im Felde des Fernrohres ſeyn. Dieſes erlangt man leicht durch Drehen der Spiegel um eine verticale Axe. Die Entfernung der Spiegel vom Fenſter kann 6—9 F., die des Fernrohres vom Spiegel eben ſo viel oder auch weniger betragen, wenn man nur das Ocular ſo weit herausziehen kann, als es bei einer ſolchen Anordnung nothwendig iſt. Die Spiegel ſind groß genug, wenn jeder 4 Z. lang und 2 Z. breit iſt.

87. Es thut auch eine andere Vorrichtung zu Interferenzver-

ſuchen ſehr gute Dienſte, welche aus einem dreiſeitigen Glasprisma beſteht, deſſen brechender Winkel ſehr wenig von 180° abweicht, wie es Fig. 122 darſtellt. Dieſes ſtellt man mit der Fläche D gegen das Objectivglas des Fernrohres, während die Kante C vertical ſteht und läßt von der Lichtlinie die Strahlen auf AC und BC fallen, damit man im Fernrohre dieſe Linie doppelt ſehen könne. Man kann das Licht hinter dem Prisma auch mit einem weißen Papier auffangen und die durch Interferenz erzeugten Phänomene beobachten.

Iſt das Fernrohr zugleich mit einem getheilten Kreiſe verſehen, um den Winkel meſſen zu können, welchen die durch Interferenz entſtandenen Farbenſtreifen mit jener Linie machen, welche vom Auge bis zum Puncte gezogen wird, der die Entfernung der zwei Bilder im Spiegel halbirt, ſo kann man auch die Größe ω beſtimmen, um welche die Differenz der Wege der zwei ſich interferirenden Strahlen wachſen muß, damit dasſelbe Phänomen wieder zum Vorſchein komme.

88. Es ſeyen a und b (Fig. 123) die zwei Bilder in den Spiegeln, c der Halbirungspunct der Geraden ab und dieſe nach p und q verlängert, ferner cd ſenkrecht auf ab, und gdf in der Ebene, wo die Bilder im Fernrohre erſcheinen. Iſt nun g ein farbiger Punct, ſo iſt

$$bg - ag = n\omega$$

wo n eine ganze poſitive oder negative Zahl bedeutet. Man nenne daher $ag = r$, $bg = r + n\omega$, die auf pq Senkrechte $gh = y$ und $ch = x$, $ab = \varepsilon$. Man erhält demnach

$$r^2 = y^2 + \left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2; \quad (r + n\omega)^2 = y^2 + \left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

und durch Subtraction

$$2rn\omega + n^2\omega^2 = 2\varepsilon x \text{ und } r^2 = \frac{4\varepsilon^2 x^2 + n^4\omega^4 - 4\varepsilon n^2\omega^2 x}{4n^2\omega^2}.$$

daher durch Subſtitution des Werthes von r^2 in die erſtere der obigen Gleichungen:

$$x^2(4\varepsilon^2 - 4n^2\omega^2) = n^2\omega^2(4y^2 + \varepsilon^2 - n^2\omega^2);$$

weil aber $4y^2$ ohne Vergleich größer iſt als $\varepsilon^2 - n^2\omega^2$, ſo kann man ohne merklichen Fehler ſetzen:

$$x^2(4\varepsilon^2 - 4n^2\omega^2) = 4n^2\omega^2 y^2$$

mithin

$$\omega = \frac{\varepsilon x}{n \sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Wie hier die Größe von ε von der Neigung der zwei Spiegel gegen einander und von der Entfernung der Lichtquelle von ihnen abhängt, iſt für ſich klar.

89. Der hier berechnete Werth von ω iſt bekanntlich für verſchiedene optiſche Mittel verſchieden und ſteht mit dem Brechungsexponenten n im verkehrten Verhältniſſe, ſo daß man die Kenntniß von ω zur Berechnung von n benützen kann. Legt man z. B. beim Verſuche mit dem Apparate Fig. 122 auf AC ein Glasplättchen, ſo werden die Farbenſtreifen augenblicklich verrückt; legt man ein gleich dickes aus demſelben Glaſe auf CB, ſo ſtellt ſich die vorige Lage der Streifen wieder her; herrſcht aber zwiſchen der Natur der beiden Glasplatten bei einerlei Dicke derſelben auch nur ein ſehr geringer Unterſchied, ſo wird er durch eine Verſchiebung der Streifen bemerkbar und man kann die jetzige Lage derſelben mit der vorigen vergleichen, nach beiden ω berechnen, und ſo das Verhältniß der Brechungsexponenten finden. Wenn man das Licht, welches von einem Spiegel des Interferenzinſtrumentes oder von einer Fläche des Interferenzprisma's kommt, durch eine Glasröhre leitet, welche irgend einen gasförmigen Körper enthält, während das Licht von dem zweiten Spiegel oder der anderen Fläche des Prisma's durch atmoſphäriſche Luft geht, ſo wird man wie im vorhergehenden Falle eine Verrückung der Farbenſtreifen wahrnehmen und aus der Größe derſelben wieder auf das Verhältniß des Brechungsvermögens des betreffenden Gaſes und der atmoſphäriſchen Luft einen Schluß machen können. Auf dieſem Wege erfährt man dieſes Vermögen der Körper genauer als durch jedes andere Mittel.

90. Es iſt klar, daß faſt bei jeder Modification des Lichtes Strahlen dahin gebracht werden, daß ſie ſich decken oder wenigſtens durchkreuzen und daher ſich interferiren; aber das Reſultat der Interferenz wird für uns nur dann bemerklich, wenn dadurch ein ſtarker Lichtwechſel hervorgebracht wird und an einer Stelle alle oder die meiſten Strahlen ſich addiren, an einer anderen aber ſich aufheben. Dieſes findet aber nur Statt, wenn die Strahlen von demſelben oder doch von gleichen Puncten ausgehen und die Differenz ihrer Wege nicht gar zu groß iſt. Faſt immer werden Lichtſtrahlen

durch Reflexion, durch Brechung, durch beide zugleich und endlich auch durch Beugung zur Interferenz gebracht, und daher kommen auch die bei dieſen Modificationen erſcheinenden Farbenphänomene (vielleicht ſelbſt die der Farbenzerſtreuung), ſo daß demnach vielleicht alle Farbenerſcheinungen das Reſultat der Interferenz ſind, die Brechung, Reflexion, Beugung aber nur die Strahlen zur Interferenz bringen. Ein Beiſpiel der Interferenz bei der Reflexion gibt der vorher beſprochene Fresnel'ſche Verſuch, ein anderes bei der Brechung eintretendes der Interferenzverſuch mit dem Prisma. Auch bei Linſen, durch welche Strahlen in einen Punct vereiniget werden, ſind Interferenzphänomene keine Seltenheit. Es iſt leicht einzuſehen, daß alle Strahlen, die von einem in der Axe der Linſe liegenden Puncte zu beiden Seiten der Axe auf die Linſe fallen und nach der Brechung in einen Punct vereiniget werden, gleiche Wege zurückgelegt haben und demnach ſich durch Interferenz addiren; nur bei ſolchen, die von einem außer der Axe liegenden Punct kommen, wird dieſes nicht mehr der Fall ſeyn und es werden ſolche Strahlen, die von einer Seite der Axe kommen, durch andere von der entgegengeſetzten Seite der Axe kommende ſogar durch Interferenz aufgehoben werden können. Daher kommt es auch, daß uns mit einem guten, ſtark vergrößernden Fernrohre bei günſtigen Umſtänden Fixſterne wie eine runde planetariſche Scheibe mit mehreren concentriſchen, dunklen und lichten Ringen umgeben erſcheinen.

G. Farbenringe.

91. So leicht es iſt, die ſogenannten Newton'ſchen Farbenringe überhaupt hervorzubringen, ſo braucht man doch viele Aufmerkſamkeit und mannigfaltige Rückſicht auf einzelne Umſtände, wenn man die ihnen zum Grunde liegenden Elemente meſſen will. Die Erſcheinungen, welche dieſe Ringe darbieten, werden als bekannt vorausgeſetzt und nur von der Art und Weiſe geſprochen, ſie zu erzeugen, und zu meſſen.

Das Weſentliche, worauf es bei der Erzeugung der Farbenringe ankommt, beſteht darin, daß man ſich einen ſehr dünnen Körper zu verſchaffen weiß, der rings um einen beſtimmten Punct an Dicke nach einem beſtimmten Geſetze ab- oder zunimmt, ſo daß in gleichen Entfernungen von dieſem Puncte ſeine Dicke dieſelbe iſt. Dieſes läßt ſich bei einem feſten Körper nur ſchwer erreichen, bei flüſſigen aber viel leichter; darum werden die Beobachtungen der

Farbenringe beinahe ausſchließend an letzteren gemacht. Man verſchafft ſich den ſo geſtalteten, dünnen, flüſſigen Körper entweder mittelſt zweier Gläſer, wovon nur eines oder beide ſphäriſch gekrümmt ſind ſo, daß ſie ſich, wenn man ſie auf einander legt, nur an einem Puncte berühren, und rings um dieſen Punct in gleicher Entfernung von demſelben gleichweit von einander abſtehen. Enthält der Raum, den ſie auf dieſe Weiſe einſchließen, Luft oder eine andere Flüſſigkeit, ſo gibt dieſe das Plättchen, welches die oben angegebene Geſtalt hat und daher zur Erzeugung der Farbenringe geeignet iſt. Sie zeigen ſich aber auch, wenn dieſer Raum ganz luftleer iſt. Die Wände von Seifenblaſen, die von oben nach unten immer dicker werden, bieten dieſelben Erſcheinungen dar, doch laſſen ſie ſich nicht ſo leicht meſſen und wieder erzeugen, daher man ſie den vorhin genannten Plättchen nachſetzt.

92. Wenn man ſich zur Erzeugung der Farbenringe eines convexen und eines concaven Glaſes bedient, ſo müſſen dieſe eine vollkommen ſphäriſche Geſtalt haben und ihre Krümmungen dürfen an den einander zugekehrten Flächen nur wenig von einander verſchieden ſeyn. Jede Abweichung von der ſphäriſchen Geſtalt bewirkt eine Störung der gleichförmigen Rundung der Ringe, und eine zu große Verſchiedenheit in der Krümmung der an einander grenzenden Flächen macht, daß die flüſſige Schichte zwiſchen ihnen zu ſchnell an Dicke wächſt und deßhalb nur wenige und ſehr kleine Farbenringe ſichtbar werden. Wenn man ein convexes und ein planes Glas anwendet, ſo muß erſteres einen ſehr großen Krümmungshalbmeſſer haben, letzteres aber vollkommen eben und allenthalben gleich dick ſeyn. Dieſe Gläſer dürfen nicht an einander gedrückt werden, damit ſich nicht dadurch ihre Geſtalt ändere.

93. Newton hat dieſe Ringe mit einem Zirkel gemeſſen und zum Bewundern ſcharfe Reſultate gefunden, doch dürfte eine noch größere Genauigkeit zu erlangen ſeyn, wenn man die Gläſer wie ein Object in ein Mikroſkop einſetzt, das mit einem Schraubenmikrometer verſehen iſt (wovon in der Folge die Rede ſeyn wird) und mittelſt desſelben die Meſſung vornimmt. In Ermanglung eines ſolchen Inſtrumentes kann man den Apparat auch in ein Lampen- oder Sonnenmikroſkop einſetzen und die ſtark vergrößerten in durchgelaſſenem Lichte ſichtbaren Ringe mit dem Zirkel meſſen. Damit dieſe Ringe ſich zeigen, muß man das Glas ſo ſtellen, als wollte man das dünne Plättchen anſehen, und vorzüglich das Licht

gehörig mäßigen. Wenn die Beleuchtung nur etwas zu ſtark iſt, ſieht man keine Spur von einem Ringe. Darum muß man oft den Beleuchtungsſpiegel mit weißem Papier decken, und von dieſem das Licht auf den Farbenapparat gelangen laſſen, oder auch unter dieſem Apparat ein Streifchen feinen weißen Papieres anbringen. Directes Sonnenlicht iſt für den Fall, wo man ſich eines gewöhnlichen Mikroſkopes bedient, zu ſtark; ein beinahe düſteres Gemach taugt dazu am beſten. In einem ſolchen kann man auch die reflectirten Ringe ſehen, nur muß man die Farbengläſer in geneigter Lage gegen die Axe des Rohres an ihren Platz bringen und den für undurchſichtige Objecte beſtimmten Beleuchtungsapparat anwenden. Da erſcheinen aber die Ringe elliptiſch.

Man mag die Ringe mit freiem Auge beobachten oder mittelſt eines Mikroſkopes anſehen, ſo erſcheinen im vollen Lichte ihrer nur wenige, weil die ſchon etwas größeren ſehr ſchmal ſind. Leitet man das Licht durch ein dreiſeitiges Prisma ins Auge, ſo werden die einzelnen Ringe von einander getrennt und man ſieht ihrer eine große Anzahl. Wenn man dieſe Ringe im homogenen Lichte mittelſt eines Mikroſkopes beobachtet, braucht man die Beihilfe des Prisma's nicht, indem man bei gehöriger Beleuchtung ohnehin ſo viele ſieht, als das Geſichtsfeld des Mikroſkopes zu faſſen vermag.

94. Es iſt klar, daß der Grund des Entſtehens der Farbenringe zwiſchen den zwei Gläſern, alſo im Plättchen von Luft, Waſſer ꝛc. liegt. Ein Strahl, der von dieſem Plättchen ins Auge kommt, muß durch die obere Glaswand gegangen ſeyn und daher eine Brechung erlitten haben, wodurch der Durchmeſſer des Ringes geändert wird. Deßhalb erfährt man durch die vorher genannten Meſſungsarten nicht den wahren Durchmeſſer eines Ringes. Um dieſen zu finden muß man eine kleine Correction anbringen, die ſich aus folgender Betrachtung ergibt: Es ſey AB (Fig. 124) die Dicke des oberen Glaſes, das man innerhalb der geringen Ausdehnung, wo die Ringe erſcheinen, für eben halten kann, und in der Verlängerung von AB in C befinde ſich das Auge des Beobachters. Ein Strahl, der von D ausgeht, erleidet in E eine Brechung, durch die er vom Einfallslothe FG abgelenkt wird und nach C gelangt. Es ſey $ECA = FEC = \alpha$, $DEG = \beta$, der Exponent des Brechungsverhältniſſes n, der wahre Halbmeſſer des Farbenringes ρ, der ſcheinbare $EA = GB = r$, $CA = a$, $AB = c$. Iſt nun α ſehr klein, ſo hat man

$\alpha = \frac{r}{a}$, $\beta = \frac{\alpha}{n} = \frac{r}{an}$ und daher $DG = c\beta = \frac{cr}{an}$.

Deßhalb iſt

$$\rho = r + \frac{cr}{an} = r\left(1 + \frac{c}{an}\right).$$

Weil c, a, n conſtante Größen ſind und daher auch $\frac{c}{an}$ conſtant iſt, ſo lange bei demſelben Glaſe das Auge ſeinen Platz nicht verändert, ſo befolgen die ſcheinbaren Durchmeſſer der Ringe dieſelben Geſetze wie die wahren.

95. Kennt man aus wirklich angeſtellten Meſſungen das Geſetz, nach welchem ſich die Durchmeſſer der Ringe richten, ſo iſt es nicht ſchwer, daſſelbe für die Dicke der Plättchen, in denen ſie ſich bilden, zu finden. Geſetzt, man bediene ſich zur Erzeugung der Ringe zweier ſphäriſcher Linſen, deren Durchſchnitte AB und CD (Fig. 125) ſind, die ſich in E berühren und die gemeinſchaftliche Tangente FG haben. Ein Farbenring habe ſeine lichteſte Stelle in A und B, ſo daß ihm die Dicke des Plättchens $AC = BD = c$ entſpricht. Iſt Ex auf FG ſenkrecht gezogen, und $AH = r$ die Ordinate, welche zu AB, $CK = r_1$ diejenige, welche zu CD gehört, $EH = x$, $EK = x_1$, ſo iſt $x_1 - x = c$.

Heißen nun die Halbmeſſer der zwei Krümmungen R und R_1, ſo iſt

$$r^2 = 2Rx - x^2,\ r_1^2 = 2R_1x_1 - x_1^2$$

und

$$x = R\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}\right];\ x_1 = R_1\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{r_1^2}{R_1^2}\right)}\right]$$

oder wenn man die Wurzelgröße in eine Reihe auflöſet und alle Glieder derſelben, wo R die erſte Potenz überſteigt, wegläßt:

$$x = \frac{r^2}{2R},\ x_1 = \frac{r_1^2}{2R_1}$$

und daher

$$c = \tfrac{1}{2}\left(\frac{r_1^2}{R_1} - \frac{r^2}{R}\right).$$

Iſt eines der beiden Gläſer plan, ſo iſt deſſen Radius, z. B. $R = \infty$, mithin

$$c = \frac{r_1^2}{2R_1}.$$

Sind beide convex, ſo wird R negativ und daher

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{r_{,}^{2}}{R_{,}} + \frac{r^{2}}{R}\right).$$

96. Da nach Newton's Meſſungen die Quadrate der Halbmeſſer der hellſten reflectirten farbigen Kreiſe wie die ungeraden Zahlen wachſen, ſo müſſen auch die Dicken der Stellen, wo ſie entſtehen, wie dieſe Zahlen zunehmen. Eine natürliche Folge davon iſt, daß dieſe Ringe immer näher an einander rücken, je weiter ſie ſich vom Centrum entfernen, indem die Quadratwurzeln der ungeraden Zahlen, welche dem Durchmeſſer dieſer Ringe proportional ſind, eine Reihe bilden, deren Differenz deſto kleiner wird, je größer die Zahlen ſind, wie folgendes Beiſpiel zeigt:

Quadrate der Durchmeſſer	Durchmeſſer	Differenz
1	1.00000	
3	1.73205	0.73205
5	2.23607	0.50402
7	2.64575	0.40968
9	3.00000	0.35425
11	3.31663	0.31663
13	3.60555	0.28892
15	3.87298	0.26743

97. Um zur Kenntniß der abſoluten Größe der Dicke zu gelangen, nahm Newton eine gleichſchenkelige Convexlinſe von 83,4 Z. Brennweite aus einer Glasmaſſe, deren Brechungsverhältniß $\frac{17}{11}$ war und deren Dicke $\frac{1}{6}$ Z. betrug, legte ſie auf ein Planglas, und maß, während er das Auge faſt ſenkrecht darüber in einer verticalen Höhe von 8—9 Z. hielt, den fünften dunklen Ring an ſeiner dunkelſten Stelle. Er fand ihn $= \frac{1}{5}$ Z. Berechnet man aus der Brennweite der Linſe ihren Halbmeſſer, ſo findet man ihn $= 91$ Z. Man hat daher

$$2R = 182, \; a = 8.5, \; c = \tfrac{1}{6}, \; n = \tfrac{17}{11} \text{ und daher } \frac{c}{na} = \tfrac{1}{79}.$$

wodurch man als wahren Durchmeſſer des Ringes $\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{79}\right) = \frac{16}{79}$ Z. erhält.

Hieraus erhält man $c = \frac{64}{6241} : 182 = \frac{1}{17747.84}$ Z. Heiße die Dicke am erſten Ringe $c_{,}$, am fünften c_5, ſo wird dem Geſetze

gemäß, nach welchem die Dicken an der Stelle der dunklen Ringe zunehmen,

$$c_5 = \tfrac{10}{2} \cdot c_1 \text{ und } c_1 = \tfrac{1}{5} c_5 = \tfrac{1}{88739}.$$

98. Eine andere Meſſung, der Newton ſelbſt weniger Zutrauen ſchenkt, gab dieſe Größe gleich $\frac{1}{89018}$ und eine dritte genauere $\frac{1}{88850}$. Das Auge befand ſich bei dieſen Meſſungen zwar ſehr nahe an der verticalen Linie über der Linſe, aber doch nicht genau in dieſer, und es konnte der Ring nicht in ſeiner natürlichen Größe erſcheinen, weil die Größe derſelben nach dem Winkel ſich richtet, unter welchem die ins Auge gelangenden Strahlen reflectirt werden. Nach Newtons Angabe betrug bei der vorhergehenden Meſſung dieſer Winkel etwa 4°. Um nun aus obiger Meſſung die Größe des Ringes bei einer vollkommen ſenkrechten Lage des Auges beobachten zu können, mußte Newton den Einfluß der Schiefe der Geſichtsſtrahlen überhaupt kennen lernen, und darum mehrere Meſſungen deſſelben Ringes bei einer verſchiedenen Lage des Auges vornehmen. Auf dieſe Art gelangte er zu folgenden Reſultaten:

ρ Einfallswinkel an der zweiten Glasfläche	σ Austrittswinkel in die Luft	Durchmeſſer des Ringes	Dicke der Luftſchichte
0° 0′	0°	10	10
6 26	10	$10\frac{1}{13}$	$10\frac{2}{13}$
12 45	20	$10\frac{1}{3}$	$10\frac{2}{3}$
18 49	30	$10\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{2}$
24 30	40	$11\frac{2}{5}$	13
29 37	50	$12\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$
33 58	60	14	20
35 47	65	$15\frac{1}{4}$	$23\frac{1}{4}$
37 19	70	$16\frac{4}{5}$	$28\frac{1}{4}$
38 33	75	$19\frac{1}{4}$	37
39 27	80	$22\frac{6}{7}$	$52\frac{1}{4}$
40 00	85	29	$84\frac{1}{10}$
40 11	90	35	$122\frac{1}{2}$

Dieſer Tabelle gemäß wird ein Strahl bei einer deſto größeren Dicke der Luftſchichte reflectirt, je ſchiefer er einfällt. Dieſelbe Schichte wird daher bei einer verſchiedenen Neigung der Strah-

len, aber einerlei Dicke, verſchiedene Strahlen reflectiren, und man kann den Farbenwechſel, welchen man durch Änderung der Neigung erreicht, durch Änderung der Dicke des Plättchens erzielen. Iſt wieder c die Dicke der Schichte, bei welcher ein ſenkrechter Strahl von beſtimmter Farbe reflectirt wird, C hingegen diejenige, bei welcher ſie Statt findet, wenn der Strahl unter dem Winkel ρ einfällt und unter dem Winkel σ gebrochen wird, ſo laſſen ſich die Reſultate obiger Tabelle durch folgende Formeln darſtellen:

$$C = \frac{c}{\cos u}, \quad \sin u = \sin\sigma - a\,(\sin\sigma - \sin\rho)$$

a iſt gleich $\frac{1}{106}$, u iſt ein neuer mit σ verſchwindender Winkel. Setzt man $\sin\rho = n \sin\sigma$, ſo wird

$$\sin u = \sin\sigma - a\,(1 - n)\,\sin\sigma = [1 - a\,(1 - n)]\,\sin\sigma$$

oder

$$\sin u = \frac{105 + n}{106} \,.\, \sin\sigma.$$

Für Werthe von σ, die innerhalb $0° - 60°$ enthalten ſind, kann man füglich

$$C = \frac{c}{\cos\sigma} \text{ ſetzen.}$$

99. Reducirt man nun die vorhin berechnete Dicke auf den Fall des ſenkrechten Einfalls der Strahlen, ſo bekommt man $C = \frac{10000}{10024} \,.\, c$, mithin nach dem Reſultate der erſten genauen Meſſung $C = \frac{1}{88952}$, nach der zweiten $\frac{1}{89063}$, mithin als Mittelwerth $\frac{1}{89000}$.

Dieſe Dicke entſpricht dem erſten dunklen Ringe an ſeiner dunkelſten Stelle. Da aber das Quadrat desſelben doppelt ſo groß iſt, als das des erſten lichten Ringes an ſeiner leuchtendſten Stelle, ſo wird die Dicke der Luftſchichte an dieſer Stelle $\frac{1}{178000}$. Man hat daher die Dicke der Luftſchichte an der hellſten Stelle der farbigen reflectirten Ringe nach der Ordnung:

$$\frac{1}{178000}, \quad \frac{3}{178000}, \quad \frac{5}{178000}, \quad \frac{7}{178000} \text{ ꝛc.}$$

und dieſelbe Größe für die dunklen Ringe

$$\frac{2}{178000}, \quad \frac{4}{178000}, \quad \frac{6}{178000}, \quad \frac{8}{178000} \text{ ꝛc.}$$

Da den reflectirten hellen Ringen die dunklen im durchgelaſſenen Lichte, und umgekehrt, den dunklen im reflectirten Lichte die farbigen im durchgelaſſenen entſprechen, ſo gibt die erſtere Reihe

zugleich die Dicken für die dunklen und die zweite derſelben für die farbigen Ringe im durchgelaſſenen Lichte.

Dieſe Dicken beziehen ſich auf ein Luftplättchen, für jede andere Flüſſigkeit müſſen ſie im verkehrten Verhältniſſe der Brechungsexponenten in dieſer Flüſſigkeit und der Luft vermindert werden.

Folgende Tabelle gibt die Dicke eines Plättchens aus Luft, Waſſer und Glas, in Millionentheilen eines engliſchen Zolles für die reflectirten Strahlen nach der Ordnung, wie ſie im vollen Lichte erſcheinen:

Reflectirte Farben		Dicke der Plättchen		
		Luft	Waſſer	Glas
1. Ord.	Sehr ſchwarz	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{10}{31}$
	Schwarz	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{20}{31}$
	Anfang des Schwarz	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{7}$
	Blau	$2\frac{2}{5}$	$1\frac{4}{5}$	$1\frac{11}{20}$
	Weiß	$5\frac{1}{4}$	$3\frac{7}{8}$	$3\frac{2}{5}$
	Gelb	$7\frac{1}{9}$	$5\frac{1}{3}$	$4\frac{3}{5}$
	Orange	8	6	$5\frac{1}{6}$
	Roth	9	$6\frac{3}{4}$	$5\frac{4}{5}$
2. Ord.	Violet	$11\frac{1}{6}$	$8\frac{3}{8}$	$7\frac{1}{5}$
	Dunkelblau	$12\frac{5}{6}$	$9\frac{5}{8}$	$8\frac{2}{11}$
	Blau	14	$10\frac{1}{2}$	9
	Grün	$15\frac{1}{8}$	$11\frac{1}{3}$	$9\frac{5}{7}$
	Gelb	$16\frac{2}{7}$	$12\frac{1}{5}$	$10\frac{2}{5}$
	Orange	$17\frac{2}{9}$	13	$11\frac{1}{9}$
	Hellroth	$18\frac{1}{3}$	$13\frac{3}{4}$	$11\frac{5}{6}$
	Scharlachroth	$19\frac{2}{3}$	$14\frac{3}{4}$	$12\frac{2}{3}$
3. Ord.	Purpurroth	21	$15\frac{3}{4}$	$13\frac{11}{20}$
	Dunkelblau	$22\frac{1}{10}$	$16\frac{4}{7}$	$14\frac{1}{4}$
	Blau	$23\frac{2}{5}$	$17\frac{11}{20}$	$15\frac{1}{10}$
	Grün	$25\frac{1}{5}$	$18\frac{9}{10}$	$16\frac{1}{4}$
	Gelb	$27\frac{1}{7}$	$20\frac{1}{3}$	$17\frac{1}{2}$
	Roth	29	$21\frac{3}{4}$	$18\frac{5}{7}$
	Bläulich roth	32	24	$20\frac{2}{3}$

Reflectirte Farben		Dicke der Plättchen		
		Luft	Waſſer	Glas
4. Ord.	Bläulich grün	34	$25\frac{1}{2}$	22
	Grün	$35\frac{2}{7}$	$26\frac{1}{2}$	$22\frac{3}{4}$
	Gelblich grün	36	27	$23\frac{2}{9}$
	Roth	$40\frac{1}{3}$	$30\frac{1}{4}$	26
5. Ord.	Bläulich grün	46	$34\frac{1}{2}$	$29\frac{2}{3}$
	Roth	$52\frac{1}{2}$	$39\frac{3}{8}$	34
6. Ord.	Grünlich blau	$58\frac{3}{4}$	44	38
	Roth	65	$48\frac{3}{4}$	42
7. Ord.	Grünlich blau	71	$53\frac{1}{4}$	$45\frac{4}{5}$
	Röthlich weiß	77	$57\frac{3}{4}$	$49\frac{2}{3}$

100. Die bis jetzt betrachteten Farbenringe, die in vollem Lichte erſcheinen, ſind bekanntlich das Reſultat der Übereinanderlagerung der Ringe aus einfachem Lichte. Um ſich davon zu überzeugen maß Newton den größten und kleinſten Durchmeſſer eines Ringes von beſtimmter Ordnung bei einer Beleuchtung aus verſchiedenen Theilen des prismatiſchen Farbenbildes, und fand folgende Werthe:

Farbe	Durchmeſſer des Ringes: Innerer	Durchmeſſer des Ringes: Äußerer	Breite des Ringes
Äußerſtes Roth	d	D	$D - d.$
Grenze zwiſchen Roth und Orange	$d \,.\, 0.96150$	$D \,.\, 0.96150$	$(D - d)\ 0.96150$
„ „ Orange und Gelb	$d \,.\, 0.94104$	$D \,.\, 0.94104$	$(D - d)\ 0.94104$
„ „ Gelb und Grün	$d \,.\, 0.90856$	$D \,.\, 0.90856$	$(D - d)\ 0.90856$
„ „ Grün und Lichtblau	$d \,.\, 0.87358$	$D \,.\, 0.87358$	$(D - d)\ 0.87358$
„ „ Lichtblau und Dunkelblau	$d \,.\, 0.84343$	$D \,.\, 0.84343$	$(D - d)\ 0.84343$
„ „ Dunkelblau und Violett	$d \,.\, 0.82548$	$D \,.\, 0.82548$	$(D - d)\ 0.82548$
Äußerſtes Violett	$d \,.\, 0.79370$	$D \,.\, 0.79370$	$(D - d)\ 0.79370$

Man darf dabei nicht überſehen, daß es unmöglich war, dieſe Meſſungen mit aller Schärfe vorzunehmen, indem die Ringe keineswegs ſo ſcharf begrenzt ſind, daß es möglich wäre, ihre Breite genau zu beſtimmen. Daher mag es auch kommen, daß die Werthe der Durchmeſſer vom Roth bis zum Violett wie die Kubikwurzeln aus den Zahlen 1, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{2}$ abnehmen, Zahlen, die in der Akuſtik eine große Bedeutung haben, und die, auch in dem Lichte wieder zu finden, Newtons Lieblingsidee zu ſeyn ſchien.

Berechnet man nun nach dieſen Werthen die Dicke der Schichten an den äußerſten Grenzen der Ringe, ſo erhält man ſie wie folgt:

Farbe	Dicke der Luftſchichte am inneren Umfange des Ringes	Dicke der Luftſchichte am äußeren Umfange des Ringes
Äußerſtes Roth	c	C
Grenze zwiſchen Roth und Orange	$c.0.9243$	$C.0.9243$
„ „ Orange und Gelb	$c.0.8855$	$C.0.8855$
„ „ Gelb und Grün	$c.0.8255$	$C.0.8255$
„ „ Grün und Lichtblau	$c.0.7631$	$C.0.7631$
„ „ Lichtblau und Dunkelblau	$c.0.7114$	$C.0.7114$
„ „ Dunkelblau und Violett	$c.0.6814$	$C.0.6814$
Äußerſtes Violett	$c.0.6300$	$C.0.6300$

101. Kennt man die Dicke des Plättchens an den beiden Grenzen des Ringes, ſo kann man ſie leicht für die Stelle berechnen, wo die Farbe am intenſivſten erſcheint. Heißt demnach die Dicke an den zwei äußerſten Grenzen beim erſten reflectirten Ring c_1, C_1, beim zweiten c_2, C_2 beim n^{ten} c_n, C_n, ſo kann man die Dicke für die Stelle der größten Lichtſtärke gleich

$$\frac{c_1 + C_1}{2}, \quad \frac{c_2 + C_2}{2}, \; \ldots\ldots \; \frac{c_n + C_n}{2}$$

ſetzen. Auf gleiche Weiſe kann man auch die Dicke der Schichte für die dunkelſte Stelle der dunklen Ringe im reflectirten oder für die hellſte der farbigen im durchgelaſſenen Lichte durch

$$\frac{C_1 + c^2}{2}, \quad \frac{C_2 + c_3}{2} \; \ldots\ldots \; \frac{C_{n-1} + c_n}{2}$$

ausdrücken. Man erhält auf dieſe Art folgende Gleichungen:

für reflectirtes Licht	für durchgelaſſenes Licht
$c_1 + C_1 = c_1 + C_1$	$C_1 + c_2 = 2(c_1 + C_1)$
$c_2 + C_2 = 3(c_1 + C_1)$	$C_2 + c_3 = 4(c_1 + C_1)$
$c_3 + C_3 = 5(c_1 + C_1)$	$C_3 + c_4 = 6(c_1 + C_1)$
- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
$c_{n-1} + C_{n-1} = (2n-3)(c_1 + C_1)$;	$C_{n-1} + c_n = (2n-2)(c_1 + C_1)$
$c_n + C_n = (2n-1)(c_1 + C_1)$;	$C_n + c_{n+1} = 2n(c_1 + C_1)$

und aus dieſem

$$c_{n+1} - c_n = c_1 + C_1 \text{ und } C_n - C_{n-1} = c_1 + C_1.$$

Es wachſen demnach die Dicken der Plättchen ſowohl im reflectirten als im durchgelaſſenen Lichte wie die Glieder einer arithmetiſchen Reihe, deren Differenz $c_1 + C_1$ iſt; daher iſt auch dem Gange einer ſolchen Reihe gemäß:

$$c_n = c_1 + (n-1)(c_1 + C_1);\ C_n = C_1 + (n-1)(c_1 + C_1)$$

und hieraus

$$C_n - c_n = C_1 - c_1 \text{ und } c_n - C_{n-1} = 2c_1$$

weil aber auch $C_n - C_{n-1} = c_1 + C_1$ iſt, ſo hat man

$$C_1 - c_1 = 2c_1 \text{ und } C_1 = 3c_1$$

mithin

$$c_n = c_1 + 4(n-1)c_1 = (4n-3)c_1 \text{ und } C_n = (4n-1)c_1$$

Iſt demnach c_1 beſtimmt, ſo kennt man auch c_n und C_n daher auch $\frac{c_n + C_n}{2}$. Vorher wurde die Dicke der Schichte für den erſten Ring, deſſen Farben mit der an der Grenze von Orange und Gelb übereinſtimmt $= \frac{1}{178000}$ gefunden; legt man dieſen Ausmeſſungen als Einheit den millionten Theil eines engliſchen Zolles zu Grunde, ſo wird ſie durch $\frac{1000}{178}$ ausgedrückt, und es iſt

$$2c_1 = \frac{1000}{178} \text{ mithin } c_1 = 2.80899.$$

Aus dieſer Zahl findet man leicht nach der vorhergehenden Tafel die allen übrigen Farben entſprechenden Werthe. Die folgende Tafel enthält ſie:

Farbe	Dicke der Luftſchichte an den Grenzen des erſten Ringes	
	c_1	$C_1 = 3c_1$
Äußerſtes Roth	3.172206	9.516618
Grenze zwiſchen Roth und Orange	2.93207	8.79621
„ „ Orange und Gelb	2.80899	8.42697
„ „ Gelb und Grün	2.61866	7.85598
„ „ Grün und Lichtblau	2.42071	7.26213
„ „ Lichtblau und Dunkelblau	2.25671	6.77013
„ „ Dunkelblau und Violett	2.16154	6.48462
Äußerſtes Violett	1.99849	5.99547

102. Man ſieht hieraus, daß dieſelbe Stelle des Plättchens zur Reflexion und Transmiſſion verſchiedener Strahlen geeignet iſt, und deßhalb eine Farbe annehmen muß, welche das Reſultat der gleichzeitigen Einwirkung aller einzelnen Strahlen zuſammengenommen iſt. Man kann ſich zur leichteren Anwendung der vorigen Tabelle ihre Reſultate graphiſch darſtellen. Es ſey AZ (Fig. 126) eine gerade Linie, auf welche man die Dicke c für eine Luftſchichte ſo oft hinter einander aufträgt, als es angeht und die Theilpuncte mit 1, 2, 3, 4 ꝛc. bezeichnet, ſo daß $A\,1$, 12, 23, 34 ꝛc. die Dicke der Plättchen vorſtellen kann. Ein Plättchen, deſſen Dicke zwiſchen A und 1 fällt, läßt das Licht durch, für welches c_1 gilt; fällt es zwiſchen A und 3, ſo reflectirt es daſſelbe Licht und zwar immer ſchwach, wenn es nahe an 1 und 3 fällt, hingegen am ſtärkſten, wenn es mitten zwiſchen 1 und 3, alſo auf 2 fällt und daher die Dicke $A\,2$ hat. Fällt die Dicke zwiſchen $A\,3$ und $A\,5$, ſo findet wieder Transmiſſion Statt, fällt ſie aber zwiſchen $A\,5$ und $A\,7$, ſo tritt wieder Reflexion ein u. ſ. f. Man braucht daher die Dicke eines Plättchens nur von A auf AZ zu übertragen, um zu ſehen, ob es das Licht, um das es ſich handelt, reflectirt oder durchläßt. Eine eben ſo getheilte Linie kann man für jede Strahlengattung einrichten, indem man blos $A\,1 = c_1$ dieſem Strahl gemäß nimmt; würde daher die Dicke eines Plättchens ſucceſſiv vom Anfangspuncte A aus, auf alle dieſe Linien übertragen, ſo erführe man, welche Strahlen es reflectirt und welche es durchläßt. Man kann alle ſolche Linien mit einander verbinden und weil die Werthe von c_n, C_n für einerlei Werth von n denen von c_1 proportionirt ſind, dieſe durch die

Ordinaten einer geraden Linie ausdrücken, zu denen die Werthe von c_1 die Abſciſſen ſind. Man errichte demnach auf AZ die ſenkrechte AY und ſchneide die Linien CA, CB, CD ꝛc. ab, die ſich zu einander verhalten wie die Werthe von c_1 für die verſchiedenfarbigen Strahlen, (Tafel S. 467) ziehe durch B, D, E, F ꝛc. mit AZ parallele und dann durch C und die Puncte 1, 2, 3 ꝛc. der AZ die geraden Linien 1 I, 2 II, 3 III ꝛc., ſo iſt die Conſtruction gemacht. Will man ein Luftplättchen auf ſeine Farbe unterſuchen, ſo bezeichne man deſſen Dicke durch den Abſtand zweier parallelen Linien, deren eine AY iſt und ſehe, in welche Felder die zweite Linie fällt, entnehme daraus die von demſelben reflectirten Farben, und ſuche hierauf aus allen dieſen die reſultirende Farbe. Hat man es mit einem anderen als einem Luftplättchen zu thun, ſo muß man es, ſeinem Brechungsverhältniſſe gemäß, auf ein gleichgeltendes Luftplättchen reduciren, und es wie vorher prüfen.

H. Beugung des Lichtes.

103. Die Phänomene der Beugung gehören zu den intereſſanteſten in der ganzen Optik; in ihnen ſprechen ſich die allgemeinſten Geſetze faſt aller Modificationen des Lichtes aus, und wenigſtens die wichtigſten derſelben, nämlich die der Reflection und Brechung ergeben ſich als ſpecielle Fälle aus ihnen.

104. Wiewohl ein Lichtſtrahl ſchon gebeugt wird, wenn er an der Grenze zweier optiſch heterogener Mittel vorbeigeht, und daher die in das Bereich der Beugung gehörigen Phänomene keine Seltenheit ſeyn können, ſo bedarf es doch einer beſonderen Aufmerkſamkeit und eigener Vorrichtungen, um ſie deutlich wahrzunehmen und ſie mit jener Regelmäßigkeit und Reinheit hervorzubringen, welche nothwendig iſt, um ſie zu meſſen, und ihre Geſetze zu erkennen. Es kommt dabei vorzüglich auf die Geſtalt der Grenze der optiſchen Mittel, an welcher die vorbeiſtreifenden Strahlen gebeugt werden, oder wie man zu ſagen pflegt, auf die Geſtalt des beugenden Körpers, auf die Größe und Geſtalt der Lichtquelle, auf die Entfernung der letzteren vom beugenden Körper und in gewiſſen Fällen auch auf die Diſtanz des Ortes, wo man das gebeugte Licht ins Auge leitet, vom beugenden Körper an; endlich iſt noch die Art und Weiſe, wie das gebeugte Licht ins Auge gelangt, von beſonderer Wichtigkeit.

105. Bei den wichtigſten Beugungsverſuchen, wo es ſich um

die Geſetze der Ablenkung gebeugter Strahlen handelt, wählt man ſtets einen feinen Draht oder eine feine an einem Schirm angebrachte Spalte. (Haare ſind ſelten ſo gleichförmig dick, daß ſie zu dieſem Zwecke mit Vortheil gebraucht werden können). Da wird das Licht nur nach der auf dem Draht oder auf der Spalte ſenkrechten Richtung gebeugt, aber weil die Beugung längs des ganzen Drahtes oder längs der Spalte gleichförmig geſchieht, ſo erleichtert dieſes das Meſſen der Ablenkung des gebeugten Lichtes ungemein. In einzelnen Fällen werden aber auch runde Körper, wie z. B. kleine Glastropfen, feine Samenkörner, runde oder ringförmige, ſelbſt viereckige Öffnungen mit Vortheil gebraucht; bei einer gewiſſen Beobachtungsmethode ſind Gitter mit parallelen Öffnungen oder mehrere runde oder eckige nach gewiſſen Geſetzen angeordnete Löcher von vorzüglichem Belange.

106. Wenn die Beugungsphänomene deutlich erſcheinen ſollen, muß die Geſtalt und Größe der Lichtquelle vorzüglich paſſend gewählt werden. Man läßt bekanntlich das Licht zum Behufe ſolcher Verſuche ſtets durch eine kleine Öffnung in einen verfinſterten Raum eindringen, und dieſe Öffnung ſtellt demnach den Lichtkörper vor. Zur abſoluten Deutlichkeit der Beugungsphänomene wäre nothwendig, daß dieſer nur ein leuchtender Punct oder eine Lichtlinie wäre und zwar erſteres, wenn das Licht nach allen oder doch nach mehreren, letzteres wenn es nur nach einer Richtung gebeugt werden ſoll, wie es bei der Anwendung eines feinen Drahtes, einer engen Spalte oder eines Gitters der Fall iſt. Iſt die Öffnung größer, ſo erzeugt jeder Lichtpunct oder jede Lichtlinie ihre beſonderen Farbenphänomene, die Farbenſtreifen des einen fallen zum Theil in die des anderen, und laſſen das Phänomen nicht zur vollen Reinheit gelangen, ja wenn z. B. die Spalte für das eintretende Licht ſo groß wäre, daß der violette, von den rechts liegenden äußerſten Lichtlinien herrührende Streifen in jenen rothen fällt, welcher von den äußerſten linken Lichtlinien herrührt, ſo erſcheinen alle Farben gemengt, das Phänomen hat ſeine Eigenthümlichkeit ganz verloren und iſt ſelten mehr wahrnehmbar. Indeß muß man doch manchmal zur Erhöhung der Lichtſtärke eine etwas größere Öffnung einer kleineren vorziehen.

107. Der beugende Körper muß immer mehrere Fuß von der Lichtöffnung abſtehen und auch der Beobachter muß ſich in gehöriger Entfernung vom beugenden Körper befinden.

Die gebeugten Strahlen fahren nämlich vom beugenden Körper an immer weiter aus einander und entwickeln ſich auch immer mehr, nehmen aber in demſelben Grade an Lichtſtärke ab. Die beſte Entfernung des Beobachters vom Urſprunge der Beugung hängt von der Intenſität des Lichtes, von der Größe der beugenden Öffnung oder des Drahtes und ins beſondere von der Art und Weiſe ab, wie man das gebeugte Licht ins Auge leitet.

108. Läßt man das gebeugte Licht auf eine matte Glastafel oder auf eine Papierwand auffallen; ſo wird es nach allen Seiten zerſtreut und es kann nur ein ſehr geringer Theil davon ins Auge des Beobachters gelangen, ſelbſt wenn man es mit einer Loupe bewaffnet. Daher haben Fresnel und Mayer ſehr gut gethan, daß ſie das gebeugte Licht mittelſt einer Convexlinſe ins Auge führten, bevor es dieſe Zerſtreuung erlitten hat. Alles gebeugte Licht bringt man aber nur dann ins Auge, wenn man den beugenden Körper hart an das Objectivglas eines achromatiſchen Fernrohres ſtellt, eine Beobachtungsweiſe, die bekanntlich Fraunhofer zuerſt angewendet hat. Dieſe Methode gewährt aber überdieß noch andere Vortheile, die vom größten Belange ſind. Läßt man von einer Lichtlinie Lichtſtrahlen durch ein Gitter fahren, damit ſie daſelbſt gebeugt werden, ſo ſieht man auf einer Wand, womit man das gebeugte Licht auffängt, ja ſelbſt mit einer Loupe nur ein Gewirre von Farben, ohne etwas regelmäßiges daran wahrzunehmen, weil die an einer Öffnung des Gitters oder an einem Rande der Gitterfäden gebeugten Strahlen in den Raum fallen, welchen das von anderen Öffnungen oder Fäden gebeugte Licht trifft; leitet man ſie aber auf das achromatiſche Objectiv eines Fernrohres, ſo verhält ſich die Sache anders. Die an jeder einzelnen Öffnung oder an jedem Faden gebeugten Strahlen homogener Art verlaſſen nothwendig das Gitter in parallelen Richtungen und fallen ſo auf das Objectiv. Dieſes vereinigt alle parallele Strahlen in einem Punct und bildet ſo aus allen homogenen Strahlen ein Farbenbild. Daß dieſes durch das Ocular noch vergrößert wird, begründet einen neuen Vorzug der Fraunhofer'ſchen Beobachtungsmethode.

109. Die Größe der Ablenkung des gebeugten Lichtes hat man ſonſt immer aus der Größe und Lage der Farbenſäume und der Entfernung des Auges vom beugenden Körper berechnet, allein dadurch erhielt man nicht blos mangelhafte, ſondern wegen der nicht wahren Vorausſetzungen ſogar falſche Reſultate. Dieſes Geſetz er-

gibt ſich nur aus einer unmittelbaren Meſſung der Ablenkungswinkel und dieſe läßt ſich nur veranſtalten, wenn man das gebeugte Licht in ein Theodolithfernrohr leitet, wie es Fig. 127 vorſtellt, und von Fraunhofer gebraucht wurde. Vor dem Fernrohre, befindet ſich ein Scheibchen mit einer beſonderen Theilung, auf welche der beugende Körper (Schirm oder Gitter) geſtellt wird. Die Theilung dient dazu, um den Winkel zu meſſen, unter welchem das Licht auf den Schirm oder das Gitter fällt. Fraunhofer hat auch eigene Beugungsapparate verfertiget, durch welche ſich die vorzüglichſten Beobachtungen anſtellen laſſen, nur zum Meſſen der Ablenkungswinkel ſind ſie nicht eingerichtet. Ein ſolcher Apparat (wie ihn das hieſige Muſeum beſitzt) beſteht aus einem achromatiſchen Fernrohre, deſſen Ocularrohr ſich ſehr weit herausziehen läßt, um im Nothfalle auch in einem kleinen Zimmer beobachten zu können. Auf das Objectiv läßt ſich ein Apparat ſo wie ein Deckel aufſetzen, welcher dazu dient, den Schirm oder das Gitter aufzunehmen.

Die zur Beugung beſtimmten Apparate ſind: 1) Ein Schirm mit einer 2 Z. langen Spalte, die ſich mittelſt einer Schraube weiter und enger machen läßt. 2) Ein Gitter aus feinem Silberdraht. 3) Mehrere mit Gold belegte, gleichförmig dicke Glasplatten, welche durch regelmäßiges Wegnehmen der Goldbelegung parallele Gitter von verſchiedener Feinheit vorſtellen. Eines dieſer Gitter beſteht aus feinen concentriſchen Kreiſen. 4) Ein Planglas mit 3601 in Glas geritzten Parallellinien von ausgezeichneter Feinheit und Genauigkeit. 5) Mehrere dünne Meſſingplatten mit feinen ausgeriebenen Löchern in verſchiedener Stellung gegen einander.

110. Soll dieſer Apparat gebraucht werden, ſo ſtellt man das Fernrohr in dem dazu beſtimmten verfinſterten Zimmer auf, richtet es auf die Öffnung am Fenſterladen, durch welche das Licht eindringt, zieht das Ocular ſo weit heraus, daß man dieſe Öffnung deutlich ſieht, leitet mittelſt eines Helioſtats den eindringenden Lichtbüſchel auf das Objectivglas des Fernrohres, ſetzt den Schirm oder das Gitter, wodurch die Beugung bewirkt werden ſoll, mittelſt des vorhin erwähnten Aufſatzes vor das Objectiv und beobachtet das Beugungsphänomen im Geſichtsfelde des Fernrohres. Man kann auch das Phänomen für mehrere zugleich ſichtbar machen, wenn man vor dem Ocular ein feines weißes Papier aufſtellt, und das Licht aus dem Oculare darauf fallen läßt.

111. Zu manchen Verſuchen leiſtet Mayer's Inflexioſkop

gute Dienſte. Es beſteht aus einem Rohre *AB* (Fig. 128), das an einem Ende *A* mit einem Deckel verſehen iſt, der eine, mittelſt einer Schraube zu regulirende Spalte hat, am anderen Ende hingegen auf verſchiedene Weiſe adjuſtirt wird, je nachdem man die Beugung durch eine Spalte oder einen feinen Draht beobachten will. Im erſten Falle iſt dieſes Ende mit einem ähnlichen Deckel verſehen wie *A*; im zweiten Falle wird in die Hauptröhre ein paſſendes Zugrohr geſteckt, das am hinteren Ende den beugenden Draht enthält, am vorderen aber mit einer eigenen, verſchiebbaren Ocularröhre verſehen iſt, in der ſich eine Linſe befindet.

Beim Gebrauche richtet man das Rohr *AB* mit dem Ende *A* auf einen ſtark beleuchteten Gegenſtand oder läßt directes Sonnenlicht eindringen, regulirt die Öffnung am hinteren Schirme und ſieht dann durch die Öffnung am vorderen Deckel, welche mit der am hinteren parallel ſeyn muß, oder durch das Ocularrohr in die Röhre hinein. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß man ſtatt des gewöhnlichen weißen Lichtes auch das durch Brechung in einem dreiſeitigen Glasprisma erhaltene, homogene in das Rohr leiten und die Beugung in dieſem Lichte beobachten kann.

112. Mit den einfachſten Verhältniſſen hat man es zu thun, wenn man das Licht durch eine einzige Öffnung oder durch einen dünnen Draht beugt. Da fand Fraunhofer folgende Reſultate, wo γ die Breite der Öffnung in P. Z., L', L'', L''' ꝛc. den Übergang von einem Spectrum ins andere, mithin das rothe Ende des erſten, zweiten, dritten ꝛc. Spectrums und endlich L das arithmetiſche Mittel aus L', $\frac{1}{2}L''$, $\frac{1}{3}L'''$ ꝛc. bedeutet.

γ	L'	L''	L'''	L''''	L	$L\gamma$
0.11545	37″ 58	1′ 15″.5	1′ 53		37″.66	0.0000210
0.06098	1′ 11″.6	2′ 22″.7	3′ 31″.7	4′ 44″.7	3′ 11″.17	0.0000210
0.03690	1′ 57″.1	3′ 53″.3	5′ 48″.3		1′ 56″.6	0.0000209
0.02346	3′ 4″	6′ 7″.7	9′ 16″.3		3′ 4″.43	0.0000210
0.01237	5′ 48″.5	11′ 38″	17′ 26″.5	23′ 14″.7	5′ 48″.7	0.0000209
0.01210	6′	12′ 1″	18′ 14″	24′ 9″	6′ 1″.84	0.0000212
0.01020	6′ 56″	13′ 56″	20′ 54″		6′ 57″.3	0.0000206
0.00671	11′ 6″	22′ 12″.7	33′ 14″	44′ 35″	11′ 6″.4	0.0000217
0.00642	11′ 11″	22′ 18″	33′ 43″	44′ 58″	11′ 12″.2	0.0000209
0.00337	21′ 3″	42′ 16″	1° 4′		21′ 10″.3	0.0000207
0.00308	23′ 31″	47′ 6″	1° 10′ 43″		23′ 32″.7	0.0000211
0.00218	33′ 30″	1° 7′ 40″			33′ 40″	0.0000213
0.00215	35′ 24′.7	1° 10′ 16″			35′ 17″	0.0000220
0.00114	1° 4′ 53″				1° 4° 53″	0.0000215

Nimmt man aus $L\gamma$ das arithmetiſche Mittel, ſo erhält man

$$L' = \frac{0.0000211}{\gamma},\ L'' = 2.\frac{0.0000211}{\gamma},\ L''' = 3.\frac{0.0000211}{\gamma}$$

oder der Abſtand desſelben (z. B. des rothen) Theiles der Spectra von der Mitte wächſt in einem arithmetiſchen Verhältniſſe, deſſen Differenz dem erſten Gliede gleich iſt.

Bei einem anderen Verſuche Fraunhofer's wurde auf die Mitte der Öffnung eines $\frac{1}{4}$Z. breiten Schirmes, der ſich vor dem Objective des Fernrohres befand, ein 0.02287 P. Z. dicker Faden aufgeſpannt. Wegen der Größe der Schirmweite konnte die Beugung nur durch dieſen Faden bewirkt werden. Man ſah im Geſichtsfelde zu beiden Seiten der Öffnung des Helioſtats Farbenbilder, aber wegen zu großer Lichtſtärke in der Mitte konnte L' nicht gemeſſen werden, aber für L'' fand man 6′ 16″, für L''' 9′ 30″. Führt man nach dieſem die Rechnung wie vorhin, ſo erhält man $L\gamma = 0.0000208$ und 0.0000210, mithin nahe dasſelbe, was man bei der Beugung durch eine Öffnung gefunden hätte. Demnach iſt es einerlei, ob die beugenden Ränder einander zugewendet ſind, wie bei einem Schirm, oder ob ſie mit einander zuſammenhängen, wie bei einem Faden, und es kommt nur auf ihren Abſtand d. i. auf die Größe γ an.

113. Fällt das Licht nicht ſenkrecht, ſondern ſchief auf die Öffnung eines Schirmes oder auf einen dünnen Draht, ſo hören die Spectra auf, zu beiden Seiten ſymmetriſch zu ſeyn und werden auf der Seite, nach welcher der einfallende Strahl mit der Ebene des Schirmes den größeren Winkel macht, viel größer als auf der entgegengeſetzten und zwar in einem deſto größeren Maße, je mehr der einfallende Strahl gegen den Schirm geneigt iſt.

114. Wenn man ein Gitter aus mehreren feinen Fäden vor das Objectivglas ſtellt und alle Zwiſchenräume der Fäden bis auf einen mittelſt zweier Schirme zudeckt, ſo ſieht man im Fernrohre dieſelben Phänomene, als wenn ſich nur ein Schirm mit einer Öffnung von derſelben Breite vor dem Fernrohre befände, wie ohnehin klar iſt. Läßt man aber durch zwei Zwiſchenräume Licht ins Fernrohr gelangen, ſo ſieht man außer den Farbenbildern, die ſich beim Gebrauche einer einzigen Öffnung zeigen, noch andere, welche der Axe näher liegen, als die vorigen, die ſich aber in Hinſicht der Farben und ihrer Abwechslung eben ſo verhalten, wie jene. Fraunhofer nennt ſie bekanntlich Spectra der zweiten Klaſſe und

zwar *unvollkommene*, weil ſie die fixen Linien nicht zeigen, während er die bei einer einzigen Öffnung entſtehenden *Spectra der erſten Klaſſe* nennt. Öffnet man drei Zwiſchenräume des Gitters, ſo daß drei Strahlen auf das Objectiv des Fernrohres gelangen, ſo erſcheinen wieder neue Spectra, die der Axe des Fernrohres noch näher ſtehen, als die der zweiten Klaſſe, ſich aber übrigens wie dieſe verhalten. Man ſieht demnach unter ſolchen Umſtänden dreierlei Spectra, nämlich die der erſten Klaſſe, unvollkommene, der zweiten Klaſſe und endlich die zuletzt erwähnten.

Bei vier Zwiſchenräumen ſieht man dieſelben Phänomene wie bei drei, nur ſind die der Axe nächſten (inneren) Spectra kleiner; bei fünf Zwiſchenräumen hat die Größe der letzteren wieder abgenommen, bei ſechs noch mehr u. ſ. f., bis ſie endlich nicht mehr zu ſehen ſind und nur eine leuchtende Linie in der Mitte des Geſichtsfeldes erſcheint, als ſähe man die Öffnung am Helioſtat ohne Gitter. Während der Abnahme der Breite dieſer Spectra haben ſich auch die der zweiten Klaſſe in Rückſicht ihres Zuſammenhanges und ihrer Entfernung von der Axe geändert, ſie fangen an, bei einer großen Anzahl der Zwiſchenräume, die fixen Linien zu zeigen und haben ſich daher in *vollkommene Spectra der zweiten Klaſſe* verwandelt, deren Farben vollkommen homogen ſind und wovon das erſte von der die Öffnung am Helioſtat vorſtellenden Linie durch einen völlig dunklen Raum getrennt iſt.

115. Aus den ungemein ſcharfen von *Fraunhofer* angeſtellten Meſſungen laſſen ſich nun auch die Geſetze aller drei Farbenbilder ableiten. Schon der Umſtand, daß die Spectra der erſten Klaſſe ihren Platz nicht ändern, wenn man auch die Anzahl der Zwiſchenräume nach Belieben vermehrt, beweiſet, daß dieſe Spectra von dem durch die einzelnen Zwiſchenräume gehenden gebeugten Lichte herrühren. Daß ſelbſt bei einer großen Anzahl von Zwiſchenräumen nicht mehrere ſolche Spectra zum Vorſchein kommen, als bei einem einzigen und daß bei übrigens gleichen Umſtänden nur ihre Lichtſtärke mit der Anzahl der Zwiſchenräume zunimmt, wird jeder bald einſehen, der die Wirkung achromatiſcher Objective kennt, durch welche parallel auffallende Strahlen in einen Punct vereinigt werden. Indeß tritt hierbei ein merkwürdiges Verhalten ein. Hat man nämlich ein Gitter, wo die Zwiſchenräume γ größer ſind als die Dicke δ der Fäden, ſo wird man bei der Berechnung die Lage der Spectra erſter Klaſſe nach dem Geſetze, welches ſich in 112 ausſpricht,

ſtets ſtatt der Zwiſchenräume γ die Fadendicke δ ſetzen müſſen und es gibt demnach das an den Rändern der Fäden gebeugte Licht dieſe Spectra, nicht das durch die Zwiſchenräume fahrende. Auch dieſes iſt nicht befremdend, da man weiß, es können ſolche Spectra eben ſo gut durch von einander abgewendete als durch einander zugekehrte Kanten entſtehen, und daß die Spectra für die kleinere der zwei Größen γ und δ von der Axe weiter entfernt, mithin nach Außen liegen werden, während die der größeren auf die Spectra der zweiten Klaſſe fallen.

Die Spectra der zweiten Klaſſe können weder durch Beugung in einer Öffnung noch durch einen Faden des Gitters hervorgebracht werden. Die Urſache davon wird in der Folge klar werden. Nach Fraunhofer's Meſſungen erleiden dieſe Spectra von denen der erſten Klaſſe oft bedeutende Modificationen, ja ſogar die Zu- und Abnahme der Zwiſchenräume oder der gebeugten Strahlen ändert ſie etwas. Sie befolgen überhaupt in Betreff ihres Abſtandes von der Axe nicht das Geſetz, welches die Spectra der erſten Klaſſe beherrſcht; ihre Entfernung von der Axe richtet ſich zwar nahe umgekehrt nach der Entfernung der Mitte zweier Zwiſchenräume der Größe $\gamma+\delta$, aber die einzelnen Spectra folgen auf einander nach einer arithmetiſchen Reihe, deren Differenz größer iſt, als das erſte Glied.

Die Spectra, welche bei drei Zwiſchenräumen oder bei drei gebeugten Strahlen zunächſt an der Axe erſcheinen, befolgen wieder ein anderes Geſetz und ihr Abſtand von der Axe richtet ſich, Fraunhofer's Meſſungen gemäß, bei demſelben Gitter nach der Anzahl der gebeugten Strahlen, und bei verſchiedenen Gittern und einer gleichen Anzahl Strahlen umgekehrt nach der Größe $\gamma+\delta$ Nennt man N', N'', N''' ꝛc. das, was bei Spectren der erſten Klaſſe L', L'', L''' ꝛc. bezeichnet hat, ſo hat man

für drei Strahlen

$$N' = \frac{0.0000208}{3(\gamma+\delta)}, \quad N'' = 2 \cdot \frac{0.000208}{3(\gamma+\delta)},$$

für vier Strahlen

$$N' = \frac{0.000208}{4(\gamma+\delta)}, N'' = 2\frac{0.0000208}{4(\gamma+\delta)}, N''' = 3 \cdot \frac{0.0000208}{4(\gamma+\delta)} \text{ ꝛc.}$$

111. Von beſonderer Wichtigkeit ſind die vollkommenen Spectra der zweiten Klaſſe, weil ſie die fixen Linien enthalten, dar-

um zu ſcharfen Meſſungen der Ablenkung einzelner Farben der Spectra beſonders geeignet ſind, und überdieß die einzelnen Farben ſo gut entwickelt ſind, daß jedes Farbenbild begrenzt iſt, wie ein durch ein dreiſeitiges Prisma gebildetes. Indeß darf man dieſe Spectra mit dem prismatiſchen doch nicht für identiſch halten, denn die Farbenvertheilung iſt in beiden ſehr ungleich, aber die Anzahl und Anordnung der fixen Linien haben beide mit einander gemein.

Wenn man es mit Gittern zu thun hat, bei denen der Abſtand der Mitte zweier Zwiſchenräume nicht ungemein klein iſt, ſo wird man für die Spectra der zweiten Klaſſe ſo geringe Ablenkungswinkel erhalten, daß das Geſetz ihres Abſtandes von der Axe zweifelhaft bleibt. Denn, wiewohl man findet, daß ſich dieſe Abſtände verkehrt wie die Größe $\gamma + \delta$ verhalten; ſo kann es doch immerhin ſeyn, daß ſtatt der einfachen Abſtände ihre Sinuſſe, Tangenten oder irgend eine andere trigonometriſche Function geſetzt werden müſſen. Darüber kann man nur entſcheiden, wenn einem ein Gitter zu Gebote ſteht, bei welchem die Ablenkungswinkel ſo groß werden, daß für ſie nicht mehr der Bogen mit dem Sinus ꝛc. verwechſelt werden darf. Ein ſolches Gitter verfertigte Fraunhofer. Es beſtand aus einem gleichförmig dicken Glaſe, worauf 3601 L. in ſo kleinen Abſtänden von einander radirt waren, daß die Größe $\gamma + \delta$ nur 0.0001223 P. Z. betrug. Bei dieſem Gitter war der Abſtand der fixen Linien *D* (Fig. 105) im erſten Spectrum ſchon 10° 14′ 31″, im zweiten 20° 49′ 44″ ꝛc. und war daher zur Entſcheidung obiger Frage groß genug. Da zeigte es ſich, daß man ſtatt des einfachen Abſtandes deſſen Sinus zu ſetzen habe, und demnach das Geſetz der Ablenkung ſo heißt: Die Sinuſſe der Abſtände der einzelnen Farbenbilder von der Axe wachſen wie Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion und die der Abſtände beſtimmter Stellen eines Farbenbildes bei verſchiedenen Gittern verhalten ſich verkehrt wie die Größe $\gamma + \delta$.

Ein anderer wichtiger Punct, deſſen Erörterung nur durch vollkommene Spectra der zweiten Klaſſe möglich iſt, beſteht in der Ausmittelung der conſtanten Größe, welche bei den Spectren der erſten Klaſſe mit 0.0000211, bei den inneren mit 0.0000208 bezeichnet wurde, für verſchiedene Stellen desſelben Farbenbildes. Wegen der ausnehmend großen Ablenkung der gebeugten Strahlen mittelſt ſolcher Gitter und dem Sichtbarſeyn der fixen Linien in den Spectren, läßt ſich dieſe Größe ſehr genau beſtimmen, beſonders da man durch ſchiefes Auffallen des Lichtſtrahles unſymmetriſche

Spectra erhält und man an den größeren derſelben die Meſſung vornehmen kann. Nennt man ſie ω und ſetzt, um die Stelle des Farbenbildes zu bezeichnen, auf welche es ſich bezieht, die Buchſtaben *C, D, E* ꝛc. (Fig. 105) bei, mit denen man die Stellen der ausgezeichnetſten fixen Linien bezeichnet, ſo erhält man nach Fraunhofer:

$$C\omega = 0.00002422$$
$$D\omega = 0.00002175$$
$$E\omega = 0.00001945$$
$$F\omega = 0.00001794$$
$$G\omega = 0.00001587$$
$$H\omega = 0.00001464.$$

Das vorhergenannte Geſetz, nach welchem ſtatt der Abſtände ihre Sinuſſe geſetzt werden müſſen, gilt ohne Zweifel auch für die Spectra der erſten Klaſſe, läßt ſich aber durch Beugung in einer einzigen Öffnung nicht ausmitteln, weil dieſe zu eng ſeyn müßte, als daß man noch ein hinreichend helles Phänomen erwarten dürfte.

117. Vollkommene Spectra der zweiten Klaſſe erhält man nicht blos mittelſt Gitter, bei denen die Mitte zweier Zwiſchenräume durchaus vollkommen gleich weit von einander abſtehen, ſondern auch bei ſolchen, wo die Zwiſchenräume regelmäßig ungleich ſind und wo ſich die Ungleichheiten regelmäßig in gleichen Parthien wiederhohlen. Nach Fraunhofer's Verſuchen muß man da in dem Ausdrucke, welcher den Sinus der Ablenkung für beſtimmte Strahlen gibt, ſtatt der einfachen Größe $\gamma + \delta$ das ſetzen, was ſich für die ganze Parthie ergibt, die ſich immer wiederhohlt.

118. Bisher wurden immer nur jene Beugungsfälle betrachtet, wo die Beugung nach einer Richtung erfolgt, weil ſie zur Feſtſtellung der allgemeinen Geſetze am paſſendſten ſind. Man kann aber auch Beugungen, die zugleich nach mehreren Richtungen erfolgen, leicht hervorbringen. Unter dieſen ſind jene am merkwürdigſten, bei welchen man das Licht durch eine kleine kreisrunde Öffnung beugt. Da in dieſem Falle die Beugung nach allen Richtungen in gleichem Grade erfolgt, ſo müſſen wohl die Spectra ringförmig erſcheinen und können eben ſo wenig aus homogenem Lichte beſtehen als die durch eine einzige Spalte erhaltenen. Was dieſen Fall beſonders merkwürdig macht, iſt, daß die ſo gebeugten Strahlen andere Geſetze befolgen, als jene ſind, die ſich bei den nach einer einzigen Richtung gebeugten Strahlen bewährt haben. Es iſt nämlich, wenn man mit

L, L', L'', L''' ꝛc. daſſelbe bezeichnet, was dieſe Buchſtaben in 112 bedeuteten

$$L = \frac{0.000214}{\gamma} = L'' - L' = L''' - L'' = L'''' - L''' \text{ꝛc.}$$

und dieſes Geſetz ſtimmt mit dem S. 476 erwähnten hinreichend überein, da die kleine Differenz im Werthe von L hier und dort recht wohl von Beobachtungsfehlern herkommen kann. Aber man hat nicht mehr wie dort $L'' = 2L$, $L''' = 3L$ ꝛc., ſondern

$$L' = \frac{0.0000257}{\gamma},\ L'' = L' + L,$$

$$L''' = L' + 2L,\ L'''' = L' + 3L \text{ u. ſ. f.}$$

119. Kennt man die Geſetze der Beugung, von denen bisher die Rede war, ſo fällt es nicht ſchwer, den Erfolg der Beugung bei jeder Geſtalt des beugenden Körpers, ja ſelbſt beim Gebrauche mehrerer ſolcher überhaupt anzugeben. So z. B. erſcheint bei Anwendung einer viereckigen Öffnung ein Kreuz mit diagonalen Farbenſtreifen, weil das Licht nach der Breite, nach der Höhe und zugleich nach der Diagonale gebeugt wird und nach jeder dieſer Richtungen Spectra erzeugt.

Leitet man durch mehrere runde oder eckige Öffnungen Lichtſtrahlen, ſo wird das Beugungsphänomen verwickelter, kann aber doch in ſeine Elemente aufgelöſet werden. Läßt man z. B. durch zwei runde Öffnungen Lichtſtrahlen gehen und das gebeugte Licht auf das Objectiv des Fernrohres fallen, ſo muß man im Geſichtsfelde deſſelben die Phänomene ſehen, welche durch Beugung in einer kreisförmigen Öffnung entſtehen, vereint mit jenen, welche durch Beugung an der Zwiſchenwand oder an den äußeren Rändern der Öffnungen hervorgehen. Eine runde Öffnung liefert kreisförmige Spectra, die den inneren erleuchteten Rand umſchließen, die Ränder der zwei Öffnungen geben unvollkommene Farbenbilder der zweiten Klaſſe nach der Richtung, in welcher die Mittelpuncte der zwei Öffnungen liegen und nach der gegen dieſe geneigten. Es erſcheint auch wirklich ein Bild, das aus dieſen Elementen zuſammengeſetzt iſt.

Daß die Beugungsphänomene im reflectirten Lichte gerade ſo wie im directen vor ſich gehen und in verſchiedenen Mitteln auch in dem Verhältniſſe verkleinert erſcheinen, in welchem das Bre-

chungsverhältniß des Mittels größer iſt, iſt ohnehin aus jedem Elementarbuch über Phyſik bekannt.

120. Die bisher behandelten Beugungsphänomene beziehen ſich durchaus auf nahe gleiche Entfernungen von der Beugungsſtelle. In ungleichen Entfernungen von derſelben finden auch verſchiedene Erſcheinungen Statt, ſtehen aber mit den bei einer beſtimmten Entfernung beobachteten in ſo naher Verbindung, daß man ſie ohne Ausnahme aus der Theorie, von welcher in der Folge die Rede ſeyn wird und welche die bei gleichen Entfernungen eintretenden Phänomene umfaßt, unmittelbar deduciren kann. Als Beiſpiel einer ſolchen Erſcheinung mag Folgendes dienen: Leitet man Licht durch eine verticale Spalte am Fenſterladen auf einen dünnen verticalen Cylinder und fängt dieſes ſowohl als den Schatten des Cylinders auf einer nahe am Cylinder ſtehenden transparenten Tafel auf, hinter welcher ſich das Auge des Beobachters befindet; ſo ſieht man daſelbſt den ſchwarzen Schatten des Cylinders und zu beiden Seiten gebeugtes Licht. Entfernt man aber die Tafel immer mehr und mehr vom Cylinder, ſo fängt der Schatten an, der Länge nach in der Mitte blaß zu werden, bei fortgeſetzter Entfernung erſcheint daſelbſt ein weißer Streifen, der mittelſt einer Loupe angeſehen ſich als Aggregat dünner, durch dunkle Zwiſchenräume getrennter Lichtſtreifen characteriſirt. Wenn man mit der Tafel noch weiter fortrückt, ſo erkennt man dieſe Streifen ſelbſt mit freiem Auge, und ſieht, daß der Schatten gleichſam in zwei Theile getheilt iſt, die zu beiden Seiten von einem Halbſchatten und von Lichtſtreifen umgeben ſind; endlich verſchwindet auch der Reſt des Schattens und es bleibt nur eine Art Halbſchatten übrig, den einzelne ſchwache Lichtſtreifen begrenzen.

Ähnliche Veränderungen erleiden auch die Phänomene, welche durch Beugung des Lichtes in einer Öffnung hervorgebracht werden, wenn man ſie in verſchiedenen Entfernungen vom beugenden Körper betrachtet.

I. Doppelte Brechung und Polariſation.

121. Die Phänomene der doppelten Brechung und der Polariſation ſtehen mit einander in ſo inniger Verbindung, daß es unmöglich iſt, die einen ohne die anderen gründlich und genau kennen zu lernen. Beide Modificationen erläutern ſich gegenſeitig, und es tritt hier der (in der Phyſik überhaupt nicht ſeltene) Fall ein,

daß man bald ein Element der doppelten Brechung durch den Polariſationszuſtand, bald den Charakter der Polariſation aus der Art der doppelten Brechung erkennt, ein Umſtand, welcher die Darſtellung jener Lehren für den Anfänger ſehr erſchwert, aber wo die erſten Grundzüge ſowohl der Polariſation als der doppelten Brechung als bekannt angenommen werden, als Entſchuldigung dienen muß, daß beide Modificationen des Lichtes gleichſam unter Einem abgehandelt werden, und bald die eine, bald die andere die Hauptrolle ſpielt, je nachdem es der Deutlichkeit frommt.

1. Polariſirung des Lichtes.

122. Körper, welche das Licht doppelt brechen, haben zugleich die Kraft, dasſelbe unter Einem zu polariſiren. Ein Strahl, welcher die doppelte Brechung erlitten hat, iſt immer vollkommen, d. h. in allen ſeinen Theilen polariſirt, der Winkel, unter dem er gebrochen wurde, mag welcher immer ſeyn und es ſind ſtets beide Polariſationszuſtände zugleich und zwar an jedem Strahle einer vorhanden. Bei der einfachen Brechung und der Reflexion muß, wenn eine vollkommene Polariſation eintreten ſoll, der Einfallswinkel eine beſtimmte Größe haben, die durch Verſuche beſtimmt werden kann.

123. Biot empfiehlt zur Beſtimmung dieſes Winkels folgendes Verfahren: Man befeſtige an der verticalen Wand des Kreiſes eines Wollaſton'ſchen Reflexionsgoniometers ein gläſernes, rechtwinkeliges, dreiſeitiges Prisma ſo, daß eine Fläche desſelben mit jener verticalen Ebene parallel iſt, mithin eine andere die horizontale Lage hat, bringe in einer hinreichend großen Entfernung davon zwei brennende Kerzen an, wovon eine höher ſteht als die andere, die ſich aber beide in der verlängerten Ebene des Kreiſes befinden und regulire die verticale Entfernung derſelben von einander dahin, daß das reflectirte Bild der einen mit dem directen der anderen zuſammenfällt. Hierauf befeſtige man auf dem Axenſtift des Goniometers den Körper, für welchen man den Polariſationswinkel beſtimmen will und regulire ſeine Lage auf dieſem Stifte ſo, daß das von ihm reflectirte Bild einer Flamme mit dem directen der anderen zuſammenfällt. Iſt dieſes erreicht, ſo ſteht die reflectirende Fläche des zu prüfenden Körpers auf der Ebene des Kreiſes ſenkrecht. Man thut gut, die bewegliche Axe mit dieſem Körper um 90° zu drehen und neuerdings zu unterſuchen, ob jene

Coincidenz der zwei Bilder wieder Statt findet. Iſt dieſes vollbracht, ſo ſtellt man beide reflectirende Ebenen ſo, daß jene Coincidenz für beide eintritt, um ihres Parallelismus gewiß zu ſeyn. Alles dieſes iſt bloße Vorbereitung zum Verſuch. Dieſer ſelbſt beginnt nun damit, daß man den Kreis, ohne den Parallelismus der reflectirenden Flächen zu ſtören, dahin dreht, daß beide Reflexionsebenen durch den Mittelpunct einer der beiden Kerzen gehen. Dieſes wird der Fall ſeyn, wenn man es dahin gebracht hat, daß die obere Hälfte einer Flamme mit ihrem Bilde im Glaſe zuſammenfällt. Bei dieſer Stellung des Kreiſes hat man nun den Stand des Nonius abzuleſen und zu notiren. Nun dreht man den reflectirenden Körper mittelſt der Axe des Goniometers dahin, daß das von demſelben reflectirte Bild derſelben Kerze ganz polariſirt erſcheint. Dieſes erkennt man mittelſt eines Doppelſpathes, deſſen Hauptſchnitt in der Reflexionsebene liegt, indem man durch ihn nur ein einfaches Bild ſieht, ſobald das Licht vollkommen polariſirt iſt. Läßt der Körper keine vollkommene Polariſation zu, ſo wird man doch einen Stand finden, wo das zweite Bild die geringſte Lichtſtärke hat. Der Stand des Nonius in dieſem Falle wird nun wieder abgeleſen, ſein Werth vom anfänglichen abgezogen und der Reſt als Größe des Polariſationswinkels angeſehen. Statt des Doppelſpathes kann man mit Vortheil ein braunes Turmalinplättchen brauchen, das im Falle der vollkommenen Polariſation bei gehöriger Stellung gar kein Licht durchläßt.

124. Noch einfacher iſt Aragos Verfahren. Es beſteht in Folgendem: Man bringe an einer verticalen Wand eine horizontale Scale an, deren Theile, von einer beſtimmten Stelle aus, der Größe eines Grades entſprechen. Daß man eine ſolche Scale leicht mittelſt eines an der betreffenden Stelle aufgeſtellten Theodoliths beſtimmen könne, iſt für ſich klar. Will man nun den Polariſationswinkel einer Subſtanz beſtimmen, ſo befeſtige man ſie an eine verticale Axe, die ſich an der Stelle befindet, welche als Centrum der Scale anzuſehen iſt, bringe an einem Theilſtrich der Scale eine Kerzenflamme an, und richte jene Subſtanz ſo lange, bis das directe Bild mit dem von ihr reflectirten in einerlei Höhe erſcheint, in welchem Falle man verſichert iſt, daß die reflectirende Ebene vertical ſteht. Hierauf dreht man ſie um die verticale Axe und folgt dem reflectirten Bilde mit einem Doppelſpathprisma, bis man jene Stelle erreicht hat, wo das Bild aus vollkommen polariſirtem Lichte

beſteht. Jener Theil der Scale, welcher zwiſchen der Kerze und dem reflectirten Bilde, in der Richtung der Bewegung des letzteren liegt, gibt den doppelten Polariſationswinkel an.

125. Beide Methoden ſind nur auf feſte Körper anwendbar. Für flüſſige iſt ein anderes Verfahren nothwendig, das nach Biot mit dem Fig. 129 abgebildeten Inſtrumente vollzogen wird. *AB* und *CD* ſind zwei, in gleiche Theile getheilte gerade Metallſtäbe, die auf einander ſenkrecht ſtehen und wovon letzterer längs dem erſteren hingeſchoben werden kann, ſo daß ſich ſein Stand an der Scale desſelben mittelſt eines Nonius genau ableſen läßt. An einem Schieber des horizontalen Stabes iſt die Schale *E* zur Aufnahme der zu unterſuchenden Flüſſigkeit, am verticalen ein beweglicher Schieber mit einer Öffnung angebracht, hinter welche man eine brennende Kerze ſtellt, die ihr Licht auf die Flüſſigkeit ſendet. Erhöht oder erniedriget man den Schieber und die Kerze ſo lange, bis der reflectirte Strahl vollkommen polariſirt erſcheint, ſo gibt der Quotient aus der Höhe der Öffnung an der verticalen Stange durch die Entfernung dieſer Stange vom Einfallspuncte des Lichtes, die Tangente des Polariſationswinkels.

126. Der Erfahrung gemäß iſt der Polariſationswinkel nicht blos von der reflectirenden Subſtanz, ſondern auch von dem Mittel abhängig, durch welches das Licht auf ſie gelangt, und rückt der Größe von 45° deſto näher, je weniger die Brechungsvermögen dieſer zwei Körper von einander abweichen. Heißt demnach der Brechungsexponent für die polariſirende Subſtanz *N*, für das Mittel, wodurch das Licht auf ſie gelangt, *n* und *α* der Polariſationswinkel von der zum Einfallspuncte Normalen an gerechnet; ſo hat man für $\alpha = 45°$, $\frac{N}{n} = 1$. Ferner lehrt die Erfahrung, daß ſich der Polariſationswinkel einem rechten deſto mehr nähert, je größer der Unterſchied der Brechungsexponenten des alten Mittels und der polariſirenden Subſtanz iſt, und für den Fall

$$\frac{N}{n} = \infty \text{ hat man } \alpha = 90°.$$

Da nun $\tan 45° = 1$; $\tan 90° = \infty$ iſt, ſo ſcheint dieſes anzuzeigen, daß man den Polariſationswinkel durch die Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{N}{n}$$

ausdrücken könne. In der That ſpricht die Vergleichung der Rechnung mit Thatſachen directer Beobachtungen ſehr zu Gunſten dieſer Annahme, wie folgende Tabelle zeigt:

Subſtanz	Brechungsexponent von der Luft in dieſe Subſtanz $\frac{N}{n}$	Polariſationswinkel	
		Berechnet	Beobachtet
Waſſer	1.3359	36° 49′	36° 58′
Fiſchöhl	1.4666	34° 29′	34° 30′
Bernſtein	1.5555	32° 44′	33° 25′
Schwerſpath	1.6428	31° 19′	32° 6′
Topas	1.652	31° 11′	31° 0′
Schwefel natürl.	2.0278	26° 15′	29° 46′
Diamant	2.43905	22° 18′	22° 54′
Flußſpath	1.433	35° 51′	35° 10′
Obſidian	1.488	33° 54′	33° 57′
Doppelſpath	1.654	31° 9′	31° 37′

127. Aus dem Geſetze für die Größe des Polariſationswinkels laſſen ſich einige intereſſante Folgerungen ziehen und zwar:

1) Wenn ein Strahl unter dem Winkel der Polariſation $= \alpha$ einfällt, ſo ſteht ſein reflectirter Antheil auf dem gebrochenen ſenkrecht. Man hat nämlich

$$\tan \alpha = \frac{N}{n} \text{ oder } \sin \alpha = \frac{N}{n} \cos \alpha.$$

Heißt der Brechungswinkel β, ſo iſt

$$\sin \beta = \frac{n}{N} \sin \alpha = \cos \alpha$$

mithin $\alpha + \beta = 90°$.

2) Der Polariſationswinkel iſt ſtets kleiner als der Winkel der totalen Reflexion. Heißt letzterer ϑ, ſo iſt

$$\sin \vartheta = n \text{ und wegen } \tan \alpha = n$$

$$\tan \alpha = \sin \vartheta \text{ oder } \sin \alpha = \sin \vartheta \cos \alpha \text{ mithin } \alpha < \vartheta.$$

3) Fällt ein Strahl unter dem Winkel α auf einen von parallelen Flächen begrenzten durchſichtigen Körper, ſo iſt nicht blos der von der erſten, ſondern auch der von der zweiten Fläche reflectirte

Strahl vollkommen polariſirt. Iſt α der Einfallswinkel an der erſten Fläche, β der Brechungswinkel, ſo hat man

$$\sin\beta = \cos\alpha$$

und daraus

$$\tang\beta = \cot\alpha = \frac{n}{N}.$$

Aber β iſt zugleich der Reflexionswinkel auf der zweiten Grenze des Mittels und $\frac{n}{N}$ der Brechungsexponent für den Austritt aus dieſem Mittel, daher zugleich der vollkommene Polariſationswinkel.

4) Da der Brechungsexponent für verſchiedenfarbige Strahlen verſchieden iſt, ſo muß auch der Polariſationswinkel für ſie verſchieden ausfallen und die bisher numeriſch bezeichneten Winkel gelten blos für die ſtärkeren d. h. gelben Strahlen. Alles dieſes beſtätiget die Erfahrung vollkommen.

128. Fällt ein Lichtſtrahl nicht unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation ein, ſo werden nur einige ſeiner Theile polariſirt, man kann aber auch den Reſt derſelben in den Polariſationszuſtand verſetzen, wenn man ſie mehreren Reflexionen in derſelben Ebene und unter demſelben Winkel unterwirft. Iſt a der Einfallswinkel, α aber der Winkel der vollkommenen Polariſation, μ die Anzahl der zur vollkommenen Polariſation nöthigen Reflexionen, ſo hat man nach Brewſter (Phil. transact. 1815), wenn $a > \alpha$ iſt:

$$\tang a = \alpha \sqrt[3]{\mu} \text{ oder } \mu = \frac{\tang a^3}{\alpha^3}$$

und wenn $a < \alpha$ iſt

$$\tang a = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\mu}} \text{ oder } \mu = \frac{\alpha^3}{\tang a^3}.$$

Iſt demnach $\alpha = 56^\circ\ 45'$, ſo wird zur vollkommenen Polariſation bei einem Einfallswinkel von

56°	45′	erfordert	1	Reflexion
62	30	„	2	Reflexionen
70	9	„	6	„
73	4	„	10	„
81	57	„	100	„
86	15	„	1000	„
8	46	„	1000	„
18	11	„	100	„

35°	18′	erfordert	10	Reflexionen
40	0	„	6	„
50	26	„	2	„

Iſt der Einfallswinkel bei mehreren auf einander folgenden Reflexionen in der Ordnung a, a_1, a_2, a_3 ꝛc. ſo hat man für die vollkommene Polariſation

$$\frac{1}{\tang\frac{a}{\alpha}} + \frac{1}{\tang\frac{a_1}{\alpha}} + \frac{1}{\tang\frac{a_2}{\alpha}} + \cdots\cdots = 1.$$

129. Der gebrochene Antheil eines Lichtbüſchels fordert ſelbſt bei dem gehörigen Einfallswinkel auch noch eine beſtimmte Anzahl Brechungen, um vollkommen polariſirt zu werden. Bei einer einzigen Brechung, oft bei mehreren, behält ein Theil des Lichtes noch immer ſeinen natürlichen Zuſtand. Zur näheren Beſtimmung des durch eine Brechung polariſirten Antheils dient folgender delicater Verſuch. Man ſtelle eine Glasplatte AB (Fig 130) mit parallelen Wänden ſenkrecht auf einen Bogen weißes Papier CD. Ein von a kommender Lichtſtrahl wird in b zum Theil reflectirt und kommt nach o, ein anderer von c ausgehender ſendet ſeinen gebrochenen Antheil eben dahin ſo, daß man nur das Auge in o zu halten braucht, um ſowohl den reflectirten als den gebrochenen damit aufzufangen. Man leite nun bo durch ein Doppelſpathprisma, um ſeinen Polariſationszuſtand erforſchen und um ſowohl den reflectirten als den gebrochenen Antheil beſonders unterſuchen zu können, fange dann durch einen undurchſichtigen Schirm bald letzteres bald erſteres auf. Hält man das Prisma ſo, daß ſein Hauptſchnitt mit der Reflexionsebene parallel iſt, ſo ſieht man zwei Bilder, es mögen die gebrochenen oder die reflectirten Strahlen allein ins Auge gelangen, aber das gewöhnliche Bild iſt heller, falls man nur die reflectirten Strahlen ins Auge kommen läßt, das ungewöhnliche hingegen dann, wenn nur die gebrochenen Strahlen ins Auge gelangen. Läßt man beide Strahlen ins Auge, ſo erſcheinen beide Bilder vollkommen gleich hell.

Dieſer Verſuch lehrt: 1) daß die reflectirten Strahlen und die gebrochenen entgegengeſetzt polariſirt ſind, 2) daß der polariſirte Antheil des gebrochenen Lichtes dem reflectirten gleich iſt. In den meiſten Fällen werden von durchſichtigen Körpern mehr Strahlen durchgelaſſen als reflectirt und daher iſt ſelbſt in dem Falle, wo

letztere vollkommen polariſirt ſind, ein geringer Antheil der erſteren polariſirt. Wird die Hälfte der auffallenden Strahlen reflectirt und zugleich polariſirt, ſo ſind auch ſchon nach der erſten Brechung alle gebrochenen Strahlen polariſirt.

2. Eigenſchaften des polariſirten Lichtes.

130. Der Charakter eines polariſirten Lichtſtrahles beſteht darin, daß er ſich der einfachen und doppelten Brechung, der Reflexion und der Interferenz unter gehörigen Umſtänden entzieht.

Ein durch Reflexion vollkommen polariſirter Strahl wird von einem Körper, den er unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation trifft, ganz reflectirt, wenn die Einfallsebene mit der Polariſationsebene (Einfallsebene auf den erſten polariſirenden Körper, wenn die Polariſirung durch Reflexion geſchah, hingegen die darauf ſenkrechte, wenn die Polariſirung durch Brechung erzeugt wurde), parallel iſt, hingegen ganz durchgelaſſen oder abſorbirt, wenn dieſe zwei Ebenen auf einander ſenkrecht ſtehen. Sobald beide Ebenen mit einander einen ſpitzigen Winkel einſchließen, wird nur ein Theil des Lichtes reflectirt, der andere aber abſorbirt oder durchgelaſſen. Die Intenſität des reflectirten Strahles erhält daher, wenn man dem zweiten reflectirenden Körper um den Strahl, wie um eine Axe um 360° herumdreht, zwei Maxima und eben ſo viele Minima. Bezeichnet demnach S die Intenſität des polariſirten Strahles, a den Winkel, welchen die Einfallsebene mit der Polariſationsebene macht, ſo entſprechen die Ausdrücke: $S\cos^2 a$ und $S\sin^2 a$ den Bedingungen, unter welchen die Intenſität des polariſirten Strahles ſteht und es kann daher erſterer Ausdruck die Intenſität des reflectirten, letzterer die des durchgelaſſenen oder abſorbirten Antheils ausdrücken. Es iſt nämlich:

für $a = 0°$; $S\cos^2 a = S$; $S\sin^2 a = 0$
„ $a = 90°$; $S\cos^2 a = 0$; $S\sin^2 a = S$
„ $a = 180°$; $S\cos^2 a = S$; $S\sin^2 a = 0$

und für jeden Werth von a

$$S\cos^2 a + S\sin^2 a = S.$$

Dieſelben Ausdrücke $S\cos^2 a$ und $S\sin^2 a$ geben auch die Intenſität der zwei Strahlenbüſchel, in welche ein polariſirter Strahl in einem Doppelſpath oder einem anderen doppelt brechenden Körper getheilt wird, ſo daß ſich $S\cos^2 a$ auf den gewöhnlich gebrochenen

$S \sin^2 a$ auf den ungewöhnlich gebrochenen Antheil bezieht, wobei aber a der Winkel iſt, den der Hauptſchnitt des Kryſtalles mit der Polariſationsebene macht.

131. Einen unpolariſirten Strahl kann man anſehen, als beſtehe er aus zwei nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirten Hälften. Iſt S die Intenſität eines ſolchen Strahles, a der Winkel, welchen die Polariſationsebene mit der Einfallsebene der einen Hälfte macht, und daher $90 - a$ derſelbe Winkel für die andere Hälfte, ſo hat man für den ganzen reflectirten Strahl

$$S \cos a^2 + S [\cos (90 - a)]^2 = S$$

mithin iſt die Intenſität desſelben von a unabhängig und bei demſelben Einfallswinkel in jedem Azimuth gleich groß, welches gerade der Charakter des unpolariſirten Lichtes iſt.

132. Fällt ein polariſirter Strahl nicht unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation auf den zweiten Körper auf, ſo iſt das Geſetz für die Intenſität des reflectirten und durchgelaſſenen oder abſorbirten Strahles von dem vorhergehenden verſchieden. Fresnel gibt für die Intenſität des reflectirten Antheils folgenden theils aus ſeinen theoretiſchen Anſichten über das Licht, theils aus Verſuchen abgeleiteten Ausdruck an:

$$S = \frac{\sin^2 (\beta - \gamma)}{\sin^2 (\beta + \gamma)} \cos^2 a + \frac{\operatorname{tang}^2 (\beta - \gamma)}{\operatorname{tang}^2 (\beta + \gamma)} \sin^2 a \ldots (C)$$

wo die Intenſität des auffallenden Lichtes $= 1$, der Winkel der Polariſationsebene mit der Einfallsebene $= a$, der Einfallswinkel $= \beta$ und der Brechungswinkel $= \gamma$ iſt. Die Richtigkeit dieſer Formel läßt ſich auf empiriſchem Wege hauptſächlich nur für einzelne Fälle prüfen und bei dieſen bewährt ſie ſich vollkommen, ſo daß dieſes wohl einen Grund abgeben kann, ſie in ihrer vollen Allgemeinheit, wenigſtens vor der Hand, für brauchbar anzuſehen.

Iſt $a = 90°$ und β der Polariſationswinkel, ſo hat man $\beta + \gamma = 90°$ und daher $S = 0$, alſo der Erfahrung gemäß.

Iſt $a = 0°$, ſo wird $S = \frac{\sin^2 (\beta - \gamma)}{\sin^2 (\beta + \gamma)}$ und wenn zugleich $\beta + \gamma = 90°$, alſo das Licht unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation einfällt, $S = 1$, wieder der Erfahrung gemäß.

133. Iſt der zu prüfende Lichtſtrahl nicht vollkommen polariſirt, ſo kann man ihn aus zwei Theilen beſtehend annehmen, wovon der eine polariſirt iſt, der andere aber ſich im natürlichen Zuſtande be-

findet, dem letzteren kann man nach (131) wieder zwei nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirte Theile ſubſtituiren. Iſt demnach s die Intenſität des einfallenden polariſirten, mithin $(1-s)$ die des im natürlichen Zuſtande befindlichen Antheils, ſo wird der reflectirte Antheil der erſten ſeyn

$$s \cdot \frac{\sin^2(\beta-\gamma)}{\sin^2(\beta+\gamma)} \cos^2 a + s \cdot \frac{\tang^2(\beta-\gamma)}{\tang^2(\beta+\gamma)} \sin^2 a$$

der reflectirte des letzteren hingegen, wovon nur die Hälfte nämlich $\left(\frac{1-s}{2}\right)$ nach der Richtung der Einfallsebene polariſirt angenommen werden darf

$$\frac{1-s}{2}\left\{\frac{\sin^2(\beta-\gamma)}{\sin^2(\beta+\gamma)} + \frac{\tang^2(\beta-\gamma)}{\tang^2(\beta+\gamma)}\right\}$$

mithin der geſammte reflectirte Antheil

$$\frac{\sin^2(\beta-\gamma)}{\sin^2(\beta+\gamma)} \cdot \frac{1+s\cos 2a}{2} + \frac{\tang^2(\beta-\gamma)}{\tang^2(\beta-\gamma)} \cdot \frac{1-s\cos 2a}{2} \quad (D).$$

Man darf aber hierbei nicht vergeſſen, daß es ſich nur um die Reflexion an unkryſtalliſirten Körpern handelt.

134. Die vorhergehenden Betrachtungen über die Intenſität des reflectirten oder gebrochenen Antheils eines polariſirten Strahles, der auf einen durchſichtigen Körper unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation auffällt, laſſen ſich unbeſchränkt auf die Intenſität jener Theile eines Strahles anwenden, in welche ein polariſirter Strahl in einem Doppelſpath geſpalten wird, man darf nur immer ſtatt des reflectirten den gewöhnlich gebrochenen, ſtatt des durchgelaſſenen oder abſorbirten hingegen den ungewöhnlich gebrochenen Strahl ſetzen. Iſt daher die Intenſität des auffallenden Strahles $=1$, der Winkel, welchen die Polariſationsebene mit dem Hauptſchnitt des Kryſtalls macht $=a$, ſo drückt die Formel in 132 die Intenſität des gewöhnlich gebrochenen, und daher $1-S$ die des ungewöhnlich gebrochenen Strahles aus.

135. Der Polariſationszuſtand eines Strahles wird öfters durch eine neue Reflexion geändert. Nach Fresnel erſcheint er nach der Reflexion in einer Ebene polariſirt, die mit der Reflexionsebene den Winkel ϑ einſchließt, ſo daß

$$\tang \vartheta = \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos(\beta-\gamma)} \tang a \quad \ldots\ldots \quad (E).$$

iſt, wobei β, γ, a die vorhin angenommene Bedeutung haben. Fällt der Strahl auf die reflectirende Fläche unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation ein, ſo iſt $\beta + \gamma = 90°$ und daher $\vartheta = 0$, oder die neue Polariſationsebene fällt mit der Reflexionsebene zuſammen.

Fällt das Licht nicht unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation ein, ſo behält es ſeinen urſprünglichen Polariſationszuſtand, wenn die Reflexionsebene mit der Polariſationsebene zuſammenfällt; denn in dieſem Falle iſt $a = 0$ und daher auch $\vartheta = 0$. Steht die Reflexionsebene auf der Polariſationsebene ſenkrecht, ſo iſt $a = 90°$, $\tan a = \infty$ und daher $\vartheta = 90°$, alſo auch die neue Polariſationsebene auf der urſprünglichen ſenkrecht. In dieſen beiden Fällen fällt daher die Polariſationsebene mit der Reflexionsebene zuſammen.

Mit dieſen Reſultaten obiger Formel ſtimmt die Erfahrung überein, wie dieſes Arago gezeigt hat. Man ſtellt ſie mit einem Doppelſpath an, durch den man den Strahl nach der Reflexion unterſucht, indem man als erwieſen vorausſetzt, daß der Strahl, deſſen Licht nur die gewöhnliche Brechung erleidet, in der Ebene polariſirt iſt, in welcher der Hauptſchnitt des Kryſtalls liegt.

136. Zwei Strahlenſyſteme, die nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirt ſind, interferiren ſich, wie bekannt, nicht; ſolche aber, die nach einerlei Richtung polariſirt ſind, interferiren ſich gleich dem unpolariſirten Lichte. Die letztere Wahrheit kann man leicht durch einen Verſuch zeigen, indem es nicht ſchwierig iſt, die von zwei leuchtenden Puncten kommenden Lichtbüſchel auf gleiche Weiſe zu polariſiren, ohne dadurch die Differenz ihrer Wege zu ändern und ſie dann dem bekannten Interferenzverſuche zu unterwerfen. Anders verhält es ſich mit dem erſten Theile des obigen Satzes. Läßt man die von einem leuchtenden Punct kommenden Strahlen etwa durch einen Doppelſpath gehen, ſo erlangen ſie wohl entgegengeſetzte Polariſationszuſtände, aber es wird zugleich auch die Differenz ihrer Wege geändert; darum muß man dieſer Änderung durch beſondere Kunſtgriffe zu begegnen ſuchen. Fresnel erreichte dieſes dadurch, daß er zwei gleich dicke (durch Halbirung eines einzigen Stückes erhaltene) Doppelſpathe ſo über einander befeſtigte, daß ihre Hauptſchnitte auf einander ſenkrecht ſtanden. In dieſem Körper muß nämlich der Strahl, welcher im

erſten die gewöhnliche Brechung erlitten hatte, im zweiten die ungewöhnliche erleiden, und umgekehrt, und jene Änderung, welche ſeine Geſchwindigkeit in der erſten Hälfte des Kryſtalls erlitten hatte, mußte in der zweiten im entgegengeſetzten Sinne eintreten. Sieht man durch einen ſolchen Kryſtall auf die ſchmale und hohe Fenſteröffnung, wie ſie beim Interferenzverſuche (S. 453) angegeben wurde, und in welcher die Strahlen überdieß noch durch ein cylindriſches Glas zu einer phyſiſchen Lichtlinie vereiniget werden, ſo bemerkt man doch keine Farbenſtreifen, wiewohl die Durchkreuzung der Strahlen eintritt, und es iſt nicht abzuſehen, daß etwas anderes als der entgegengeſetzte Polariſationszuſtand die Urſache des Unterbleibens der Interferenz ſey. Fresnel hat dieſen Verſuch auch noch auf andere Weiſe angeſtellt, und auch Arago hat ihn auf eine etwas andere Art ins Werk geſetzt.

137. Zwei nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirte Lichtbüſchel erlangen ihre Interferenzfähigkeit durch Zurückführung auf dieſelbe Polariſationsrichtung nicht mehr. Dieſes beweiſet folgender Verſuch, der von Arago herrührt. Man bringe an einem Fenſterladen zwei einander ſehr nahe und ſehr enge Spalten an, damit durch dieſelben zwei Lichtbüſchel in das Zimmer kommen und ſich bei ihrer Erweiterung durchkreuzen und interferiren. Hierauf bereite man ſich eine Säule aus 12 — 15 ſehr dünnen über einander gelegten Glimmerplättchen, welche Licht durchlaſſen und dasſelbe bei einem beſtimmten Einfallswinkel (bei Arago's Verſuch betrug er 30) vollkommen polariſiren. Den Polariſationswinkel beſtimme man vorläufig, zerſchneide dann die Glimmerſäule in zwei Hälften, um ſo zwei ſolche, wenigſtens in der Nähe des Schnittes vollkommen gleich dicke Säulen zu erhalten. Dieſe befeſtiget man in eigenen Rahmen und bringt jede derſelben vor einer der zwei Öffnungen an, ſo daß das Licht unter dem vorhin beſtimmten Polariſationswinkel einfällt und die Einfallsebenen beider auf einander ſenkrecht ſtehen. Die nun ins Zimmer eindringenden Lichtbüſchel können keine Farbenſtreifen geben, weil ſie nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirt ſind. Nun ſtelle man einen Doppelſpath ſo zwiſchen das Auge und die Fenſterſpalten, daß ſein Hauptſchnitt mit jeder der zwei Polariſationsebenen 45° macht und ſehe durch denſelben mittelſt einer Linſe die Spalten an. Wiewohl da jeder Strahlenbüſchel im Doppelſpath in zwei gleiche, nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirte Theile getheilt wird, und von den vier

Büſcheln je zwei einerlei Polariſationszuſtand haben, ſo erſcheint doch kein Interferenzphänomen, zum Beweiſe, daß dieſe Strahlen zur Interferenz unfähig ſind.

138. Man leite einen horizontalen Strahlenbüſchel in ein verfinſtertes Zimmer, laſſe ihn unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation auf einen Glasſpiegel fallen, ſo daß er im verticalen Sinne polariſirt erſcheint und ſeinen Weg in horizontaler Richtung fortſetzt. Dieſen Büſchel fange man nun mit einem Schirme auf, in welchem zwei Öffnungen angebracht ſind. Vor dieſen ſey ein parallel mit der Axe geſchnittenes, etwa 1 L. dickes Gipsplättchen ſo angebracht, daß das Licht ſenkrecht durch dasſelbe gehen kann, und ſein Hauptſchnitt gegen die (verticale) Polariſationsebene um 45° geneigt iſt. Läßt man die durch die Öffnungen gegangenen Strahlen weiter noch durch eine Säule aus Glasplatten gehen, die das Licht vollkommen polariſiren und zwar ſo, daß dieſe Polariſation in verticalem Sinne erfolgt, und ſtellt ſich hinter derſelben mit einer ſtarken Convexlinſe vor dem Auge ſo auf, daß der Brennpunct der Linſe hinter der Glasſäule liegt; ſo ſieht man die Farbenſtreifen, welche aus der Interferenz der Strahlen hervorgehen und zwar in folgender Anordnung: Zwiſchen den beiden Öffnungen erſcheint ein Syſtem farbiger Streifen, wie beim gewöhnlichen Interferenzverſuch. Ein zweites Syſtem dieſer Art erſcheint rechts von dieſem und ein drittes dem zweiten gleiches links. Die zwei letzteren Syſteme ſtehen deſto weiter von einander ab, je dicker das Gipsplättchen iſt, welches man anwendet. Analyſirt man den ganzen Hergang der Sache nach den vorhin bewieſenen Sätzen, ſo findet man: Der polariſirte Strahlenbündel wird in den zwei Spalten in zwei Theile getheilt, wir wollen den durch die rechte Spalte gehenden R, den durch die linke gehenden L nennen. Sowohl R als L werden in dem Gipsplättchen wieder in zwei Theile getheilt, die gleiche Intenſität haben und nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirt ſind und zwar der eine Theil in der Ebene, die um $+45°$, der andere in der Ebene, die um $-45°$ gegen die urſprüngliche (verticale) Polariſationsebene geneigt iſt. Dieſe wollen wir mit Ro, Re und Lo, Le bezeichnen. Die Theile Ro und Re ſind nach der Brechung im Gipsplättchen einander parallel, aber weil einer die gewöhnliche, der andere die ungewöhnliche Brechung erlitten, ſo werden ihre Geſchwindigkeiten nicht dieſelben ſeyn, ſondern um eine von der Dicke und der Natur des Plättchens abhängige

Größe differiren. Es ſey dieſe Differenz $= \vartheta$. Demnach hat man vier Strahlen mit folgendem Charakter:

Strahl	Geſchwindigkeit	Polariſationsrichtung
Ro	c	$+ 45°$
Re	$c + \vartheta$	$- 45°$
Lo	c	$+ 45°$
Le	$c + \vartheta$	$- 45°$.

Fallen dieſe Strahlen auf die Glasſäule, ſo behalten ſie wohl ihre urſprüngliche Geſchwindigkeit, aber ihre Polariſationsrichtung wird geändert und es erſcheinen alle, nachdem ſie durch das Glas gegangen ſind, von einerlei Polariſationszuſtand, deſſen Richtung $= 0°$ iſt. Nun können folgende Interferenzen Statt finden: *Ro* kann ſich mit *Lo* interferiren, ihre Interferenzpuncte müſſen wegen der Gleichheit ihrer Geſchwindigkeit zwiſchen den zwei Lichtlinien liegen. Dasſelbe muß mit den Strahlen *Re* und *Le* der Fall ſeyn, und die dadurch entſtandenen Lichtſtreifen müſſen ſich decken, und dadurch intenſivere Streifen erzeugen. Ferner können ſich *Ro* und *Le* interferiren; allein die dadurch hervorgehenden Streifen beginnen nicht mitten im Geſichtsfelde, ſondern wegen der gegen die vorhergehende obwaltenden Differenz an Geſchwindigkeit ϑ müſſen dieſe Streifen ſeitwärts von jenen liegen und zwar in einer deſto größeren Entfernung, je größer ϑ iſt.

Hieraus ſieht man, daß man den Einfluß gleichartig polariſirter Strahlen auf einander, welchen ſie durch entgegengeſetzte Polariſation verloren haben, durch abermalige Polariſirung in einerlei Ebene wieder herſtellen kann.

139. Wenn man beim vorhergehenden Verſuch ſtatt der polariſirenden Glasſäule einen Doppelſpath nimmt, deſſen Hauptſchnitt vertical ſteht, und übrigens wie vorher verfährt, ſo ſieht man in jedem der zwei Bilder, welche man durch denſelben erhält, die vorhin angegebenen Farbenſtreifen, und zwar haben die Seitenſtreifen des einen complementäre Farben zu den Seitenſtreifen des anderen.

Um hieraus Folgerungen ziehen zu können, analyſire man wieder die den Doppelſpath verlaſſenden Strahlen. Da deſſen Hauptſchnitt unter 45° gegen den Hauptſchnitt der Gipsplättchen geneigt iſt, ſo zerlegt er jeden der vier Strahlenbüſchel *Ro, Re, Lo, Le* in zwei gleich intenſive, wovon je zwei und zwei einerlei aber mit den übrigen entgegengeſetzte Polariſationsrichtung haben. Bezeich-

net man ſie, nach der vorher angenommenen Methode, ſo hat man nun folgende Strahlen: *Roo, Reo, Roe, Ree, Loo, Leo, Loe, Lee.* Iſt der Unterſchied an Geſchwindigkeit zwiſchen dem gewöhnlich und dem ungewöhnlich gebrochenen Strahl δ, ſo haben dieſe Strahlen folgende Charaktere:

Strahl	Geſchwindigkeit	Polariſationsrichtung
Roo	c	0°
Reo	$c+\vartheta$	0°
Loo	c	0°
Leo	$c+\vartheta$	0°
Roe	$c+\delta$	90°
Ree	$c+\vartheta+\delta$	90°
Loe	$c+\delta$	90°
Lee	$c+\vartheta+\delta$	90°.

Die vier erſten Strahlen geben das eine Bild mit den dazu gehörigen Farbenſtreifen, die vier letzteren das zweite. Die äußerſten Streifen des einen können ſich von den äußeren des anderen nur wegen der Verſchiedenheit der Werthe $(c+\vartheta+\delta)$ und $(c+\vartheta)$ alſo wegen δ unterſcheiden und da dieſer Unterſchied nur in der complementären Beſchaffenheit der Farben beſteht, ſo muß $\delta = \frac{1}{2}\omega$ ſeyn, wo ω die in (S. 455) angegebene Bedeutung hat. Es ergibt ſich daraus das merkwürdige Geſetz, daß man bei Strahlen, welche die doppelte Brechung erlitten haben, aus dem Reſultate der Interferenz der gewöhnlich gebrochenen Strahlen das der ungewöhnlich gebrochenen erhält, wenn man die Differenz der Wege oder Geſchwindigkeiten jener um $\frac{1}{2}\omega$ vermehrt oder vermindert.

3. Farben im polariſirten Lichte.

140. Mit der Polariſation des Lichtes ſtehen ſehr intereſſante Farbenerſcheinungen in Verbindung. Dieſe ſind von zweifacher Art. Einige derſelben treten ſchon ein, wenn Licht im natürlichen Zuſtande durch einen, dasſelbe doppelt brechenden alſo polariſirenden Körper geht, und erſcheinen nur modificirt, wenn man ſchon polariſirtes Licht anwendet; während andere ſich wohl auch nur in doppelt brechenden Subſtanzen zeigen, aber vorausſetzen, daß das Licht ſowohl, bevor es durch den doppelt brechenden Körper geht, als auch, nachdem es durch ihn gegangen iſt, polariſirt werde. Die letzteren ſind ſelbſt wieder von zweierlei Art und es erſcheint der po=

lariſirende Körper, falls er gleich dick iſt, in ſeiner ganzen Ausdehnung gleichförmig gefärbt oder es zeigen ſich an ihm farbige Ringe. Erſtere Phänomene ſind nur ein beſonderer Fall der letzteren.

141. Läßt man auf einen ziemlich dicken, gelblichen Doppelſpath durch eine kleine runde Öffnung weißes Licht fallen, damit hinter dem Kryſtalle zwei hinreichend von einander getrennte Bilder jener Öffnung erſcheinen; ſo bemerkt man, daß das ungewöhnliche Bild etwas heller iſt als das gewöhnliche und röthlich gelb erſcheint, während dieſes gelblich weiß iſt. Der Unterſchied der Farben dieſer beiden Bilder iſt nicht immer derſelbe, ſondern am kleinſten, wenn das Licht parallel mit der Axe einfällt, am größten hingegen, wenn dasſelbe die Axe unter einem rechten Winkel trifft. Einige doppelt brechende Kryſtalle zeigen zwei nicht blos dem Grade, ſondern auch ihrer Natur nach verſchiedene Farben, je nachdem ein gewöhnlicher Lichtſtrahl parallel mit ihrer Axe oder ſenkrecht auf dieſelbe durch ſie geht. Von der Art ſind manche Saphire, die in der Richtung der Axe dunkelblau, ſenkrecht darauf gelblich grün erſcheinen. Doch kommt dieſe Eigenſchaft nur wenigen doppelt brechenden Kryſtallen zu. Häufiger bemerkt man derlei Farbenerſcheinungen in doppelt brechenden Körpern, wenn man polariſirtes Licht durch ſie gehen läßt. Bringt man z. B. ein Priſma aus bläulich grünem Beryll in polariſirtes Licht, ſo läßt es, wenn ſeine Axe auf der Polariſationsebene ſenkrecht ſteht, blos blaues, wenn die Axe aber in dieſer Ebene liegt, blos grünlich weißes Licht durch; bringt man es aber ſucceſſiv von der erſteren Lage in die letztere, ſo geht auch das durchgelaſſene Licht allmälig von Blau in grünlich Weiß über. Ja wenn man aus einem ſolchen Kryſtalle ein Priſma ſchneiden läßt, welches die zwei Bilder hinreichend getrennt gibt, ſo erſcheint wirklich jedes derſelben mit einer anderen Farbe. Ein ähnliches Verhalten hat Brewſter, der dieſen Gegenſtand zuerſt bearbeitete, am Zirkon, Saphir, Rubin, Smaragd, Bergkryſtall, Amethyſt, Turmalin, Siberit, Veſuvian, Honigſtein, Apatit, phosphorſauren Blei gefunden, jedoch nur an einigen Varietäten dieſer Species.

142. Es iſt höchſt wahrſcheinlich, daß dieſe Phänomene von einer beſonderen abſorbirenden Kraft herrühren, welche einige doppelt brechende Körper auf das Licht ausüben. Dieſes zeigt ſich beſonders am Turmalin, bei welchem man das ſucceſſive Abſorbirtwerden des gewöhnlich gebrochenen Strahls deutlich ſehen kann.

Schneidet man aus einem reinen, hinreichend dicken Turmalin ein durchſichtiges Prisma ſo, daß die Kante des brechenden Winkels mit der Axe des Kryſtalles parallel iſt, achromatiſirt dasſelbe zur beſſeren Bequemlichkeit beim Beobachten durch ein Glasprisma und ſieht endlich durch das Doppelprisma auf einen dünnen Körper, z. B. auf eine Nähnadel; ſo bemerkt man zwei Bilder desſelben, falls man durch den dünneren Theil des Prisma's ſieht und beide können durch Drehen des Prisma's ſogar auf gleiche Intenſität gebracht werden. Bewegt man aber das Auge ſo, daß die Strahlen durch den dickeren Theil des Prisma's gehen müſſen, um noch in dasſelbe zu gelangen, ſo nimmt das gewöhnliche Bild immer mehr ab, während das ungewöhnliche nur jene Schwächung erleidet, die von der größeren Dicke des Prisma's unmittelbar herrührt, bei einer beſtimmten Dicke endlich verliert ſich erſteres Bild ganz, und es bleibt nur das letztere zurück.

143. Nimmt man eine abſorbirende Kraft doppelt brechender Körper an, ſo muß dieſe Kraft für jeden der zwei Strahlen, in welche ſolche Körper einen einfallenden einfachen Lichtbüſchel ſpalten, ein anderes Geſetz befolgen. Die natürlichſte Hypotheſe, welche ſich über das Geſetz der Abſorption des Lichtes überhaupt aufſtellen läßt, iſt die, daß der Lichtverluſt in einem Mittel von der Dicke $=1$ der Intenſität des einfallenden Lichtes proportionirt ſey. Iſt die Anzahl der einfallenden Strahlen $=1$, die Anzahl der übrig gebliebenen, nachdem ſie ein Stück des abſorbirenden Mittels von der Dicke $=1$ zurückgelegt haben y, ſo iſt ihre Anzahl beim Austritt aus dem Mittel von der Dicke c gleich y^c. Hierbei iſt y ein ächter Bruch, der von der Natur des abſorbirenden Mittels und von der Brechbarkeit der Lichtſtrahlen abhängt. Es gelte nun in einem kryſtalliſirten Mittel der vorhin erwähnten Art y_o für einen gewöhnlichen, y_e für einen ungewöhnlichen Strahl, und man ſetze für den Winkel β

$$y_o = X_o + Y_o \sin^2\beta, \; y_e = X_e + Y_e \sin^2\beta$$

wobei ſowohl y_o, y_e als X_o, Y_o, X_e, Y_e von der Brechbarkeit des Strahles abhängig ſind und die Coordinaten einer Curve darſtellen, welche das Bild des Geſetzes der Abſorption des betreffenden Strahles iſt. Man erhält durch Addition beider Gleichungen

$$y_o + y_e = X_o + X_e + (Y_o + Y_e) \sin^2\beta.$$

Zur näheren Beſtimmung von X und Y hat man die Farbe, welche der Körper zeigt, wenn gewöhnliches Licht längs ſeiner Axe

oder ſenkrecht darauf durch ihn geht. Werden die in dieſen Fällen erſcheinenden Farben M und N genannt, ſo hat man

für $\beta = 0,\ y_o + y_e = M = X_o + X_e$

für $\beta = 90^\circ,\ y_o + y_e = N = X_o + X_e + Y_o + Y_e$

mithin

$$X_o + X_e = M,\quad Y_o + Y_e = N - M$$

und die Hauptgleichung

$$y_o + y_e = M + (N - M)\sin^2\beta = M\cos^2\beta + N\sin^2\beta.$$

Für den Saphir iſt demnach die Farbe $y_o + y_e$ eine aus Blau und gelblich Grün zuſammengeſetzte in dem Verhältniſſe

$$(\text{blau})\cos^2\beta + (\text{gelblich grün})\sin^2\beta.$$

Geht polariſirtes Licht durch einen ſolchen Körper, ſo hängt die Farbe auch noch von der Neigung der Axe gegen die Polariſationsebene ab, und man hat, wenn man dieſe $= \alpha$ ſetzt, den Eigenſchaften polariſirter Strahlen gemäß

$$y_o = (X_o + Y_o\sin^2\beta)\cos^2\alpha,\quad y_e = (X_e + Y_e\sin^2\beta)\sin^2\alpha.$$

Es iſt daher die aus beiden Strahlen hervorgehende Farbe

$$y_o + y_e = X_o\cos^2\alpha + X_e\sin^2\alpha + (Y_o\cos^2\alpha + Y_e\sin^2\alpha)\sin\beta.$$

Zur näheren Erörterung der Unbekannten hat man wieder

$$X_o + X_e = M,\quad Y_o + Y_e = N - M$$

ferner iſt die Farbe in der Richtung der Axe d. h. $X_o\cos^2\alpha + X_e\sin^2\alpha$ von α unabhängig, mithin $X_o = X_e = M$. Heißt endlich die Farbe, welche der Kryſtall zeigt, wenn ſeine Axe mit der Polariſationsebene parallel iſt m, wenn ſie darauf ſenkrecht ſteht n, ſo iſt

$$Y_o = m - X = m - M;\ Y_e = n - M \text{ mithin}$$

$$y_o + y_e = M + [(m - M)\cos^2\alpha + (n - M)\sin^2\alpha]\sin^2\beta$$

oder

$$y_o + y_e = M\cos^2\beta + (n\cos^2\alpha + n\sin^2\alpha)\sin^2\beta.$$

144. Die bisher erwähnten Farbenphänomene zeigen ſich eigentlich nur in Kryſtallen mit *einer* optiſchen Axe; an zweiaxigen fallen ſie ſtets anders aus. Nimmt man eine Platte eines ſolchen Körpers und ſieht durch ſie ſo, daß die Lichtſtrahlen nahe an einer der Axen vorbeigehen müſſen, ſo bemerkt man eine Zeichnung, wie ſie Fig. 131 vorſtellt. Die Stellen A und B erſcheinen dunkler als die übrigen (und zwiſchen ihnen liegt der Pol der Axe, längs welcher das Licht vorbeigeht), übrigens faſt in jedem Körper von einer anderen Farbe,

z. B. im Jolith braun, im Dichroit blau u. ſ. w. Brewſter und Herſchel haben auch die Geſetze dieſer Farben durch analytiſche Ausdrücke dargeſtellt.

145. Wenn ein polariſirter Lichtbüſchel durch eine, das Licht doppelt brechende Subſtanz geht, und hierauf wieder auf einen polariſirenden Körper fällt und dann erſt ins Auge gelangt, ſo erſcheint die Stelle jener Subſtanz, durch welche er ging, farbig. Die Beſchaffenheit dieſer Farbe richtet ſich nach der Natur und Dicke des Plättchens und nach der Neigung des Strahles gegen die optiſche Axe. Dieſelbe Farbe kann aber periodiſch zurückkehren, wenn die Neigung gegen die Axe oder die Dicke des Plättchens, kurz der im Plättchen vom Lichtſtrahl zurückgelegte Weg um eine beſtimmte Größe zugenommen hat. Ein gleichförmig dickes Plättchen, das ſenkrecht auf die optiſche Axe geſchnitten iſt und von einem Strahlenkegel beleuchtet wird, deſſen Axe mit jener zuſammenfällt, muß demnach mit farbigen Ringen um die Axe erſcheinen, wie ſie näher in der Naturlehre (II. Th. Abſch. I. Kap. 12) beſchrieben ſind.

146. Dieſe Ringe laſſen ſich auf die manigfaltigſte Weiſe hervorbringen und beobachten. Man kann ſich zu ihrer Erzeugung der gemeinen Polariſationsapparate bedienen, nur muß man ſich die Unbequemlichkeit gefallen laſſen, daß der Kopf des Beobachters ſehr nahe am Plättchen und daher auch am Polariſationsſpiegel ſich befinden muß. (Naturlehre a. a. O.) Bequemer iſt eine Zange, in deren Backen zwei Turmalinplättchen eingeſetzt ſind, die parallel mit der Axe des Kryſtalls geſchnitten wurden und ſo geſtellt ſind, daß ihre Axen ſich rechtwinkelig kreuzen, und das Kryſtallplättchen dazwiſchen einklemmt. Übrigens läßt ſich dieſe Zange nicht blos zur leichten Beobachtung des genannten Phänomens, ſondern auch zu Meſſungen an demſelben einrichten. Bringt man zwiſchen die zwei Turmalinplättchen und zwar parallel mit ihnen eine runde metallene Scheibe, die ſich mittelſt eines Getriebes um ihre Axe drehen läßt, und mehrere excentriſche Löcher hat, die beim Drehen zwiſchen die Turmalinplättchen kommen; ſo kann man in jedes dieſer Löcher ein Plättchen von einem anderen Kryſtalle befeſtigen, und ſo ſchnell und bequem hinter einander an mehreren Körpern die Farbenringe beobachten.

Um die Farbenringe mehreren auf einmal zeigen zu können, hat Herſchel den in Fig. 132 abgebildeten Apparat angegeben.

Da ſind *a* und *b* die zwei Turmalinplättchen, *c* das Kryſtallplättchen, welches die Farbenringe liefern ſoll. *a* iſt an der Öffnung des Deckels einer beſonderen Metallröhre, *b* an der einer in erſtere geſchobenen Röhre *B* befeſtiget, und zwiſchen beiden befindet ſich die ſehr kurze Röhre *C* mit dem Kryſtallplättchen, die ſich mittelſt des Getriebes *D* um ihre Axe drehen läßt. *E* endlich iſt eine Sammellinſe mit kurzer Brennweite, welche dazu dient, das Geſichtsfeld gleichförmig zu erleuchten, das einfallende Licht zu gewältigen und zu verhindern, daß man nicht andere Objecte durch den Apparat ſieht. Läßt man auf dieſe Linſe einen Strahlenbüſchel fallen, ſo kann man die Ringfigur auf der entgegengeſetzten Seite mit einer weißen Tafel auffangen und beobachten.

Zu manchem Zwecke iſt der von Marx angegebene Apparat ſehr brauchbar, den Fig. 133 darſtellt. Auf einer horizontalen Baſis *AB* befinden ſich zwei verticale Arme *C* und *D*, wovon erſterer befeſtiget, letzterer auf der Baſis zum Verſchieben aber auch in jeder Stelle zum Feſtſchrauben eingerichtet iſt. Dieſe zwei Arme enthalten die Turmalinplättchen. Der zu unterſuchende Kryſtall befindet ſich im Ausſchnitte eines dritten Armes *E*, der mit einem runden Stift durch die Bodenleiſte geht und unten mit einem Zeiger *F* verſehen iſt, der einen Nonius hat und neben einem getheilten Kreisbogen ſpielt. In *A* endlich iſt eine Hervorragung mit einem Merkzeichen für die Beobachtung angebracht. Hält man das Auge vor *D*, ſo ſieht man die Farbenringe und man kann jeden beliebigen Ring durch Drehen des Zeigers auf das Beobachtungszeichen fallen machen und ſo jedes Winkelmaß am Phänomene beſtimmen.

147. Außer dem Apparate zur Beobachtung der Ringe, iſt noch die Zubereitung der Kryſtalle ſelbſt einer genaueren Erwähnung werth. Einige Kryſtalle laſſen ſich ſchon nach Richtungen ſpalten, die zum Behufe der Erzeugung der Farbenringe brauchbare Flächen liefern. Von der Art iſt der Glimmer, der Topas. Ein Strahl, der auf ein Glimmerplättchen unter 35° 4′ einfällt und daher im Plättchen mit dem Einfallsloth einen Winkel von 22° 31′ bildet, geht ſchon mit einer Axe parallel, alſo iſt der Blättendurchgang um 22° 31′ gegen den Hauptſchnitt geneigt; im Topas ſteht der Blätterdurchgang auf der Linie ſenkrecht, welche den Axenwinkel halbirt. In beiden kann man alſo durch bloßes Spalten Blätter zur Beobachtung der Farbenringe bekommen. Auf gleiche Weiſe geſchieht

dieſes im Eiſe, das im ruhigen Waſſer entſtanden iſt, im Apophyllit, im Zucker, im unterſchwefelſauren Natrum. Andere Kryſtalle müſſen künſtlich geſchnitten werden, um brauchbare Plättchen zu liefern. Harte Kryſtalle dieſer Art fordern zwar viel Arbeit, nehmen aber eine ſchöne Politur an; weiche müſſen hingegen beſonders behandelt werden, wenn ſie gut polirt ausſehen ſollen. Da unter den zweiaxigen der Salpeter, unter den einaxigen der Doppelſpath die Farbenringe beſonders rein gibt, und im erſteren die zwei Axen einander ſo nahe ſtehen, daß man die Ringe um beide Pole vollkommen ſehen kann, ſo ſoll von der Zubereitung dieſer näher die Rede ſeyn:

Um Salpeterkryſtalle vorzubereiten, wähle man aus mehreren Kryſtallen den reinſten und durchſichtigſten aus, breche ihn mit einer Zange ſenkrecht auf die Axe des Prisma's entzwei, um ein Stück von etwa 2 — 2½ L. Dicke zu erhalten, und ſchleife ihn dann mit einer breiten, naßen Feile an beiden Seiten ſenkrecht auf die Axe des Prisma's plan ab. Hierauf glätte man dieſe Flächen auf einem ebenen, matten, benetzten Spiegelglaſe und polire ſie endlich auf Seide, die über Glas geſpannt und mit einer Miſchung aus Talg und Colcothar überſtrichen iſt, ſo lange, bis alles trocken geworden. Man thut gut, den Kryſtall nicht in bloßer Hand zu halten, damit er nicht durch die Handwärme zerſpringe.

Will man aus einem Doppelſpath ein ſolches Plättchen erhalten, ſo muß man ſich zuerſt die Stücke am Kryſtalle anzeichnen, welche man wegnehmen muß. Man bezeichnet daher an den Kanten der zwei rhomboedriſchen Winkel des Kryſtalls mit einem Zirkel Puncte, die von dieſem Winkel gleichweit abſtehen und zieht dann auf den Kryſtallflächen von einem ſolchen Puncte zum anderen gerade Linien mit einem Meſſer oder einer Nadel, ſo daß dadurch an jedem Winkel die Baſis der dreiſeitigen gleichſeitigen Pyramide bezeichnet wird, die weggeſchliffen werden muß. Dieſe Pyramiden ſchneidet man hierauf mit einer feinen Laubſäge oder mit einer beſchmirgelten Kupferpatte ab, und polirt die Schnittfläche mit Colcothar auf einer Holzſcheibe oder auf Glas.

An manchem Kryſtall will man die Farbenphänomene ſehen, ohne ihn ſchneiden dürfen oder zu können, und man muß oft ſehr ſchief durch ihn ſehen, um den Pol ins Geſichtsfeld zu bekommen; bei einigen Plättchen iſt es ſelbſt, wenn ſie geſchnitten ſind, nothwendig, ſchief durchzuſehen, um einen Pol nach den anderen zu erblicken. Damit man darin nicht durch die Reflexion des Lichtes gehindert

werde, thut man gut, dreiſeitige Glasprismen auf das Plättchen zu ſetzen, wie es Fig. 134 zeigt, oder dasſelbe in Öhl zu legen und dann durchzuſehen.

148. Wenn man die Ringe im homogenen Licht mittelſt des Herſchel'ſchen Apparates erzeugt und auf eine Tafel projicirt, oder ſie im weißen Licht erzeugt und durch ein farbiges Glas anſieht, das nur homogenes Licht durchläßt, jeden Ring aber als Linie betrachtet; ſo kann man ſie auf derſelben Tafel nachzeichnen und nach der Hand die Natur der Curve, welche ſie darſtellen, näher unterſuchen. So erhält man die Fig. 135, in welcher der erſte Ring ein Oval vorſtellt, der zweite oval und zugleich eingedrückt erſcheint, der dritte in der Axe einen Knoten bildet, der vierte endlich gar aus zwei cunjungirten Ovalen beſteht. Zieht man aus den zwei Mittelpuncten der letzteren Ovale A und B nach einem beliebigen Punct derſelben Curve, nach C oder D gerade Linien, ſo findet man ihr Product conſtant. Dieſes zeigt, daß dieſe Curven einer Lemniscate zugehören, deren Gleichung iſt:

$$(x^2 + y^2 + a^2) = a^2 (b^2 + 4x^2)$$

wo $2a$ die conſtante Entfernung der zwei Puncte A und B von einander, b aber den ſtufenweiſe immer größer werdenden Parameter bedeutet. Für die auf einander folgenden Ringe derſelben Farbe wächſt b wie die Glieder einer arithmetiſchen Progreſſion.

149. Das Abwechſeln farbiger Ringe mit dunklen Zwiſchenräumen weiſet nicht undeutlich darauf hin, daß dieſe Ringe ſo wie die Newton'ſchen der Interferenz des Lichtes ihr Entſtehen verdanken und daher mit dem Wege im Zuſammenhange ſtehen, welchen das Licht im Kryſtalle zurückgelegt hat. Iſt b der Brechungswinkel für einen Strahl, c die Dicke des Plättchens, ſo bedeutet $c \sec b$ den Weg des Strahles im Plättchen. Es iſt aber einleuchtend, daß die Farbe eines Punctes überdieß auch noch von der Wirkung der optiſchen Axe auf das Licht abhängen muß, und da dieſe Wirkung von den Winkeln $\varkappa$ und λ abhängt, welche der Strahl mit jeder Axe macht, ſo kann man die Farbe als durch die Größe

$$c \sec. \gamma . \psi (\varkappa, \lambda)$$

beſtimmt anſehen, wo ψ eine unbeſtimmte Function bedeutet. Ferner iſt aus obigem klar, daß ab für jeden Ring derſelben Farben einen conſtanten Werth habe, für die in der Ordnung auf einander folgenden gleichfarbigen Ringe aber in arithmetiſcher Progreſſion

zunimmt. Für den n^{ten} Ring dieſer Art iſt daher $\frac{ab}{n}$ eine Größe, die von der Natur des Kryſtalls und von der Brechbarkeit der Farbe des Ringes abhängt. Es ſey $\frac{ab}{n} = f$, und man hat wegen
$ab = c \sec.\gamma\psi(\varkappa, \lambda)$

$$n = \frac{c}{f} \sec\gamma\psi(\varkappa, \lambda).$$

Herſchel hat durch Verſuche gefunden, daß man $\psi(\varkappa, \lambda) = \sin\varkappa \sin\lambda$ ſetzen kann, und daher iſt

$$n = \frac{c}{f} \sec\gamma \sin\varkappa \sin\lambda \;\ldots\ldots\; (F).$$

Dieſer Ausdruck beſtimmt die Farbenringe, ſobald f bekannt iſt. Für einaxige Kryſtalle iſt $\varkappa = \lambda$, mithin

$$n = \frac{c}{f} \sec\gamma \sin^2\lambda \;\ldots\ldots\; (G).$$

mithin hängt in einem gleichförmig dicken Plättchen dieſer Art die Farbe von $\sin^2\lambda$ ab; die Ringe müſſen daher kreisförmig erſcheinen, wie es die Erfahrung wirklich lehrt. Iſt λ klein, ſo wächſt $\sin^2\lambda$ beim Übergange von einem Ringe zu einem anderen gleichfärbigen wie λ^2, d. h. wie die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3 ꝛc. demnach wachſen die Durchmeſſer dieſer Ringe wie die Quadratwurzeln dieſer Zahlen.

150. Wenn ein Plättchen von parallelen Lichtſtrahlen beleuchtet wird, ſo muß es offenbar, da $\varkappa$, λ, c, γ für alle Strahlen denſelben Werth haben, auch allenthalben gleichfärbig erſcheinen; ja ſelbſt, wenn die Strahlen nicht vollkommen parallel ſind, wird eine etwas große Entfernung des Auges vom Plättchen die Ringe ſehr vergrößert darſtellen müſſen, und ſomit iſt dieſes nur ein beſonderer Fall der Farbenerſcheinungen, von denen vorher die Rede war.

151. Biot ſucht die Farbenringe dadurch zu erklären, daß er annimmt, ein einfacher polariſirter Lichtſtrahl, der ſenkrecht durch ein Kryſtallplättchen geht, welches das Licht doppelt bricht, dringe bis zu einer gewiſſen Tiefe in dasſelbe ein, ohne ſeinen Polariſationszuſtand zu ändern. Erſt in einer gewiſſen Tiefe beginne eine ſolche Änderung und es kehre periodiſch derſelbe Polariſationszuſtand wieder zurück und werde neuerdings geändert, ſo daß in einem Plättchen von beſtimmter Dicke die Polariſationsebene ein- oder

mehrere Male rechts und links zur urſprünglichen Polariſationsebene in einem Winkel 2 a oſcillirt. Der Strahl tritt mit dem Polariſationszuſtande aus, der ihm in der letzten Schichte ertheilt wurde. Die Tiefe, in welcher ein Strahl einen anderen Polariſationszuſtand annimmt, iſt für verſchiedenfarbige Strahlen auch verſchieden und daher kommt es, daß anfangs nur einfarbige Beſtandtheile eines weißen Strahles ihren Polariſationszuſtand ändern.

152. Auf alle dieſe Vorausſetzungen wurde Biot durch die Farbenphänomene im polariſirten Lichte ſelbſt gebracht. Da nämlich, ſo raiſonnirte er, polariſirtes Licht, nachdem es durch ein Glimmer- oder Gipsplättchen gegangen und hierauf auf eine Glasplatte unter 35° 25′ aufgefallen iſt, ſowohl im reflectirten als durchgelaſſenen Zuſtande das Plättchen farbig zeigt und beide Farben ſich gegenſeitig zu Weiß ergänzen, welche auch die Lage der Einfallsebene des Lichtes auf die Glasplatte gegen die urſprüngliche Polariſationsebene ſeyn mag; ſo läßt das Glimmerplättchen den Polariſationszuſtand einiger aber nicht aller Theile des Lichtes ungeändert. Den neuen Polariſationszuſtand der Strahlen beſtimmte er auf folgende Weiſe: Man nenne S das einfallende weiße Licht, P den Theil, deſſen Polariſationszuſtand ungeändert bleibt, Q denjenigen, deſſen Zuſtand geändert wird, und ſeine Polariſationrichtung ſchließe mit der vorigen den Winkel 2 a ein. Wird die Einfallsebene der Glasplatte ſo gegen die urſprüngliche Polariſationsebene geneigt, daß ſie mit ihr einen Winkel a einſchließt, ſo wird P und Q gleichmäßig reflectirt und es geht daraus die Farbe hervor, welche den Strahlen $P+Q = S$ zukommt, d. h. das Plättchen erſcheint weiß. Iſt man alſo im Stande, die Platte ſo zu ſtellen, daß der reflectirte Strahl weiß iſt, ſo gibt der Neigungswinkel den Einfallswinkel gegen die Ebene der urſprünglichen Polariſation den Werth von a. Die Erfahrung lehrt, daß a ſtets der Winkel iſt, den die urſprüngliche Polariſationsebene mit der Axe des Plättchens macht.

Zu demſelben Schluſſe gelangt man, wenn man der Glasplatte einen Doppelſpath ſubſtituirt. Iſt der Strahl urſprünglich in der Ebene AA (Fig. 136) polariſirt und geht er durch ein Plättchen, deſſen Hauptſchnitt CC iſt, wird aber hierauf mit einem Doppelſpath analyſirt, deſſen Hauptſchnitt die Lage BB hat, und man nennt den Winkel $BDA = a$, $ADC = b$, ſo bleibt der Strahl P in der Ebene AA polariſirt, ſelbſt nachdem er durch das Plättchen gegangen iſt, Q hingegen wird in der Ebene polariſirt, die mit AA den

Winkel $2a$ einſchließt. Es macht demnach die Polariſationsrichtung des erſten Strahls mit dem Hauptſchnitt des Doppelſpathes den Winkel b, die des letzten mit demſelben Hauptſchnitte den Winkel $b-2a$ und man hat, nachdem das Licht durch den Doppelſpath gegangen iſt

für den gewöhnlichen Strahl $P\cos^2 a + Q\cos^2(b-2a)$

„ ungewöhnlichen „ $P\sin^2 a + Q\sin^2(b-2a)$

und daher

$$P_o = P\cos^2 a + Q\cos^2(b-2a)$$
$$P_e = P\sin^2 a + Q\sin^2(b-2a).$$

153. Aus dieſen Vorausſetzungen, welche das Weſen der Biot'ſchen Hypotheſe der beweglichen Polariſation ausmachen, erklärt man gewöhnlich die Farben in polariſirtem Lichte. Setzt man die zwei vorhergehenden Ausdrücke einander gleich, ſo erhält man die Bedingung der Gleichheit der beiden Bilder im Doppelſpath. Man hat nämlich:

$$P\cos^2 a + Q\cos^2(b-2a) = P\sin^2 a + Q\sin^2(b-2a)$$

und hieraus

$$P\cos 2a + Q\cos(2b-4a) = 0 \;\ldots\ldots\; (H).$$

Dieſer Gleichung entſprechen die Werthe

$$\cos 2a = 0,\ \cos(2b-4a) = 0.$$

Erſterer gibt

$$a = 45^\circ,\ a = 135^\circ,\ a = 225^\circ,\ a = 315^\circ.$$

Setzt man die Werthe in die zweite der obigen Gleichungen, ſo erhält man:

$$\sin 4b = 0,\ \sin b\cos b(\cos b - \sin b)(\cos b + \sin b) = 0$$

und für dieſe Gleichungen

$$b = 0\ ,\ b = 45^\circ\ ,\ b = 90^\circ\ ,\ b = 135^\circ$$
$$b = 180^\circ,\ b = 225^\circ,\ b = 270^\circ,\ b = 315^\circ.$$

Für jeden dieſer Werthe von b und einen der vorhergehenden von a ſollen beide Bilder gleich hell und weiß erſcheinen, und dieſes ſtimmt wirklich mit der Erfahrung überein. Die Bedingung, unter welcher beide Bilder gleich hell aber farbig erſcheinen, erhält man, wenn man aus (H) ſucht

$$\tan 2b = -\frac{P + Q\,.\cos 4a}{Q\sin 4a}.$$

Da nun $\tan 2b$ denſelben Werth erhält, für $b = 90^\circ$, $b + 90^\circ$,

$b+180°$, $b+270°$, ſo iſt hierdurch zugleich die geſuchte Bedingung ausgedrückt.

154. So einfach auch die Schlüſſe ſind, durch welche man auf die Hypotheſe der beweglichen Polariſation geleitet wird, und ſo leicht man auch aus ihr die Phänomene der Farbenerſcheinungen im polariſirten Lichte erklärt; ſo ſcheint ſie doch nicht in der Natur gegründet zu ſeyn, wenigſtens hat Fresnel einen Verſuch angegeben, deſſen Reſultat nicht mit dieſer Vorausſetzung vereinbarlich iſt. Stellt man nämlich ein Gipsplättchen in homogenes polariſirtes Licht ſo, daß ſeine Axe mit der urſprünglichen Polariſationsebene einen Winkel von 45° macht, ſo ſoll es, da hier $2a=90°$ iſt, entweder alles Licht auf die urſprüngliche Polariſationsrichtung zurückführen oder es in einer darauf ſenkrechten Ebene polariſiren. Unterſucht man es aber, nachdem es das Plättchen verlaſſen hat, mittelſt eines Doppelſpathes, ſo erhält man bei jeder Lage ſeines Hauptſchnittes zwei gleich helle Bilder zum Beweiſe, daß das Licht entweder entpolariſirt iſt, oder aus zwei nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirten Hälften beſteht, welches Beides aber gegen die Biot'ſche Hypotheſe ſtreitet.

4. Beſtimmung der Elemente der doppelten Brechung.

155. Ob ein Körper das Licht doppelt bricht oder nicht, läßt ſich, falls er kryſtalliſirt iſt, ſchon aus ſeiner Kryſtallgeſtalt, wenn er aber unkryſtalliſirt oder nur ein Bruchſtück eines Kryſtalls iſt, aus dem ſich die Kryſtallgeſtalt nicht errathen läßt, mittelſt Verſuche beſtimmen.

Körper in einer vielaxigen Kryſtallgeſtalt beſitzen das Vermögen der doppelten Brechung nicht, die wenigen Fälle, wo man bei ſolchen Körpern eine doppelte Brechung beobachtet haben will, müſſen als bloße Anomalien, durch Störungen beim Entſtehen der Kryſtalle bewirkt, angeſehen werden. Körper von jeder anderen Kryſtallgeſtalt brechen das Licht doppelt. Nicht kryſtalliſirte oder Bruchſtücke von Kryſtallen ſowohl wie künſtlich geſchnittene Körper prüft man am leichteſten mittelſt zweier Turmalinplättchen, wie in der Naturlehre gezeigt worden iſt. Körper, welche Dichroismus beſitzen, können ohne weitere Unterſuchung als doppelt brechend angeſehen werden.

156. Die bloße Kenntniß des Stattfindens der doppelten Bre=

chung iſt aber nicht hinreichend, man muß überdieß noch die Anzahl der optiſchen Axen, ihre Lage und Beſchaffenheit nebſt der Größe der brechenden Kraft kennen und im Stande ſeyn, den Weg des ungewöhnlich gebrochenen Strahles für jeden Fall anzugeben. Die Art der Beſtimmung jeder dieſer Größen iſt unſere gegenwärtige Aufgabe.

157. Alle Phyſiker ſtimmen damit überein, daß ein das Licht doppelt brechender Körper eine oder zwei Axen der doppelten Brechung beſitze, wenigſtens laſſen ſich alle auf dieſe Anzahl reduciren. Körper, deren Kryſtallgeſtalt ſich von einem Rhomboeder oder von einer vierſeitigen gleichſeitigen Pyramide ableiten laſſen, haben nur eine optiſche Axe. Alle anderen Kryſtallgeſtalten haben zwei optiſche Axen. Wo man aus der Kryſtallgeſtalt die Anzahl der optiſchen Axen nicht abnehmen kann, muß das Verhalten im gewöhnlichen oder im polariſirten Lichte näheren Aufſchluß geben.

Wenn ein Körper im gewöhnlichen Lichte eine der Fig. 131 ähnliche Zeichnung zeigt, gehört er ohne Zweifel in die Klaſſe der zweiaxigen; der im polariſirten Lichte mit Farbenringen erſcheint, die nur von einem dunklen, geraden oder gekrümmten Streifen durchſetzt ſind, oder Ringe von der Form einer Lemniscate haben, ſind derſelben Klaſſe beizuzählen. Körper mit kreisförmigen Ringen und einem geradlinigen Kreuze ſind immer einaxig, aber auch ſolche mit ovalen Ringen können einaxig ſeyn, wenn ſie nämlich ein dunkles Kreuz haben.

158. Die Lage der optiſchen Axen läßt ſich häufig aus der Kryſtallgeſtalt entnehmen, oft muß ſie aber aus anderen Phänomenen entnommen werden. In Kryſtallgeſtalten, die ſich von einem Rhomboeder oder von einer vierſeitigen gleichſchenkeligen Pyramide ableiten laſſen, fällt die optiſche Axe mit der Hauptaxe der Kryſtallgeſtalt zuſammen, alſo bei den von Rhomboedern abgeleiteten mit der rhomboedriſchen Axe der Grundgeſtalt. Bei zweiaxigen Geſtalten hat man aber den Zuſammenhang zwiſchen den optiſchen Axen und Kryſtalliſationsaxen noch nicht ausmitteln können, übrigens iſt die Hauptaxe ſolcher Kryſtalle in der Regel die Linie, welche den Winkel der zwei optiſchen Axen halbirt.

Bei allen zweiaxigen und bei jenen einaxigen Körpern, wo ſich die Lage der Axe nicht aus der Kryſtallgeſtalt entnehmen läßt, muß man daher wieder zu Polariſationsphänomenen die Zuflucht nehmen und zwar zu den polariſirten Farbenringen. Hat man einen Körper da-

hin gebracht, daß man an ihm im polariſirten Lichte Farbenringe bemerkt, ſo iſt durch die Pole dieſer Ringe zugleich die Lage der optiſchen Axen angezeigt. Setzt man einen ſolchen Körper zwiſchen die Turmalinplättchen in dem Apparate (Fig. 133) und wendet ihn ſo, daß ein Pol der Farbenringe auf das Merkzeichen fallt, dreht ihn hierauf, bis der zweite Pol dahin trifft; ſo gibt der Drehungswinkel die Neigung der zwei Axen gegen einander, nachdem man wegen der Brechung des Lichtes im Körper die nöthige Correction angebracht hat. Derſelbe Winkel läßt ſich auch noch auf eine andere Weiſe beſtimmen, wie ſpäter gezeigt werden wird.

159. Ob eine optiſche Axe attractiv oder repulſiv (poſitiv oder negativ) wirkt, läßt ſich durch mehrere Mittel erkennen und zwar 1) durch unmittelbare Beobachtung, ob der ungewöhnliche Strahl der Axe genähert oder von ihr entfernt wird. Dieſes Mittel iſt aber nur bei Kryſtallen mit ſtarker doppelter Brechung wie z. B. beim Doppelſpath, Bergkryſtall anwendbar. 2) Durch Beſtimmung der Brechungsexponenten für den gewöhnlichen und für den ungewöhnlichen Strahl in dem Fall, wo die Einfallsebene durch die Axe geht. Sind die Exponenten für den gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahl n und $n_{,}$, ſo iſt die Brechungsaxe eine poſitive (attractive) wenn $n < n_{,}$ widrigenfalls eine negative (repulſive). Der Grund dieſes Verfahrens wird ſpäter vorkommen. 3) Durch Vergleichung der Größe der Farbenringe, welche ein gleichförmig dickes Plättchen dieſes Körpers im polariſirten Lichte zeigt mit denen, welche es gibt, wenn es mit einer ähnlichen Platte eines Körpers mit bekannter Axenwirkung combinirt wird. Sind die Ringe im letzteren Falle größer als im erſteren, ſo ſind die Wirkungen der Axen beider combinirter Körper einander entgegengeſetzt, ſind ſie kleiner, ſo wirken die Axen beider Körper auf gleiche Weiſe. 4) Durch Beobachtung der Veränderung, welche die Farben des Körpers im polariſirten Lichte erleiden, wenn man ein Plättchen eines ſchon bekannten Körpers darauf legt. Steigt die Farbe nach der Newton'ſchen Scale, ſo ſind beide Körper von derſelben Art, ſinkt ſie, ſo ſind beide einander entgegengeſetzt. 5) Durch Beobachtung, ob ein Plättchen des zu prüfenden Körpers, durch welches ein polariſirter Strahl ſenkrecht geht, durch einen Doppelſpath angeſehen farbig erſcheint, je nachdem man ein anderes Plättchen von bekannter Natur ſo darauf gelegt hat, daß die Hauptſchnitte beider Plättchen mit einander parallel oder auf einander ſenkrecht ſind.

Zeigen ſich Farben, wenn ſich die Hauptſchnitte unter einem rechten Winkel durchkreuzen, ſo üben beide Plättchen gleichartige Wirkungen auf das Licht aus, iſt dieſes aber der Fall, wenn ſie parallel ſind, ſo haben die Plättchen entgegengeſetzte Wirkungen.

160. Die Wirkung, welche auf den ſogenannten ungewöhnlich gebrochenen Strahl von einem Körper ausgeübt wird und eigentlich von der optiſchen Axe ausgeht, läßt ſich als eine Modification ſeiner Geſchwindigkeit anſehen, die nach anderen Geſetzen erfolgt, als beim gewöhnlich gebrochenen Strahl. Es ſey AB (Fig. 137) ein in B einfallender Strahl, der, wenn er nicht gebrochen würde, ſeinen Weg nach C fortſetzen und in einer gewiſſen Zeit den Weg BC zurücklegen würde, durch Brechung aber die Richtung BD annimmt. BC läßt ſich als die Geſchwindigkeit des Strahles vor der Brechung anſehen und in zwei andere zerlegen, deren eine im Einfallslothe MN liegt und gleich BE iſt, während die andere $= EC$ darauf ſenkrecht ſteht. EC wird durch Brechung nicht geändert, und muß daher auch beim gebrochenen Strahl dieſelbe Größe haben. Verlängert man ihn, bis eine von D auf MN ſenkrechte DF gleich EC iſt, ſo ſtellt BD die Geſchwindigkeit des gebrochenen Strahles vor und die Richtung BD iſt durch dieſe Geſchwindigkeit ſelbſt gegeben. Wenn man daher die Geſchwindigkeit des ungewöhnlich gebrochenen Strahles kennt, ſo läßt ſich daraus auch ſeine Richtung finden. Das Auffinden dieſer Geſchwindigkeit ſowohl als der Richtung läßt ſich aber mittelſt eines analytiſchen Ausdruckes oder durch eine Conſtruction bewerkſtelligen.

161. Zum Behufe der Conſtruction für einaxige Körper denke man ſich ein elliptiſches Sphäroid, welches durch Umdrehung einer Ellipſe um ihre größere oder kleinere Axe entſtanden iſt, je nachdem die optiſche Axe eine poſitive oder eine negative iſt und gebe der Rotationsaxe eine der optiſchen Axe parallele Richtung. Sind dieſe Axen ſo gewählt, daß die Rotationsaxe dem conſtanten Werthe des Brechungsexponenten des ungewöhnlichen Strahles, die andere dem Werthe des Brechungsexponenten des gewöhnlichen Strahles gleich iſt, ſo iſt jeder Halbmeſſer der Werth der Geſchwindigkeit des mit ihm parallelen Strahles. Dieſem gemäß wird obige Conſtruction ſo vollzogen: Es ſey ABD (Fig. 138) eine Ebene, in welcher der Strahl SC in den doppelt brechenden Körper eintritt und C der Mittelpunct des Sphäroides, wovon das im neuen Mittel liegende Stück AMD iſt; ferner

ſey EC die Projection des Strahles SC auf der Ebene ABD. Man ziehe FC in der Ebene SCE ſenkrecht auf CS und nehme eine mit SC parallele Linie FH, welche ſich zu einer von C nach dem Umfange des Sphäroides gezogenen Geraden CG ſo verhält, wie die Geſchwindigkeit des Lichtes im alten Mittel zu derſelben im neuen Mittel nach der betreffenden Richtung. Dadurch wird der Punct H in der verlängerten CG beſtimmt. Nun lege man durch H eine auf EH ſenkrechte HK und denke ſich eine durch HK gehende Ebene ſo gewendet, daß ſie das Sphäroid berührt. Geſchieht dieſes in L, ſo iſt CL der geſuchte Strahl.

162. Um dieſer Conſtruction gemäß für den gebrochenen Strahl einen analytiſchen Ausdruck zu finden, ſey AA_1, BB_1 (Fig. 139) ein elliptiſches Sphäroid, AB, A_1B_1 die zwei ungleichen Axen a und b, C deſſen Mittelpunct, und die Gleichung desſelben nach rechtwinkeligen, in C anfangenden Coordinaten

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 + a^2z_1^2 = a^2b^2.$$

Man denke ſich nun durch C eine Ebene gelegt, welche gegen A_1B_1 um den Winkel λ geneigt iſt und das Sphäroid in DD_1 ſchneidet. Die Ebene DED_1 werde nun als die Grenze der zwei optiſchen Mittel betrachtet und SC als einfallender Strahl angeſehen, welcher mit dem Einfallslothe den Winkel s macht, CE ſey, wie vorhin, die Projection des Strahles auf DED_1 und die Linien CF, FH, HK, CL wie Fig. 137. Verlegt man nun die Axen von x und y in die Ebene DED_1, ſo daß man ſtatt den Coordinaten x_1, y_1 und z_1 erhält x, y, z, ſo iſt

$$x_1 = x\cos\lambda + y\sin\lambda$$
$$y_1 = y\cos\lambda - x\sin\lambda$$
$$z_1 = z.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in obige Gleichung für das Sphäroid und ſetzt der Kürze halber

$$a^2\sin^2\lambda + b^2\cos^2\lambda = A$$
$$a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda = C$$
$$(b^2 - a^2)\sin\lambda\cos\lambda = B$$
$$a^2 = D$$

ſo erhält man:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dz^2 = a^2b^2 \ldots\ldots (a).$$

Iſt lCO die Projection der Axe A_1B_1 auf DED_1 und daher $OCH = \omega$ der Winkel, welchen die Einfallsebene mit dem Haupt-

ſchnitte macht, ferner x_1, y_1 die Coordinaten des Punctes H und $CH = \rho$, ſo erhält man: $x_1 = \rho \cos\omega$, $y_1 = \rho \sin\omega$ und $\rho = -\frac{CF}{\sin FHC} = -\frac{1}{\sin\delta}$, wenn man die Geſchwindigkeit des Lichtes außer dem Mittel unter DED_1 als Einheit annimmt, wobei das Zeichen — gebraucht wird, um anzuzeigen, daß CH auf der dem einfallenden Strahle entgegengeſetzten Seite ſich befindet. Setzt man nun ſtatt ρ ſeinen Werth, ſo erhält man:

$$x_1 = -\frac{\cos\omega}{\sin\delta},\ y_1 = -\frac{\sin\omega}{\sin\delta} \text{ oder}$$

$$x_1 \cos\omega + y_1 \sin\omega = -\frac{1}{\sin\delta}.$$

Weil aber HK auf HC ſenkrecht ſteht, ſo iſt die Gleichung jener Linie

$$y - y_1 = -\frac{1}{\tang\omega}(x - x_1) \text{ oder}$$

$$(x - x_1)\cos\omega + (y - y_1)\sin\omega = 0.$$

Die Gleichung einer durch KH gelegten Ebene iſt

$$(x - x_1)\cos\omega + (y - y_1)\sin\omega + Ez = 0.$$

Soll dieſe Ebene das Sphäroid berühren, ſo müſſen die Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ für beide einerlei Werth haben.

Für jene Ebene iſt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\cos\omega}{E},\ \frac{dz}{dy} = \frac{\sin\omega}{E}$$

für das Sphäroid hat man:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Ax + By}{Bx + Cz},\ \frac{dz}{dy} = \frac{Bx + Cz}{Dy}$$

mithin

$$\frac{\cos\omega}{E} = \frac{Ax + By}{Bx + Cz},\ \frac{\sin\omega}{E} = \frac{Dy}{Bx + Cz}$$

und durch Diviſion

$$\frac{\sin\omega}{\cos\omega} = \frac{Dy}{Ax + Cz} \text{ oder } Dy\cos\omega = (Ax + Bz)\sin\omega \quad (b).$$

Da dieſe Gleichung von δ unabhängig iſt, ſo gilt ſie für alle in derſelben Ebene einfallende Strahlen. Sucht man aus einer der vorhergehenden Gleichungen E und ſubſtituirt ſeinen Werth in die Gleichung der Ebene, ſo erhält man:

$$(x - x_{,})\, Dy \cos\omega + (y - y_{,})\, Dy \sin\omega +$$
$$+ (Bx + Cz)\, z \sin\omega = 0 \;\ldots\ldots\; (c).$$

Aus den Gleichungen (a), (b), (c) laſſen ſich nun die Coordinaten x, y, z für den Berührungspunct beſtimmen, und zwar auf folgendem Wege.

Man ſubſtituire den aus (b) gefundenen Werth von $Dy \cos\omega$ in (c) und man erhält:

$$(Ax^2 + 2Bxz + Cz^2 + Dy^2)\sin\omega + \frac{Dy}{\sin\delta} = 0$$

d. i. $a^2 b^2 \sin\omega + \dfrac{Dy}{\sin\delta} = 0$ mithin wegen $D = b^2$

$$y = -\, a^2 \sin\omega \sin\delta.$$

Subſtituirt man dieſen Werth in (a), ſo erhält man:

$$(AC - B^2)\, z^2 = A a^2 b^2 - a^4 b^4 \cos^2\omega \sin^2\delta - \frac{A}{D}(a^4 b^4 \sin^2\delta \sin^2\omega)$$

mithin weil $AC - B^2 = a^2 b^2$, und $D = b^2$ iſt,

$$z = \sqrt{[A - a^2 \sin^2\delta\, (A \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)]}$$

Eben ſo findet man aus (a) mittelſt der ſchon gefundenen Werthe von y und z

$$x = -\frac{a^2 b^2 \sin\delta \cos\omega}{A} + \frac{B}{A}\sqrt{[A - a^2 \sin^2\delta\, (A \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)]}.$$

Heißt nun $CL = r$ und $\delta_{,}$, $\omega_{,}$ für den gebrochenen Strahl das, was δ, ω für den einfallenden Strahl bedeutet haben; ſo wird

$$x = r \sin\delta_{,} \cos\omega_{,}\;;\quad y = r \sin\delta_{,} \sin\omega_{,}\;;\quad z = r\cos\delta_{,}$$

und hieraus

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tang}\delta_{,} \cos\omega_{,}\;;\quad \frac{y}{z} = \operatorname{tang}\delta_{,} \sin\omega_{,}.$$

Setzt man für x, y, z die vorhin gefundenen Werthe, ſo iſt endlich:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tang}\delta_{,} \sin\omega_{,} = \\ &= \frac{a^2 \sin\delta \sin\omega}{\sqrt{[A - a^2 \sin^2\delta\, (A\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)]}} \\ &\operatorname{tang}\delta_{,} \cos\omega_{,} = \\ &= \frac{a^2 b^2}{A} \cdot \frac{\sin\delta\cos\omega}{\sqrt{[A - a^2\sin^2\delta\, (A\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)]}} - \frac{B}{A} \end{aligned}\right\} I.$$

Dieſe drei Formeln beſtimmen die Lage des gebrochenen Strahles vollſtändig.

163. Nun iſt es leicht, dieſe Formeln für jeden beſonderen Fall einzurichten und ſich zu überzeugen, daß ſie für einaxige Kryſtalle unbeſchränkt richtig ſind.

Steht die Fläche, welche der Strahl trifft, auf der Axe der doppelten Brechung ſenkrecht, ſo iſt

$$\lambda = 0, \quad A = b^2, \quad B = 0 \text{ und}$$

$$\tang \delta_1 \cos \omega_1 = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{\sin \delta \cos \omega}{\sqrt{(1 - a^2 \sin^2 \delta)}};$$

$$\tang \delta_1 \sin \omega_1 = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{\sin \delta \sin \omega}{\sqrt{(1 - a^2 \sin^2 \delta)}};$$

Dividirt man die zweite Gleichung mit der erſten, ſo findet man $\tang \omega_1 = \tang \omega$, mithin $\omega = \omega_1$, d. h. der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene. Mittelſt $\omega = \omega_1$ findet man ferner

$$\tang \delta_1 = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{\sin \delta}{\sqrt{(1 - a^2 \sin^2 \delta)}}$$

und dieſe Gleichung enthält das Geſetz der ungewöhnlichen Brechung für dieſen Fall.

Es iſt klar, daß hier zwei Fälle möglich ſind, es kann nämlich $a > b$ oder $a < b$ ſeyn. Im erſteren Falle iſt das Sphäroid durch Umdrehung der Ellipſe um die kleine, im zweiten Fall durch Umdrehung derſelben um die große Axe entſtanden und die Axe der doppelten Brechung wirkt in jenem repulſiv, in dieſem attractiv. Hierauf beruht das in 159.2 angegebene Verfahren. Für einen ſenkrecht einfallenden Strahl hat man $\delta = 0$ und für dieſen Fall auch $\delta_1 = 0$.

Iſt die Fläche, welche der Strahl trifft, mit der Brechungsaxe parallel, ſo hat man $\lambda = 90°$, $A = a^2$, $C = b^2$, $B = 0$, und daher

$$\tang \delta_1 \sin \omega_1 = \frac{a \sin \delta \sin \omega}{\sqrt{[1 - \sin^2 \delta \, (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)]}}$$

$$\tang \delta_1 \cos \omega_1 = \frac{b^2 \sin \delta \cos \omega}{a \sqrt{[1 - \sin^2 \delta \, (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)]}}$$

$$\tang \omega_1 = \frac{a^2}{b^2} \tang \omega.$$

Demnach weicht in dieſem Falle der Strahl von der Einfallsebene ab, nur wenn $\omega = 90^\circ$ iſt, bleibt er in derſelben.

Fällt ein Strahl auf die gegen die Axe wie immer geneigte Fläche in der Ebene des Hauptſchnittes oder in einer mit demſelben parallelen Ebene ein, ſo iſt $\omega = 0$ und daher $\tang \omega_1 = 0$ oder $\omega_1 = 0$, d. h. der Strahl bleibt auch nach der Brechung in der Einfallsebene.

164. Um nach dieſen Formeln die Richtung des gebrochenen Strahles finden zu können, iſt die Kenntniß der Lage der Brechungsaxe und das Verhältniß der zwei Axen der das Sphäroid erzeugenden Ellipſe nothwendig. Die Lage der Axe der doppelten Brechung wird nach (158) beſtimmt. Das Verhältniß der Axen der Ellipſe läßt ſich aus den Brechungsexponenten für den gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahl entnehmen, ſobald die Fläche, welche er trifft, auf der Axe ſenkrecht ſteht. Heißt dieſer Exponent für den gewöhnlichen Strahl n, für den ungewöhnlichen n_1; ſo hat man

$$a : b = n : n_1.$$

Für den Doppelſpath iſt $n = 1.6543$; $n_1 = 1.4833$, mithin $b = 0.60449$, $a = 0.67417$.

Es lauft daher alles darauf hinaus, beide Brechungsexponenten zu beſtimmen. Dieſes geſchieht am zuverläſſigſten, wenn man aus dem brechenden Körper ein dreiſeitiges Prisma AE (Fig. 140) der Art ſchleift, daß die Kante des brechenden Winkels mit der Axe der doppelten Brechung parallel lauft und damit ſo verfährt, wie S. 397 gezeigt worden iſt, wobei man natürlich die Beobachtung und Rechnung für beide Bilder, welche das Prisma liefert, machen muß, aber auch beide Brechungsexponenten findet.

165. Das Verhältniß der Axen der Ellipſe läßt ſich auch leicht finden, wenn man die Ablenkung eines ſenkrecht einfallenden Strahles kennt. Heißt dieſer Ablenkungswinkel δ_1, ſo erhält man aus der zweiten der Gleichungen (I) wegen $\omega_1 = 0$, $\delta = 0$,

$$\tang \delta_1 = -\frac{B}{A} = \frac{(a^2 - b^2) \sin \lambda \cos \lambda}{a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda}$$

und daraus

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\cos \lambda \sin \lambda + \tang \delta_1 \cos^2 \lambda}{\sin \lambda \cos \lambda - \tang \delta_1 \sin^2 \lambda}$$

oder wenn man $\tan \delta_1 = \frac{\sin \delta_1}{\cos \delta_1}$ ſetzt

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{(\sin \delta_1 \cos \lambda + \sin \lambda \cos \delta_1) \cos \lambda}{(\cos \lambda \cos \delta_1 - \sin \lambda \sin \delta_1) \sin \lambda} = \frac{\tan (\lambda + \delta_1)}{\tan . \lambda}$$

mithin

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\tan (\lambda + \delta_1)}{\tan \lambda}}.$$

166. Da die Größe der Axen der erzeugenden Ellipſe in ſo naher Verbindung mit den Brechungsexponenten der zwei Strahlen ſteht, letztere für verſchiedenfarbige Strahlen auch verſchiedene Werthe haben und für jede Farbe der beiden Farbenbilder dasſelbe Verhältniß der Brechbarkeit Statt finden dürfte; ſo wird man annehmen können, daß auch jedem Strahl, dem eine beſondere Brechbarkeit zukommt, ein anderes Axenverhältniß entſprechen wird. Rudberg hat durch directe Verſuche bewieſen, daß das Verhältniß der Brechungsexponenten gleichfarbiger Strahlen im gewöhnlichen und ungewöhnlichen Farbenbilde richtig für alle Stellen dieſer Spectra conſtant ſey und dieſes Verhältniß numeriſch angegeben, woraus man leicht auf das Axenverhältniß der jeder Farbe entſprechenden Ellipſe ſchließen kann.

167. Die Geſetze der doppelten Brechung in Körpern mit zwei Axen ſind viel complicirter als die für einaxige. Fresnel hat aber auch für ſolche allgemeine Formeln angegeben, welche die Geſchwindigkeit der beiden Strahlen enthalten. Sind dieſe Geſchwindigkeiten v und v_1, ferner α und β die Winkel, welche die Strahlen mit den optiſchen Axen machen; ſo hat man

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= A + B \sin^2 \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) \\ v_1^2 &= A + B \sin^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \end{aligned}\right\} \ldots (K)$$

wo A und B zwei conſtante Größen ſind, welche nur von der Natur des brechenden Körpers abhängen.

Steht die Einfallsebene eines Strahles ſenkrecht auf der Geraden A, welche in der Ebene der zwei Axen liegt und den Winkel γ derſelben halbirt, ſo iſt $\alpha + \beta = 180°$ und daher

$$v^2 = A + B \cos^2 \beta, \quad v_1^2 = A + B.$$

Es iſt daher die Geſchwindigkeit des letzteren Strahles conſtant.

Iſt die Einfallsebene ſenkrecht auf der Ebene der beiden Axen, und geht ſie zugleich durch die Linie A, ſo iſt $\alpha = \beta$, und

$$v^2 = A, \quad v_1^2 = A + B \sin^2 \alpha$$

mithin hat jener Strahl eine conſtante Geſchwindigkeit, der vorhin eine veränderliche hatte.

Liegt endlich die Einfallsebene in der Ebene der zwei optiſchen Axen, ſo wird $\alpha = \beta + \gamma$, und daher

$$v^2 = A + B \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma,\ v_1^2 = A + B \sin^2 (\beta + \tfrac{1}{2}\gamma)$$

daher iſt hier wieder v conſtant.

Kennt man A, B, γ, ſo hat man alle Elemente zur Berechnung der Geſchwindigkeit des Strahles. Um dieſe Größen zu finden braucht man von dem Stoffe, um den es ſich handelt, drei Prismen. Die Kante des brechenden Winkels des einen muß mit der Halbirungslinie des ſpitzen Winkels der optiſchen Axen parallel, die des anderen auf dieſer Linie ſenkrecht aber mit der Ebene der beiden anderen parallel, die des dritten endlich auf letzterer Ebene ſenkrecht ſtehen. Iſt der Brechungsexponent, welcher im erſten Prisma der Geſchwindigkeit v_1 entſpricht, n_1, der im zweiten Prisma der Geſchwindigkeit v_1 entſprechende n_2 und der im dritten Prisma der Geſchwindigkeit v_1 entſprechende n_3, ſo hat man:

$$n_1^2 = A + B;\ n_2^2 = A;\ n_3^2 = A + B \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma$$

und hieraus:

$$A = n_2^2;\ B = n_1^2 - n_2^2;\ \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{n_3^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}.$$

168. Die Richtigkeit dieſer Formel hat Rudberg im Aragonit und dem Topas nachgewieſen und zugleich gezeigt, daß ſowohl für die zwei- als für die einaxigen Körper die doppelte Brechung für verſchiedenfarbige Strahlen auch verſchieden und zwar deſto ſtärker iſt, je größer die Brechbarkeit für den gewöhnlich gebrochenen Strahl iſt. Wenn man den Werth von γ für verſchiedenfarbiges oder bei verſchiedenen Temperaturen für gleichfarbiges Licht ſucht, ſo findet man ihn auch veränderlich und zwar fand Rudberg denſelben im Aragonit bei conſtanter Temperatur deſto kleiner, je geringer die Brechbarkeit des betreffenden Lichtes war.

169. Es iſt klar, daß zur Beſtimmung der numeriſchen Geſetze der doppelten Brechung die Geſchwindigkeit des ungewöhnlich gebrochenen Strahles hinreicht und daß dieſe als gegeben angeſehen werden kann, wenn man den Unterſchied zwiſchen der Geſchwindigkeit des gewöhnlichen und des ungewöhnlichen Strahles kennt, indem die Geſchwindigkeit des erſteren nach dem Carteſiſchen Geſetze zu finden iſt. Darum wird der (S. 494) angeführte Verſuch zur Kenntniß der doppelten Brechung in jenen Körpern führen, durch welche das po-

lariſirte Licht geht, bevor es auf die polariſirende Glasplatte gelangt. Mißt man nämlich den Abſtand der äußeren Lichtſtreifen von der Mitte, oder noch beſſer den Abſtand der zwei äußeren Lichtſtreifen von einander und halbirt ihn hierauf, ſo kann man den Werth von ϑ, d. h. den Unterſchied zwiſchen der Geſchwindigkeit des gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Lichtes erfahren. Vergleicht man dieſen mit demſelben Werthe in einer gleich dicken Doppelſpathplatte, ſo gibt ihr Verhältniß das der Geſchwindigkeiten des ungewöhnlich gebrochenen Strahles in beiden Körpern und führt darum zur abſoluten Kenntniß der doppelten Brechung ſelbſt.

170. Die Intenſität der doppelt brechenden Kraft wird durch die Differenz der Quadrate der Geſchwindigkeiten des gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahles, der gegen die Axe eine beſtimmte Lage hat, gemeſſen. Demnach dienen alle Mittel, wodurch man dieſe Geſchwindigkeiten kennen lernt, zur Beſtimmung jener Intenſität. Für Kryſtalle, welche einen einfallenden Strahl in zwei deutlich geſonderte Lichtbüſchel ſpalten, läßt ſich dieſe Kraft leicht aus der Divergenz dieſer Büſchel erkennen; bei anderen muß man zu den Farbenerſcheinungen im polariſirten Lichte ſeine Zuflucht nehmen. Vorzüglich ſind dazu die Farbenringe im polariſirten Lichte geeignet. Ringe derſelben Ordnung ſind deſto größer, je kleiner die doppelt brechende Kraft iſt, und das Quadrat ihrer Durchmeſſer ſteht im verkehrten Verhältniſſe mit jener Kraft (149). Bei Strahlen, die eine verſchiedene Lage gegen die reſpectiven Axen haben; ſteht die Kraft im verkehrten Verhältniſſe von $\sin\varkappa \sin\lambda$. Heißt demnach die Geſchwindigkeit des gewöhnlichen Strahles v, die des ungewöhnlichen $v_{,}$, ſo iſt die Stärke der doppelt brechenden Kraft in zweiaxigen Kryſtallen

$$\frac{v_{,}^2 - v^2}{\sin\varkappa \sin\lambda}$$

oder in einaxigen

$$\frac{v_{,}^2 - v^2}{\sin\lambda^2}.$$

Für dieſelbe Subſtanz läßt ſich $v_{,}^2 - v^2$ auch durch $\frac{n}{c.\sec\gamma}$ $= \frac{n}{c}\cos\gamma$ ausdrücken und daher die Stärke der doppelt brechenden, oder was daſſelbe iſt, die polariſirende Kraft meſſen durch

$$K = \frac{n}{c} \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\varkappa \sin\lambda}.$$

wobei n der numeriſche Werth der Farbe nach der Newton'ſchen Scale iſt, welche das Kryſtallplättchen von der Dicke c gibt mittelſt eines Lichtſtrahls, der unter einem Winkel einfällt, aus dem der Brechungswinkel γ hervorgeht und der mit den optiſchen Axen die Winkel $\varkappa$ und λ macht.

171. Brewſter mißt die Intenſität der polariſirenden Kraft einer optiſchen Axe durch den numeriſchen Werth der Farbe, die ein Strahl, welcher in einem Plättchen von beſtimmter Dicke der Einwirkung dieſer Axe ausgeſetzt war und hierauf auf eine polariſirende Fläche auffällt, zeigt. Entſteht an einer Stelle eines ſolchen Plättchens durch die Wirkung einer Axe die Farbe, deren numeriſcher Werth c iſt, durch eine zweite Axe hingegen die Farbe c_1; ſo wird nach Brewſter durch die gemeinſchaftliche Wirkung beider Axen eine Farbe C hervorgebracht, deren Werth durch die Diagonale eines Parallelogramms gegeben iſt, das mit den Seiten c und c_1 und mit dem Winkel ε beſchrieben iſt, welcher Winkel dem doppelten Neigungswinkel der zwei Ebenen gleich kommt, in denen der einfallende Strahl und die zwei Axen liegen; oder man hat:

$$C^2 = c^2 + c_1^2 + 2cc_1 \cos 2\varepsilon.$$

Drücken p und q die Kraft der zwei Axen aus und iſt der Winkel, welchen der einfallende Strahl OA (Fig. 141) mit der Axe Ox macht $=\alpha$, der Winkel, den er mit der Axe Oy macht $=\beta$ und der Neigungswinkel der zwei Axen nämlich $xOy = \gamma$, ſo iſt

$$c = p\sin\alpha^2,\quad c_1 = q\sin\beta^2 \text{ und } \cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Setzt man zuerſt für c und c_1 dieſe Werthe, und für $\cos 2\varepsilon$ den Werth $(1 - 2\sin\varepsilon^2)$, ſo erhält man:

$$C^2 = (p\sin\alpha^2)^2 + (q\sin\beta^2)^2 + 2pq\sin\alpha^2\sin\beta^2\,(1 - 2\sin\varepsilon^2)$$
$$= (p\sin\alpha^2 - q\sin\beta^2)^2 + 4pq\sin\alpha^2\sin\beta^2\cos\varepsilon^2$$

wenn man endlich ſtatt $\cos\varepsilon^2$ ſetzt, was vorhin dafür gefunden wurde,

$$C^2 = (p\sin\alpha^2 + q\sin\beta^2)^2 - 4pq\,(1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2$$
$$+ 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

Stehen die polariſirenden Axen auf einander ſenkrecht, ſo wird

$$C^2 = (p\sin\alpha^2 + q\sin\beta^2)^2 - 4pq\,(\sin\alpha^2 - \cos\beta^2).$$

172. Man ſetze ſtatt der zwei rechtwinkeligen Axen Ox und Oy zwei andere Oy_1 und Ox_1, die in einer auf xOy ſenkrechten Ebene liegen, mit Oy gleiche Winkel $yOy_1 = yOx_1 = \rho$ machen, und gegen den einfallenden Strahl um die Winkel $\varkappa$ und λ geneigt ſind. Unter dieſen Vorausſetzungen hat man:

$$-\cos\varkappa = \sin\alpha\sin\beta\sin\rho\sin\varepsilon - \cos\beta\cos\rho;$$
$$\cos\lambda = \sin\alpha\sin\beta\sin\rho\sin\varepsilon + \cos\rho\cos\beta$$

und hieraus, wenn man $\cos\varkappa = m$, $\cos\lambda = n$ ſetzt,

$$m+n = 2\cos\beta\cos\rho;\quad m-n = -2\sin\alpha\sin\beta\sin\rho\sin\varepsilon$$

oder

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = \cos\beta^2\cos\rho^2;\quad \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \sin\alpha^2\sin\beta^2\sin\rho^2\sin\varepsilon^2$$

weil aber $\sin\varepsilon^2 = 1 - \cos\varepsilon^2 = \dfrac{\sin\alpha^2\sin\beta^2 - \cos\alpha^2\cos\beta^2}{\sin\alpha^2\sin\beta^2}$ iſt,

$$\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = (\sin\alpha^2\sin\beta^2 - \cos\alpha^2\cos\beta^2)\sin\rho^2.$$

Multiplicirt man nun $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$ mit $\sin\rho^2$, $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$ mit $\cos\rho^2$ und addirt beide Producte; ſo erhält man:

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\sin\rho^2 + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2\cos\rho^2 =$$
$$= (\cos\beta^2 + \sin\alpha^2\sin\beta^2 - \cos\alpha^2\cos\beta^2)\sin\rho^2\cos\rho^2$$
$$= \sin\alpha^2\sin\rho^2\cos\rho^2$$

und hieraus

$$\left(\frac{m+n}{2\cos\rho}\right)^2 + \left(\frac{m-n}{2\sin\rho}\right)^2 = \sin\alpha^2.$$

Vorhin war $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = \cos\beta^2\cos\rho^2$. Dieſes gibt

$$1 - \left(\frac{m+n}{2\cos\rho}\right)^2 = \sin\beta^2.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in dem Ausdrucke für C; ſo erhält man:

$$C^2 = \left\{q + \frac{p-q}{4\cos\rho^2}(m+n)^2 + \frac{p}{4\sin\rho^2}(m-n)^2\right\}^2$$
$$- \frac{pq}{\sin\rho^2}(m-n)^2.$$

Werden die neuen Axen ſo genommen, daß $\sin\rho^2 = \frac{p}{q}$ wird, ſo erhält man nach gehöriger Reduction

$$C^2 = q^2 m^2 n^2 = q^2 \cos\varkappa^2 \cos\lambda^2 \text{ und}$$
$$C = \pm q \cos\varkappa \cos\lambda$$

wo das untere Zeichen gilt, ſobald $2\varepsilon > 180°$ iſt, weil da die Diagonale des Farbenparallelogramms nach der entgegengeſetzten Seite zu liegen kommt.

Dieſe Formel lehrt, daß ſich um die Pole der Axen Ox_1 und Oy_1 farbige Ringe von der Form der Lemniscaten bilden werden, und daß es daher den Anſchein hat, als wären ſie die eigentlichen polariſirenden Axen. Brewſter nennt ſie zum Unterſchiede von dieſen die reſultirenden Axen.

173. In dem hier betrachteten Falle müſſen beide polariſirende Axen einerlei Zeichen haben, weil ſonſt $\sin\rho = \sqrt{\frac{p}{q}}$ eine imaginäre Größe würde. Setzt man aber zwei Axen mit ungleichen Zeichen, d. h. eine anziehende und eine abſtoßende und nimmt ſie in derſelben Ebene mit den polariſirenden an; ſo gelangt man zu einem ähnlichen Reſultat, wie durch Annahme zweier Axen von gleichen Zeichen, die in Ebenen liegen, welche auf einander ſenkrecht ſtehen. In dieſem Falle hat man:

$$\cos\varkappa = \cos\beta\cos\rho + \cos\alpha\sin\rho;\ \cos\lambda = \cos\beta\cos\rho - \cos\alpha\sin\rho$$

und hieraus oder wie vorhin

$$\cos\alpha = \frac{m-n}{2\sin\rho},\quad \cos\beta = \frac{m+n}{2\cos\rho}$$

mithin

$$C^2 = \begin{cases} \left\{(p+q) - \left(\frac{p}{\sin\rho^2} + \frac{q}{\cos\rho^2}\right)\frac{m^2+n^2}{4} \right. \\ \left. + \left(\frac{p}{\sin\rho^2} - \frac{q}{\cos\rho^2}\right)\frac{mn}{2}\right\}^2 - 4pq \\ + \frac{pq}{\sin\rho^2\cos\rho^2}(m^2+n^2) + 2pq\left(\frac{\sin\rho^2 - \cos\rho^2}{\sin\rho^2\cos\rho^2}\right)mn. \end{cases}$$

Setzt man hier $\tang\rho^2 = -\frac{p}{q}$, ſo iſt $\frac{p}{\sin\rho^2} + \frac{q}{\cos\rho^2} = 0$, und daher

$$C^2 = \frac{(1-m^2)(1-n^2)}{\cos\rho^4}q^2 = \frac{q\sin\varkappa^2\sin\lambda^2}{\cos\rho^4}$$

oder weil aus $\tang \rho^2 = -\frac{p}{q}$ folgt $\cos \rho^2 = \frac{q}{q-p}$

$$C = (q-p) \sin \varkappa \sin \lambda.$$

Es entſtehen demnach eben ſo wie vorhin Ringe in Form von Lemniscaten, aber ihre Pole liegen in einer Ebene, welche auf der vorhergehenden ſenkrecht ſtehen.

174. Haben zwei rechtwinkelige polariſirende Axen dasſelbe Zeichen und gleiche Intenſität, d. h. iſt $p = q$, ſo wird

$$\sin \rho = 1 \text{ oder } \rho = 90^\circ$$

und der Winkel, welchen die zwei reſultirenden Axen einſchließen, beträgt 180° und die Lemniscaten werden Kreiſe. Man kann demnach eine einzelne polariſirende Axe in zwei andere rechtwinkelige, an Intenſität gleiche und dem Charakter nach entgegengeſetzte auflöſen. Denkt man ſich zu zwei ſolchen Axen noch eine dritte von entgegengeſetzter Natur mit den vorigen, ſo hebt dieſe die Wirkung der erſteren auf, und der Körper beſitzt keine doppelte Brechung. Es darf aber nur eine kleine Störung in dem Verhältniſſe der Axen eintreten, und es müſſen ſich alſogleich Spuren einer doppelten Brechung oder Polariſation zeigen.

Die Tafel XX enthält mehrere Körper mit der Neigung und Beſchaffenheit der ihnen entſprechenden Axen der doppelten Brechung ꝛc.

Drittes Kapitel.

Theorie des Lichtes.

175. Von den vielen Hypotheſen, die man über die Natur des Lichtes aufgeſtellt hat, haben ſich faſt ausſchließlich nur zwei, nämlich die Emanations- und die Vibrationshypotheſe erhalten und es herrſcht in den Anſichten der Phyſiker über dieſen Gegenſtand nur jene Verſchiedenheit, welche die Natur dieſer zwei Hypotheſen mit ſich bringt. Das Weſen beider wollen wir mit Hilfe der Mathematik darzuſtellen ſuchen.

A. Die Vibrationshypotheſe.

176. Von dieſer Hypotheſe wird vorausgeſetzt, daß es eine ungemein feine, elaſtiſche Flüſſigkeit, Äther genannt, gibt, wel-

che alle Zwiſchenräume durchdringt und wegen ihrer Feinheit der Bewegung der Körper keinen merklichen Widerſtand entgegenſetzt. Ein leuchtender Körper iſt ein ſolcher, der ſich in einer hinreichend ſchnellen ſtehenden Schwingung befindet und dadurch den Äther in eine fortſchreitende Oſcillation verſetzt, die ſich bis zu unſerem Auge fortpflanzt und auf der Netzhaut durch einen Stoß die Empfindung des Sehens hervorbringt. Körper verdichten durch ihre anziehende Kraft den in ihren Zwiſchenräumen befindlichen Äther und bewirken dadurch, daß ſich in ihm die Vibrationen in demſelben Maße langſamer fortpflanzen, als wenn derſelbe frei iſt. Es iſt daher die Natur des Lichtes nach dieſer Anſicht ganz der des Schalles ähnlich und die theoretiſchen Betrachtungen, welche in der Akuſtik, beſonders in 53—58 angeſtellt wurden, laſſen ſich auch auf das Licht anwenden; nur muß man bedenken, daß die Lichtſchwingungen viel ſchneller erfolgen, als die Schallſchwingungen. Was dort eine Schallwelle genannt wurde, iſt hier als Lichtwelle anzuſehen, die Richtung, in welcher ein Äthertheilchen ſeine Bewegung fortpflanzt, iſt das, was man Lichtſtrahl nennt. Er ſteht immer auf der Schallwelle ſenkrecht und kann nach dieſer Eigenſchaft in jedem Falle gefunden werden. Ähnlichen Strahlen liegen ähnliche Bewegungen der Äthertheilchen zum Grunde, oder zwei denſelben angehörige Äthertheilchen haben ſtets eine parallele Bewegung. Die Größe der Excurſion eines Theilchens beſtimmt die Intenſität des Lichtes, die Schnelligkeit der Oſcillationen, welche mit der Länge der Lichtwellen im Zuſammenhange ſteht, begründet das, was wir die Farbe nennen. Ähnliche Strahlen ſind immer von gleicher Farbe.

Wenn dieſe Hypotheſe einen wiſſenſchaftlichen Werth haben ſoll, ſo müſſen ſich die optiſchen Phänomene ihrem Geiſte gemäß aus der Natur der vibrirenden Bewegung ableiten laſſen. Ein Vergleich deſſen, was aus dieſer Bewegung folgt, mit dem, was die Erfahrung lehrt, wird demnach den beſten Maßſtab für ihren Werth abgeben.

177. Die Fortpflanzung einer oſcillirenden Bewegung im Äther oder in einem anderen, ſolcher Oſcillationen fähigen, elaſtiſchen Mittel erfolgt nach den Geſetzen des Stoßes elaſtiſcher Körper und geſchieht ſo, wie ſich etwa ein Stoß in einer Reihe elaſtiſcher, einander berührender Kugeln fortpflanzt. Man denke ſich den leuchtenden Körper an einer beſtimmten, aber beliebigen Stelle ſeiner Schwingungsbahn, wo ein oſcillirendes Theilchen die

Geſchwindigkeit v hat, und betrachte den Verlauf der Fortpflanzung dieſer Geſchwindigkeit im umgebenden Äther. Was mit dieſer geſchieht, erfolgt mit jeder anderen und man wird durch dieſe einzelne Betrachtung zur Kenntniß des ganzen Verlaufs der Lichtfortpflanzung gelangen. Haben t, δ, k, π die in Abſch. III Kap. 5 angenommene Bedeutung, ſo iſt

$$v = k \sin 2\pi \frac{t}{\delta}.$$

Dieſe Geſchwindigkeit pflanzt ſich im Äther fort und man hat für ein Theilchen, das ſich in der Entfernung x von der Lichtquelle befindet:

$$v = k \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{x}{a}}{\delta}\right),$$

ſo lange der Äther gleichförmig dicht bleibt. Ändert ſich ſeine Dichte, ſo daß ein Theilchen, deſſen Maſſe bisher M war, die Maſſe m annimmt, ſo erhält man den Geſetzen des Stoßes elaſtiſcher Körper gemäß für die Stelle, wo M in m übergeht und u die Geſchwindigkeit des anſtoßenden, u_1 die des geſtoßenen Äthertheilchens nach dem Stoße iſt:

$$u = \frac{(M - m)\,v}{M + m},\ u_1 = \frac{2Mv}{M + m}.$$

Da aber angenommen werden muß, es werde die Expanſivkraft des Äthers in dem Maße geſchwächt, in welchem ſeine Dichte zunimmt, um mit dem freien Äther im Gleichgewichte zu ſtehen; ſo wächſt die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit im verkehrten Verhältniſſe mit der Dichte des Äthers, und es muß $\frac{M}{a} = \frac{m}{b} = \mu$ eine beſtändige Größe ſeyn, wenn a und b die Fortpflanzungsgeſchwindigkeiten in der Maſſe M und m bedeuten. Man erhält demnach $M = a\mu$, $m = b\mu$ und mittelſt dieſer Werthe

$$u = \frac{(a - b)\,v}{a + b};\ u_1 = \frac{2av}{a + b}.$$

Demnach zerfällt die Geſchwindigkeit v des Äthers an der Grenze zweier heterogener Mittel in zwei Theile u und u_1, wovon u dem anſtoßenden, u_1 aber dem geſtoßenen Theilchen zukommt. Es iſt klar, daß $v = u + u_1$ ſeyn muß. Dieſes iſt der Fall, wenn u negativ angenommen wird. Demnach kehrt die Fortpflanzung

der Bewegung zum Theil in das alte Mittel wieder zurück und tritt zugleich in das neue Mittel ein oder der einfallende Strahl wird zum Theil reflectirt, zum Theil durchgelaſſen. Man ſetze $b = an$, und es wird

$$u = \frac{1-n}{1+n}v;\ u_1 = \frac{2}{n+1}v.$$

Für $n < 1$ erhält u einen poſitiven Werth, für $n > 1$ hingegen einen negativen, d. h. wenn im erſten Falle der verdichtete Theil einer Welle auf die Grenzfläche zweier Mittel auffällt, und auch in der reflectirten Welle der verdichtete Theil vorausgeht, ſo muß für den zweiten Fall der verdichtete Theil bei der Reflexion in einen verdünnten übergehen, gleich als wäre eine halbe Oſcillation verloren gegangen.

178. Die Intenſitäten zweier Strahlen verhalten ſich wie die lebendigen Kräfte der bewegten Ätherheile, d. h. wie die Quadrate ihrer Geſchwindigkeiten. Demnach verhält ſich die Intenſität des ſenkrecht auffallenden zur Intenſität des reflectirten Antheils eines Strahles wie $v^2 : \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 v^2$ oder wie $(1+n)^2 : (1-n)^2$ und die des auffallenden zu der des durchgelaſſenen wie $(n+1)^2 : 4$ Sucht man nach dieſer Formel die Lichtmenge, welche vom Waſſer ſenkrecht reflectirt wird, ſo findet man ſie $= 0.02$. Bouquer fand durch Verſuche 0.018. Nach Arago reflectirt Queckſilber die Hälfte des ſenkrecht darauf fallenden Lichtes. Man hat daher $\left(\frac{1-n}{1+\eta}\right)^2 = \frac{1}{2}$ mithin $n = 5.829$ daher übereinſtimmend mit der Erfahrung, daß Metalle ein ſehr großes Brechungsvermögen beſitzen.

179. Ein auf die Trennungsfläche zweier Mittel ſchief auffallender Lichtſtrahl erleidet aber nicht blos eine Änderung ſeiner Intenſität, ſondern auch die Richtung ſowohl des reflectirten als durchgelaſſenen Antheils wird geändert. Wir wollen zuerſt die Richtung des erſteren betrachten: Iſt Mm (Fig 142) die Grenze zweier Mittel, an welcher das Licht reflectirt wird, und SA ein Lichtſtrahl im Sinne der Vibrationshypotheſe, ſo erfolgt durch ein Theilchen über Mm auf ein daran grenzendes, in den Poren des neuen Mittels enthaltenes ein Stoß nach der Richtung SA und das anſtoßende muß, den Geſetzen des Stoßes elaſtiſcher Maſſen gemäß, in der Einfallsebene nach einer Richtung reflectirt werden, die mit Mm denſelben

Winkel macht, wie SA. Sind SA, SB, SC Strahlen, welche zugleich von S ausgehen und auf Mm fallen, ſo wird jeder derſelben nach dem bekannten Geſetze reflectirt, ſie nehmen die Richtungen BF, AE, CG an, als kämen ſie von D her. Aus den Partialwellen, welche in B, A, C ihren Mittelpunct haben, geht auch wirklich die einhüllende Welle hervor, die in D ihr Centrum hat. Man ziehe von S auf Mm die ſenkrechte SD, und mache $SM = MD$ und $BF = SB$, $AE = SA$, $CG = SC$. Da nun $SB = BD$, $SA = AD$, $SC = CD$ iſt, ſo iſt auch $DF = DE = DG$ d. h. die von A, B, C ausgehenden Elementarwellen gelangen zu gleicher Zeit in den von D aus beſchriebenen Kreis HK.

Dasſelbe läßt ſich auch analytiſch zeigen. Es ſey $SM = a$, $SA + AE = b$, $MN = x$, $EN = y$ und $MA = z$, und man hat:

$$AE^2 = y^2 + (x - z)^2, \quad AE = b - SA = b - \sqrt{(a^2 + z^2)}$$

$$\text{mithin } AE^2 = [b - \sqrt{(a^2 + z^2)}]^2 \text{ und}$$

$$y^2 + (x - z)^2 = [b - \sqrt{(a^2 + z^2)}]^2 \text{ oder}$$

$$y^2 + x^2 - 2xz = a^2 + b^2 - 2b\sqrt{(a^2 + z^2)}.$$

Differenziirt man dieſe Gleichung nach z, ſo erhält man nach Hinweglaſſung des gemeinſchaftlichen Faktors $2dz$

$$z = \frac{ax}{\sqrt{(b^2 - x^2)}}.$$

Dieſer Werth in die letztere Gleichung ſubſtituirt, macht

$$y^2 + x^2 - \frac{2ax^2}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} = a^2 + b^2 - \frac{2ab^2}{\sqrt{(b^2 - x^2)}}$$

das iſt

$$(a + y)^2 + x^2 = b^2$$

eine Gleichung für einen Kreis, deſſen Halbmeſſer $b = DE$ iſt.

180. Um die Richtung des gebrochenen Strahls zu finden, ſoll wieder MN (Fig. 143) die Grenze zweier durchſichtiger Mittel und C das Centrum einer Lichtwelle im erſteren, CA die Richtung eines Strahles ſeyn. Vermag das zweite Mittel die Bewegung des Äthers ſo wie das erſtere fortzupflanzen, ſo behält die Welle ihre Geſtalt bei und es findet auch keine Ablenkung des Strahles Statt; geſchieht aber die Fortpflanzung im Mittel unter Mm mit anderer Geſchwindigkeit als in dem ober Mm befindlichen, ſo ändert die Welle ihre Geſtalt, indem die zuerſt ins neue Mittel eintretenden Theile derſelben ſchneller oder langſamer fortſchreiten als die noch im alten Mittel befindlichen und mit dieſer Änderung der Wellengeſtalt

ſteht die Änderung der Richtung des Strahles, welcher ſtets auf der Welle ſenkrecht ſtehen muß, in Verbindung. Es ſey nun AB die auf die Welle im neuen Mittel Normale (mithin der gebrochene Strahl) und zugleich der Weg, um welchen die Bewegung in derſelben Zeit, in welcher CA zurückgelegt wurde, vorgerückt iſt; man ziehe CD und BE ſenkrecht auf Mm, ſetze $CD = a$, $DA = z$, $DE = x$, $EB = y$, nehme ferner an, es ſey $CA = n \,.\, AB$. Da iſt nun

$$CA = \sqrt{(a^2 + z^2)},\quad AB = \sqrt{[y^2 + (x - z)^2]} \text{ und daher}$$

$$\sqrt{(a^2 + z^2)} = n \sqrt{[y^2 + (x - z)^2]} \quad \ldots \quad (a).$$

Der Punct A wird in dem Augenblicke, wo ihn die Lichtwelle trifft, ſelbſt das Centrum neuer Wellen und dasſelbe erfolgt mit allen von der Welle getroffenen Puncten der Mm, die Berührung der einhüllenden und der einzelnen Elementarwellen erfolgt offenbar in der Ebene CAB und in dieſer liegt daher auch der gebrochene Strahl. Differenziirt man daher obige Gleichung nach z, ſo wird

$$\frac{z}{\sqrt{(a^2 + z^2)}} = - \frac{n\,(x - z)}{\sqrt{[y^2 + (x - z)^2]}} \ldots\ldots (b).$$

Sucht man daraus $y^2 + (x - z)^2$ und ſubſtituirt es in (a) ſo erhält man die Gleichung, aus der ſich die Geſtalt der gebrochenen Welle ergibt. Man erhält nämlich

$$a^2 + \frac{n^4 x^2}{(n^2 - 1)^2} = n^2 \left(y^2 + \frac{x^2}{(n^2 - 1)^2} \right)$$

oder

$$\frac{n^2}{a^2}\, y^2 + \frac{n^2 - n^4}{(n^2 - 1)^2 a^2}\, x^2 = 1.$$

Dieſer Gleichung gemäß iſt die gebrochene Welle elliptiſch.

Iſt $CAD = \alpha$, $BAE = \beta$, und demnach

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{(a^2 + z^2)}},\quad \cos\beta = \frac{z}{\frac{1}{n}\sqrt{(a^2 + z^2)}}$$

ſo hat man

$$\cos\alpha : \cos\beta = n : 1$$

mithin das bekannte Brechungsgeſetz. Iſt $n < 1$, d. h. die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit im neuen Mittel kleiner als im alten, ſo wird das Licht zum Einfallslothe gebrochen, widrigenfalls vom Einfallslothe. Ein Körper hat daher ein deſto größeres Brechungsvermögen, je langſamer er das Licht durchläßt.

181. Aus der Brechung ſollte ſich auch die *Farbenzerſtreuung* ableiten laſſen. Allein dieſes iſt nicht der Fall, und darin liegt gerade die größte Schwierigkeit, welche die Vibrationshypotheſe in ſich enthält, die man nur durch eine Analogie einigermaßen beſeitigen kann, wie in der Naturlehre gezeigt worden iſt. Indeß weiß man mit Gewißheit, daß dieſer Hypotheſe gemäß die Verſchiedenheit der Farben mit einer verſchiedenen Wellenlänge zuſammenhängt, ja man hat Mittel gefunden, von denen in der Folge die Rede ſeyn wird, die Länge der jeder Farbe entſprechenden Welle mit großer Genauigkeit anzugeben. Folgendes Täfelchen enthält ſie:

Farbe des Spectrums	Länge der Welle in Millim.	Anzahl der Schwingungen in 1 Secunde
Äußerſtes Ende	0.0006756	458 Billion.
Roth	0.0006502	477 ——
Zwiſchen Roth und Orange	0.0006247	495 ——
Orange	0.0006095	506 ——
„ Orange und Gelb	0.0005968	517 ——
Gelb	0.0005765	535 ——
„ Gelb und Grün	0.0000219	555 ——
Grün	0.0005359	577 ——
„ Grün und Lichtblau	0.0005156	600 ——
Lichtblau	0.0004978	622 ——
„ Lichtblau und Dunkelblau	0.0004800	644 ——
Dunkelblau	0.0004702	658 ——
„ Dunkelblau und Violett	0.0004597	672 ——
Violett	0.0004419	699 ——
Äußerſtes Ende	0.0004241	727 ——

Man muß annehmen, daß ein leuchtender Körper, der Licht ausſendet, welches durch Zerſtreuung in farbige Theile zerlegt wird, in einer Art Schwingung begriffen ſey, welche der einer Saite ähnlich iſt, die ihrer ganzen Länge nach und zugleich mit Schwingungsknoten ſchwingt und daß durch Brechung dieſe Schwingungen gleichſam von einander getrennt werden.

182. Es liegt in der Natur der Wellenbewegung, daß ſich zwei oder mehrere Bewegungen, die ein Äthertheilchen zugleich treffen, zu einer einzigen Bewegung zuſammenſetzen. Auf einer

ſolchen Zuſammenſetzung beruht die **Interferenz** des Lichtes. Man denke ſich zwei ähnliche, aber ungleich ſtarke und von verſchiedenen Quellen ausgehende Lichtſtrahlen, nenne die Geſchwindigkeit eines Ätherteilchens einer Welle an der Stelle, wo beide zuſammentreffen, v, die desſelben Theilchens für den zweiten Strahl v_1 und nehme an, der Unterſchied im Schwingungszuſtande beider Theilchen ſey γ. Da hat man

$$v = k \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{x}{a}}{\delta}\right); \quad v_1 = k_1 \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{x-\gamma}{a}}{\delta}\right).$$

Nennt man die Länge einer Welle ω, ſo iſt wegen $\omega = a\,\delta$ und in der Vorausſetzung, daß man $2\pi\left(\frac{t}{\delta} - \frac{x}{\omega}\right)$ durch λ und $\frac{2\pi\gamma}{\omega}$ durch c darſtellt:

$$v = k \sin\lambda, \quad v_1 = k_1 \sin(\lambda + c).$$

Die reſultirende Geſchwindigkeit V des Äthers wird offenbar durch einen Ausdruck von der Form $K \sin(\lambda + C)$ gegeben ſeyn und man hat demnach in der Formel

$$V = K \sin(\lambda + C)$$

nur K und C zu beſtimmen, wovon erſteres mit der reſultirenden Excurſionsweite des ſchwingenden Theilchens zuſammenhängt. Zur Beſtimmung von K und C hat man:

$$V = v + v_1 = k \sin\lambda + k_1 \sin\lambda \cos c + k_1 \cos\lambda \sin c$$
$$V = K \sin\lambda \cos C + K \cos\lambda \sin C$$

und aus beiden Gleichungen

$$K \cos C = k + k_1 \cos c; \quad K \sin C = k_1 \sin c,$$

woraus dann folgt:

$$\tang C = \frac{k_1 \sin c}{k + k_1 \cos c}; \quad K = \sqrt{(k^2 + k_1^2 + 2 k k_1 \cos c)}$$

Die **Intenſität der reſultirenden Bewegung**, alſo auch die Intenſität des reſultirenden Lichtes iſt demnach durch die Diagonale eines Parallelogramms gegeben, deſſen Seiten die Intenſitäten der ſich interferirenden Strahlen ſind, und das mit einem Winkel $\left(c = \frac{2\pi\gamma}{\omega}\right)$ beſchrieben wird, der in 360° ſo oft enthalten iſt, als die Schwingungsdifferenz in einer Wellenlänge. Man erhält aus dieſer Formel

für $\gamma = 0, \omega, 2\omega$ ꝛc., $\cos c = +1$; $V = k + k_1$
„ $\gamma = \frac{1}{2}\omega, \frac{3}{2}\omega, \frac{5}{2}\omega$ ꝛc., $\cos c = -1$; $V = k - k_1$
„ $\gamma = \frac{1}{4}\omega, \frac{3}{4}\omega, \frac{5}{4}\omega$ ꝛc., $\cos c = 0$; $V = \sqrt{(k^2 + k_1^2)}$.

Einen ähnlichen Ausdruck findet man auch für die reſultirende Schwingungsweite. Dieſe hat für den leuchtenden Körper den Werth $x = h \cos \frac{2\pi t}{\delta}$ und das daran grenzende Ätherthеilchen nimmt ſelbſt dieſe Ausſchlagweite an. Deßhalb muß die Excurſionsweite des an den vibrirenden Körper grenzenden Äthers auch durch $x = h \cos \frac{2\pi t}{\delta}$ und die eines Theilchens in der Entfernung x von demſelben durch

$$x = h \cos 2\pi \left(\frac{t}{\delta} - \frac{x}{\omega}\right)$$

ausgedrückt werden, ſtatt deſſen man wieder ſetzen kann

$$x = h \cos \lambda.$$

Für einen zweiten ähnlichen Strahl findet man

$$x_1 = h_1 \cos (\lambda + c)$$

und als reſultirende Schwingungsweite

$$X = x + x_1 = H \cos (\lambda + C)$$

wo H auf ähnliche Weiſe wie K beſtimmt wird.

183. Sind die ſich interferirenden Strahlen zwar gleichfarbig aber unähnlich, und erfolgen die Vibrationen beider nicht in derſelben Ebene; ſo kann man vorläufig jede ſolche Bewegung in drei auf einander ſenkrechte, drei Coordinatenebenen parallele zerlegen, ſo daß man für zwei ſich interferirende Strahlen ſechs ſolche Bewegungen erhält, deren je zwei einander parallel ſind, mithin den obigen Interferenzformeln unterliegen. Die Reſultate der Interferenzen in den drei Coordinatenebenen laſſen ſich wieder zuſammenſetzen und geben die reſultirende Schwingung ſowohl der Geſchwindigkeit als der Schwingungsweite nach.

Geſetzt, man habe zwei ſich interferirende Strahlen, denen geradlinige Schwingungen zu Grunde liegen, welche in der Ebene xy vor ſich gehen und für die man hat:

$$x_1 = h_1 \cos (\lambda + c_1);\ y_1 = l_1 \cos (\lambda + c_1)$$
$$x = h \cos (\lambda + c);\ y = l \cos (\lambda + c_1)$$

Daraus erhält man

$$X = x + x_1 = H \cos (\lambda + C);\ Y = y + y_1 = L \cos (\lambda + C_1).$$

Beſtimmt man H, L, C, C_1 auf demſelben Wege, den wir (S. 529) eingeſchlagen haben, ſo erhalten wir

$$\operatorname{tang} C = \frac{h \sin c + h_1 \sin c_1}{h \cos c + h_1 \cos c_1}; H = \sqrt{[h^2 + h_1^2 + 2 h h_1 \cos(c - c_1)]}$$

$$\operatorname{tang} C_1 = \frac{l \sin c + l_1 \sin c_1}{l \cos c + l_1 \cos c_1}; L = \sqrt{[l^2 + l_1^2 + 2 l l_1 \cos(c - c_1)]}.$$

Heißt die reſultirende Schwingungsweite M und φ der Winkel, den ihre Richtung mit der Axe der x macht, ſo erhält man:

$M \cos\varphi = H$, $M \sin\varphi = L$ und hieraus $M^2 = H^2 + L^2$.

184. Um die Art der reſultirenden Schwingung zu finden, braucht man nur die Gleichung der Curve zu ſuchen, deren Coordinaten X und Y ſind. Für den vorhergehenden Fall hat man:

$$\frac{X}{H} = \cos(\lambda + C); \quad \frac{Y}{L} = \cos(\lambda + C_1)$$

mithin

$$\operatorname{arc} \cos \frac{X}{H} = \lambda + C; \quad \operatorname{arc} \cos \frac{Y}{L} = \lambda + C_1$$

und durch Subtraction

$$\operatorname{arc} \cos \frac{X}{H} - \operatorname{arc} \cos \frac{Y}{L} = C - C_1$$

mithin

$$\frac{XY}{HL} + \sqrt{\left(1 - \frac{X^2}{H^2}\right)} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{Y^2}{L^2}\right)} = \cos(C - C_1)$$

woraus man leicht findet:

$$\frac{X^2}{H^2} + \frac{Y^2}{L^2} - 2 \cos(C - C_1) \frac{XY}{HL} = \sin(C - C_1)^2.$$

Demnach reſultirt aus den hier betrachteten zwei geradlinigen Oſcillationen eine elliptiſche.

Dieſe Bewegung wird geradlinig, wenn $C = C_1$ iſt. In dieſem Falle aber hat man zugleich

$$\frac{h \sin c + h_1 \sin c_1}{h \cos c + h_1 \cos c_1} = \frac{l \sin c + l_1 \sin c_1}{l \cos c + l_1 \cos c.}$$

woraus man findet:

$$\left(\frac{h_1}{h} - \frac{l_1}{l}\right) \sin(c - c_1) = 0.$$

Dieſer Gleichung wird Genüge geleiſtet durch $c = c_1$ und durch $\frac{h_1}{h} = \frac{l_1}{l}$. Erſteres fordert, daß die zwei Strahlen von derſelben

Quelle kommen und völlig mit einander übereinſtimmen, letzteres verlangt, daß beide Strahlen einerlei Richtung haben.

Für $\cos(C - C) = 0$, erhält man $\frac{X^2}{H^2} + \frac{Y^2}{L^2} = 1$, das heißt, eine kreisförmige Schwingung. Für dieſen Fall iſt nämlich auch $C - C_1 = 90°$ und $H = L$. Die erſtere Bedingung gibt $\tang C = - \cot C_1$ oder $\frac{h \sin c + h_1 \sin c_1}{h \cos c + h_1 \cos c_1} = - \frac{l \cos c + l_1 \cos c_1}{l_1 \sin c + l_1 \sin c_1}$, woraus man erhält

$$\cos(c - c_1) = - \frac{hl + h_1 l_1}{hl_1 + h_1 l}.$$

Die letztere Bedingung gibt $h^2 + 2hh_1 \cos(c - c_1) + h_1^2 = l^2 + 2ll_1 \cos(c - c_1) + l_1^2$, woraus man findet

$$\cos(c - c_1) = - \frac{(h^2 + h_1^2) - (l^2 + l_1^2)}{2hh_1 - 2ll_1}$$

und mittelſt beider Werthe von $\cos(c - c_1)$

$$\left(\frac{h}{l} - \frac{h_1}{l_1}\right) [h^2 + l^2 - (h_1^2 + l_1^2)] = 0.$$

Dieſer Gleichung entſpricht man durch $\frac{h}{l} = \frac{h_1}{l_1}$ und durch $h^2 + l^2 = h_1^2 + l_1^2$. Die erſtere Bedingung führt zu keinem Reſultate; aus der letzteren erhält man aber ein wichtiges Reſultat. Wenn m und m_1 die mit x und y parallelen reſultirenden Schwingungsweiten und φ, φ_1 die Winkel bezeichnen, welche ſie mit x machen; ſo iſt

$$h = m \cos\varphi, \quad l = m \sin\varphi; \quad h_1 = m_1 \cos\varphi_1, \quad l_1 = m_1 \sin\varphi_1$$

und hieraus

$$h^2 + l^2 = m^2, \quad h_1^2 + l_1^2 = m_1^2$$

mithin der letzteren obigen Bedingung gemäß $m = m_1$ und $\cos(c - c_1) = - \cos(\varphi - \varphi_1)$ oder $c - c_1 = 180° - (\varphi - \varphi_1)$. Aber $\varphi - \varphi_1$ iſt der Winkel, welchen die zwei ſich interferirenden Bewegungen mit einander einſchließen, und deßhalb iſt die reſultirende Schwingung eine circulare, wenn die Schwingungsdifferenz der zwei ſich interferirenden geradlinigen Schwingungen dem Supplemente des Winkels, den ihre Richtungen mit einander machen, gleich iſt, wie dieſes mit zwei Strahlen von gleichen Schwingungsweiten der Fall, welche um $\frac{1}{4}$ einer Schwingung von einander abſtehen.

185. Es iſt klar, daß Einwirkungen von Lichtſtrahlen auf einander häufig eintreten müſſen, wenn ein Lichtbüſchel auf einen durchſichtigen begrenzten Körper fällt, indem ſowohl an der inneren als an der äußeren Grenze eines ſolchen Körpers eine Theilung jedes Strahles in zwei Theile erfolgt, wovon einer reflectirt, der andere gebrochen wird. Aus dem Vorhergehenden iſt es aber begreiflich, warum der Erfolg der Interferenz ſolcher Strahlen nur dann bemerklich wird, wenn dieſer Körper zugleich dünn genug iſt, und die Interferenz zwiſchen Strahlen Statt findet, deren Schwingungsdifferenz nicht gar zu groß iſt und die ſich daher an Intenſität nahe gleichen, wie S. 457 geſagt wurde.

186. Man denke ſich ein dünnes, von parallelen Wänden begrenztes Plättchen $abcd$ (Fig. 144) und einen ſenkrecht darauf fallenden Strahl se. Dieſer dringt in e theilweiſe ein, gelangt nach f, wird daſelbſt wieder theilweiſe nach e reflectirt, in e wieder geſpaltet, zum Theil nach f reflectirt und ſo geht dieſes fort. Es heiße die Geſchwindigkeit des Lichtes in dem Mittel, von welchem es urſprünglich auf ab fiel, a, die im Plättchen b und die in dem Mittel, welches an cd grenzt, a_1. Es ſey nun v die Geſchwindigkeit der Theile der einfallenden Welle, v_1 die des ins Plättchen eindringenden Theils, v_2 die des vom Plättchen reflectirten, u die Geſchwindigkeit der Theile, die f treffen, u_1 die Geſchwindigkeit der in f durchgelaſſenen, u_2 die der in f reflectirten, und ähnliche Bedeutungen haben $v_3, v_4 \ldots v_n; u_3, u_4 \ldots u_n$ für die Wellen nach mehreren Brechungen und Reflexionen; ſo hat man:

$$v_1 = \frac{2b}{a+b}\,v, \quad u_1 = \frac{2a_1}{a_1+b}\,u$$

$$v_2 = \frac{b-a}{b+a}\,v, \quad u_2 = \frac{a_1-b}{a_1+b}\,u.$$

Ein Auge, welches ſich in se befindet, wird nun in demſelben Augenblicke von unendlich vielen Wellen getroffen, die verſchiedene Intenſitäten haben, und zwar: 1) von der in e reflectirten, deren Theile die Geſchwindigkeit v_1 haben; 2) von einer Welle, die in e zwei Brechungen und in f eine Reflexion erlitten hat. Die Geſchwindigkeit der Theile derſelben iſt zu finden; 3) von einer Welle, die in e zwei Brechungen, in e eine, in f aber zwei Reflexionen erlitten hat und deren Theile eine zu ſuchende Geſchwindigkeit haben, und n^{tens} von n Wellen, deren jede zwei Brechungen in e, $n+1$ Reflexionen

in f und n Reflexionen in e erlitten hat, wo n jede ganze Zahl von o bis ∞ bedeutet. Man ſieht ein, daß aus allen dieſen Wellen eine Reſultirende hervorgehen muß, deren Theile die Geſchwindigkeit V haben. Dieſe Größe V iſt die Reſultirende von $\frac{b-a}{b+a}v$ und aus den Größen v_1, v_2, v_3 .... v_n, welche wegen der zweifachen Brechung in e mit $\frac{2b}{b+a}\cdot\frac{2a}{b+a}=\frac{4ab}{(b+a)^2}$ und wegen der $(n+1)$ Reflexionen in f und den n Reflexionen in e mit $\left(\frac{a_1-b}{a_1+b}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n$ multiplicirt werden müſſen. Setzt man $\frac{a_1-b}{a_1+b}\cdot\frac{a-b}{a+b}=g$, ſo wird der letztere Factor $\left(\frac{a_1-b}{a_1+b}\right)g^n$ und

$$V=\frac{b-a}{b+a}v+\frac{4ab\,(a_1-b)}{(b+a)^2(a_1+b)}(v_1+gv_2+g^2v_3+\ldots).$$

Auf gleiche Weiſe findet man für die aus dem durchgelaſſenen Lichte reſultirende Welle die Intenſität U, wie folgt:

$$U=\frac{4a_1b}{(a+b)\,(a_1+b)}(v+gv_1+g^2v_2+\ldots.).$$

Iſt δ die Zeit einer Oſcillation des leuchtenden Körpers, ſo kehrt offenbar an den Theilen der Welle dieſelbe Geſchwindigkeit wieder zurück, ſobald die Zeit der Bewegung um ein Vielfaches von δ zugenommen hat, und bekömmt einen gleichen aber entgegengeſetzten Werth, wenn dieſe Größe um ein ungerades Vielfaches von $\frac{\delta}{2}$ gewachſen iſt. Iſt die Dicke c des Plättchens ſo beſchaffen, daß man $\mu b\omega=2c$ hat, wo ω wieder die Wellenlänge, μ eine ganze poſitive Zahl bezeichnet; ſo trifft der erſtere der genannten Fälle ein, man hat demnach $v=v_1=v_2=v_3$, und deßhalb

$$V=v\left(\frac{b-a}{b+a}+\frac{4ab\,(a_1-b)}{(a+b)^2\,(a_1+b)}(1+g+g^2+g^3\ldots)\right)$$

oder weil $1+g+g^2+g^3\ldots.=\frac{1}{1-g}$ iſt,

$$V=v\left(\frac{b-a}{b+a}+\frac{4ab\,(a_1-b)}{(a+b)^2\,(a_1+b)\,(1-g)}\right).$$

Eben ſo findet man:

$$U = v \cdot \frac{4a_{,}b}{(a+b)\,(a_{,}+b)\,(1-g)}.$$

Setzt man für g ſeinen Werth, ſo iſt

$$V = \frac{a_{,}-a}{a_{,}+a}\,v;\quad U = \frac{2a_{,}v}{a+a_{,}}.$$

Befindet ſich das Plättchen ganz in demſelben Mittel, ſo hat man $a_{,}=a$ und daher

$$V = 0,\quad U = v.$$

Ein ſolches Plättchen erſcheint daher im ſenkrecht reflectirten homogenen Lichte dunkel, im durchgelaſſenen von der Farbe des auffallenden Lichtes. Wird es vom weißen Lichte beleuchtet, ſo erſcheint es im durchgelaſſenen Lichte von der Farbe, auf welche ſich $\omega = \frac{2c}{\mu b}$ bezieht, im reflectirten hingegen von der complementären Farbe.

Hat man für die Dicke $c_{,}$ des Plättchens die Gleichung $(2\mu+1)\,\frac{b}{2}\,\omega = 2c_{,}$, ſo iſt $v_{1} = -v_{2} = v_{3} = -v_{4}$ ꝛc. und daher, wenn man wieder wie vorhin verfährt und bedenkt, daß

$$1-g+g^{2}-g^{3}\ldots = \frac{1}{1+g} = \frac{(a_{,}+b)\,(a+b)}{(a_{,}+b)\,(a+b)+(a_{,}-b)\,(a-b)}$$

iſt,

$$V = \frac{(b^{2}-aa_{,})}{b^{2}+aa_{,}}\,v,\quad U = \frac{2a_{,}b}{b^{2}+aa_{,}}\,v.$$

Iſt die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit b im Plättchen die mittlere Proportionirte zwiſchen a und $b_{,}$, ſo hat man $aa_{,}=b^{2}$, und daher

$$V = 0,\quad U = \sqrt{\frac{a_{,}}{a}}.$$

Ein Plättchen von jeder anderen Dicke, die nicht in einer der zwei vorhergehenden Gleichungen enthalten iſt, muß ſowohl im durchgelaſſenen als im reflectirten Lichte farbig erſcheinen, doch wird die Intenſität des Lichtes ſchwächer ſeyn, als in den vorhergehenden Fällen. Vergleicht man die Dicke eines Plättchens, das im reflectirten Lichte farbig erſcheint, mit der desjenigen, welches in demſelben Lichte dunkel iſt, ſo findet man

für erſteres $(2\mu+1)\,c$, für letzteres $2\mu c$.

Es verhalten ſich alſo die Dicken der im reflectirten Lichte farbig erſcheinenden Plättchen wie die ungeraden, hingegen die Dicken der

dunkel erſcheinenden wie die geraden Zahlen, und damit ſtimmt auch die Erfahrung überein.

187. Für ſchief einfallendes Licht läßt ſich nicht der bisher betretene Weg einſchlagen, weil man das Verhältniß der Intenſität der Theile nicht kennt, in welche ein Strahl an der Grenze zweier heterogener Mittel getheilt wird; man muß darum auf andere Weiſe zum Ziele zu gelangen ſuchen. Es ſey *abcd* (Fig. 145) ein gleichförmig dickes Plättchen, *BA* eine ſchief auf dasſelbe fallende Lichtwelle und *SA* der Strahl, welcher dem zuerſt getroffenen Puncte entſpricht. Im Plättchen nehme die Welle den Weg *Ae* ſo, daß daraus der gebrochene Strahl *AC* hervorgeht. Schon in *A* erfolgt eine Trennung der Welle in zwei Theile und nur einer derſelben tritt ins Plättchen ein, ſeine Intenſität ſey $1-\alpha$, die der ganzen Welle $= 1$ geſetzt. In *C* erfolgt eine ähnliche Trennung des Strahles *AC*, ein Theil $= (1-\alpha)(1-\beta)$ geht nach *CO*, der andere $(1-\alpha)\beta$ wird reflectirt, gelangt nach *D* und erleidet hier wieder eine Spaltung und Reflexion, ſo daß ſein in *E* durchgelaſſener Antheil $(1-\alpha)(1-\beta)\beta^2$ iſt. Dieſer ſetzt ſeinen Weg nach der mit *SA* und *CO* parallelen Richtung *EO* fort. Denſelben Weg nimmt auch ein Theil eines Strahles *SD*, der nach zwei Brechungen in *E* austritt und an Intenſität dem Strahle *CO* gleich kommt. Das Reſultat der Interferenz dieſer zwei Strahlen wird demnach genau ſo beſchaffen ſeyn, als wenn ſich *EO* und *CO* interferirten. Es werden zwar noch andere Strahlen, welche mit *SA* parallel einfallen und nebſt zwei Brechungen 3, 4, 5 .... *n* Reflexionen erlitten haben, zugleich mit *EO* und in derſelben Richtung wie *EO* das Plättchen verlaſſen, aber dieſe kann man wohl ihrer ſehr geringen Intenſität wegen vernachläſſigen. Es handelt ſich daher vor allen um die Schwingungsdifferenz der zwei Strahlen *EO* und *CO*. Um dieſe zu finden, ziehe man *EF* ſenkrecht auf *CO*. Die Bahnen beider Strahlen fangen erſt in *C* an von einander abzuweichen und während der Strahl *CO* den Weg *CF* mit der dem unter *cd* befindlichen Mittel entſprechenden Geſchwindigkeit v zurücklegt, beſchreibt der andere Strahl den Weg $CD+DE$ mit der Geſchwindigkeit v_1, welche der Maſſe des Plättchens entſpricht. Iſt *AG* das Einfallsloth und $GAC=\rho$ der Brechungs-, σ hingegen der zu demſelben gehörige Einfallswinkel und c die Dicke des Plättchens; ſo hat man $CF = CE \cos ECF = 2c \tang . \rho \sin \sigma$, ferner $CD+DE = 2CA = 2c \sec \rho$. Dieſer Weg auf die Ge-

ſchwindigkeit ν reducirt, wird $2c\sec\rho \,.\, \frac{\nu}{\nu_1} = 2cn\sec\rho$, wenn man $\nu : \nu_1 = n : 1$ annimmt. Demnach iſt die Schwingungsdifferenz beider in Rede ſtehender Strahlen

$$2c(n\sec\rho - \tang\rho\sin\sigma) = \frac{2nc}{\cos\rho}(1-\sin^2\rho) = 2c\cos\rho = 2nc_1$$

wenn man $c\cos\rho = c_1$ ſetzt.

Es iſt daher für die zwei ſich interferirenden Strahlen nach (182)

$$x = \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}\,\sin\lambda;$$

$$x_1 = \alpha\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}\,\sin\left(\lambda + 2\pi\,.\,\frac{2c_1}{\omega}\right)$$

und den Interferenzgeſetzen gemäß:

$$X = H\sin(\lambda + C)$$

$$\text{wo } H = \left\{\begin{array}{l}(1-\alpha)(1-\beta) + \alpha^2(1-\alpha)(1-\beta) + \\ + 2\alpha(1-\alpha)(1-\beta)\cos\left(2\pi\,.\,\frac{2c_1}{\omega}\right)\end{array}\right.$$

$$= (1-\alpha)(1-\beta)\left\{1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos\left(2\pi\,.\,\frac{2c_1}{\omega}\right)\right\}$$

$$\sin C = \frac{\alpha\sin\left(2\pi\,.\,\frac{2c_1}{\omega}\right)}{\sqrt{\left[1 + 2\alpha\cos\left(2\pi\,.\,\frac{2c_1}{\omega}\right) + \alpha^2\right]}}$$

iſt. Sind α und β ſehr kleine Brüche, wie dieſes bei nicht ſehr ſchief einfallenden Strahlen der Fall iſt, ſo kann man alle Glieder, welche Potenzen oder Producte dieſer Größen enthalten, weglaſſen, und man erhält auf ſolche Weiſe

$$H^2 = 1 - \alpha - \beta - 4\alpha\sin\left(\frac{2\pi c_1}{\omega}\right)^2.$$

Iſt die Dicke des Plättchens ſo beſchaffen, daß man $\frac{2c_1}{\omega} = \frac{2c\cos\rho}{\omega} = \mu$ d. h. $c = \frac{\mu\omega}{2\cos\rho}$ hat, ſo wird $H^2 = 1 - \alpha - \beta$ oder nahe $H^2 = 1$ oder das durchgelaſſene Licht gleicht nahe an Intenſität dem einfallenden. Iſt aber $c = \frac{(2\mu + 1)\omega}{4\cos\rho}$, ſo wird $H^2 = 1 - \alpha - \beta$ oder das durchgelaſſene Licht ſehr geſchwächt oder nahe an Null.

188. Sucht man auf ähnliche Weiſe die Intenſität des Lich-

tes, welche aus der Interferenz des in A reflectirten Antheiles AB und des in A eindringenden, in C reflectirten, in D aber wieder zum Theil das Plättchen verlaſſenden Strahles DB_1 entſteht; ſo findet man den Ausdruck für die Farbe, in welchem das Plättchen im reflectirten Lichte erſcheint. Der Strahl AB hat die Intenſität α, der Strahl DB_1 die Intenſität $(1-\alpha)(1-\beta)\,\alpha$. Die Wege beider Strahlen trennen ſich in A und während AB den Weg $AC = 2c \tang \rho \sin \sigma$ zurückleget mit der Geſchwindigkeit v, legt der andere Strahl den Weg $AC + CD = 2c \sec \rho$ mit der Geſchwindigkeit v_1 zurück. Dieſer Weg auf die Geſchwindigkeit v reducirt, wird $2cn \sec . \rho$. Demnach hat es den Anſchein, als wäre der Schwingungsunterſchied beider Strahlen $2c(n \sec \rho - \tang \rho \sin \sigma) = 2cn \cos \rho = 2nc_1$ und es folgt aus der Interferenz dieſer Strahlen dasſelbe, was aus der Interferenz des durchgelaſſenen Lichtes hervorging. Allein man darf nicht vergeſſen, daß der genannte Schwingungsunterſchied um $\frac{1}{2}\omega$ vermindert werden muß, weil bei der Interferenz zweier reflectirter Strahlen, wovon einer beim Übergange aus einem minder brechenden Mittel in ein ſtärker brechendes, der andere hingegen von einem ſtärker brechenden in ein minder brechendes übergeht, eine halbe Oſcillation verloren geht, und nach dieſer Modification folgt wirklich für das reflectirte Licht immer das Gegentheil von dem, was mit dem durchgelaſſenen vorgeht, wie es die Erfahrung nachweiſet.

189. Man darf hierbei nicht vergeſſen, daß die Betrachtungen für ſchief einfallendes Licht nicht vollkommen ſtreng ſind, weil man ſtatt einer unendlichen Anzahl von Strahlen nur zwei zur Interferenz brachte. Deßungeachtet erklärt es ſich daraus, warum beim ſchiefen Einfallen des weißen Lichtes die Farben nicht ſo getrennt werden, wie beim ſenkrechten Einfallen desſelben; nur für ſehr ſchief einfallendes Licht entſprechen obige Formeln der Erfahrung nicht mehr völlig, woran der Umſtand Schuld ſeyn mag, daß für dieſelben das Geſetz der einfachen Brechung nicht mehr ſo beſchaffen iſt, wie man es gewöhnlich annimmt, wovon in der Folge mehr vorkommen wird.

190. Bisher wurde immer ein gleichförmig dickes Plättchen angenommen. Wächſt die Dicke desſelben, wie in Newton's Farbenglas von Null bis zu einer beſtimmten Größe durch alle Zwiſchenſtufen, ſo werden dadurch zugleich alle Plättchen von der Dicke, wie ſie zur Darſtellung derſelben Farbe im reflectirten und durch-

gelaſſenen Lichte nach (186) nothwendig iſt, vorgeſtellt und darum bilden ſich um den Punct, wo die Dicke $=0$ iſt, concentriſch die farbigen und dunklen Ringe nach dem Geſetze, wie es die vorhergehende Theorie angibt und die Erfahrung beweiſet. Daß bei gleicher Dicke die Farbenringe größer werden, wenn das Licht ſchief einfällt, iſt ebenfalls aus dieſer Theorie klar; denn da kommt ſtatt c die Größe $c = c_1 \cos \rho$ in Rechnung und es iſt ſo, als fiele das Licht ſenkrecht auf ein dünneres Plättchen ein.

191. Aus (S. 340) geht hervor, daß die fortſchreitende Ätherwelle die reſultirende aller jener Elementarwellen iſt, welche aus jedem Puncte derſelben Welle in ihrem nächſt vorhergehenden Zuſtande ausgehen. So lange eine Welle nicht unterbrochen wird, ſondern ſich rings um ihren Mittelpunct gleichförmig ausbreiten kann, wird dieſes Verhalten für uns nicht merklich und es iſt gerade ſo, als erweiterte ſich jeder Punct der Welle nach der Richtung der zu ihm gehörigen Normalen, indem alle Elementarwellen die einhüllende Curve in demſelben Schwingungszuſtande treffen. Anders iſt es, wenn eine Unterbrechung eintritt, welches ſtets der Fall iſt, wenn eine Ätherwelle eine Öffnung trifft, die ſich in einem undurchſichtigen oder auch in einem durchſichtigen Körper befindet, welcher das Licht anders bricht, als das Mittel, welches die Öffnung erfüllt, oder endlich, wenn der Welle ein ſolcher Körper in den Weg geſtellt wird. Um dieſes einzuſehen ſey AB (Fig. 146) ein undurchſichtiger Schirm mit einer Öffnung ab und es komme vom Mittelpuncte C eine Welle. Das Stück ab derſelben geht durch die Öffnung und wird vom übrigen Theil getrennt. Die von ab ausgehenden Elementarwellen bilden den ähnlichen Wellenbogen $a_1 b_1$, welcher daher zwiſchen den Geraden Caa_1 und Cbb_1 liegt und begründen die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes; außer $a_1 b_1$ aber bilden ihre Durchſchnittspuncte keine einhüllende Curve mehr und ein außer $a_1 b_1$ liegender Punct wie e wird wohl von allen Elementarwellen getroffen, die der Bogen ba ausſendet, doch befinden ſich dieſe nicht mehr in demſelben Schwingungszuſtande und heben ſich demnach zum Theile auf. Hat man für die von a nach e kommende Welle $x = h \cos \lambda$, für die vom nächſt folgenden Puncte kommende $x_1 = h_1 \cos (\lambda + c_1)$, ꝛc. ſo daß für die von b ausgehende $x_n = h_n (\lambda + c_n)$ iſt, ſo erhält man für die in e zuſammentreffenden Wellen die Reſultirende von allen Werthen von x, x_1, x_2, … x_n,

Iſt e ſo weit von a und b entfernt, daß man ſeine Entfernung von allen Puncten $a\,b$ als gleich anſehen kann, ſo iſt $h = h_1 = h_2 \ldots\ldots = h_n$ und $X = x + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Sind nun die von a und b ausgehenden Wellen in vollkommener Übereinſtimmung, ſo iſt $c_n = 2\pi$, und daher

$$\cos\lambda + \cos(\lambda + c) \ldots\ldots + \cos(\lambda + 2\pi) = \cos\lambda \text{ und daher}$$
$$X = h\cos\lambda.$$

Sind die Schwingungszuſtände dieſer zwei Wellen einander gerade entgegengeſetzt, ſo wird $c_n = \pi$

$$\cos\lambda + \cos(\lambda + c) + \cos(\lambda + c_2) + \ldots\ldots \cos(\lambda + \pi) = 0$$
$$\text{und daher } X = 0.$$

Demnach ergibt ſich aus dem Zuſammenwirken aller Wellen für beide Fälle dasſelbe, als wenn nur die zwei äußerſten Strahlen mit halber Intenſität vorhanden wären, und man kann die Sache immer ſo behandeln, als wenn dieſe nur allein vorhanden wären.

192. Ein ähnlicher Hergang findet Statt, wenn man eine Lichtwelle durch einen dunklen Schirm unterbricht, an deſſen Seiten ſie vorbeigehen kann. Es ſey $A\,B$ (Fig. 147) ein ſolcher Schirm und C der Mittelpunct der Welle AE. Indem von jedem Puncte dieſer Welle Elementarwellen ausgehen, bilden ſie durch Einhüllung eine Welle, die in der Geraden Cx beginnt; über dieſe Grenze hinaus fallen zwar auch Elementarwellen, doch hüllen ſich dieſe nicht mehr ein, und jeder Punct wie z. B. F wird von Wellen getroffen, die ſich in verſchiedenen Schwingungszuſtänden befinden. Iſt er von AE weit genug entfernt, ſo können alle dieſe Wellen als gleich intenſiv angeſehen werden. Denkt man ſich AE in Stücke Aa, ab, bc ꝛc. getheilt, von deren Enden a, b, c, d Wellen nach F gelangen, deren Schwingungsunterſchied einer halben Oſcillation gleich iſt; ſo werden dieſe Stücke keineswegs gleich groß ſeyn, ſondern deſto kleiner werden, je ſchiefer der Wellenbogen gegen F liegt. Für Theile, die ſchon ſehr ſchief liegen, wird man dieſe Bögen als gleich groß anſehen können und bei einer großen Entfernung des Punctes F von AE wird dieſes ſelbſt mit allen der Fall ſeyn und die von zwei ſolchen zunächſt auf einander folgenden Theilpuncten ausgehenden Strahlen werden ſich daher aufheben, bis auf die des Bogens Aa, welcher ſeine halbe Intenſität beibehält. Iſt der Schirm von der Seite B wieder begrenzt, ſo erfolgt dasſelbe, was in A Statt fand und es wird wieder gerade ſo ſeyn,

als wären A und B die Mittelpuncte neuer Wellen geworden, die ſich interferiren und dadurch die bekannten Interferenzphänomene hervorbringen.

193. Es iſt wohl kaum nöthig zu erinnern, daß das Vorhergehende die Theorie der Beugung des Lichtes enthält. Daß dieſe von der Interferenz des Lichtes abhängt, iſt durch Verſuche erwieſen, die Theorie zeigt aber auch, welche Strahlen zur Interferenz kommen und woher ſie entſtehen. Man ſieht daraus, daß es bei der Beugung nur auf die mathematiſche Begrenzung der Beugungsöffnung oder des beugenden Schirmes ankommt und daß ſie von der Natur des Schirmes, ſeiner Dicke, Oberfläche ꝛc. ganz unabhängig iſt, lauter Dinge, welche die Erfahrung nachweiſet. Man erkennt aus dieſer Theorie die Nothwendigkeit, die Beugungsphänomene in ziemlich großer Entfernung vom beugenden Körper zu beobachten, das gleiche Verhalten eines durchſichtigen und undurchſichtigen Schirmes, einer Öffnung und eines Schirmes ꝛc. ꝛc.

194. Das bisherige über die Beugung bezog ſich nur auf das Qualitative dieſer Modification, man kann aber auch das Quantitative derſelben ausmitteln, ja, da einmal nachgewieſen iſt, es hänge alles von der Interferenz der von den Rändern der Öffnung oder des Schirmes ausgehenden Strahlen ab, ſo fällt die weitere Unterſuchung ganz der Mathematik anheim. Es ſey AB (Fig. 148) eine Öffnung oder ein dunkler Schirm MA, MC, MB ꝛc. eine von einem ſehr weit entfernten, leuchtenden Puncte kommende Welle, SA ein daraus hervorgehender Strahl und $GAL = \sigma$ der Einfallswinkel. Die von A und B kommenden Wellen interferiren ſich, und die Linie, in welcher ſich zwei Welle durch Interferenz addiren, ſey CD. Um für ſie eine Gleichung zu finden, aus der ſich ihre Natur erkennen läßt, nehme man einen Punct D in derſelben an, ziehe DE ſenkrecht auf die durch A und B gehende Gerade, ferner AD und BD, welche die ſich interferirenden Strahlen darſtellen. Zieht man nun DH parallel mit GB, ſo ſtellt DH die Lage der Welle BG hinter der Öffnung vor, und dieſe hat in dem Augenblick, wo G nach A gelangt, in B ſchon einen Weg $= GA$ zurückgelegt, und wenn man die Länge einer Lichtwelle ω nennt, durch μ aber eine ganze poſitive oder negative Zahl vorſtellt; ſo wird man für den Interferenzpunct D haben:

$$BD - (AD + AG) = \mu\omega \text{ oder } BD = AD + AG + \mu\omega.$$

Heißt man nun die Öffnung $AB = \varepsilon$, $AD = r$, ſo iſt

$GA = AB \cos GAB = \varepsilon \sin\sigma$, $BD = r + \varepsilon \sin\sigma + \mu\omega = r + \rho$, wenn man $\varepsilon \sin\sigma + \mu\omega = \rho$ ſetzt. Man hat ferner, wenn man $DE = y$, $FA = \frac{1}{2}\varepsilon$, $FE = x$ nennt, folgende Gleichungen:

$$r^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 = y^2 + x^2 - \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$(r + \rho)^2 = y^2 + (x + \tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 = y^2 + x^2 + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{4}$$

und aus dieſen, wenn man die erſte von der zweiten abzieht, aus dem Unterſchiede r^2 ſucht und dieſen Werth in die erſte ſubſtituirt:

$$\frac{4\varepsilon^2 x^2 - 4\varepsilon\rho^2 x + \rho^4}{4\rho^2} = y^2 + x^2 - \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{4},$$

woraus man dann findet

$$x^2 (4\varepsilon^2 - 4\rho^2) = 4\rho^2 . y^2 + (\varepsilon^2 - \rho^2)\rho^2.$$

Setzt man ſtatt ρ ſeinen Werth $\varepsilon \sin\sigma + \mu\omega$, ſo wird endlich

$$x^2 [4\varepsilon^2 - 4(\varepsilon \sin\sigma + \mu\omega)^2] =$$
$$= 4y^2 (\varepsilon \sin\sigma + \mu\omega)^2 + [\varepsilon^2 - (\varepsilon \sin\sigma + \mu\omega)^2] (\varepsilon \sin\sigma + \mu\omega)^2.$$

Dieſe Gleichung lehrt, daß die durch Interferenz hervorgehende Curve eine Hyperbel ſey. Solcher Interferenzcurven entſtehen ſo viele, als μ poſitive und negative Werthe annehmen kann, ohne die Intenſität der ſich interferirenden Wellen gar zu ungleich zu machen.

195. Der Winkel HDE, den die Welle HD mit dem Lothe DE macht, iſt offenbar der Winkel, welchen der gebeugte Strahl mit der Ebene des Schirmes einſchließt. Man nenne ihn τ und man hat

$$\tan \tau = \frac{HE}{DE}.$$

Aber $HE = y \frac{dy}{dx}$ als Subnormale, $DE = y$, mithin

$$\tan \tau = \frac{dy}{dx}.$$

Sucht man aus der vorhergehenden Gleichung $\frac{dy}{dx}$, ſo findet man

$$\tan \tau = \frac{dy}{dx} = \frac{(\varepsilon^2 - \rho^2)x}{\rho^2 y} = \pm \frac{\sqrt{(\varepsilon^2 - \rho^2)(4y^2 + \varepsilon^2 - \rho^2)}}{2\rho y}$$

oder wenn man $\varepsilon^2 - \rho^2$ gegen $4y^2$ vernachläſſiget, welches bei Verſuchen ſtets ohne Fehler geſchehen kann, weil ſowohl ε als ρ gegen y und daher noch mehr $\varepsilon^2 - \rho^2$ gegen $4y^2$ ſehr klein ſind, ſo wird

$$\tan\tau = \pm \frac{\sqrt{(\varepsilon^2 - \rho^2)}}{\rho} = \pm \frac{\sqrt{[\varepsilon^2 - (\varepsilon \sin\sigma + \mu\omega)^2]}}{\varepsilon\sin\sigma + \mu\omega}.$$

Mit dieſer Gleichung fand Fraunhofer, der ſie auch zuerſt angab, die durch Meſſung gefundenen Werthe bei Beugungserſcheinungen vollkommen übereinſtimmend. Der doppelte Werth dieſer Tangente bezeichnet das Daſeyn der Beugungsphänomene zu beiden Seiten der Axe, und die Ungleichheit derſelben beweiſet, daß dieſelben nicht ſymmetriſch ſeyen. Zieht man es vor, ſtatt der Tangente, den Coſinus des Winkels τ in Rechnung zu bringen, ſo hat man:

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tan\tau^2)}} = \frac{\varepsilon\sin\sigma + \mu\omega}{\varepsilon}.$$

Sobald $\varepsilon < \varepsilon\sin\sigma' + \mu\omega$ iſt $\cos\tau$ unmöglich, d. h. es kann in dieſem Falle keine Beugung vor ſich gehen. Bei vertical auffallendem Lichte iſt $\sigma = 0$, und daher

$$\cos\tau = \frac{\mu\omega}{\varepsilon}$$

und die Beugung kann nicht mehr Statt finden, ſobald $\varepsilon < \mu\omega$. Nennt man den Winkel, welchen der gebeugte Strahl mit dem Einfallslothe macht δ, ſo wird $\sin\delta = \cos\tau$, und man hat daher

$$\sin\delta = \frac{\varepsilon\sin\sigma + \mu\omega}{\varepsilon}$$

und für ſenkrecht einfallendes Licht $\sin\delta = \frac{\mu\omega}{\varepsilon}$ oder wenn δ nur klein iſt, $\delta = \frac{\mu\omega}{\varepsilon}$ gerade ſo, wie es die Erfahrung lehrt.

Geht die Beugung in einem Mittel vor ſich, welches für daſſelbe Licht, auf das ſich ω bezieht, die Wellenlänge $n\omega$ gibt, ſo wird

$$\sin\delta = \frac{\mu n\omega}{\varepsilon}$$

und daher die Ablenkung nahe in demſelben Verhältniſſe größer oder kleiner, in welchem das neue Mittel das Licht weniger oder mehr bricht.

196. Für den Fall, wo keine Beugung möglich iſt, bleibt nur das Licht übrig, welchem $\mu = 0$ entſpricht. Für dieſes hat man aber

$$\sin\delta = \sin\sigma,$$

mithin das Geſetz der Reflexion des Lichtes. Entſpricht dem Mittel

hinter dem Schirm die Wellenlänge $n\omega$, ſo iſt für denſelben Fall $\sin\delta = \frac{n(\varepsilon\sin\sigma + \mu\omega)}{\varepsilon}$ und für $\mu = 0$, $\sin\delta = n\sin\sigma$, d. h.

$$\sin\delta : \sin\sigma = n : 1$$

das bekannte Brechungsgeſetz. Man ſieht demnach, daß die Theorie der Reflexion und Brechung ein ſpecieller Fall der Beugungstheorie iſt; auch iſt klar, daß dieſe Geſetze nur dann der Natur gemäß befunden werden können, wenn der reflectirte oder gebrochene Strahl in einiger Entfernung von der reflectirenden oder brechenden Fläche unterſucht wird, für geringe Entfernungen hängt tang τ und daher auch $\sin\delta$ von y und x ab, woraus hervorgeht, daß die Geſetze der Reflexion und Brechung in dieſem Falle für große Einfallswinkel von den gewöhnlich angenommenen etwas abweichen.

197. Wenn ein Gitter mehrere Öffnungen hat, ſo werden die durch dieſelben gehenden Wellen mehrfach auf einander einwirken. In der Mitte des Geſichtsfeldes treffen lauter Wellen zuſammen, die ſich in einerlei Schwingungszuſtand befinden und daher ſich durch Interferenz gegenſeitig verſtärken; über die Mitte des Geſichtsfeldes hinaus wird zu beiden Seiten desſelben, dieſe Übereinſtimmung der Schwingungen nicht mehr Statt finden und es werden ſchon einige Wellen anderen entgegenwirken und ſie aufheben. Bei ſehr vielen Öffnungen werden an eine ſolche Stelle Wellen von allen möglichen Schwingungszuſtänden zuſammentreffen und ſich daher deſto vollſtändiger aufheben, je größer ihre Anzahl iſt und erſt in einiger Entfernung von der Mitte des Geſichtsfeldes werden ſie wieder in einerlei Schwingungszuſtand ſich ſchneiden und daher ein Spectrum erzeugen, ja ſogar an einigen Stellen der Spectra werden ſich die ſich treffenden Wellen aufheben und die dunklen Linien erzeugen, welche als Zeichen der Homogeneität des Lichtes angeſehen werden. Hieraus wird es klar, warum man bei einem Gitter mit ſehr vielen, vollkommen gleichen Öffnungen den Raum außer der Mitte des Geſichtsfeldes völlig dunkel ſieht, und erſt in einiger Entfernung von derſelben die Spectra beginnen, warum dieſe vollkommen von einander getrennt erſcheinen ꝛc. Die Erfahrung hat gelehrt, daß aber auch dieſe Spectra unter der Herrſchaft der vorhin deducirten Gleichungen ſtehen, und daß man nur ſtatt ε, welche Größe bisher die Weite einer Öffnung bedeutete, die Summe aus einer Öffnung und dem Gitterfaden oder was dasſelbe iſt, den Abſtand der Mitte zweier Öffnungen zu ſetzen habe.

198. In den bisherigen Unterſuchungen wurde die Richtung, nach welcher ſich die ſchwingende Bewegung fortpflanzt, mit der Richtung, in welcher ſich die ſchwingenden Theile bewegen, nicht verglichen. Es darf aber auch dieſe Rückſicht nicht unterbleiben, wenn wir uns eine vollſtändige Kenntniß des inneren Verlaufes der von ſolchen Schwingungen abhängigen Phänomene erwerben wollen. Doch können wir hierüber aus der bloßen Natur der ſchwingenden Bewegung nichts entſcheiden und müſſen uns daher ganz nach der Analogie mit den Schallwellen und nach den Erforderniſſen der optiſchen Phänomene richten. Bei der Schallfortpflanzung ſchwingen meiſtens die Theile in der Richtung, in welcher ſich der Schall fortpflanzt; doch gibt es auch Fälle, wo ein anderes Verhältniß Statt findet. Bringt man z. B. an einer geſpannten Saite eine kleine, auf ihre Länge ſenkrechte Ausbeugung an, ſo ſchreitet dieſe nach der Länge der Saite fort; an einem geſpannten Stricke kann man dieſes Fortſchreiten ſogar ſehen. Hier iſt alſo ein Fall, wo die Theile nach einer Richtung ſchwingen, die auf der Richtung der Fortpflanzung der Bewegung ſenkrecht ſteht. Auf ein ſolches Verhältniß deuten auch viele optiſche Phänomene hin ſo, daß Fresnel dadurch vermocht wurde, allgemein anzunehmen, die Lichtſchwingungen erfolgen nach der Richtung der Tangente der Lichtwellen. Denkt man ſich an einem leuchtenden Körper Äthertheile, wie die, welche in Fig. 149 durch Puncte vorgeſtellt ſind, und welche, wie jedes ausdehnſame Fluidum, durch beſondere Kräfte auf einander wirken. Die in 1 befindlichen Theile *a*, *b*, *c*, *d* werden durch die von *a* nach *d* gerichtete Bewegung der ſchwingenden Theile des leuchtenden Körpers in Bewegung geſetzt und in der Richtung *a d* verſchoben. Da nun dieſe Theile mit den in der Reihe 2 befindlichen im Gleichgewichte ſtanden, ſo wird die Verſchiebung der erſteren eine ähnliche in der Reihe 2 hervorbringen, durch dieſe eine in der Reihe 3, und ſo wird ſich die Bewegung fortpflanzen. Es iſt klar, daß durch dieſe Annahme in den früheren Deductionen nichts geändert wird, weil dieſe ohne Beziehung auf das Verhältniß der Fortpflanzungsrichtung zur Schwingungsrichtung angeſtellt wurden.

An einem gewöhnlichen Strahl iſt, nach Fresnel, die Ebene der Schwingung veränderlich, in einem polariſirten hingegen ſchwingen alle Theile ſtets in derſelben Ebene und eine auf dieſer ſenkrechte Ebene iſt die Polariſationsebene. Demnach ſind Strahlen, welche

nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirt ſind, jene, deren Schwingungen in auf einander ſenkrechten Richtungen vor ſich gehen. Nach dieſer Vorausſetzung kann man in der That alle Eigenſchaften des polariſirten Lichtes erklären, und es bleibt nur übrig nachzuweiſen, wie die ſchwingenden Theile durch die gewöhnlichen Polariſationsmittel auf eine unveränderliche Schwingungsrichtung gebracht werden. Ein unpolariſirter Strahl erſcheint als ein Aggregat von Strahlen, die nach allen möglichen Richtungen polariſirt ſind. Denkt man ſich die Bewegung jedes einzelnen in zwei andere zerlegt, die in zwei auf einander ſenkrechten Richtungen liegen, ſo findet man, daß man jeden unpolariſirten Strahl als Aggregat zweier nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirten betrachten kann.

199. Man denke ſich einen polariſirten Strahl, der auf einen Körper unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation fällt ſo, daß die Einfallsebene mit der Polariſationsebene einen Winkel α einſchließt. Iſt h die größte Schwingungsweite dieſes Strahles, ſo wird dieſe in $h \sin \alpha$ und $h \cos \alpha$ zerlegt, wovon eine in der Einfallsebene liegt, die andere in einer darauf ſenkrechten Ebene, und die Intenſitäten der Strahlen werden $h^2 \sin^2 \alpha$ und $h^2 \cos^2 \alpha$ ſeyn, die vereint h^2, d. h. die Intenſität des ganzen Strahles geben. Nur die auf der Einfallsebene ſenkrechten Schwingungen können ſich als tangentielle durch den neuen Körper fortpflanzen, wenn er dazu überhaupt geeignet iſt. Vergleiche hiemit (130).

200. Daß zwei entgegengeſetzt polariſirte Strahlen ſich nicht interferiren können, iſt klar, indem zwei gegen einander ſenkrechte Bewegungen auf einander nicht einwirken; eben ſo iſt es klar, daß ſich zwei gleich polariſirte Strahlen wie unpolariſirte interferiren können. Eben ſo laſſen ſich aus Fresnels Hypotheſe auch die übrigen Interferenzgeſetze polariſirter Strahlen ableiten. Sind zwei Strahlen nach verſchiedenen, wenn auch nicht entgegengeſetzten Richtungen polariſirt, und ihre Schwingungen geradlinig, ſo ſchwingen ihre Theile in verſchiedenen Ebenen, und aus ihrer Interferenz geht eine elliptiſche Schwingung (184) aber kein Aufheben der Schwingungen hervor.

201. Es bewege ſich ein polariſirter Strahl ſenkrecht gegen die Ebene des Papiers und treffe den Punct M (Fig. 150) desſelben, AB ſey die Projection der Ebene, in welcher die Schwingungen erfolgen und ſtelle zugleich die Größe der Schwingungsbahn vor, und daher eine darauf ſenkrechte die der Polariſationsebene. Denkt man ſich

dieſen Strahl in zwei andere, nach entgegengeſetzten Richtungen polariſirte zerlegt, deren Schwingungen daher in Ebenen vor ſich gehen, deren Projectionen auf die Ebene des Papiers die auf einander ſenkrechten *CD* und *EF* ſind, und ſtellt ſich vor, das ſchwingende Ätherthei lchen bewege ſich in dem Augenblick, wo es *M* trifft, von *M* nach *B*; ſo zerfällt *MB* in *MD* und *MF*. Wird nun jede Bewegung wieder in zwei andere auf einander ſenkrechte zerlegt, welche in Ebenen liegen, deren Projectionen *GH* und *IK* ſind, ſo zerfällt *MD* in *MH* und *MI*; *MF* in *MH* und *MK*. Die Bewegungen nach *MH* erfolgen nach derſelben Richtung und unterſtützen ſich daher, die nach *MI* und *MK* hingegen erfolgen nach entgegengeſetzten Richtungen und heben ſich demnach auf. Es iſt klar, daß dasſelbe erfolgen muß, wenn der einfallende Strahl auch nicht, wie hier angenommen wurde, ſo zu ſagen auf einmal nach den genannten Richtungen polariſirt wird, ſondern wenn eine Polariſirung nach einiger Zeit auf die andere folgt und man ſieht daraus ein, daß durch ein ſolches Verfahren eine halbe Schwingung verloren geht, wie es die Erfahrung lehrt (139).

202. Aus den nun theoretiſch abgeleiteten Eigenſchaften des polariſirten Lichtes laſſen ſich auch die Farbenerſcheinungen im polariſirten Lichte erklären. Iſt ein Lichtſtrahl in der Ebene polariſirt, wovon *AA* (Fig. 136) einen in der Ebene des Papiers liegenden Durchſchnitt bezeichnet, ſo theilt er ſich beim Durchgang durch ein das Licht doppelt brechendes Plättchen, deſſen Hauptſchnitt *CC* mit *AA* den Winkel $ADC = a$ macht, in zwei Theile, wovon der gewöhnlich gebrochene in der Ebene des Hauptſchnittes, der andere in einer darauf ſenkrechten Richtung polariſirt iſt. Jeder dieſer Theile wird beim Durchgange durch einen Doppelſpath, deſſen Hauptſchnitt mit *AA* den Winkel $ADB = b$ macht, wieder in zwei Theile getheilt, deren einer in der Ebene der *BB*, der andere in einer darauf ſenkrechten Ebene polariſirt erſcheint. Iſt nun k die Geſchwindigkeit des ſchwingenden Theilchens und bezieht ſich k_o auf den gewöhnlichen, k_e auf den ungewöhnlichen Strahl, und daher k^2 die Intenſität des Strahles; ſo hat man für die Intenſität der zwei Strahlen, nach der erſten Zerlegung $k_o^2 \cos^2 a$ und $k_e^2 \sin^2 a$ und für ihre Geſchwindigkeit $k_e \sin a$ und $k_o \cos a$. Durch die zweite Zerlegung jedes Strahles im Doppelſpathe, erhält man 4 Theile und zwar wird die Geſchwindigkeit derjenigen, in welche der gewöhnlich gebrochene zerlegt wird, ſeyn:

$$k_{oo} \cos a \cos (a-b) \text{ und } k_{oe} \cos a \sin (a-b)$$

die Geſchwindigkeit jener hingegen, in welche der ungewöhnliche zerlegt wird:

$$k_{eo} \sin a \sin (a-b) \text{ und } k_{ee} \sin a \cos (a-b).$$

Durch Interferenz des erſten mit dem dritten entſteht das gewöhnliche, durch Interferenz des zweiten mit dem vierten das ungewöhnliche Bild. Das Reſultat der letzteren Interferenz muß dem der erſteren entgegengeſetzt ſeyn, weil Strahlen, welche jener Interferenz unterliegen, eine halbe Schwingung verloren haben. Um nun die Intenſität des Lichtes, welches aus der Interferenz der erſteren Strahlen hervorgeht, zu finden, hat man

$$k^2 \cos a^2 \sin (a-b)^2 + k^2 \sin a^2 \cos (a-b)^2$$

$$-2 k^2 \sin a \cos a \sin (a-b) \cos (a-b) \cos \frac{2\pi\gamma}{\omega}$$

$$= k^2 [\sin a \cos (a-b) - \cos a \sin (a-b)]^2$$

$$+ 2 k^2 \sin a \cos a \sin (a-b) \cos (a-b) \left(1 - \cos \frac{2\pi\gamma}{\omega}\right)$$

$$= k^2 (\sin b^2 + \sin 2a \sin 2 (a-b) \sin^2 \frac{\pi\gamma}{\omega}.$$

Eben ſo findet man für die Intenſität des aus der Interferenz der übrigen Strahlen hervorgehenden Bildes:

$$k^2 \left(\sin b^2 - \sin 2a \sin 2 (a-b) \sin^2 \frac{\pi\gamma}{\omega}\right).$$

Wird nun ein Plättchen von homogenem Lichte beleuchtet und iſt ſowohl die Dicke des Plättchens als die Ablenkung des Lichtes in demſelben bekannt, ſo kann man $\frac{\pi\gamma}{\omega}$ berechnen und leicht für jeden Werth von a und b die Intenſität des Lichtes numeriſch beſtimmen. Hat man einmal die Intenſität der beiden Bilder im homogenen Lichte, ſo iſt es ein leichtes, auf die Beſchaffenheit und Intenſität der Farbe der Bilder im weißen Lichte zu ſchließen. Dabei kommt einem der Umſtand wohl zu Statten, daß in den meiſten dünnen Plättchen, wie z. B. im Glimmer, Gips ꝛc. die doppelte Brechung ſo ſchwach iſt, daß γ für alle Strahlen einerlei Werth erhalten kann. Daß die beiden Bilder complementäre Farben haben müſſen, iſt für ſich klar; man kann aber auch leicht finden, daß ein Plättchen unter gewiſſen Umſtänden farblos erſcheinen müſſe. Die zwei vorhergehenden Ausdrücke unterſcheiden ſich nur durch das zweite

Glied. Iſt dieſes $=0$, ſo müſſen die Bilder weiß erſcheinen. Man hat daher für dieſen Fall

$$\sin 2a \sin 2(a-b) = 0.$$

Dieſes findet Statt für

$$a=0^\circ,\quad a=90^\circ,\quad a=180^\circ,\quad a=360^\circ$$
$$b=a,\quad b=90^\circ-a,\quad b=180^\circ-a,\quad b=360^\circ-a.$$

Die Farben der zwei Bilder erſcheinen am intenſivſten, wenn der veränderliche Theil obiger Gleichungen ſeinen größten Werth hat. Für dieſen Fall hat man:

im gewöhnlichen Bilde $1-\sin^2\frac{\pi\gamma}{\omega}=\cos^2\frac{\pi\gamma}{\omega}$

im ungewöhnlichen Bilde $\sin^2\frac{\pi\gamma}{\omega}$.

Dieſes findet Statt, wenn $b=0$ und $a=45^\circ$ iſt.

203. Wenn ein polariſirter Lichtſtrahl in einem Körper in zwei Theile getheilt wird, die einerlei Richtung haben und ein ungerades Vielfaches einer Viertelſchwingung von einander abſtehen, ſo geht aus ihrer Interferenz eine circulare Schwingung hervor (184). Demnach braucht man auch nur eine ſolche doppelte Brechung längs der Axe der circular polariſirenden Körper, z. B. des Bergkryſtalls anzunehmen, um die Phänomene der circulären Polariſation erklären zu können. Allein auch wie eine Spaltung eines Strahles in zwei Theile vor ſich geht, ſoll aus der Natur der vibrirenden Bewegung erklärt werden, um ſowohl über das Phänomen der circulären Polariſation, als über das der doppelten Brechung überhaupt völlig ins Klare zu kommen.

204. Bis jetzt wurde immer vorausgeſetzt, daß die Theile einer ſchwingenden Ätherſchichte nach allen Richtungen mit gleicher Leichtigkeit eine Verſchiebung erleiden und dieſe der nächſten Schichte mittheilen oder mit anderen Worten, daß der Äther nach allen Richtungen gleich elaſtiſch ſey. Es iſt aber leicht denkbar, daß in kryſtalliſirten Mitteln dieſe Gleichheit der Elaſticität des Äthers aufgehoben ſeyn kann, indem ſelbſt die Theile einiger ſolcher Körper, der Erfahrung gemäß, nach verſchiedenen Richtungen eine verſchiedene Elaſticität beſitzen und es wohl möglich, ja ſogar ſehr wahrſcheinlich iſt, daß ſie auch den in ihren Zwiſchenräumen befindlichen Äther nach dieſen Richtungen in ſeiner Expanſivkraft verſchieden beſchränken. Wird nun ein Äthertheilchen aus der Lage des

Gleichgewichtes gebracht, ſo wird dadurch die Elaſticität des Äthers thätig gemacht, aber die Reſultirende aller aus derſelben hervorgehenden Kräfte iſt nur dann mit der Richtung der Verrückung dieſes Theilchens parallel, wenn dieſe Kräfte gegen jene Richtung ſymmetriſch angeordnet ſind. Die Richtung, in welcher dieſe Symmetrie Statt findet und wo daher das verrückte Theilchen in der Richtung ſeiner Verrückung wieder in die urſprüngliche Lage zurückkehrt, nennt Fresnel, dem wir die folgende Theorie verdanken, eine Elaſticitätsaxe des Mittels.

205. Man kann für die Kraft, welche durch Verrückung eines Theilchens rege gemacht worden iſt und auf dasſelbe wirkt, einen mathematiſchen Ausdruck finden. Es ſey M ein ſolches Theilchen, das um die Größe ρ aus der Lage des Gleichgewichtes gebracht worden iſt. Denkt man ſich dieſe Verrückung nach drei auf einander ſenkrechten Coordinatenaxen x, y, z zerlegt, welche mit ρ nach der Ordnung die Winkel α, β, γ einſchließen, ſo hat man:

$$x = \rho \cos\alpha, \quad y = \rho \cos\beta, \quad z = \rho \cos\gamma, \quad \rho = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Iſt jene Verrückung gegen den Abſtand je zweier Äthertheile von einander ſehr klein, ſo kann man annehmen, daß durch dieſelbe das Geſetz der Kraft, womit der Reſt der Maſſe auf M wirkt, nicht verändert worden und daß überhaupt die Größe der Verſchiebung ρ proportionirt ſey. Man kann demnach dieſe Kraft durch ρF ausdrücken, wo F eine unbekannte Function von α, β, γ iſt, und daraus jene, welche der Verrückung nach der Axe x entſpricht, dadurch finden, daß man ſucht, was aus F wird, wenn $y = 0$ und $z = 0$ iſt. Es ſey für dieſen Fall $F = a$ und a daher eine conſtante, blos von der Lage der x gegen die Theile des Kryſtalls abhängige Größe. Man hat daher als Ausdruck der Kraft, welche auf das nach x verſchobene Äthertheilchen wirkt, ax. Da dieſe nicht nothwendig nach x wirkt, ſo kann man ſie nach den Axen x, y, z auflöſen und ſo die Partialkräfte Ax, Bx, Cx erhalten, für welche offenbar $(A^2 + B^2 + C^2)x^2 = a^2 x^2$, mithin $A^2 + B^2 + C^2 = a^2$ iſt. Auf ähnliche Weiſe kann man die Verſchiebung des Theilchens M nach y und z betrachten. Findet man erſtere gleich by, letztere gleich cz, ſo laſſen ſich für jene die Kräfte $A_1 y$, $B_1 y$, $C_1 y$, für dieſe die Kräfte $A_2 z$, $B_2 z$, $C_2 z$ ſetzen, und man hat wieder $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = b^2$; $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 = c^2$. Es wird daher die Reſultirende der mit x, y, z parallelen Kräfte

$$Ax + A_1 y + A_2 z = p, \quad Bx + B_1 y + B_2 z = p_1;$$
$$Cx + C_1 y + C_2 z = p_2.$$

Setzt man für x, y, z obige Werthe, ſo wird

$$p = \rho\,(A\cos\alpha + A_1\cos\beta + A_2\cos\gamma)$$
$$p_1 = \rho\,(B\cos\alpha + B_1\cos\beta + B_2\cos\gamma)$$
$$p_2 = \rho\,(C\cos\alpha + C_1\cos\beta + C_2\cos\gamma).$$

Dieſe Kräfte drücken die Größe der Elaſticität nach den Richtungen x, y, z aus. Die Kraft, welche das verſchobene Theilchen M genau in ſeine urſprüngliche Lage zurückzuführen ſucht, iſt jener Theil von p, p_1, p_2, welcher in die Richtung der Verſchiebung ρ fällt, mithin von p der Theil $p\cos\alpha$, von p_1 der Theil $p_1\cos\beta$, von p_2 der Theil $p_2\cos\lambda$, alſo die geſammte Kraft E

$$E = p\cos\alpha + p_1\cos\beta + p_2\cos\gamma.$$

206. Über die Größen A, B, C ꝛc. läßt ſich etwas näheres beſtimmen. Zu dieſem Behufe ſey M (Fig. 151) das Äthertheilchen, auf welches die umliegenden Theilchen, wie z. B. m wirken und dasſelbe in dieſer Lage im Gleichgewichte erhalten. Es erleide nun M eine Verrückung MM_1, nach der Axe der x, die aber ſo klein iſt, daß man ſie gegen die Entfernung M von m als unendlich klein anſehen kann. In dieſer Lage iſt das Gleichgewicht geſtört und die Kräfte, welche dasſelbe herzuſtellen ſuchen, ſind der Größe der Verrückung proportionirt. Zerlegt man MM_1, in eine auf Mm ſenkrechte M_1N und in eine mit Mm parallele MN und nennt die aus der Verrückung MM_1 hervorgehende Kraft ax, wo a eine conſtante Größe bezeichnet, ſo iſt die der Verrückung MN entſprechende Kraft $ax\cos\alpha$, und die mit x, y, z parallelen, daraus hervorgehenden Partialkräfte ſind $ax\cos^2\alpha$, $ax\cos\alpha\cos\beta$, $ax\cos\alpha\cos\gamma$. Die M_1N entſprechende Kraft iſt $bx\sin\alpha$, wo b wieder eine Conſtante bezeichnet und die daraus hervorgehenden nach x, y, z zerlegten Partialkräfte ſind $-bx\sin^2\alpha$, $bx\cos\alpha\cos\beta$, $bx\cos\alpha\cos\gamma$. Demnach hat man für die durch Verſchiebung des Theilchens M geweckten Kräfte:

mit x parallel : $x\,(a\cos^2\alpha - b\sin^2\alpha)$
„ y „ : $x\,(a+b)\cos\alpha\cos\beta$
„ z „ : $x\,(a+b)\cos\alpha\cos\gamma$.

Nimmt man auf ähnliche Weiſe eine Verrückung nach y an, ſo findet man die durch dieſelbe geweckten Kräfte:

parallel mit y : $y\,(a\cos^2\beta - b\sin^2\beta)$
„ „ x : $y\,(a+b)\cos\alpha\cos\beta$
„ „ z : $y\,(a+b)\cos\beta\cos\gamma$

und aus einer Verrückung nach z

parallel mit z : $z\,(a\cos^2\gamma - b\sin^2\gamma)$
„ „ x : $z\,(a+b)\cos\alpha\cos\gamma$
„ „ y : $z\,(a+b)\cos\beta\cos\gamma$.

Man hat daher aus allen dieſen die Reſultirenden:

nach x : $(a\cos^2\alpha - b\sin^2\alpha)\,x + (a+b)\cos\alpha\cos\beta\,.\,y + (a+b)\cos\alpha\cos\gamma\,.\,z$
„ y : $(a+b)\cos\alpha\cos\beta\,.\,x + (a\cos^2\beta - b\sin^2\beta)\,y + (a+b)\cos\beta\cos\gamma\,.\,z$
„ z : $(a+b)\cos\alpha\cos\gamma\,.\,x + (a+b)\cos\beta\cos\gamma\,.\,y + (a\cos^2\gamma - b\sin^2\gamma)\,z$.

Dieſe Ausdrücke mit den in (205) erwähnten verglichen, geben:

$$A_1 = B;\quad A_2 = C;\quad B_2 = C_1$$

und deßhalb

$$p = \rho\,(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)$$
$$p_1 = \rho\,(B\cos\alpha + B_1\cos\beta + C_1\cos\gamma)$$
$$p_2 = \rho\,(C\cos\alpha + C_1\cos\beta + C_2\cos\gamma).$$

207. Es iſt klar, daß die Reſultirende P der Kräfte p, p_1, p_2 mit der Richtung ρ zuſammenfällt, wenn ſie mit x, y, z die Winkel α, β, γ einſchließt. In dieſem Falle liegt ρ in einer Elaſticitätsaxe und es iſt,

$$p : p_1 : p_2 = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

und

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta};\quad \frac{p}{p_2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma};\quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

welche drei Gleichungen ſich mittelſt der allgemein bekannten Relation $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ auf zwei zurückführen laſſen. Setzt man für p, p_1, p_2 die vorhin gefundenen Werthe, ſo wird

$$(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\beta = (B\cos\alpha + B_1\cos\beta + C_1\cos\gamma)\cos\alpha$$
$$(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\gamma = (C\cos\alpha + C_1\cos\beta + C_2\cos\gamma)\cos\alpha$$
$$(B\cos\alpha + B_1\cos\beta + C_1\cos\gamma)\cos\gamma = (C\cos\alpha + C_1\cos\beta + C_2\cos\gamma)\cos\beta.$$

Dieſen Gleichungen muß die Linie entſprechen, welche als Elaſticitätsaxe gelten ſoll.

208. Hat man mittelſt dieſer Gleichungen eine Elaſticitätsaxe beſtimmt, ſo nehme man die Coordinatenaxe ſo, daß jene mit der Axe der x zuſammenfällt. Dann hat man $B = 0$, $C = 0$ und aus den letzteren Gleichungen wird:

$$A \cos\alpha \cos\beta = (B_1 \cos\beta + C_1 \cos\gamma) \cos\alpha$$
$$A \cos\alpha \cos\gamma = (C_1 \cos\beta + C_2 \cos\gamma) \cos\alpha$$
$$(B_1 \cos\beta + C_1 \cos\gamma) \cos\gamma = (C_1 \cos\beta + C_2 \cos\gamma) \cos\beta.$$

Setzt man $\cos\alpha = 0$, d. h. $\alpha = 90°$, ſo iſt den zwei erſten Gleichungen Genüge geleiſtet; man hat demnach nur mehr der dritten und der Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ zu entſprechen. Aus dieſen wird aber für $\cos\alpha = 0$

$$\cos\gamma = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{(4g^2+1)}}\right)\right]};$$
$$\cos\beta = -\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{(4g^2+1)}}\right)\right]}$$

wobei g für $\frac{B_2}{B_1 - C_2}$ geſchrieben iſt. Weil aber g^2 nothwendig eine poſitive Größe iſt, ſo muß auch $4g^2 + 1$ eine ſolche ſeyn, und $\frac{1}{\sqrt{(4g^2+1)}}$ iſt eine reelle Größe, die kleiner als 1 iſt, woraus dann folgt, daß $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ reelle Werthe haben, die auch kleiner ſind als 1. Demnach ſtehen dieſe zwei Axen auf der x ſenkrecht und ſind ſelbſt auf einander ſenkrecht. Daher gibt es für jeden Punct der betrachteten Maſſe **drei auf einander ſenkrechte Elaſticitätsaxen**. Denkt man ſich die Coordinatenaxen in dieſe Axen verſetzt, ſo iſt

$A = a$, $B = C = 0$; $A_1 = b$, $B_1 = C_1 = 0$; $A_2 = c$, $B_2 = C_2 = 0$

und daher

$p = ax = a\rho\cos\alpha$, $p_1 = by = b\rho\cos\beta$, $p_2 = cz = c\rho\cos\gamma$.

woraus dann wird

$$E = \rho\,(a\cos^2\alpha + b\cos^2\beta + c\cos^2\gamma) \;\ldots\ldots\; (a).$$

209. Es ſeyen a^2, b^2, c^2 die Elaſticitäten, welche durch eine mit x, y, z parallele Verrückung eines Äthertheilchens hervorgerufen werden und man ſuche die Elaſticität, welche durch eine Verrückung erregt wird, welche mit jenen Axen die Winkel X, Y, Z einſchließt. Man hat als Reſultirende der aus der Verrückung $= 1$ nach x, y, z hervorgehenden Kräfte

$$P = \sqrt{(a^4\cos^2 X + b^4\cos^2 Y + c^4\cos^2 Z)}$$

und die Coſinuſſe der Winkel, welche dieſe Kraft mit x, y, z macht, ſind nach der Ordnung

$$\frac{a^2\cos X}{P},\quad \frac{b^2\cos Y}{P},\quad \frac{c^2\cos Z}{P}.$$

Von dieſer Kraft ſucht nur jener Theil das Theilchen in ſeine urſprüngliche Lage zurückzuführen, welcher mit der Verrückung parallel wirkt, nämlich

$$a^2 \cos^2 X + b^2 \cos^2 Y + c^2 \cos^2 Z.$$

Nennt man dieſe Kraft v^2, ſo hat man

$$v^2 = a^2 \cos^2 X + b^2 \cos^2 Y + c^2 \cos^2 Z \; \ldots\ldots \; (b)$$

und v iſt der Geſchwindigkeit proportionirt, mit welcher ſich die Bewegung fortpflanzt. Denkt man ſich von einem Puncte aus Linien gezogen, welche den Werthen von v nach den Richtungen dieſer Linien proportionirt ſind, ſo liegen ihre Endpuncte in einer krummen Fläche, welche Fresnel die Elaſticitätsfläche heißt. Ihre Gleichung iſt die vorhergehende, ſtatt der man aber auch, wenn man für v den Werth $x^2 + y^2 + z^2$ und für $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ die entſprechenden Werthe x, y, z ſetzt, erhält:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 \; \ldots\ldots \; (c).$$

Die Elaſticitätsfläche ſtellt das Geſetz der Elaſticität in dem betreffenden Körper dar.

210. Man denke ſich durch die Elaſticitätsfläche einen Schnitt geführt, der durch ihren Mittelpunct geht, und nenne

$$x = My + Nz \; \ldots\ldots\ldots \; (d)$$

die Gleichung der Ebene dieſes Schnittes. Geht dieſe Ebene zugleich durch den Radius Vector v, welcher mit den Elaſticitätsaxen die Winkel X, Y, Z macht, ſo hat man auch

$$\cos X = M \cos Y + N \cos Z \; \ldots\ldots\ldots \; (e).$$

Um die Axen dieſes Schnittes, d. h. die Lage des kleinſten und größten Durchmeſſers in dieſem Schnitte zu finden, hat man das Differenzial der Gleichung der Elaſticitätsfläche $= 0$ zu ſetzen. Man erhält:

$$a^2 \cos X \sin X + b^2 \cos Y \sin Y . \frac{dY}{dX} + c^2 \cos Z \sin Z . \frac{dZ}{dX} = 0 \; (f)$$

und durch Differenziiren der Gleichung (e) und die Gleichung $\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1$.

$$\sin X = M \sin Y . \frac{dY}{dX} + N \sin Z . \frac{dZ}{dX}$$

$$0 = \cos X \sin X \, dX + \cos Y \sin Y \, dY + \cos Z \sin Z \, dZ$$

mithin

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\sin X\,(N\cos X + \cos Z)}{\sin Y\,(M\cos Z - N\cos Y)},$$

$$\frac{dZ}{dX} = -\frac{\sin X\,(M\cos X + \cos Y)}{\sin Z\,(M\cos Z - N\cos Y)}.$$

Dieſe Werthe in (f) geſetzt, geben für die Gleichung; durch welche die Lage der Axen des Schnittes beſtimmt wird:

$$\left.\begin{array}{r} M(a^2-c^2)\cos X\cos Z - N(a^2-b^2)\cos X\cos Y \\ +(b^2-c^2)\cos Y\cos Z \end{array}\right\} = 0 \,..\, (L).$$

211. Der Schnitt, von dem nun die Rede war, iſt auf derjenigen Ebene ſenkrecht, welche durch den Radius Vector und die Richtung der Elaſticität geht, die durch Schwingungen nach dem Radius Vector erregt wird. Denn iſt $x = M_1 y + N_1 z$ die Ebene, welche die zuletzt genannte Lage hat, ſo ſind für ſie die Coſinuſſe der Winkel, welche die Kraft mit den Axen x, y, z einſchließt:

$$\frac{a^2\cos X}{P},\quad \frac{b^2\cos Y}{P},\quad \frac{c^2\cos Z}{P}$$

und daher

$$a^2\cos X = M_1 b^2\cos Y + N_1 c^2\cos Z \text{ und}$$
$$\cos X = M_1 \cos Y + N_1 \cos Z$$

woraus man erhält:

$$M_1 = \frac{(a^2-c^2)\cos X}{(b^2-c^2)\cos Y} \text{ und } N_1 = -\frac{(a^2-b^2)\cos X}{(b^2-c^2)\cos Z}.$$

Steht die hier betrachtete Ebene auf derjenigen ſenkrecht, welcher die Gleichung $x = My + Nz$ entſpricht, ſo hat man

$$MM_1 + NN_1 = 1$$

und wenn man für M_1 und N_1 obige Werthe ſetzt, geht wieder die Gleichung (L) hervor.

212. Es werde nun ein Äthertheilchen in Schwingungen verſetzt, und man denke ſich durch den Mittelpunct der Elaſticitätsfläche und die Linie, in welcher jene Schwingungen erfolgen, einen Schnitt. Iſt die Reſultirende, welche aus der durch jene Schwingungen angeregten Elaſticität hervorgeht, nicht parallel mit der Richtung der Schwingungen, wie es meiſtens der Fall iſt; ſo beſchreibt das ſchwingende Theilchen keine gerade, ſondern eine krumme Linie, aber ſeine Bewegung läßt ſich in zwei geradlinige auflöſen, die auf einander ſenkrecht ſtehen und wovon eine (nach 210) mit dem größ-

ten, die andere mit dem kleinſten Durchmeſſer des betreffenden Schnittes parallel iſt, welche Durchmeſſer zugleich die Geſchwindigkeit der Fortpflanzung der Bewegung geben. Dieſe Bewegungen erfolgen unabhängig von einander. Was mit einem Theilchen geſchieht, erfolgt auch mit einer Reihe derſelben, die auf einmal in Schwingung begriffen ſind, und ſo kommt es, daß ſich die eintretende Welle in zwei auflöſet, deren Schwingungen unter einem rechten Winkel gegen einander erfolgen, die alſo entgegengeſetzt polariſirt ſind und ſich mit Geſchwindigkeiten fortpflanzen, die von verſchiedenen Geſetzen beherrſcht werden. Da dieſe Wellen bei ihrem Austritte aus dem doppelt brechenden Körper ihre einmal angenommene Schwingung beibehalten, ſo bleiben ſie natürlich auch unter einem rechten Winkel polariſirt.

Die Auflöſung einer Welle in zwei andere wird offenbar nur dann Statt finden, wenn die zwei Axen, denen die einzelnen Schwingungen parallel erfolgen, ungleich ſind. Sind dieſe einander gleich, d. h. iſt der Schnitt der Elaſticitätsfläche, mit welchem die Schwingungen parallel ſind, ein Kreis, ſo erfolgen die Bewegungen nach beiden Axen mit derſelben Geſchwindigkeit und befolgen einerlei Geſetz.

213. Es gibt nur zwei Kreisſchnitte der Elaſticitätsfläche und zwar für $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ oder $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=\rho^4$. Iſt nämlich die Gleichung der ſchneidenden Ebene $fx+gy+hz=0$, ſo wird, wenn man den daraus ſich ergebenden Werth von z in $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ und $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=\rho^4$ ſubſtituirt

$$x^2+y^2+\left(\frac{fx+gy}{h}\right)^2=\rho^2 \text{ oder}$$

$$h^2\rho^2x^2+h^2\rho^2y^2+\rho^2(fx+gy)^2=h^2\rho^4$$

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2\left(\frac{fx+gy}{h}\right)^2=\rho^4 \text{ oder}$$

$$h^2a^2x^2+h^2b^2y^2+c^2(fx+gy)^2=h^2\rho^4$$

mithin

$$h^2\rho^2x^2+h^2\rho^2y^2+\rho^2(fx+gy)^2=h^2a^2x^2+h^2b^2y^2+c^2(fx+gy)^2$$

und daraus

$$\rho^2(h^2+f^2)=a^2h^2+c^2f^2$$

$$\rho^2(h^2+g^2)=h^2b^2+c^2g^2$$

$$\rho^2fg=c^2fg.$$

Dieſen Gleichungen kann nur Genüge geſchehen, wenn f, g oder h verſchwinden, d. h. wenn der Schnitt durch eine Axe der Elaſticität geht. Für $f=0$ geht der Schnitt durch die Axe x und

es wird $\rho = a$, und $\frac{g^2}{h^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 - c^2}$. Demnach wird $\frac{g}{h}$ nur dann möglich, wenn $b > a$ und $a > c$ iſt, woraus die Unmöglichkeit von mehr als zwei Kreisſchnitten einleuchtet, indem $\frac{g}{h}$ zwei gleiche und entgegengeſetzte Werthe erhält. Zugleich folgt daraus, daß beide gegen jede der zwei übrigen Axen der Elaſticitätsfläche gleich geneigt ſind. Die auf dieſe Schnitte Senkrechten ſind die Axen der doppelten Brechung und deren gibt es demnach, dieſer Theorie gemäß, nie mehr als zwei, ja wenn zwei Elaſticitätsaxen a und b einander gleich ſind, reduciren ſie ſich auf eine einzige. Demnach gibt es Körper mit einer und mit zwei Axen der doppelten Brechung.

214. Zur näheren Darſtellung der Geſetze der doppelten Brechung, in ſo weit ſie aus dieſer Theorie folgen, iſt die Kenntniß der Geſtalt der Welle in der doppelt brechenden Subſtanz nöthig. Denn kennt man dieſe, ſo kann man für jeden Fall mittelſt der Tangente auf ähnliche Weiſe, wie dieſes (161) geſchehen iſt, die Richtung des gebrochenen Strahles finden. Zu dieſem Behufe iſt aber nothwendig, den größten und kleinſten Durchmeſſer eines Schnittes der Elaſticitätsfläche und die Berührungsfläche der Welle zu kennen. Es ſey $z = gx + hy$ die Gleichung eines Schnittes der Elaſticitätsfläche, $z = gx + hy + c$ die einer mit jenem Schnitte parallelen, die Welle berührenden Ebene; ferner $v^2 = a^2 \cos^2 X + b^2 \cos^2 Y + c^2 \cos^2 Z$ die Gleichung der Elaſticitätsfläche. Es ſey endlich $x = \lambda z$ und $y = \mu z$ die Gleichung einer geraden Linie, welche den Radius Vector vorſtellt. Man hat daher

$$\cos^2 X = \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2}; \quad \cos^2 Y = \frac{\mu^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2};$$

$$\cos^2 Z = \frac{1}{1 + \lambda^2 + \mu^2},$$

und durch Subſtitution dieſer Gleichung in obige

$$v^2 (1 + \lambda^2 + \mu^2) = a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2.$$

Für $dv = 0$ erhält v den größten oder kleinſten Werth. Dieſes gibt

$$v^2 \left(\lambda + \mu \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}\right) = a^2 \lambda + b^2 \mu \cdot \frac{d\mu}{d\lambda}$$

und weil der betreffende Radius Vector in der Ebene des Schnittes liegt:

$$g\lambda + h\mu = 1 \text{ oder } g\,d\lambda + h\,d\mu = 0, \ \frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{g}{h}.$$

Dieſer Werth in die vorhergehende Gleichung geſetzt gibt:

$$v^2 (h\lambda - g\mu) = a^2 \lambda h - b^2 \mu g$$

und daraus mittelſt der Gleichung $g\lambda + h\mu = 1$

$$\lambda = \frac{(b^2 - v^2)\,g}{(a^2 - v^2)\,h^2 + (b^2 - v^2)\,g^2}; \ \mu = \frac{(a^2 - v^2)\,h}{(a^2 - v^2)\,h^2 + (b^2 - v^2)\,g^2}.$$

Setzt man dieſe Werthe in die Gleichung der Elaſticitätsfläche, ſo wird

$$(a^2 - v^2)(c^2 - v^2)\,h^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)\,g^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2) = 0 \qquad (M)$$

und dieſe Gleichung beſtimmt den größten und kleinſten Durchmeſſer eines Schnittes der Elaſticitätsfläche.

215. Es ſeyen Ox, Oy, Oz (Fig. 152) die drei Elaſticitätsaxen eines Mittels und OC die Richtung, in welcher ein Ätherthheilchen verrückt wird, OB die daraus hervorgehende Fortpflanzung der Welle und OD die reſultirende Kraft der Elaſticität, welche die Verrückung weckt. Man denke ſich die Welle in einer Zeiteinheit längs OB von O nach B vorgerückt, errichte in B die Ebene EBF ſenkrecht auf OB, ſo iſt dieſe Ebene EBF die Tangente zur Welle.

Iſt ε die Verſchiebung eines Theilchens nach OC, ſo kann man ſich die Kraft, welche dadurch rege gemacht wird, in drei, mit den Elaſticitätsaxen parallele zerlegt denken. Dieſe Partialkräfte werden ſeyn:

$$a^2 \varepsilon \cos\alpha, \quad b^2 \varepsilon \cos\beta, \quad c^2 \varepsilon \cos\gamma$$

wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Kraft mit den drei Axen einſchließt. Die Reſultirende R dieſer drei Kräfte iſt

$$R = \varepsilon \sqrt{(a^4 \cos^2\alpha + b^4 \cos^2\beta + c^4 \cos^2\gamma)} = \varepsilon k^2$$

wenn man die Größe hinter dem Wurzelzeichen mit k^4 bezeichnet, und wenn R mit den Axen die Winkel φ, χ, ψ einſchließt:

$$\cos\varphi = \frac{a^2\cos^2\alpha}{k^2}, \quad \cos\chi = \frac{b^2\cos^2\beta}{k^2}, \quad \cos\psi = \frac{c^2\cos^2\gamma}{k^2}.$$

Schließt dieſe Reſultirende mit OC den Winkel δ ein, ſo hat man:

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\chi + \cos\gamma\cos\psi =$$
$$= \frac{\varepsilon\,(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)}{R}.$$

Von der Kraft R hat nur der mit OC parallele Theil auf die Fortpflanzung der Bewegung Einfluß, der andere auf dieſem ſenkrechte trägt ſeiner Richtung gemäß nichts dazu bei. Jene Kraft iſt daher $R\cos\delta = \varepsilon(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)$ und daher die Geſchwindigkeit der Fortpflanzung längs OB gleich

$$\sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)}.$$

Iſt die Gleichung des durch O und C gehenden Schnittes $z = gx + hy$ und die einer mit demſelben parallelen, durch die Oberfläche der Welle gehenden Ebene $z = gx + hy + c$; ſo iſt c der Abſtand beider Ebenen von einander und man hat für den Radius Vector V die Gleichung

$$V^2 = \frac{c^2}{1 + g^2 + h^2} \text{ oder } c^2 = V^2(1 + g^2 + h^2) \text{ mithin}$$

wegen $c = z - gx - hy$ auch

$$V^2 = OB^2 = \frac{(z - gx - hy)^2}{1 + g^2 + h^2} = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma \quad (N).$$

216. Die Ebene COB, in welcher die Kraft liegt, welche durch Verrückung eines Äthertheilchens nach einer auf OB ſenkrechten in COB liegenden Richtung geweckt wird, kann nur zwei Lagen haben. Dieſe Lage fordert nämlich, daß OB, OC und OD auf derſelben geraden Linie ſenkrecht ſtehen. Macht dieſe mit den Axen die Winkel m, n, o; ſo iſt nach La Grange's Theorem:

$$\cos m : \cos n : \cos o = (b^2 - c^2)\cos\beta\cos\gamma : (c^2 - a^2)\cos\alpha\cos\gamma : (a^2 - b^2)\cos\alpha\cos\beta$$

und weil OD darauf ſenkrecht ſteht:

$$\cos\varphi : \cos\chi : \cos\psi = \begin{cases} : [(c^2 - a^2)\cos^2\gamma - (a^2 - b^2)\cos^2\beta]\cos\alpha \\ : [(a^2 - b^2)\cos^2\alpha - (b^2 - c^2)\cos^2\gamma]\cos\beta \\ : [(b^2 - c^2)\cos^2\beta - (c^2 - a^2)\cos^2\alpha]\cos\gamma. \end{cases}$$

Aber aus $V^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$ und $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ folgt:

$$V^2 - a^2 = (c^2 - a^2)\cos^2\gamma - (a^2 - b^2)\cos^2\beta$$
$$V^2 - b^2 = (a^2 - b^2)\cos^2\alpha - (b^2 - c^2)\cos^2\gamma$$
$$V^2 - c^2 = (b^2 - c^2)\cos^2\beta - (c^2 - a^2)\cos^2\alpha$$

und daher

$$\cos\varphi : \cos\chi : \cos\psi = (V^2 - a^2)\cos\alpha : (V^2 - b^2)\cos\beta : (V^2 - c^2)\cos\gamma$$

ferner wegen $\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\chi + \cos\gamma\cos\psi = 0$

iſt

$$\frac{\cos^2\varphi}{V^2-a^2}+\frac{\cos^2\chi}{V^2-b^2}+\frac{\cos^2\psi}{V^2-c^2}=0$$

und hieraus

$$\left.\begin{array}{l} V^4-[(b^2+c^2)\cos^2\varphi+(a^2+c^2)\cos^2\chi+(a^2+b^2)\cos^2\psi]V^2 \\ \quad +b^2c^2\cos^2\varphi+a^2c^2\cos^2\chi+a^2b\cos^2\psi \end{array}\right\}=0 \qquad (O).$$

Es iſt klar, daß V^2 nur zwei Werthe erhalten kann. Für dieſe erhält man, wenn man für $\cos\varphi$, $\cos\chi$, $\cos\psi$ ihre Werthe in g und h ſetzt:

$$\cos\alpha=\frac{\cos\varphi\sqrt{(1+g^2+h^2)}}{L(V^2-a^2)}=-\frac{g}{L(V^2-a^2)}$$

$$\cos\beta=\frac{\cos\chi\sqrt{(1+g^2+h^2)}}{L(V^2-b^2)}=-\frac{h}{L(V^2-b^2)}$$

$$\cos\gamma=\frac{\cos\psi\sqrt{(1+g^2+h^2)}}{L(V^2-c^2)}=-\frac{1}{L(V^2-c^2)}$$

wobei man der Kürze halber L geſchrieben hat, für

$$\sqrt{(1+g^2+h^2)}.\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{(V^2-a^2)^2}+\frac{\cos^2\chi}{(V^2-b^2)^2}+\frac{\cos^2\psi}{(V^2-c^2)^2}\right)}.$$

217. Setzt man in O wie vorhin ſtatt $\cos\varphi$, $\cos\chi$, $\cos\psi$ die Werthe g und h, ſo wird

$$\left.\begin{array}{l} (1+g^2+h^2)V^4-\{(b^2+c^2)g^2+(a^2+c^2)h^2+(a^2+c^2)\}V^2+ \\ \qquad +b^2c^2g^2+a^2c^2h^2+a^2b^2 \end{array}\right\}=0$$

darin für V^2 den Werth aus (N) geſetzt, gibt:

$$\left.\begin{array}{l} (z-gx-hy)^4-[a^2+b^2+(b^2+c^2)g^2+ \\ \qquad +(a^2+c^2)h^2](z-gx-hy)^2+ \\ \quad +(1+g^2+h^2)(a^2b^2+b^2c^2g^2+a^2c^2h^2 \end{array}\right\}=0.$$

Setzt man hier $c^2g^2+a^2h^2+a^2=M$, $b^2g^2+c^2h^2+b^2=N$, ſo erhält man:

$$(z-gx-hy)^4-(M+N)(z-gx-hy)^2=$$
$$=-MN-(c^2-b^2)(a^2-c^2)g^2h^2$$

und daraus als Gleichung für die Berührungsebene der Welle:

$$(z-gx-hy)^2=\left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\{(c^2+b^2)g^2+(a^2+c^2)h^2+a^2+b^2\pm \\ \pm\sqrt{([(c^2-b^2)g^2+(a^2-c^2)h^2+(a^2-b^2)]^2} \\ \qquad -4(c^2-b^2)(a^2-c^2)g^2h^2)\} \end{array}\right. \quad (P).$$

218. Nun iſt man im Stande eine Gleichung für die Geſtalt der Welle zu finden. Es ſey zu dieſem Ende $z_1=g_1x_1+h_1y_1$,

die Gleichung einer Ebene, welche mit der bisher betrachteten in ſolcher Relation ſteht, daß man hat:

$$x = x_1 \sqrt{(c^2 - b^2)},\ y = y_1 \sqrt{(a^2 - c^2)},\ z = z_1 \sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Da iſt nun aus $z = gx + hy$ und $z_1 = g_1 x_1 + h_1 y_1$

$$dz = g dx + h dy = g dx_1 \sqrt{(c^2 - b^2)} + h dy_1 \sqrt{(a^2 - c^2)}$$

$$dz = dz_1 \sqrt{(a^2 - b^2)} = g_1 dx_1 \sqrt{(a^2 - b^2)} + h_1 dy_1 \sqrt{(a^2 - c^2)}$$

und hieraus

$$g = g_1 \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)},\ h = h_1 \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\right)}.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichung (P), und ſetzt der Kürze halber

$$\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} = p,\ \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} = q,\ \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = r$$

ſo erhält man:

$$(z_1 - g x_1 - h y_1)^2 = \tfrac{1}{2} \{p g_1^2 + q h_1^2 + r \pm$$
$$\pm \sqrt{[(g_1^2 + h_1^2 + 1)^2 - 4 g_1^2 h_1^2]}\}.$$

Sucht man auf gleichem Wege zwei Werthe für dx und dy, ſo erhält man mittelſt derſelben eine Gleichung für x, für y, und für z, und zwar mit Hinweglaſſung der Accente, die zu keiner weiteren Unterſcheidung mehr dienen, und indem man obige Größe hinter dem Wurzelzeichen mit F^2 bezeichnet:

$$x = -\frac{g}{2(z - gx - hy)} \left\{p \pm \frac{1 + g^2 - h^2}{2F}\right\}$$

$$y = -\frac{1}{2(z - gx - hy)} \left\{q \pm \frac{1 + h^2 - g^2}{2F}\right\}$$

$$z = \frac{1}{2(z - gx - hy)} \left\{r \pm \frac{1 + g^2 + h^2}{F}\right\}$$

und mittelſt dieſer

$$\frac{\tfrac{1}{2}(r - q) + y^2 - z^2}{yz} = \frac{1 + g^2 - h^2}{h}$$

$$\frac{\tfrac{1}{2}(r - p) + x^2 - z^2}{xz} = \frac{1 + h^2 - g^2}{g}$$

$$\frac{\tfrac{1}{2}(p + q) - x^2 - y^2}{xy} = \frac{1 + g^2 + h^2}{gh}.$$

und durch Eliminiren von g und h

$$\left.\begin{array}{l} x^2\{z^2-y^2+\frac{1}{2}(q-r)^2\}^2+y^2\{z^2-x^2+\frac{1}{2}(p-r)\}^2 \\ \qquad -z^2\{x^2+y^2-\frac{1}{2}(p+q)\} \\ -\{z^2-y^2+\frac{1}{2}(q-r)\}.\{z^2-x^2+\frac{1}{2}(p-r)\} \\ \qquad \{x^2+y^2-\frac{1}{2}(p+q)\}+4\,x^2y^2z^2 \end{array}\right\}=0$$

woraus man endlich durch Subſtitution der Werthe für p, q, r nach gehöriger Reduction findet:

$$\left.\begin{array}{l} (x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-a^2(c^2+b^2)x^2- \\ \quad -b^2(a^2+c^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2 \end{array}\right\}=0\,(Q).$$

219. Setzt man zwei Elaſticitätsaxen einander gleich, ſo beſchränkt man die Formel für die Geſtalt der Welle auf Kryſtalle mit **einer Axe** der doppelten Brechung. Für $b=c$ erhält man aus (Q)

$$[a^2x^2+b^2(y^2+z^2)]\,(x^2+y^2+z^2)-$$
$$-2\,a^2b^2x^2-b^2(a^2+b^2)(y^2+z^2)+a^2b^2=0$$

oder

$$(x^2+y^2+z^2-b^2)\,[a^2x^2+b^2(y^2+z^2)-a^2b^2]=0\;\ldots\;(R).$$

Der erſte Factor iſt die Gleichung einer Kugel, der zweite die eines elliptiſchen Sphäroides. Die Curve eines Wellendurchſchnittes, welche dadurch bezeichnet wird, iſt in Fig. 153 dargeſtellt. $ABCD$ iſt eine Ellipſe, $EFGH$ ein Kreis, M der gemeinſchaftliche Mittelpunct beider. Iſt NO die Grenze, unterhalb welcher die Maſſe des Kryſtalls ſich befindet, welchem dieſe Gleichung entſpricht, und ML eine einfallende Welle, die in einer Zeiteinheit von L nach O vorrückt, mithin SM der einfallende Strahl; ſo erhält man die Richtung des gebrochenen Antheils dieſes Strahles, wenn man von O ſowohl auf den Kreis, als auf die Ellipſe die Tangenten OP und OQ zieht. Die Geraden MP und MQ ſind die geſuchten Richtungen der Strahlen. Man kann daran die **Huyghen'ſche** Conſtruction für den Doppelſpath (161) wohl nicht verkennen.

Für Kryſtalle, an welchen alle drei Elaſticitätsaxen einander ungleich ſind, läßt ſich die Gleichung der Wellengeſtalt nicht in zwei rationelle Factoren zerlegen, wohl aber jeder Durchſchnitt derſelben mit den Coordinatenebenen. Dieſer Durchſchnitt erfolgt ſtets in einer Ellipſe und in einem Kreiſe, wie man leicht ſieht, wenn man in der Gleichung (Q) ſucceſſiv $x=0$, $y=0$, $z=0$ ſetzt. Ja, man kann zeigen, daß ein Ellipſoid, deſſen Axen die Elaſticitätsaxen ſind, und die Welle durch eine Ebene geſchnitten, denſelben elliptiſchen Schnitt geben. Man kann daher eine Conſtruction, der ähnlich,

welche für einaxige Kryſtalle aufgeſtellt worden iſt, für zweiaxige anwenden. Man nehme ein Ellipſoid, deſſen Halbaxen die Elaſticitätsaxen a, b, c ſind, ſchneide es mit einer Ebene, welche die Einfallsebene bezeichnet, und ziehe ſenkrecht darauf vom Centrum zwei Linien, wovon eine dem größten, die andere dem kleinſten Halbmeſſer des Schnittes gleich iſt. Die Linien bezeichnen die zwei Strahlen, in welche der einfallende getheilt wird. Überhaupt laſſen ſich aus einer weiteren Analyſe der Formeln, welche in der vorhergehenden Theorie feſtgeſtellt wurden, alle Geſetze der doppelten Brechung, ſo wie ſie die Erfahrung kennen gelehrt hat, ableiten.

B. Die Emanationshypotheſe.

220. Nach dieſer Hypotheſe ſendet ein leuchtender Punct nach allen Seiten materielle Lichttheilchen aus, die ſich im leeren Raume oder in einem gleichförmig dichten Mittel von einerlei materieller Beſchaffenheit gleich ſchnell fortpflanzen, ſo daß die denſelben Punct zugleich verlaſſenden Lichttheilchen ſtets in der Oberfläche einer Kugel liegen, deren Centrum jener Punct und deren Halbmeſſer der von jedem Theilchen zurückgelegte Weg iſt. Ob dieſe Theile ein ſtetiges Ganzes ausmachen oder von einander getrennt, wie abgeſchoſſene Pfeile ihren Weg fortſetzen, dieſes läßt ſich nicht ausmachen, doch wird gewöhnlich letzteres angenommen. So wie ein Lichttheilchen vom leeren Raume in ein materielles Mittel eintritt, hat es vermöge der Anziehungskraft desſelben eine größere Geſchwindigkeit erlangt, und alle zugleich von demſelben Centrum ausgehenden Lichttheilchen liegen nun nicht mehr in einer Kugelfläche, ſondern in einer anders gekrümmten.

Die Lichttheilchen afficiren unſer Auge, indem ſie in dasſelbe eindringen und auf die Netzhaut einen Stoß ausüben. Es wirkt alſo hier das Licht durch ſein mechaniſches Moment. Von der Größe der Trägheit dieſer Theilchen hängt die Empfindung der Farbe ab, welche ſie erregen. Jene Lichttheilchen, deren Trägheit am größten iſt, entſprechen der rothen, jene, deren Trägheit am kleinſten iſt, der violetten Farbe und die übrigen bringen nach Maßgabe ihrer Trägheit die orange, gelbe ꝛc. Farbe hervor.

Es iſt leicht denkbar, daß die materiellen Theile der Körper anziehend oder abſtoßend auf ein Lichttheilchen wirken und dadurch Änderungen in der Geſchwindigkeit desſelben hervorbringen. Geſchieht dieſes mit einer Reihe auf einander folgender Lichttheil-

chen, ſo erfolgt eine Änderung in der Geſchwindigkeit des Lichtſtrahles und davon hängen nach dieſer Hypotheſe jene Modificationen des Lichtes ab, bei welchen blos die Richtung der Strahlen geändert wird.

221. Man denke ſich ein Lichttheilchen in einem Mittel, welches auf dasſelbe wirkt, jedoch mit einer Kraft, die ſich nur auf eine ſehr kleine Entfernung erſtreckt. Es ſeyen x, y, z rechtwinkelige Coordinaten der Oberfläche eines Körpers, der anziehend auf das Licht wirkt, ihr Anfangspunct ſey im afficirten Lichttheilchen und die Coordinate z treffe die Oberfläche des anziehenden Körpers ſenkrecht. Die Gleichung dieſer Oberfläche wird für die nur auf ſehr geringe Entfernung ſich erſtreckende Kraft ſeyn $z = a + bx^2 + cy^2$. Da iſt nun $z = a$ der geringſte Abſtand eines Lichttheilchens von einem Puncte des Körpers, und ſowohl x als y haben zwei Werthe, nämlich es iſt $x = \pm \sqrt{\left(\frac{z - a - cy^2}{b}\right)}$, $y = \pm \sqrt{\left(\frac{z - a - bx^2}{c}\right)}$. Iſt dm ein anziehendes Element, r deſſen Abſtand vom angezogenen Lichttheilchen, p die anziehende Kraft, ſo erhält man durch die Zerlegung derſelben nach x, y und z die partiellen Anziehungskräfte:

$$\int \frac{p x\, dm}{r} = X, \int \frac{p y\, dm}{r} = Y, \int \frac{p z\, dm}{r} = Z.$$

In dieſen Ausdrücken iſt dm eine Function von x, y, z und wegen $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ auch $\frac{p}{r}$ eine ſolche; deßhalb erhält man durch die angezeigte Integration eine gerade Function von x, y, z. Das Integrale X muß von $-x$ bis $+x$, das von Y von $-y$ bis $+y$, und das von Z von $z = o$ bis zu dem Werth von z ausgedehnt werden, welcher an der Grenze der Wirkungsſphäre der anziehenden Kraft liegt. Da wird aber $X = o$, $Y = o$ und es bleibt blos die Anziehung nach der Normalen übrig.

222. Um nun den Weg eines Lichttheilchens in einem darauf wirkenden Mittel kennen zu lernen, nenne man x und z die rechtwinkeligen Coordinaten desſelben und ſetze voraus, beide liegen in der Ebene der Bahn des Theilchens und x ſey die Tangente des Einfallspunctes, z die Normale zu demſelben. Nach x wirkt keine Kraft auf das Theilchen, wohl aber nach z, und dieſe Kraft iſt eine Function von

z, welche ungemein ſchnell abnimmt, ſie treibt das Licht vom neuen Mittel hinweg oder befördert den Eintritt in daſſelbe. Man nenne ſie Z und man hat den Geſetzen der Dynamik gemäß

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + Z = 0$$

mithin durch Integriren:

$$\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} + 2\int Z\, dz = \text{const.}$$

Heißt $\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2}$ als das Quadrat der Geſchwindigkeit des Lichtes im neuen Mittel V_1, ſo erhält man:

$$V_1^2 + 2\int Z\, dz = \text{const.}$$

Zur Beſtimmung der Conſtanten dient der Umſtand, daß für den Fall, wo $Z = 0$ iſt, das Licht noch ſeine urſprüngliche Geſchwindigkeit V hat, und daher $V^2 = \text{const}$ iſt. Daher wird

$$V_1^2 - V^2 = -2\int Z\, dz.$$

223. Wirkt das Mittel, deſſen Einfluß auf das Licht betrachtet wird, abſtoßend, ſo wächſt Z während der Annäherung des Lichttheilchens an das Mittel und nimmt eben ſo ab während der Entfernung desſelben, aber beide Werthe ſind einander gleich und entgegengeſetzt. Demnach iſt $Z\, dz = 0$, und daher

$$V_1^2 + V^2 = 0 \text{ oder } V_1 = -V.$$

Heißt der Einfallswinkel a, der Reflexionswinkel b und ſetzt man $dx^2 + dy^2 = ds^2$, ſo iſt $\sin a = \frac{dx}{ds}$.

Integrirt man die Gleichung $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$, ſo erhält man $\frac{dx}{dt} = \text{const} = c$ oder $dx = c\,dt$, mithin $\sin a = \frac{c\,dt}{ds} = \frac{c}{V}$.

Eben ſo findet man $\sin b = \frac{c}{V_1}$, mithin wegen $V_1 = V$

$$\sin a = \sin b \text{ oder } a = b$$

alſo der Erfahrung gemäß.

Wirkt das betreffende Mittel anziehend auf das Licht, ſo iſt

$$\sin a : \sin b = V_1 : V$$

oder weil $V_1 = nV$ ſeyn muß:

$$\sin a : \sin b = n : 1$$

wie es das Carteſiſche Geſetz verlangt. Für $b=90^\circ$, iſt $\sin a = n$.

Aus $V_1^2 - V^2 = -2\int Z\,dz$ folgt für dieſen Fall $(n^2-1)V^2 = -2\int Z\,dz$ oder wenn man $V^2=1$ ſetzt:

$$(n^2-1) = -2\int Z\,dz$$

oder es iſt (n^2-1) der Ausdruck der brechenden Kraft. Da dieſe den materiellen Theilchen der Körper zukommen muß, ſo wird die jedem Theilchen eigene Kraft eines Körpers von der Dichte D ſeyn

$$\frac{n^2-1}{D}.$$

224. Gelangt das Lichttheilchen nicht vom leeren Raume in ein materielles Mittel, ſondern von einem materiellen Mittel in ein anderes, dann iſt es ſo, als käme es vom leeren Raume in ein Mittel, das mit einer Kraft darauf wirkt, welche der Differenz der beiden Kräfte der Mittel gleich iſt. Wenn es an die Grenze der zwei Mittel gekommen iſt, hat es nur die Hälfte der ganzen Einwirkung beider Mittel erlitten, die andere Hälfte erfolgt erſt im neuen Mittel. Iſt daher der zweite Körper undurchſichtig, ſo erfolgt eine Reflexion an der Grenze, d. h. da wo das Quadrat ſeiner normalen Geſchwindigkeit um die Größe $V^2\cos^2 a = \frac{1}{2}V_1^2$ vermindert iſt, während dieſelbe für einen durchſichtigen Körper an der Grenze erfolgt, wo dieſer Verluſt $=V_1^2$ iſt. (Vergl eiche 76.)

225. Es iſt leicht erſichtlich, daß es auch Mittel geben könne, die nicht nach allen Richtungen mit gleicher Kraft auf ein Lichttheilchen wirken. Wie aber dieſe Wirkung immer beſchaffen ſeyn mag, ſo muß die Bewegung des Lichttheilchens nach den allgemeinen dynamiſchen Geſetzen, alſo auch nach dem Geſetze der kleinſten Wirkung erfolgen. Es ſey nun C (Fig. 139) der Einfallspunct eines Strahles SC, x, y, z die Coordinaten desſelben in der Ebene ACE, ſo daß x in der Richtung CE, y in einer darauf ſenkrechten liegt, SCE die Einfallsebene, und δ der Einfallswinkel, δ_1 der Brechungswinkel. Geht nun die Kraft des Mittels von der Axe CB aus, ſo iſt die auf CED ſenkrechte, durch CB gelegte Ebene der Hauptſchnitt. Der Winkel, welchen er mit der Einfallsebene macht, ſey ω, derjenige, den derſelbe mit der Brechungsebene einſchließt, ω_1, ferner a, b, c die rechtwinkeligen Coordinaten von S, a_1, b_1, c_1 die von L und man nenne $SC=P$, $CL=Q$. Unter dieſen Vorausſetzungen muß dem Geſetze der kleinſten Wirkung gemäß ſeyn

$d(VP + V_1 Q) = 0$ oder $V dP + V_1 dQ + Q dV_1 = 0 \ldots\ldots (S)$ wenn man die kleine Krümmung, welche ein Lichttheilchen in der Nähe von C macht, vernachläſſiget. Da hier offenbar V_1 eine Function von δ_1 und ω_1 iſt, ſo hat man:

$$dV_1 = \frac{dV_1}{d\delta_1}\, d\delta_1 + \frac{dV_1}{d\omega_1}\, d\omega_1$$

ferner

$$P = \frac{c}{\cos\delta}, \quad Q = \frac{c_1}{\cos\delta_1} \text{ und daher}$$

$$dP = \frac{c\sin\delta}{\cos^2\delta}\left(\frac{d\delta}{d\delta_1}\, d\delta_1 + \frac{d\delta}{d\omega_1}\, d\omega_1\right) \quad dQ = \frac{c_1 \sin\delta_1}{\cos^2\delta_1}\, d\delta_1$$

und durch Subſtitution dieſer Werthe in (S)

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{Vc\sin\delta}{\cos^2\delta}\,\dfrac{d\delta}{d\delta_1} + \dfrac{V_1 c_1 \sin\delta_1}{\cos^2\delta_1} + \dfrac{c_1}{\sin\delta_1}\,\dfrac{dV_1}{d\delta_1}\right) d\delta_1 \\ \quad + \left(\dfrac{Vc\sin\delta}{\cos^2\delta}\,\dfrac{d\delta}{d\omega_1} + \dfrac{c_1}{\cos\delta_1}\,\dfrac{dV_1}{d\omega_1}\right) d\omega_1 \end{array}\right\} = 0$$

und weil ω_1 und δ_1 von einander unabhängig ſind und jedes dieſer Differenziale für ſich $= 0$ ſeyn kann:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dV_1}{d\delta_1} = -\dfrac{Vc\sin\delta\cos\delta_1}{c_1\cos^2\delta} \cdot \dfrac{d\delta}{d\delta_1} - V_1 \tan\delta_1 \\ \dfrac{dV_1}{d\omega_1} = -\dfrac{Vc\sin\delta\cos\delta_1}{c_1\sin^2\delta} \cdot \dfrac{d\delta}{d\omega_1} \end{array}\right\} \ldots (T).$$

Man hat aber

$$a - x = c\tan\delta\cos\omega, \quad b - y = c\tan\delta\sin\omega$$
$$a_1 - x = c_1\tan\delta_1\cos\omega_1, \quad b_1 - y = c_1\tan\delta_1\cos\omega_1$$

mithin

$$-dx = c\left(\frac{d\delta\cos\omega}{\cos\delta} - \tan\delta\sin\omega\, d\omega\right)$$
$$= c_1\left(\frac{d\delta_1\cos\omega_1}{\cos\delta_1} - \tan\delta_1\sin\omega_1\, \delta\omega_1\right)$$
$$-dy = c\left(\frac{d\delta\cos\omega}{\cos\delta} + \tan\delta\cos\omega\, d\omega\right)$$
$$= c_1\left(\frac{d\delta_1\cos\omega_1}{\cos\delta_1} + \tan\delta_1\cos\omega_1\, d\omega_1\right)$$

und hieraus

$$\frac{d\delta}{d\delta_1} = \frac{c}{c_1}\left(\frac{\cos\delta}{\cos\delta_1}\right)^2 \cos(\omega - \omega_1);$$

$$\frac{d\delta}{d\omega_1} = \frac{c}{c_1} \cos^2 \operatorname{tang} \delta_1 \sin(\omega - \omega_1).$$

Setzt man dieſe Werthe in (T), ſo wird

$$\frac{dV_1}{d\delta_1} = - \frac{V \sin\delta}{\cos\delta_1} \cos(\omega - \omega_1) - V_1 \operatorname{tang} \delta_1$$

$$\frac{dV_1}{d\omega_1} = - V \sin\delta \sin\delta_1 \sin(\omega - \omega_1)$$

oder durch nähere Entwicklung

$$V \sin\delta \cos\omega \cos\omega_1 + V \sin\delta \sin\omega \sin\omega_1 =$$

$$= - V_1 \sin\delta_1 - \cos\delta_1 \cdot \frac{dV_1}{d\delta_1}$$

$$V \sin\delta \cos\omega \sin\omega_1 - V \sin\delta \sin\omega \sin\omega_1 = \frac{1}{\sin\delta_1} \cdot \frac{dV_1}{d\omega_1}.$$

Multiplicirt man die erſte Gleichung mit $\cos\omega_1$, die zweite mit $\sin\omega_1$ und addirt ſie, ſo erhält man:

$$V \sin\delta \cos\omega = \frac{\sin\omega_1}{\sin\delta_1} \cdot \frac{dV_1}{d\omega_1} -$$

$$- \cos\delta_1 \cos\omega_1 \cdot \frac{dV_1}{d\delta_1} - \sin\delta_1 \cos\omega_1 \cdot V_1 = R.$$

Auf ähnliche Weiſe wird

$$V \sin\delta \sin\omega = - \frac{\cos\omega_1}{\sin\delta_1} \frac{dV_1}{d\omega_1} -$$

$$- \cos\delta_1 \sin\omega_1 \frac{dV_1}{d\delta_1} - \sin\delta_1 \sin\omega_1 \cdot V_1 = S$$

mithin

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{S}{R}, \quad \cos\omega = \frac{R}{\sqrt{(R^2 + S^2)}}, \quad \sin\delta = \sqrt{(R^2 + S^2)}$$

mithin ω und δ durch ω_1 und δ_1 gegeben und umgekehrt. Wendet man dieſe Formel auf das Huyghens'ſche Geſetz an, welches die Geſchwindigkeit des Lichtes in einem einaxigen, doppelt brechenden Kryſtall vorſtellt und ſelbſt dann noch wahr wäre, wenn auch Huyghens Vorſtellungsweiſe über die Natur des Lichtes keine Gründe hätte, ſo erhält man die Formeln, welche (162) entwickelt wurden. Man kann die Rechnung auch auf ähnliche Weiſe auf Körper mit zwei Axen der doppelten Brechung ausdehnen.

226. Es kann immerhin ſeyn, daß nicht jedes Lichttheilchen von demſelben Stoffe auf gleiche Weiſe afficirt wird, und daß, wenn

für eines derſelben durch Brechung V in nV übergeht, für ein anderes aus V die Größe $V(n+dn)$ wird. Daraus erklärt man die Farbenzerſtreuung.

227. Bekanntlich geht die Brechung periodiſch in Reflexion über und umgekehrt, und es muß nach dem Geiſte der Emanationshypotheſe der Grund dieſes Verhaltens in einer beſonderen Eigenſchaft der Lichttheilchen und in der auf dieſelben wirkenden Kraft des Mittels liegen. Darauf beruht Newtons ſinnreiche Theorie der Anwandlungen (accessus). Dieſer gemäß wird jedem Lichttheilchen eine beſondere Eigenſchaft zugeſchrieben, vermöge welcher es auf ſeinem Wege eine vorübergehende, nach gleichen Intervallen wiederkehrende Diſpoſition zum leichteren Übergang in ein anderes Mittel oder zur Rückkehr in das alte, d. h. zur Transmiſſion oder Reflexion erlangt. Dieſe Theorie iſt aus den Phänomenen der Farbenringe entnommen. Man nimmt an, die Anwandlungen erſtrecken ſich bis zu einer unbeſtimmten Tiefe in dem Mittel, worin ſich das Lichttheilchen befindet, wiewohl die Farbenringe nur bis zu einer ſehr geringen Dicke ſolcher Mittel ſich zeigen, über dieſe Grenzen hinaus aber keine Spur davon mehr bemerkt werden kann. Eine Anwandlung dauert, während ein Lichttheilchen einen gewiſſen Weg c zurücklegt; auf dem nächſt folgenden, eben ſo großen Wege herrſcht die Anwandlung zur entgegengeſetzten Modification, nach dieſer folgt wieder die erſtere u. ſ. f. Kommt daher ein Lichttheilchen in ein neues Mittel, wenn es ſich gerade am Anfange einer Anwandlung zur leichteren Transmiſſion befindet, ſo werden alle Acceſſe der leichteren Transmiſſion in den Tiefen $0, 2c, 4c, 6c$ 2c. alle Acceſſe zur leichteren Reflexion in den Tiefen $c, 3c, 5c$ 2c. Statt haben. Befindet ſich aber das Lichttheilchen beim Eintritte nicht im Anfange einer Anwandlung, ſondern liegt der Anfangspunct derſelben in der Entfernung $-b$ von der Grenze der zwei Mittel, ſo beginnen die Anwandlungen zur leichteren Transmiſſion in den Tiefen $-b, 2c-b, 4c-b$ 2c. die zur leichteren Reflexion in den Tiefen $c-b, 3c-b, 5c-b$ 2c. Die Größe c ändert ſich mit der Brechbarkeit des Lichtes, dem Brechungsvermögen der Mittel und mit der Neigung der Strahlen gegen das Einfallsloth, ſie iſt für brechbarere Strahlen kleiner als für minder brechbare und nimmt ab, wenn das Brechungsvermögen des Mittels wächſt und der Einfallswinkel kleiner wird. Man darf aber nicht vergeſſen, daß die Anwandlungen nur Diſpoſitionen ſind, bei wel-

chen die Tranſmiſſion oder Reflexion leichter erfolgt, ohne nothwendig erfolgen zu müſſen, ja es kann ſogar bei einer Anwandlung zur leichteren Tranſmiſſion eine Reflexion Statt finden, ſobald ſich von Seite des Mittels Kräfte einfinden, welche die Umkehrung bewirken. Übrigens iſt eine Anwandlung nicht auf dem ganzen Wege *c* gleich ſtark, ſondern ſie nimmt von $c = o$ bis zu einer beſtimmten Tiefe $\frac{1}{2}c$ zu, von da wieder eben ſo ab ꝛc.

Man kann nicht läugnen, daß man mittelſt dieſer Hypotheſe allen Phänomenen der Farbenringe genüget.

228. Soll die Emanationshypotheſe noch ferner zuläſſig ſeyn, ſo muß ſie auch die Phänomene der Beugung, Interferenz und Polariſation erklären. Die Interferenz hat eigentlich noch Niemand dieſer Hypotheſe gemäß zu erklären unternommen, ja es läßt ſich nach ihr vom Zuſammentreffen zweier Lichtſtrahlen kaum etwas anderes als eine Verſtärkung des Lichtes erwarten. Auch die Phänomene der Beugung haben allen Bemühungen, ſie aus einer Emanation zu erklären, Widerſtand geleiſtet. Newton hat ſich darüber nicht beſtimmt ausgeſprochen, es ſcheint aber, er war geneigt, ſie von denſelben anziehenden und abſtoßenden Kräften abzuleiten, durch welche er die Brechung und Reflexion ſo glücklich erklärte. Daß dieſe Erklärung nicht zuläſſig ſey, iſt aus der Naturlehre klar. Mairan, Tour, Sejour erklären die Beugung aus einer Brechung des Lichtes in der Atmoſphäre, die ſich rings um den beugenden Körper befindet und aus einem verdichteten Stoffe beſteht. Keine dieſer Erklärungen entſpricht der Natur der Sache, denn dieſe Atmoſphäre müßte, wenn ihr Daſeyn überhaupt zugegeben würde, von einer anziehenden Kraft der Körper, um welche ſie beſteht, abhängen und ſich daher mit der Geſtalt, Dichte oder materiellen Beſchaffenheit derſelben ändern, und daher auch dieſen Verſchiedenheiten gemäße Änderungen in der Beugung hervorbringen, welches nicht der Fall iſt. Will man, wie einige thun, die Beugung blos von einer Unterbrechung des Lichtſtromes ableiten, ſo fehlt doch auch dieſer Erklärung die nöthige Beſtimmtheit und man kann daraus nicht ein einziges Geſetz der Beugung deduciren.

229. Bekanntlich ertheilt man, um die Polariſationsphänomene begreifen zu können, jedem Lichttheilchen vier verſchiedene Seiten, deren je zwei einander gegenüberſtehende einerlei, die zwei daran grenzenden aber dieſen entgegengeſetzte Eigenſchaften haben, und nimmt an, in einem polariſirten Strahle kehren alle Lichttheil-

chen ihre gleichartigen Seiten nach derſelben Gegend hin. Es ſey ab (Fig. 154) ein ſolcher Lichtſtrahl, der durch Reflexion polariſirt worden iſt, und man denke ſich an einem Lichttheilchen desſelben drei auf einander ſenkrechte Axen x, y, z, wovon z in der Richtung ab liegt, y in der Reflexionsebene, x darauf ſenkrecht iſt. Fällt dieſer Strahl auf einen Spiegel unter dem Winkel der vollkommenen Polariſation ſo auf, daß die Einfallsebene auf der vorigen ſenkrecht ſteht, ſo wirkt die abſtoßende Kraft des Spiegels auf alle Theile von y y, gleich ſtark und vermag daher kein Theilchen zu reflectiren; dieſes erfolgt daher immer, wenn die abſtoßende Kraft des Körpers auf der Axe x ſenkrecht ſteht. Iſt die Kraft mit dieſer Axe parallel, ſo erfolgt die Reflexion des Lichtes. Die Axe x heißt die *Axe der Polariſation*. Bei einem das Licht doppelt brechenden Körper wird dieſe Axe ſtets ſo gedreht, daß ſie für die gewöhnlich gebrochenen Strahlen in einer Ebene liegt, welche durch die Fortpflanzungsaxe (z) und die Axe des Kryſtalls geht, für den ungewöhnlich gebrochenen hingegen auf dieſer ſenkrecht ſteht. Dieſe Stellung der Polariſationsaxe nehmen aber die Lichtſtrahlen nicht immer augenblicklich an, noch behalten ſie dieſelbe unverändert bei, ſondern ſie gelangen in einem Körper erſt ſucceſſiv zu einer beſtimmten Stellung dieſer Axe. Dringt ein polariſirter einfacher Strahl in eine doppelt brechende Subſtanz parallel mit ihrer Axe der doppelten Brechung ein, ſo verlieren die einzelnen Lichttheile ihren Polariſationszuſtand nicht augenblicklich, ſondern erſt in einer gewiſſen Tiefe, welche von der Brechbarkeit des Lichttheilchens abhängt. Nach dieſem gerathen ſie in Schwingungen nach zwei Seiten der Polariſationsaxe, ſo daß dieſe bald rechts, bald links gegen die Axe der doppelten Brechung liegt und jede Oſcillation erſtreckt ſich bis zu einer doppelt ſo großen Tiefe, als jene iſt, zu welcher das Lichttheilchen in das Mittel eindringen muß, um in Schwingungen zu gerathen. *Biot* hat dieſe Oſcillationstheorie mit allem ſeinen Scharfſinne ausgebildet. Er beſtimmt die Zeit einer Oſcillation, die Dicke des Stückes, welches bis zum Beginnen der Oſcillation durchlaufen wird, kurz alle Elemente dieſer Bewegung, und wendet ſie zur Erklärung der Farben im polariſirten Lichte an.

C. Vergleichende Würdigung beider Hypotheſen.

230. Zur Vergleichung dieſer zwei Hypotheſen iſt vor Allem nothwendig, daß man ſich die in jeder derſelben gemachten Voraus-

ſetzungen im Einzelnen deutlich vorſtelle. Dieſe Vorausſetzungen ſind für die Vibrationshypotheſe:

1) Der ganze Weltraum iſt mit einer ungemein feinen Flüſſigkeit, dem Äther erfüllt, deren Theile viel kleiner ſind, als der Abſtand je zweier derſelben von einander, und welche in dieſer Entfernung durch abſtoßende Kräfte erhalten werden, die den anziehenden das Gleichgewicht halten. Dieſe Theile laſſen ſich viel leichter verſchieben als zuſammendrücken.

2) Die Expanſivkraft des in den Zwiſchenräumen der Körper enthaltenen Äthers wird durch die anziehende Kraft derſelben beſchränkt. Je mehr dieſes der Fall iſt, deſto dichter muß demnach der Äther in einem Körper ſeyn, um dem im freien Raume enthaltenen das Gleichgewicht halten zu können.

3) Ein leuchtender Körper befindet ſich gleich einem ſchallenden in einer ſchwingenden Bewegung und ſetzt dadurch den Äther in eine gleiche Bewegung.

4) Die Schwingungen der Äthertheile erfolgen nach einer auf der Fortpflanzung ihrer Bewegung ſenkrechten Richtung.

5) Dieſe bis zur Netzhaut in unſerem Auge fortgepflanzten Schwingungen erregen daſelbſt die Empfindung des Lichtes. Die Stärke ihrer Einwirkung begründet die Intenſität des Lichtes oder die Helligkeit, die Frequenz derſelben, die Farbe.

Die Emanationshypotheſe ſetzt voraus:

1) Das Licht beſteht aus ſehr feinen, materiellen, trägen Theilchen, die von leuchtenden Körpern mit einer ungeheuren Geſchwindigkeit fortgetrieben werden und anziehende und abſtoßende Kräfte beſitzen.

2) Dieſe Lichttheilchen unterſcheiden ſich von einander an Maſſe und Trägheit und nicht alle beſitzen dieſelben anziehenden und abſtoßenden Kräfte, ja die Kraft jedes Theilchens iſt ſelbſt für verſchiedene Seiten desſelben verſchieden.

3) Die Lichttheilchen und die anderen Körper wirken vermög ihrer anziehenden und abſtoßenden Kräfte auf einander, jedoch iſt das Verhältniß der Kräfte der Lichttheilchen und der Körper für verſchiedene Lichttheilchen nicht gleich. Sie wirken auf einander nach Verhältniß ihrer Natur und Entfernung, jedoch iſt dieſe Einwirkung bei einer kaum angebbaren Entfernung nicht mehr merklich.

4) Das Geſetz dieſer Einwirkung beſtimmt häufig den Übergang einer Repulſion in Attraction und umgekehrt, und jedes

Theilchen befindet ſich auf dem Wege durch einen Körper periodiſch in zwei entgegengeſetzten Diſpoſitionen (Acceſſen), den abſtoßenden oder den anziehenden Kräften leichter zu gehorchen, gleich als wenn es in einer beſtändigen Rotation um ſeine Axe begriffen wäre, vermöge welcher es einem materiellen Theilchen bald eine anziehende, bald eine abſtoßende Seite zuwendet.

5) Jeder Körper beſteht aus materiellen Theilen, die viel kleiner ſind als ihre gegenſeitige Entfernung und laſſen daher Zwiſchenräume, durch welche ſich die Lichttheilchen geradlinig fortpflanzen können.

6) Die Lichttheilchen erregen durch einen Stoß auf die Netzhaut die Empfindung des Sehens. Die Trägheit (Maſſe) der Lichttheile beſtimmt die Farbe.

231. Bei einer Vergleichung der Vorausſetzungen nach dieſen beiden Anſichten kann es einem nicht entgehen, daß jene der Vibrationshypotheſe viel gleichartiger und einfacher ſind als jene der Emanationshypotheſe. Alle zielen darauf hin, eine vibrirende Bewegung von beſtimmter Art im Äther möglich zu machen, und dienen nur den Rechnungen über die Fortpflanzung dieſer Bewegung, die ganz nach den allgemeinen Geſetzen der Dynamik angelegt werden, zur Baſis. Die Vorausſetzungen der Emanationshypotheſe ſind verwickelter, beziehen ſich bald auf fortſchreitende, bald auf drehende Bewegungen, enthalten manches, dem gar keine Analogie zu Hilfe kommt und ſo viel Unbeſtimmtes, daß es ſcheint, als wollte man ſich dadurch nur die Freiheit vorbehalten, die Reſultate der Theorie mit der Erfahrung willkürlich in Einklang zu bringen und ſich dadurch gleichſam den Rücken frei halten. Von der Art ſind beſonders die ſogenannten Anwandlungen des Lichtes zur leichteren Reflexion und Transmiſſion. Erfolgt die Modification des Lichtes dieſer Anwandlung gemäß, ſo ſieht man darin eine Übereinſtimmung der Theorie mit der Erfahrung, erfolgt das Gegentheil, ſo ſieht man darin keinen Mangel der Theorie; denn das Licht hat ja nur eine Diſpoſition zu einer beſtimmten Modification, kann aber bei dringenden Umſtänden auch die entgegengeſetzte erleiden. In der ganzen Vibrationshypotheſe kommt nichts vor, das ſo viel Spielraum ließe, wie die Theorie der Anwandlungen und doch erklärt ſie dieſelben Phänomene, welche dieſe ins Leben riefen, vollſtändig. Ja man kann nicht umhin, bei der Hypotheſe der Anwandlungen an eine vibrirende Bewegung erinnert zu werden. Der Übergang

von einer Anwandlung in die entgegengeſetzte entſpricht dem Übergange der Oſcillation von einer Richtung in die andere, das ſucceſſive Wachſen der Diſpoſition von o bis zu einer beſtimmten Größe und das Abnehmen derſelben wieder bis o, worauf endlich der Übergang in die entgegengeſetzte Anwandlung erfolgt, iſt dem Zunehmen der Geſchwindigkeit der oſcillirenden Theile vom Anfange der Welle bis zu $\frac{1}{4}$ ihrer Länge, dem Abnehmen derſelben von da bis zu $\frac{1}{2}$ der Länge ꝛc. analog. Die verſchiedene Länge der Acceſſe bei verſchiedenfarbigem Lichte und das Geſetz der Abnahme derſelben mit der brechenden Kraft des Mittels ſteht der verſchiedenen Wellenlänge zur Seite u. ſ. f. Alle dieſe Puncte liegen aber in der Natur der vibrirenden Bewegung, ohne eine beſondere Vorausſetzung zu erfordern, nicht aber in der Natur der Emanation, ja erſtere reichen zur Erklärung faſt aller optiſchen Phänomene der Quantität und Qualität nach hin, während letztere kaum mehr erklären, als nothdürftig die Farben dünner Körper und das gleichzeitige Eintreten der Reflexion und der Brechung eines Lichtſtrahls.

232. Noch deutlicher ergibt ſich der comparative Werth dieſer zwei Anſichten, wenn man näher überlegt, was jede derſelben mit ihren Vorausſetzungen leiſtet. Die geradlinige Fortpflanzung und die gleichförmige Bewegung des Lichtes in einem homogenen Mittel ſo wie die Reflexion und Brechung erklärt man nach der Emanationshypotheſe ſehr wohl, das numeriſche Verhältniß beider, der Reflexion und Brechung zu einander hat man aber nicht ausmitteln können, ja ſelbſt in Hinſicht der Brechung bleibt ein Umſtand zurück, der gegen den Geiſt der Emanationshypotheſe ſpricht. Dieſem gemäß wird nämlich die Brechung durch eine anziehende Kraft des brechenden Mittels erklärt und der Strahl wird nur wegen einer Vermehrung ſeiner Geſchwindigkeit zum Lothe gebrochen. Aber aus den Interferenzphänomenen geht unzweideutig hervor, daß das Licht in einem mehr brechenden Körper ſich langſamer fortpflanzt als in einem weniger brechenden, denn wie könnte ſonſt der kürzere Weg im mehr brechenden Körper mit dem längeren im weniger brechenden gleichzeitig beſchrieben werden? Auch die Phänomene der doppelten Brechung glaubt man nach der Emanationshypotheſe erklären zu können, weil ſie ſich aus einer, von der optiſchen Axe ausgehenden Kraft, nach dem Geſetze der kleinſten Wirkung ableiten laſſen. Jedoch ſo lange man dieſe Kraft nicht näher beſtimmt hat, kann man nicht behaupten, das Phänomen erklärt, ſondern nur auf dynamiſche Prin-

cipien, nach denen jede, auch die vibrirende Bewegung erfolgen muß, reducirt zu haben. Ähnlich verhält ſich die Sache mit der Farbenzerſtreuung, mit der Polariſation, Interferenz; die Beugung endlich iſt der Natur dieſer Hypotheſe ganz entgegen. Überhaupt finden in der Emanationshypotheſe nur jene Phänomene eine Erklärung, bei denen eine Reduction auf dynamiſche Principien möglich iſt, ohne einer Einſicht in die eigentliche phyſiſche Urſache des Phänomens zu bedürfen.

233. Die Vibrationshypotheſe hat auch ihre ſchwierigen Parthien, jedoch ſind deren ohne Vergleich weniger als bei erſterer, und dieſe liegen meiſtens in den Schwierigkeiten der Rechnung. Man muß ſich öfters mit Analogien behelfen, die aus dem Bereiche der Akuſtik hergenommen ſind, und reicht ſelbſt mit dieſen in einigen Puncten, z. B. bei der Farbenzerſtreuung nicht aus. Indeß wird jeder unbefangene Beurtheiler eingeſtehen müſſen, daß ſie ſehr ſchwierige Parthien wie z. B. die Beugung, die Polariſation, die doppelte Brechung völlig genügend erklärt, und zu ſehr wichtigen Entdeckungen geführt hat, während die Anhänger der Emanationshypotheſe, von Newton an, alle ihre Entdeckungen nicht dem Leitfaden ihrer Hypotheſe, ſondern einzig ihrem Scharfſinne zu verdanken haben, welches wohl für die Entdecker ehrenvoll iſt, aber die Hypotheſe, der ſie anhingen, nicht ſonderlich empfiehlt.

234. Das Haupthinderniß, welches der Vibrationshypotheſe im Wege ſteht, iſt der Umſtand, daß ſie ſchwieriger zu verſtehen und anzuwenden iſt, als die Emanationshypotheſe und daß die meiſten Phyſiker an dieſe mehr als an jene gewöhnt ſind, wiewohl beim Schall dieſelben Vorſtellungen zum Grunde liegen, wie beim Lichte. Daß aber die Schwierigkeit einer klaren Einſicht kein Probirſtein für die Wahrheit einer Sache ſeyn kann, iſt klar; die Natur folgt dem kürzeſten Wege und bedient ſich der einfachſten Mittel, allein dieſe ſind für uns nicht immer die am leichteſten begreiflichen. Die meiſten Einwürfe, welche man ſchon in den älteſten Zeiten und zum Theile wieder neueſtens gegen dieſe Hypotheſe auf die Bahn gebracht hat, beruhen auf Mißverſtändniſſen, die jener leicht löſen wird, der ſich mit dem Weſen der Hypotheſe vertraut gemacht hat. Daß noch nicht alles gethan ſey und noch hie und da eine Schwierigkeit übrig bleibe, darf den nicht befremden, der den Zuſtand unſerer Kenntniſſe überhaupt kennt, kein Freund der Fortſchritte menſchlichen Wiſſens wird aber ohne innere Freude den Zuſammenhang

überblicken können, in welchen die einzelnen optiſchen Lehren gerade durch die Vibrationshypotheſe gebracht worden ſind.

Viertes Kapitel.

Optiſche Inſtrumente.

235. Durch zweckmäßige Anordnung von Spiegeln und Linſen erhält man jene wunderbaren Inſtrumente, durch welche wir den Bildern ſichtbarer Gegenſtände eine zu Beobachtungen, Meſſungen oder anderen Abſichten dienliche Lage geben, und durch welche wir ſie größer darzuſtellen im Stande ſind, als ſie dem Auge unmittelbar erſcheinen. Die zweckmäßige Einrichtung dieſer Inſtrumente iſt der Gegenſtand dieſes Kapitels.

A. Helioſtat.

236. Zu den meiſten optiſchen Verſuchen muß man den directen in das Beobachtungszimmer eindringenden Lichtſtrahlen eine beſtimmte Richtung geben, die man ungeachtet der ſcheinbaren Bewegung der Sonne ungeändert zu erhalten ſucht. Das Inſtrument, wodurch man dieſes erreicht, heißt Helioſtat und iſt ein Planſpiegel, der zur nöthigen Stellung gegen die auffallenden Sonnenſtrahlen mit einem dienlichen Mechanismus verſehen iſt. Mittelſt dieſes Mechanismus wird der Spiegel entweder mit der Hand oder durch ein Uhrwerk in Bewegung geſetzt.

Einen ſehr einfachen Helioſtat ohne Uhrwerk ſtellt Fig. 155 unter *A* perſpectiviſch, unter *B* im Durchſchnitte vor. Er beſteht aus einer metallenen Röhre, die gegen *b* hin offen, in *a* hingegen mit einem Deckel verſehen iſt, der eine kleine runde Öffnung hat. *C* iſt ein ovaler Spiegel, der ſich um eine Axe drehen läßt, die durch ſeine ſpiegelnde Ebene geht. Dieſe Axe iſt mit einer Rolle *d* in Verbindung, um welche eine Schnur ohne Ende geht, die zugleich die kleine Rolle *e* umfaßt. Dreht man am Knopfe *f*, ſo wird der Spiegel um ſeine Axe bewegt und dadurch der auf ihn fallende Lichtſtrahl ſo reflectirt, daß er parallel mit der Axe des Rohres fortfährt und durch die Öffnung am Deckel gehen kann. Um der Axe des Spiegels die gehörige Neigung gegen den Horizont zu ertheilen, braucht man das Rohr *a b* nur ſo durch ein Bret zu ſtecken, daß es darin durch

bloße Reibung feſthält und der Theil mit dem Spiegel außerhalb, der Theil mit dem Kopfe *f* innerhalb des Zimmers ſich befindet. Da bewirkt man leicht mit freier Hand die nöthige Drehung der Röhre, und bringt auch die Axe des Spiegels in die gehörige Lage. Das ganze Inſtrument braucht nicht über 3 Z. lang und 1½ Z. weit zu ſeyn. Der Spiegel iſt groß genug, wenn ſein größerer Durchmeſſer 1 Z., der kleinere ½ Z. beträgt.

237. Ein Helioſtat mit einem Uhrwerke läßt ſich entweder mit einem einzigen oder mit zwei Spiegeln einrichten. Ich ziehe ſtets den letzteren vor, weil er einfacher, leichter zu handhaben und zu ſtellen iſt, und überdieß richtiger geht. Der ſel. Fraunhofer bediente ſich immer eines Helioſtats mit 2 Spiegeln. Bei einem ſolchen wird durch den erſten Spiegel ein Lichtſtrahl ſtets parallel mit der Weltaxe reflectirt und kann demnach erſt durch den zweiten Spiegel, eine beliebige Richtung bekommen. Seine Einrichtung beruht auf Folgendem: Es ſey (Fig. 156) *AaF* die Ebene des Himmelsäquators, *C* die Erde, welche hier als Punct angeſehen werden kann, und *Pp* die Weltaxe, *Aa* endlich der Durchſchnitt der Mittagsebene des Beobachtungsortes mit dem Äquator, alſo die Mittagslinie. Befindet ſich die Sonne bei der Culmination in *S* und ſendet einen Strahl *SC* nach *C*, ſo iſt *Sa* ihre Abweichung $= d$. Soll dieſer Strahl durch einen Planſpiegel *Mm* nach *CP* reflectirt werden, ſo muß die in *C* auf dem Spiegel errichtete Senkrechte in der Ebene *SCP*, alſo in der Mittagsebene liegen und es muß überdieß $SCm = PCM$ ſeyn, oder es muß die auf dem Spiegel ſenkrechte *CD* den Winkel *PCS*, welcher den Abſtand der Sonne vom Pol $= 90° - d$ bezeichnet, halbiren. Es iſt demnach die Neigung der geraden Linie *DCE* zu Mittag gegen die Ebene des Äquators gleich $45° - \frac{d}{2}$; mithin, wenn *p* die Polhöhe des Beobachtungsortes bezeichnet, die Neigung des Spiegels gegen den Horizont $= 45° - p + \frac{d}{2}$. Da die Wiener Polhöhe 48° 12′ beträgt, ſo iſt dieſer Winkel für Wien $= \frac{d}{2} - 3° \, 12'$.

Kommt nun die Sonne von *S* nach *s* und ſieht man von der geringen Änderung ihrer Abweichung während der Zeit, als ſie den Stundenwinkel *a*, *Ca* beſchreibt, ab, ſo muß, wenn der reflectirte Strahl wieder nach *CP* hinfahren ſoll, das Einfallsloth wieder in

die Ebene PCs fallen. Dieſes wird geſchehen, wenn der Spiegel ſich auch um den Winkel a_1Ca um die Axe Pp gedreht hat. Iſt daher nach der Richtung Cp ein Stift am Spiegel angebracht, der mit CE den Winkel $45° - \frac{d}{2}$ macht, und mit einem Uhrwerk in Verbindung, das ihn gleichförmig in 24 St. einmal um 360° herumdreht, ſo wird der einfallende Strahl sC gegen den Nordpol P hingeworfen, und kann demnach durch einen gehörig geſtellten ruhenden Planſpiegel in jede beliebige Richtung gebracht werden.

Einen ſolchen Helioſtat ſtellt Fig. 157 vor, wie ihn das hieſige Muſeum beſitzt. A iſt eine Uhr, von gleicher Einrichtung mit einer gewöhnlichen Federuhr, nur mit dem Unterſchiede, daß der Stundenzeiger nicht in 12, ſondern in 24 Stunden einen Umlauf macht. An der Stange B iſt mittelſt einer Schraube eine runde Metallſtange C befeſtiget, welche mit der Weltaxe parallel lauft und mit einem Planſpiegel D verbunden iſt, deſſen Ebene gegen obige Stange unter einem Winkel von $45° + \frac{d}{2}$ geneigt iſt. Durch einen Quadranten läßt ſich dieſer Winkel genau ausmitteln. Der Spiegel und die Stange ruhen auf einem Geſtelle mit Frictionsrollen, welches dem Spiegel diejenige Bewegung geſtattet, die er durch den Gang der Uhr annehmen muß.

238. Einen Helioſtat mit einem Spiegel hat zuerſt 's Graveſande angegeben, Charles hat ihn etwas abgeändert und Hachette und Biot haben ihn berechnet. Später hat Gambey demſelben eine ganz andere Einrichtung gegeben. Doch ſcheint mir unter allen der von Prandi (Op. sc. di Bologna 1824 p. 244) am einfachſten zu ſeyn. Um den Bau dieſes Inſtrumentes einzuſehen, ſey SC (Fig. 158) ein Lichtſtrahl, der den Spiegel Mm trifft und von ihm nach der Richtung CA reflectirt wird. Man verlängere AC nach B, errichte CD ſenkrecht auf Mm und wähle den Punct B ſo, daß $BC = BD$ iſt. Zieht man BE auf CD ſenkrecht, ſo wird dadurch der Winkel CBD halbirt. Dasſelbe muß daher auch mit dem Winkel SCB durch Mm geſchehen, weil Mm auf CD ſenkrecht ſteht. Es wird daher der Strahl SC ſtets nach CA reflectirt werden, wenn nur die Bedingungen erfüllt ſind, daß CD auf Mm ſenkrecht ſteht und $BC = BD$ iſt. Dreht ſich überdieß das Ganze gehörig um die mit der Weltaxe parallele BP, ſo

wird die tägliche Bewegung der Sonne auf die Richtung von *CA* gar keinen Einfluß nehmen.

Auf dieſem beruht nun der in Fig. 159 abgebildete Helioſtat. *ABC* iſt eine dreieckige Baſis, die ſich mittelſt Stellſchrauben horizontal ſtellen läßt; von *C* nach *D* geht eine gerade Linie, die beim Gebrauche des Inſtrumentes in den Meridian des Beobachtungsortes fallen muß, ſo daß *C* gegen Süd gerichtet iſt. Nahe an *C* erhebt ſich die verticale Säule *D*, deren Axe genau in *DC* fällt und ſich in einen runden Kopf *T* endet, der den Bogen *EF* trägt, auf welchem der Radius *G*, welcher mit *H* unveränderlich verbunden iſt und mit ihm in einer geraden Linie liegt, die Anzahl Grade und mittelſt eines Nonius auch die Minuten abſchneidet, welche die Polardiſtanz des einfallenden Sonnenſtrahls bezeichnen. *R* iſt ein mit der Weltaxe paralleler und mit der Uhr verbundener Stift, welcher ſeine gehörige Stellung mittelſt des Gradbogens *S* erhält. An *H* iſt eine eigene Klammer *ab* befeſtiget, die genau durch den Mittelpunct des Kopfes der Säule *D* geht und den auf der Ebene des Spiegels K ſenkrechten Stift *L* aufnimmt. Der Spiegel iſt überdieß mittelſt einer Gabel an *MN*, *PQ* befeſtiget, doch läßt ſich der Stift dieſer Gabel um ſeine eigene Axe leicht drehen. Nun iſt es klar, daß, wenn *L* auf der Ebene des Spiegels ſenkrecht geſtellt und *TU* = *TK* iſt, dieſes beim Drehen des Apparates um die Axe *R* ſtets ſo bleiben, und deßhalb der reflectirte Strahl ununterbrochen dieſelbe Richtung beibehalten wird. Prandi gibt auch eine Vorrichtung an, wodurch es leicht wird, dieſe Richtung des reflectirten Strahles nach Belieben abzuändern, ohne den ganzen Apparat zerlegen zu müſſen. Das Weſentliche dieſer Einrichtung beſteht darin, daß ſich der Stift *L* auf einer Kugelfläche bewegen läßt, wodurch weder die ſenkrechte Lage von *L* auf dem Spiegel noch die Gleichheit der Abſtände *TK* und *TU* geändert wird. Da aber dieſe Bewegung nur im verticalen und horizontalen Sinne zu erfolgen braucht; ſo reicht man mit folgender Einrichtung aus: *Q* und *N* ſind zwei verticale Stützen, die mit dem horizontalen Bogen *O* verbunden ſind, welcher ſich in einem an der Baſis angebrachten kreisförmigen Ausſchnitte verſchieben läßt, und *PQ* und *MN* ſind zwei verticale Kreisbögen, in welchen ſich die viereckige Rahme verſchieben läßt, welche den Gabelſtift des Spiegels trägt.

B. Goniometer.

239. Die Geſetze der Reflexion des Lichtes in ebenen Spiegeln hat man zur Beſtimmung der Neigungswinkel glänzender, ebener Flächen, mithin auch zur Meſſung an Kryſtallen angewendet, und ihnen gemäß mehrere ſogenannte Goniometer eingerichtet. Hier ſoll vom Wollaſton'ſchen, Charles'ſchen und von meinem Goniometer insbeſondere die Rede ſeyn.

Wollaſtons Goniometer ſtellt Fig. 160 vor. Es beſteht aus einer am Rande eingetheilten verticalen Scheibe mit einem Nonius, die ſich mittelſt einer horizontalen Welle drehen läßt und auf einem verticalen Geſtelle ruht. Dieſe Welle iſt der Länge nach durchbohrt, und enthält in ſich eine andere concentriſche Welle, deren vorderes Ende in einen Kopf zum Drehen derſelben ausgeht, während das andere einen Bogen trägt, der ſich um die Welle wie um eine Axe drehen läßt und ſelbſt wieder von einem Stift durchbohrt iſt, der eine auf der genannten Axe ſenkrechte Bewegung geſtattet. Zu genauen Meſſungen ſoll die Baſis dieſes Inſtrumentes ſtets mit zwei rechtwinkelig gegen einander geneigten Libellen verſehen ſeyn.

Beim Gebrauche wird der Körper, an welchem der zu meſſende Winkel vorkommt, mittelſt Wachs auf letzterem Stift befeſtiget, ſo daß die Kante der Ebenen, welche jenen Winkel bilden, mit der inneren Axe des Inſtrumentes parallel iſt. Um zu erfahren, ob dieſes Statt findet, ſtellt man das Inſtrument auf eine horizontale Unterlage, einem weit entfernten Gegenſtande, z. B. einem Gebäude gegenüber, das mehrere horizontale Linien darbietet, oder an welchem zwei gerade über einander liegende Theile wahrzunehmen ſind, die gleiche Entfernung vom Inſtrumente haben. In jedem Falle muß die Ebene des getheilten Kreiſes mit der Linie parallel ſeyn, die man ſich durch beide Gegenſtände gezogen denkt; im erſteren dürfen aber der Kryſtall und die beiden Gegenſtände gerade nicht in einer durch den Kreis gehenden Ebene liegen, im zweiten Falle iſt dieſes unerläßlich. Nun hält man das Auge nahe an den Kryſtall und dreht ihn mittelſt des Kopfes der inneren Welle ſo lange, bis das reflectirte Bild einer der horizontalen Linien mit einer anderen direct geſehenen zuſammenfällt. Findet dieſes Zuſammenfallen beider Bilder auch noch Statt, wenn man den Kryſtall mittelſt der inneren Welle dahin gedreht hat, daß die Strahlen von

der zweiten Fläche ins Auge gelangen, ſo hat man die rechte Stellung der Kante getroffen; wo nicht, ſo muß man dieſelbe ſo lange verſchieben, bis dieſes erreicht iſt.

Iſt man dahin gelangt, ſo ſchreitet man zum Meſſen des Winkels. Zu dieſem Behufe ſtellt man den Limbus des Kreiſes ſo, daß der Nullpunct des Nonius mit dem des Kreiſes zuſammenfällt, und dreht den Kryſtall mittelſt der inneren Welle, bis an einer der beiden Flächen, die den zu meſſenden Winkel bilden, obige Coincidenz der zwei Bilder eintrifft. Dreht man hierauf mittelſt der größeren Welle, die zugleich auch die innere und den getheilten Kreis mit fortbewegt, den Kryſtall, bis auch an der zweiten Fläche das Zuſammenfallen des directen und reflectirten Bildes Statt hat, ſo iſt das Supplement des Drehungswinkels zu 180° das Maß des zu beſtimmenden Winkels. Gewöhnlich iſt die Theilung des Kreiſes ſo beziffert, daß die Zahlen gegen die Richtung der Drehung wachſen, und durch eine Feder, welche ſich an ein Hinderniß ſtemmt, die Drehung des Kreiſes nach entgegengeſetzter Richtung unmöglich gemacht wird. Daher läßt ſich obiger Winkel unmittelbar aus dem Stande des Nonius gegen den Kreisbogen ableſen.

240. Um die Theorie dieſes ſinnreichen Inſtrumentes einzuſehen, ſey MNL (Fig. 161) der zu meſſende Winkel, deſſen Kante auf der Ebene des Papiers ſenkrecht ſteht, A und B zwei mit einander und mit jener Kante parallele Linien, die auf dem Papier als Puncte A und B erſcheinen. Fällt von A der Strahl AC auf die ſpiegelnde Fläche MN, ſo wird er nach CO reflectirt. Befindet ſich in der Richtung von CO das Auge des Beobachters, ſo gelangt in dasſelbe auch unmittelbar ein Strahl von B und das Bild von A fällt ſcheinbar auf das von B. Wird nun der Winkel MNL um N ſo weit gedreht, daß NL in die Lage von MN oder deſſen Verlängerung Nx kommt; ſo erſcheint wieder das directe und reflectirte Bild von B und A in der geraden BO. Da hat man aber offenbar den Kryſtall um den Winkel $LNx = 180° - MNL$ gedreht.

241. Beſonders wichtig iſt die richtige Wahl der Gegenſtände, welche als Zielpunct bei der Anwendung dieſes Inſtrumentes gebraucht werden. Man pflegt häufig weit entfernte Objecte zu wählen und insbeſondere den horizontalen Theil eines Fenſterkreuzes, einen horizontalen Streifen eines, dem Beobachtungsort gegenüber ſtehenden Hauſes, oder ein helles Object und ſein Bild in einem Planſpiegel.

Man hält es gewöhnlich für nothwendig, beim Gebrauche dieſes Inſtrumentes Gegenſtände zum Ziele zu wählen, die in gleicher Entfernung vom Kryſtall ſich befinden, weil man da die Ebene des Kreiſes nicht mit ſo viel Sorgfalt zu ſtellen braucht; darum thut oft ein heller Gegenſtand und ſein Bild in einem horizontalen Planſpiegel gute Dienſte; doch ſoll er nicht auf lichtem, ſondern wo möglich auf dunklem Grunde erſcheinen, damit die Coincidenz der zwei Bilder genauer beobachtet werden kann. In jedem Falle ſoll dieſer Gegenſtand weit vom Auge entfernt ſeyn, weil man da manche kleine Größe vernachläſſigen kann, die bei einer geringen Entfernung des Viſirobjectes auf das Reſultat Einfluß nimmt. So ſollte z. B. ſtreng genommen, die Kante des Kryſtalls am zu meſſenden Winkel in die Drehungsaxe fallen; iſt aber das Viſirobject weit entfernt, ſo iſt es hinreichend, wenn dieſe Kante der Axe nur nahe ſteht und mit ihr parallel iſt. Es iſt ferner unmöglich, das Auge ſtets auf denſelben Punct des Kryſtalls zu richten, und doch ſoll dieſes zur Erzielung eines ſcharfen Reſultates der Fall ſeyn; denn ſo wie man das Auge bewegt, wird die ſchon hergeſtellte Coincidenz der zwei Bilder geſtört und man wird den Kryſtall etwas drehen müſſen, um ſie wieder herzuſtellen, eine abermalige Bewegung des Auges macht aber wieder ein neues Drehen des Kryſtalls nothwendig und ſo fort. Offenbar wird bei derſelben Größe der Kryſtallfläche eine kleine Bewegung des Auges einen deſto mehr oder weniger gegen die ſpiegelnde Fläche geneigten Strahl ins Auge bringen, je näher der Gegenſtand iſt, der ſich abſpiegelt und nur bei einem weit entfernten Objecte und einer kleinen Kryſtallfläche wird der Fehler vernachläſſiget werden können. Hieraus ſieht man zugleich, daß man ſtets nur kleine Kryſtalle brauchen ſoll; nur wenn die zwei Viſirobjecte ſenkrecht über einander ſtehen und gleichweit von der Spiegelebene entfernt ſind, wird man auch große Kryſtalle brauchen können, weil da in jedem Puncte der Kryſtallebene die Coincidenz der zwei Bilder Statt findet.

Alle Schwierigkeiten beſiegt man völlig, wenn man ſo verfährt: Man befeſtiget am oberen Theile eines Fenſters einen horizontalen Faden und läßt ihn von einem verticalen ſchneiden, ſo daß man ein rechtwinkeliges Kreuz erhält. Auf einem horizontalen Tiſche dieſem Fenſter gegenüber verzeichnet man ein ähnliches rechtwinkeliges Kreuz, ſo daß ein Arm desſelben mit dem verticalen des Kreuzes am Fenſter in derſelben Verticalebene liegt. Beim

Gebrauche des Inſtrumentes geht man immer darauf aus, das Bild des Kreuzes am Fenſter mit dem Kreuze auf dem Tiſche zur Coincidenz zu bringen. Auf ſolche Weiſe braucht Mohs das Goniometer.

Die meiſten Wollaſton'ſchen Goniometer leiden an dem Fehler einer ſchlechten Centrirung. Will man unterſuchen, ob dieſes bei einem beſtimmten Inſtrumente der Fall iſt, ſo darf man nur eine große Anzahl von Beobachtungen, die in verſchiedene Quadranten des Kreiſes fallen, anſtellen, wo dann offenbar die mittleren Werthe der in verſchiedenen Quadranten gemeſſenen Winkel verſchieden ſeyn werden, wenn der Mittelpunct des getheilten Kreiſes nicht in die Axe fällt oder das Inſtrument ſchlecht centrirt iſt. Dem von einer ſchlechten Centrirung herrührenden Fehler kann man nur durch Repetiren der Winkel entgehen.

242. Charles (oder nach einigen Malus) Goniometer iſt in Fig. 162 abgebildet. Es beſteht aus einem horizontalen getheilten Kreiſe, der ſich um eine verticale Axe drehen läßt und mit einer Alhidade verſehen iſt. An der Seite und in einerlei Höhe mit der Ebene des Kreiſes befindet ſich ein kleines Fernrohr, das im Geſichtsfelde ein feines Fadenkreuz hat. Der Kryſtall, deſſen Winkel gemeſſen werden ſoll, wird auf die horizontale Scheibe ſo geſtellt, daß die Kante der zwei Flächen, deren Neigung gemeſſen werden ſoll, in die Drehungsaxe der Alhidade und den Mittelpunct der Theilung fällt. Stellt man das Inſtrument ſo, daß von einem fernen Gegenſtande Licht auf eine der genannten Flächen fällt und das durch Reflexion entſtandene Bild im Fernrohr erſcheint, und den verticalen Faden im Geſichtsfelde desſelben trifft; ſo darf man die Alhidade nur ſo weit drehen, bis das Licht von der zweiten Fläche eben ſo, wie von der erſten reflectirt wird und das Bild des Viſirgegenſtandes wieder im Fernrohr geſehen wird. In dieſem Falle iſt der Drehungswinkel der Alhidade gleich 180° weniger dem zu meſſenden Winkel.

Aus den bei Wollaſtons Inſtrument angeführten Gründen muß wieder der Gegenſtand, deſſen Bild im Fernrohr erſcheinen ſoll, weit entfernt ſeyn.

243. Das von mir angegebene Goniometer beſteht aus einem belegten Planſpiegel *A* (Fig. 163) aus Glas mit vollkommen parallelen Wänden, der in ein meſſingenes Geſtell eingelaſſen iſt. Senkrecht auf der Ebene des Spiegels ſteht ein getheilter Quadrant *B*, der mit einer Alhidade verſehen iſt. Erſterer iſt an das Geſtell

unveränderlich befeſtiget, letztere hingegen ſteckt blos an einem cylindriſchen ſtählernen Stift *C*, der am äußeren Ende mit einem Kopf zum Drehen verſehen iſt, am anderen aber einen ſeine Axe bezeichnenden feinen Punct hat und dadurch in eigenen Pfannen in der Lage erhalten wird, wo ſeine Axe mit der ſpiegelnden Fläche vollkommen parallel iſt. Es iſt gut, wenn an der Spiegelfläche eine feine Linie verzeichnet iſt, welche mit der Axe der Alhidade in einer auf dieſer Fläche ſenkrechten Ebene liegt. Über dem Spiegel iſt ein rechtwinkeliges Knieſtück *a* an die Axe ſo angebracht, daß es mittelſt einer Stellſchraube an dieſelbe befeſtiget, aber auch davon los gemacht werden kann, und beide ſich von einander unabhängig bewegen können. Der andere Arm *b* dieſes Stückes lauft mit der Spiegelfläche parallel und es läßt ſich an ihm ein Schenkel *c* hin- und herſchieben und in jeder Lage mit einer Stellſchraube befeſtigen.

244. Will man mit dieſem Goniometer einen Flächenwinkel eines Kryſtalls meſſen, ſo kommt es darauf an, ob er ſpitzig oder ſtumpf iſt. Im erſteren Falle ſtellt man die Alhidade genau auf 90°, legt den Kryſtall mit einer der beiden Flächen, welche den zu meſſenden Winkel bilden, auf den Spiegel mit der Kante gegen den Nullpunct der Theilung gewendet, und bringt dieſe Kante an die feine Linie, welche am Spiegel die Richtung der Drehungsaxe bezeichnet, ſetzt den Kryſtall mit dem runden Stift in Berührung und befeſtiget ihn in dieſer Lage mittelſt des beweglichen Schenkels *c*. Erſt wenn dieſes geſchehen iſt, macht man den Schenkel *a* an der Welle feſt. Hierauf dreht man die Alhidade gegen die Ordnung der Ziffer am Kreisbogen ſo weit, bis die zweite Fläche des zu meſſenden Winkels und ihr Bild im Spiegel in einerlei Ebene erſcheinen. In dieſer Lage gibt die Zahl, welche am Quadranten die Lage der Alhidade bezeichnet, den geſuchten Winkel an. Iſt der zu meſſende Winkel ſtumpf, ſo führt ein gleiches Verfahren zum Ziele, nur mit dem Unterſchiede, daß man die Alhidade auf den Nullpunct der Theilung ſtellt und dann nicht die Kante am zu beſtimmenden Winkel, ſondern die zunächſt auf ſie folgende in die Lage der Drehungsaxe bringt, die Alhidade hierauf nach der Ordnung der Zahlen am Quadranten dreht, bis wieder obige Coincidenz eintritt, dann aber den gemeſſenen Winkel um 90° vermehrt.

Die Theorie dieſes Inſtrumentes iſt ſehr einfach. Es ſey *MN* (Fig. 164) der Querſchnitt eines Planſpiegels, *abc* der zu meſ-

ſende Winkel. Wird er in die Lage $a_1\, b_1\, c_1$ gebracht, in welcher $a_1\, b_1$ auf MN ſenkrecht ſteht, ſo erſcheint $a_1\, b_1$ und deſſen Bild in derſelben Ebene und es iſt $abc = 90^\circ - c_1\, b_1\, M$. Iſt hingegen der Winkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ zu meſſen, und man bringt ihn in die Lage $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$ wo wieder $\alpha_1\, \beta_1$ auf MN ſenkrecht ſteht, ſo hat man $\alpha\beta\gamma = 90^\circ + \beta_1\, \gamma_1\, N$.

C. Brennſpiegel.

245. Wenn man das directe Sonnenlicht mit einem Hohlſpiegel auffängt, deſſen halbe Öffnung x iſt, ſo wird es im Brennpuncte zu einem kreisrunden Bilde vereiniget, deſſen Durchmeſſer vom Krümmungsmittelpunct des Spiegels aus geſehen, unter demſelben Winkel (32′) erſcheint, wie das Sonnenbild dem freien Auge. Heißt demnach die Brennweite des Spiegels p, ſo hat man

$$x = p \text{ tang } 16', \text{ mithin nahe } x = \frac{p}{216}.$$

Setzt man die Dichte der Sonnenſtrahlen in ihrem natürlichen Zuſtande δ, im Brennpuncte des Spiegels $\varDelta$, ſo erhält man

$$\delta : \varDelta = \left(\frac{p}{216}\right)^2 : x^2 \text{ oder } \frac{\varDelta}{\delta} = 46656\, \frac{x^2}{p^2}.$$

Dieſer Dichte iſt nach der gewöhnlichen Annahme die erwärmende Wirkung proportionirt. Setzt man dieſe für die Strahlen von natürlicher Dichte $= 40^\circ C$, ſo hat man für die Erwärmung im Brennpuncte des Spiegels $= 1866240 \cdot \frac{x^2}{p^2}$.

Beträgt der Krümmungshalbmeſſer des Spiegels 10 F. und ſeine Öffnung 20°; ſo iſt $p = 10$ und $x = 3.49$, mithin die Erwärmung im Brennpuncte, gleich 223949°, in der Vorausſetzung, daß nichts an die Umgebung abgeliefert wird.

Man ſieht aus obiger Formel, daß die Kraft eines Brennſpiegels deſto größer iſt, je mehr Öffnung und eine je kürzere Brennweite er hat. Doch wird das Verhältniß dieſer zwei Größen zu einander durch die Abweichung der Strahlen beſchränkt.

Die Randſtrahlen vereinigen ſich nicht im Brennpuncte, ſonin einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer dem des Abweichungskreiſes gleich iſt. Soll daher dieſe nicht größer ſeyn als das Bild der Sonne im Brennpunct, ſo muß die Gleichung

$$\frac{p}{216} = \frac{x^2}{8p^2}$$

Statt finden, aus der man findet

$$x = \sqrt[3]{0.004654} = 9^\circ\ 36'.$$

Es darf daher ein ſolcher Brennſpiegel höchſtens eine Öffnung von $19^\circ\ 12'$ haben.

D. Brennglas.

246. Dieſelbe Wirkung, welche ein Hohlſpiegel hervorbringt, leiſtet auch eine Convexlinſe. Heißt x ihre halbe Öffnung, p ihre Brennweite, ſo erhält man wie vorhin

$$x = \frac{p}{216},\ \frac{\varDelta}{\delta} = 46656 \cdot \frac{x^2}{p^2}$$

und es iſt die Kraft eines ſolchen Inſtrumentes deſto größer, je größer ſeine Öffnung und je kürzer ſeine Brennweite iſt. Da allgemein $\frac{1}{p} = (n - 1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)$ iſt, ſo müſſen f und g, d. h. die beiden Halbmeſſer der Linſe dasſelbe Zeichen erhalten, oder die Linſe muß biconvex ſeyn.

Die Öffnung einer Brennlinſe läßt ſich wegen Mangel großer und dabei vollkommen gleichartiger Glasſtücke und der mit ihrer Größe ungemein zunehmenden Schwierigkeit der Ausführung nicht über eine beſtimmte Grenze vergrößern. Man hat allerlei Mittel vorgeſchlagen, aus kleinen Glasſtücken eine große Linſe zu Stande zu bringen. Eines dieſer Mittel beſteht darin, die Linſe aus einzelnen Zonen zuſammenzuſetzen, wie Fig. 165 zeigt.

247. Oft verbindet man mehrere Linſen ſo, daß ſie alle mit einander oder eine durch die andere wirken. Von erſterer Verbindung ſtellt (Fig. 166) ein Beiſpiel vor. Die Linſen ſind in Form eines regelmäßigen Polygons um ihren gemeinſchaftlichen Brennpunct herumgeſtellt und für die ſchief gegen das einfallende Sonnenlicht ſtehenden ſind Planſpiegel angebracht, die ihnen Sonnenlicht in der gehörigen Richtung zuſenden. Fängt man die ſchon von einer Linſe convergirend gemachten Sonnenſtrahlen, bevor ſie ſich vereinigen, durch eine zweite Sammellinſe (Collectivlinſe) auf, ſo hat man einen Apparat, wo eine Linſe durch die andere wirkt. Heißt p_1 die Brennweite der Collectivlinſe, h die Entfernung beider Linſen von

einander, $a_{,}$ und $\alpha_{,}$ die Gegenſtands- und Bildweite für die zweite Linſe, ſo hat man

$$\frac{1}{\alpha_{,}} = \frac{1}{p_{,}} - \frac{1}{a_{,}} \text{ und } \alpha_{,} = \frac{a_{,}p_{,}}{a_{,}-p_{,}}$$

aber $a_{,} = -(p-h)$, und daher

$$\alpha_{,} = \frac{p_{,}(p-h)}{p+p_{,}-h}.$$

In demſelben Verhältniſſe, in welchem die Vereinigungsweite der Strahlen durch die Collectivlinſe verkürzt wird, nimmt der Durchmeſſer des Sonnenbildes ab und man erhält demnach, wenn man die Dichte des Sonnenlichtes im Brennpuncte der erſten Linſe Δ, im Brennpuncte der zweiten $\Delta_{,}$ nennt:

$$\frac{\Delta_{,}}{\Delta} = \left(\frac{a_{,}}{p-h}\right)^2 = \left(\frac{p+p_{,}-h}{p_{,}}\right)^2.$$

Setzt man für Δ den vorhin gefundenen Werth, ſo erhält man

$$\Delta_{,} = 46656\,\frac{x^2}{p^2}\left(\frac{p+p_{,}-h}{p_{,}}\right)^2.$$

Hat die erſte Linſe einen Öffnungshalbmeſſer von 10 Z. und eine Brennweite von 40 F., ſo iſt $\Delta = 2916$, wird damit eine Collectivlinſe von 2 Z. Brennweite verbunden und in einer Entfernung von 1 F. aufgeſtellt, ſo iſt $\frac{\Delta_{,}}{\Delta} = 225$ und die Wirkung des ganzen Apparates $= 225 \times 2916 = 656100$.

E. Brillen.

248. Ein geſundes Auge ſieht ein Object in der Entfernung von 8 Z. am deutlichſten. Manches Auge verlangt aber, um die größte Deutlichkeit zu erlangen, eine Entfernung des Objectes, die viel größer oder kleiner iſt, als die genannte. Ein ſolches Auge braucht demnach eine Linſe, um bei der Entfernung von 8 Z. am deutlichſten zu ſehen.

Heißt die Entfernung, in welcher ein ſolches Auge am deutlichſten ſieht, a, ſo bringt eine Linſe von der Brennweite p, die ſich vor dem Auge befindet und innerhalb deren Brennpunct das Object ſteht, ein Bild desſelben in der Entfernung A hervor, und man hat

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{A} - \frac{1}{a} \text{ und } p = \frac{Aa}{a-A}.$$

Iſt nun A die deutliche Sehweite eines geſunden Auges, ſo gibt p die Brennweite der für das kranke Auge paſſenden Brille an. Man ſieht, daß man eine Linſe mit poſitiver Brennweite (Sammellinſe) braucht, wenn $a > A$ oder das Auge weitſichtig iſt, und daß eine Hohllinſe zweckdienlich iſt, ſobald $a < A$ oder das Auge kurzſichtig iſt. Ein Weitſichtiger, der etwa in der Entfernung von 24 Z. ein Buch leſen kann, wird dieſes in der Entfernung von 8 Z. leſen können, wenn er ſich einer Linſe von $\frac{24.8}{24-8} = 12$ Z. Brennweite bedient.

Es hält nicht ſchwer, für ein bekanntes Auge die Krümmungshalbmeſſer der paſſenden Brille zu finden. Da nämlich $\frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)$ iſt, ſo erhält man mittelſt der vorhin entwickelten Gleichung

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{a-A}{Aa\,(n-1)}.$$

Da Brillen meiſtens aus Glas beſtehen, wofür $n = 1.5$ iſt, ſo wird

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{2\,(a-A)}{Aa}.$$

Es iſt klar, daß man bei Brillen eigentlich nicht auf Vergrößerung ausgeht; indeß bewirkt doch ein Sammelglas, deſſen ſich ein Weitſichtiger bedienen muß, eine geringe Vergrößerung, aber nur in ſo ferne, als es eine größere Annäherung des Gegenſtandes an das Auge zuläßt. Aus dem entgegengeſetzten Grunde verkleinern Hohlgläſer für den Kurzſichtigen.

Brillen, die ihrer Faſſung nach bald mit einer, bald mit der anderen Seite gegen das Auge gekehrt ſeyn ſollen, müſſen auch auf beiden Seiten gleiche Krümmungen haben, und für ſolche iſt dann $g = \frac{Aa}{a-A}$; jene aber, wo ſtets eine beſtimmte Fläche gegen das Auge gewendet iſt, werden am beſten convex-concav gemacht und die concave Seite gegen das Auge gekehrt. Solche Linſen haben aber nicht etwa eine geringere Kugelabweichung, ſondern ſie gewähren den Vortheil, daß faſt an jeder Stelle der Brille die Lichtſtrahlen denſelben Winkel mit der Axe der Pupille machen. Das Auge hat nämlich wegen der geringen Öffnung der Pu-

pille ein ſehr geringes Geſichtsfeld und muß ſich, wenn es einen etwas großen Gegenſtand überſehen will, unvermerkt und ſehr ſchnell von einem Ende desſelben zum anderen bewegen. Iſt es mit einer gewöhnlichen Brille bewaffnet, ſo bekommt es beim Fortſchreiten durch die Öffnung der Brille Strahlen von verſchiedener Convergenz, und falls diejenigen, welche es erhält, wenn die Axe des Auges mit der Axe der Brille zuſammenfällt, ſich auf der Netzhaut zu einem deutlichen Bilde vereinigen, ſo wird dieſes mit denjenigen nicht der Fall ſeyn, welche da ins Auge gelangen, wo ſeine Axe gegen die der Linſe geneigt iſt. Dieſe Ungemächlichkeit, welche das Auge zu beſtändigen, ſehr ſchnellen, inneren Veränderungen zwingt, iſt an den Convexconcavlinſen am wenigſten vorhanden, wenn die beiden Flächen überhaupt das rechte Krümmungsverhältniß haben. Solche Brillen haben den einzigen Fehler, daß ſie ſtark ſpiegeln, indem die äußere Glasfläche für das von der inneren reflectirte Licht wie ein Hohlſpiegel wirkt und falſche Bilder erzeugt. Man kann dieſem Übel dadurch abhelfen, daß man der äußeren Krümmung einen ziemlich großen Halbmeſſer gibt, und dadurch den Vereinigungspunct der von ihr nach dem Auge reflectirten Strahlen hinter die Netzhaut fallen macht.

Manches Auge fordert ſtatt einer ſphäriſchen eine cylindriſche Brille, weil entweder die Hornhaut oder die Kryſtalllinſe nicht nach allen Richtungen gleich gekrümmt iſt.

Schwachen Augen empfiehlt man öfters den Gebrauch von Linſen mit ſehr großen Brennweiten, die man Conſervationsbrillen nennt.

249. Außer der dem Auge anpaſſenden Brennweite müſſen Brillen noch einige andere Eigenſchaften haben, die leider ſowohl von Künſtlern, als auch von denen, die ſie brauchen, oft unbeachtet bleiben, deren Vernachläſſigung aber dem Auge großen Schaden zufügen kann.

Vor allem iſt nothwendig, daß die Krümmung an allen Stellen demſelben Radius entſpreche. In Ermanglung dieſer Eigenſchaft hat die Linſe gleichſam mehrere Brennpuncte und ſcheint verſchiedenen Augen anpaſſend zu ſeyn, während ſie doch für keines tauglich iſt. Dieſer Fehler der Geſtalt kommt am häufigſten vor, iſt für Layen ſchwer zu kennen und darum iſt es räthlich, nur von anerkannt guten Künſtlern Brillen zu brauchen. Ungleiche Krümmungen in den zwei Linſen derſelben Brille ſind auch keine Seltenheit

und bewirken in gleich organiſirten Augen eine ſchädliche Ungleichheit. Einige Brillen beſtehen aus Glas, das Streifen, Wellen oder überhaupt heterogene Stellen hat. Da dieſe das Licht anders brechen als die übrigen Theile, ſo hat eine ſolche Brille bei einer richtigen Geſtalt die Fehler, welchen Brillen von ungleicher Krümmung unterliegen. Sehr weſentlich iſt übrigens auch noch die Farbe des Glaſes. Brillen aus einem weißen Glaſe ſind für nicht beſonders reizbare Augen ohne Zweifel am tauglichſten, ſolche hingegen, die ſich gegen das weiße Licht bewahren müſſen, thun gut, Brillen aus ſchwach gefärbtem, blauem oder grünem Glaſe zu brauchen. Letztere geben aber ſelbſt der erfreulichſten Gegend einen todten, düſteren Anſtrich, und bewirken, daß das Auge auch ohne Brillen alles in einem röthlichen Teint ſieht, ſo daß demnach nur ſchwach blaues Glas anwendbar bleibt. Allein Linſen aus ſolchem, ſo wie aus jedem anderen farbigen Glaſe erſcheinen an den dünneren Stellen beinahe weiß, während an den dickeren die Glasmaſſe farbig iſt, und ſchaden dem Auge durch dieſe Ungleichheit. Darum iſt es räthlich, wenn man ſchon zu farbigen Brillen ſeine Zuflucht nimmt, nur ſolche zu brauchen, wo die eigentliche Linſe aus weißem Glas beſteht, mit derſelben aber eine farbige Schale, wie ein Uhrglas mittelſt eines farbloſen Kittes (aus Canadabalſam und Quajacharz) verbunden iſt. Sehr weſentlich iſt endlich noch die Faſſung der Brillen. Dieſe ſoll den Linſen geſtatten, ſehr nahe ans Auge geſtellt werden zu können, ſoll ſich nicht verziehen, um nicht die Axen der Gläſer zu verwenden und endlich den zwei Linſen jene Entfernung von einander geben, welche dem Auge anpaſſend iſt.

Es erübriget nun noch die Sehweite für irgend ein Auge zu beſtimmen, um für dasſelbe die rechte Brennweite wählen zu können. Manche Künſtler ſtellen allgemeine Regeln auf, welchen gemäß ſich die Brennweite der Brille nach dem Alter desjenigen, der ſie braucht, richtet. So z. B. räth Chevallier folgende Brennweiten an:

für	25 — 35	Jahre eine Brennweite von	6 F. — $2\frac{1}{2}$ F.
„	35 — 45	——	——	24 Z. — 16 Z.
„	45 — 55	——	——	$14\frac{1}{2}$ „ — 8 „
„	55 — 70	——	——	$12\frac{1}{2}$ „ — 7 „
„	70 — 90	——	——	8 „ — 4 „

Daß ſolche Angaben nur einen Mittelwerth enthalten, verſteht ſich von ſelbſt. Meiſtens muß jener, der ſich einer Brille be-

dienen will, dieſelben aus einem großen Vorrathe derſelben aus= ſuchen. Da glückt es aber ſelten, die rechte Brennweite zu finden, weil das Auge, falls ihm nicht der günſtige Zufall gleich Anfangs die rechte Linſe in die Hände ſpielt, durch die häufigen mißlunge= nen Proben ermüdet und aus ſeinem gewöhnlichen Zuſtand gebracht wird. Darum iſt es räthlich, daß jeder Brillenhändler ein Inſtru= ment beſitze, mittelſt welchem man auf den erſten Blick die opti= ſche Beſchaffenheit des Auges erkennt.

Das einfachſte Inſtrument dieſer Art iſt eine Converlinſe von genau bekannter Brennweite $= p$, die ſich auf einem Lineal ver= ſchieben läßt und mittelſt der man auf ein kleines Object, das ſich auf demſelben Lineale erhebt, hinſieht. Schiebt man das Object ſo nahe an die Linſe, bis man es am deutlichſten ſieht und beſtimmt die Entfernung der Linſe vom Objecte $= a$, ſo läßt ſich die deut= liche Sehweite $a_{\text{,}}$ aus der Formel

$$a_{\text{,}} = \frac{a+p}{ap}$$

leicht berechnen. Man kann den Werth dieſes Ausdruckes unmittel= bar auf das Lineal verzeichnen und ſo die Geſichtsweite gleich von demſelben ableſen. Dieſe Größe beſtimmt dann die Nummer der Brille, welche ſelbſt die Brennweite derſelben in Zollen ausdrücken ſoll, aber von einigen Künſtlern abſichtlich ſo gewählt wird, daß man daraus die genannte Brennweite gar nicht abzunehmen im Stande iſt.

F. Fernröhre. 1. Theorie derſelben.

250. Die Theorie der Fernröhre zerfällt in zwei Theile, in die des Objectives und in die der Oculare. Jeder dieſer Theile fordert eine beſondere Behandlung. Wir wollen mit der Conſtruc= tion des Objectives den Anfang machen und dieſes zuerſt für die dioptriſchen Inſtrumente betrachten.

251. Will man ſich mit einem einfachen Objective begnü= gen, ſo darf man dieſes nur ſo conſtruiren und ſtellen, daß das Bild von der ſphäriſchen Abweichung möglichſt frei wird und hat durch Deckung des Randes die Randſtrahlen abzuhalten, damit keine zu große chromatiſche Abweichung hervorgebracht werde. Ein viel größeres Stück Arbeit hat man vor ſich, wenn man ein dop= peltes Objectiv conſtruiren will, um der chromatiſchen Abweichung

zu begegnen. Handelte es ſich da blos darum, dieſe Abweichung allein aufzuheben, ſo hätte man nur auf die Brennweiten der zwei Beſtandlinſen zu ſehen und dieſelben ſo zu wählen, wie es die (S. 429) entwickelten Gleichungen fordern; allein man will auch zugleich die ſphäriſche Abweichung möglichſt beſeitigen und dazu iſt ein beſtimmtes Verhältniß der Krümmungen der vier Flächen der Doppellinſe nothwendig.

252. Um dieſes Verhältniß zu finden, wollen wir den Weg eines Lichtſtrahles durch die Doppellinſe genau verfolgen. Zu dieſem Ende benützen wir für die erſte Linſe die auf (S. 400) entwickelten Formeln, welche ich der beſſeren Überſicht wegen hier noch einmal zuſammenſtelle:

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{b}{a+f}\sin r \\ \sin s &= \frac{1}{n}\sin r \\ \varepsilon &= \psi - s \\ k &= f + \frac{f\sin s}{\sin\varepsilon} \end{aligned}\right\} a \;;\quad \left.\begin{aligned} \sin r_1 &= \frac{k+g-c}{g}\sin\varepsilon \\ \sin s_1 &= n\sin r_1 \\ \zeta &= \varepsilon + s_1 - r_1 \\ \alpha &= \frac{g\sin s_1}{\sin\zeta} - g \end{aligned}\right\} b.$$

Nun wollen wir dieſelben Größen für die zweite Linſe beſtimmen. Es ſey SE (Fig. 167) die Axe dieſer Linſe, xB der bereits in der erſten Linſe gebrochene Strahl, der ohne Dazwiſchenkunft der Hohllinſe die Axe in E geſchnitten hätte. Zieht man den Radius $GB = f_1$ und den gebrochenen Strahl BK, hierauf in H den Halbmeſſer $HC = g_1$ und den zum zweiten Male gebrochenen Strahl HF; ſo iſt $LF = \alpha_1$ die Vereinigungsweite der Strahlen in der Doppellinſe. Man führe nun außer den ſchon angegebenen Charakteren folgende ein: ρ_1, σ_1, k_1, c_1, ζ_1, ζ_1, n_1 und gebe ihnen die Bedeutung, welche dieſelben ohne Accent bei der erſten Linſe haben, nenne ferner die Entfernung der beiden Linſen von einander h, und man erhält:

$$\sin\rho = \frac{(f_1 + h - \alpha)\sin\zeta}{f_1}\;;\quad \sin\rho_1 = (-g_1 - k_1 + c_1)\frac{\sin\varepsilon_1}{g_1}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\sigma &= \frac{1}{n_1}\sin\rho \;; \\ \varepsilon_1 &= \zeta + \sigma - \rho \;; \\ k_1 &= f_1 - \frac{f_1\sin\sigma}{\sin\varepsilon_1} \;; \end{aligned}\right\} c \quad \left.\begin{aligned} \sin\sigma_1 &= n_1\sin\rho_1 \\ \zeta_1 &= \varepsilon_1 + \rho_1 - \sigma_1 \\ \alpha_1 &= -g_1 - \frac{g_1\sin\sigma_1}{\sin\zeta_1} \end{aligned}\right\} d.$$

Dieſe Gleichungen gelten ſo wie die vorigen allgemein. Nimmt man aber die Winkel ſo klein an, daß man $\sin\rho=\rho$, $\sin\sigma=\sigma$, $\sin s=s$, $\sin r=r$ ꝛc. ſetzen kann, ſo bekommt man folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\frac{f}{k} &= \frac{a\,(n-1)-f}{a\,n}\\ \frac{g}{\alpha} &= \frac{n\,g}{k-c}+n-1\\ \frac{f_1}{k_1} &= \frac{f_1}{n_1\,(\alpha-h)}+\frac{n_1-1}{n_1}\\ \frac{g_1}{\alpha_1} &= \frac{n_1\,g_1}{k_1-c_1}+n_1-1\end{aligned}\right\}\, e.$$

Man eliminire nun aus dieſen Gleichungen die Größen k, k_1 und α und ſtelle α_1 als Function von n, n_1, c, c_1 a, f und g dar. Zur Erleichterung dieſer Arbeit und um einen einfacheren Ausdruck zu bekommen, vernachläſſige man die zweiten und höheren Potenzen von c und c_1, ſo wie die Producte aus c in c_1 und die Größe h. Auf dieſe Weiſe erhält man:

$$\frac{1}{\alpha_1}=(n-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)+n_1-1)\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{g_1}\right)+$$
$$+\left(\frac{n-1}{f}-\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{c}{n}$$
$$+\left(\frac{n-1}{f}+\frac{n-1}{g}+\frac{n_1-1}{f_1}-\frac{1}{a}\right)^2\frac{c_1}{n_1}\ldots\ (f).$$

Fallen die Strahlen von einem ſehr weit entfernten Objecte auf die Linſe ſo, daß $a=\infty$ geſetzt werden kann, ſo hat man:

$$\frac{1}{\alpha_1}=(n-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)+(n_1-1)\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{g_1}\right)+\frac{(n-1)^2\,c}{f^2\,n}$$
$$+\left\{(n-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)+\frac{n_1-1}{f_1}\right\}^2\frac{c_1}{n_1}\ldots\ (g).$$

Dieſer Ausdruck gibt die Vereinigungsweite der Centralſtrahlen von einem beſtimmten Grade der Brechbarkeit, während man die Vereinigungsweite der Randſtrahlen findet, wenn man $\frac{1}{\alpha_1}$ und hiermit α_1 ſelbſt nach den Gleichungen (a, b, c, d) berechnet.

253. Soll die Linſe achromatiſch ſeyn, ſo muß α_1 denſelben

Werth behalten, wenn auch n und n_1 in $n+dn$ und n_1+dn_1 übergehen. Differenziirt man daher die Gleichung (f) nach den Variablen n, n_1 und α_1, ſo muß $d\alpha_1 = 0$ ſeyn. Verrichtet man dieſe Operation, ſetzt $\frac{dn}{dn_1} = \omega$ und vernachläſſiget die Dicke c_1 der zweiten, ohnehin concaven Linſe; ſo wird

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{g_1}=-\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)\omega-\frac{1-n^2}{n^2}\cdot\frac{c\,\omega}{f^2}-\frac{c}{a}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{a}\right)\frac{\omega}{n^2}\ (h)$$

oder für $a=\infty$

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{g_1}=-\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)\omega-\frac{1-n^2}{n^2}\cdot\frac{c\,\omega}{f^2}\ \ldots\ (i).$$

Dieſe Gleichung enthält demnach die Bedingung der Farbenloſigkeit. Nimmt man die Halbmeſſer der erſten Linſe gleich groß, und die Brennweite der Linſe als Einheit aller übrigen Dimenſionen an, ſo hat man $f=g=2\ (n-1)$ und

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{g_1}=-A\omega\ \ldots\ldots\ (k)$$

wo für divergirend auffallende Strahlen

$$A=\frac{1}{n-1}\left[1+\frac{1+n}{4n^2}\,c\right]+\frac{c}{an^2}\left(\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{a}\right)\ (l)$$

oder für parallele

$$A=\frac{1}{n-1}\left(1+\frac{1+n}{4n^2}\,c\right)$$

iſt.

Werden dieſe Werthe in die Gleichung (f) geſetzt, ſo erhält man:

$$\frac{1}{\alpha_1}=1-(n_1-1)A\omega+\frac{c}{4n}\ \ldots\ldots\ (m).$$

254. Nun iſt man im Stande, die Halbmeſſer der Doppellinſe anzugeben, wenn n, n_1, dn und dn_1 bekannt ſind.

Man ſuche nämlich zuerſt aus der Gleichung

$$f=g=2\ (n-1)$$

die Größen f und g; hierauf aus (l) und (m) die Größen A und α_1. Nun nimmt man irgend einen von g nur wenig verſchiedenen Werth für f_1 an, oder ſetzt gar $f_1=f$, und ſucht damit die Werthe g, $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{e}_1$ α_1 aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{1}{g_1} = -\frac{1}{f_1} - \Delta\omega, & \sin\rho = (f_1 - \alpha)\,\frac{\sin z}{f_1} \\ \sin\sigma = \frac{1}{n_1}\sin\rho, & \varepsilon_1 = z + \sigma - \rho \\ \sin\rho_1 = \left(\frac{f_1 \sin\sigma}{\sin.\varepsilon_1} - (f_1 + g_1)\right)\frac{\sin\varepsilon_1}{g_1}; & \sin\sigma_1 = n_1 \sin\rho_1\end{array}\right\} n$$

$$z_1 = \varepsilon_1 + \rho_1 - \sigma_1\,; \quad \alpha_1 = -g_1 - g_1 \cdot \frac{\sin\sigma_1}{\sin.z_1}\,.$$

Bei der Doppellinſe ſoll nicht blos die chromatiſche, ſondern auch die ſphäriſche Abweichung aufgehoben werden. Daß dieſes durch die Zuſammenſetzung der Linſe aus einer concaven und einer convexen möglich ſey, iſt leicht einzuſehen. Durch die Convexlinſe werden nämlich die Strahlen deſto convergirender, je weiter von der Mitte ſie auffallen, in einer Concavlinſe werden ſie aber in demſelben Maße divergirender. Fallen nun die Strahlen von der Convexlinſe auf die Concavlinſe, ſo wird ein Theil ihrer Abweichung in erſterer durch die letztere aufgehoben. Um nun einen möglichſt großen Theil derſelben aufzuheben, müſſen die Halbmeſſer der zwei Linſen ein gewiſſes Verhältniß zu einander haben. Um dieſes zu finden, ſuche man α_1 aus der letzten Gleichung. Stimmt nun der ſo gefundene Werth von α_1 mit dem aus (m) ſich ergebenden hinreichend überein, ſo iſt die Linſe frei von der ſphäriſchen Abweichung, indem Central- und Randſtrahlen dieſelbe Vereinigungsweite haben, und da der Natur der Gleichung nach ſie auch frei von der chromatiſchen Abweichung iſt, ſo hat man die Aufgabe, die Halbmeſſer einer von beiden Abweichungen freien Doppellinſe zu beſtimmen, gelöſet. Stimmen die beiden Werthe von α_1 nicht genau genug mit einander überein, ſo muß man die Rechnung mit einem etwas veränderten Werth von f_1 neuerdings vornehmen und dieſes Verfahren ſo oft wiederhohlen, bis man ſich der Vollkommenheit ſo weit genähert hat, als man es wünſcht. Iſt α_1 bei der zweiten Rechnung größer als bei der erſten, ſo iſt f_1 zu groß angenommen, und man muß es für die zweite Rechnung verkleinern; das Gegentheil muß geſchehen, wenn α_1 bei der zweiten Rechnung kleiner ausfällt als bei der erſten. Heißt f_1' der erſte Werth von f_1, für welchen die Differenz der beiden Werthe von α_1 gleich d, und iſt d_1 dasſelbe für einen zweiten Werth von $f_1 = f_2'$, ſo iſt der verbeſſerte Werth von f_1'

$$f_1' + \frac{d(f_1'-f_2')}{d-d_1}.$$

Ein Beiſpiel wird die Sache noch mehr erläutern. Man ſuche die Halbmeſſer einer Doppellinſe, auf welche parallele Strahlen auffallen, wovon ſie die äußerſten unter einem Winkel von 10° treffen; die Dicke der erſten Linſe ſey 0.01, ferner ſeyen $n = 1.53$, $dn = 0.006$, $n_1 = 1.58$ und $dn_1 = 0.009$. Hier iſt zuerſt

$$f = g = 1.06,$$
$$z = 10^\circ\ 5695.''1, \quad \alpha = 0.94261$$
$$A\omega = 1.2612603, \quad \alpha_1 = 3.702292.$$

Man nehme nun in der indirectenBerechnung von f_1 anfangs $f_1 = -1.06$, ſo wird nach zwei Verſuchen $f_1 = -1.04394$ und daraus $g_1 = -3.296512$. Es iſt demnach die erſte Linſe biconvex, die zweite biconcav und die Brennweite der Doppellinſe $= 3.702292$. Dieſe Berechnung rührt von unſerem gelehrten Aſtronomen Littrow her, und iſt in B. 3 der Zeitſch. f. M. u. Phyſ. näher dargeſtellt, wo man zugleich auch die zur Erleichterung der Berechnung nöthigen Tafeln von demſelben Gelehrten findet.

255. Außer dieſer indirecten Methode zur Beſtimmung der Krümmungshalbmeſſer einer achromatiſchen Doppellinſe gibt es noch mehrere directe, wovon eine von Herſchel herrührende ſich beſonders berühmt gemacht hat. Um den von Herſchel betretenen Weg einſchlagen zu können, ohne in zu verwickelte Formeln zu gerathen, wollen wir, ſeinem Beiſpiele folgend, lauter reciproke Werthe für die in Rechnung kommenden Größen einführen. Es ſey demnach $\frac{1}{a} = A$, $\frac{1}{\alpha_1} = B$, $\frac{1}{p} = Q$, $\frac{1}{f} = F$, $\frac{1}{g} = G$ und eben ſo $\frac{1}{a_1} = A_1$, $\frac{1}{\alpha_1} = B_1$, $\frac{1}{p_1} = Q_1$ ꝛc. und man denke ſich die zwei Beſtandlinſen in Berührung, vernachläſſige ihre Dicke und betrachte die Brennweite der Doppellinſe als Einheit aller übrigen Größen. Da hat man nun zuerſt

$$Q + Q_1 = 1 \ldots\ldots. (0).$$

Die Bedingung, unter welcher die chromatiſche Längenabweichung aufgehoben wird, iſt in der Vorausſetzung, daß $\frac{dn}{n-1} = \beta$, $\frac{dn_1}{n_1-1} = \beta_1$ geſetzt werde:

$$Q\beta + Q_1\beta_1 = 0 \ldots\ldots (p)$$

und aus (o) und (p)

$$Q = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta};\ Q_1 = \frac{-\beta}{\beta_1 - \beta}.$$

Die ſphäriſche Abweichung iſt für eine Linſe

$$-\frac{n\alpha^2 x^2}{2(n-1)p}\left\{n\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)+\frac{2n+1}{k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{n+2}{k^2}\right\}.$$

Weil aber $\frac{1}{\alpha} = \frac{n-1}{f} + \frac{n-1}{g} - \frac{1}{a}$; $\frac{1}{k} = \frac{n-1}{nf} - \frac{1}{na}$ iſt, ſo erhält man

$$-\frac{n^2\alpha^2x^2}{2p}\left\{\begin{matrix}\frac{n^3-2n^2+2}{n^3}\cdot\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}+\frac{2n^2-2n-1}{n^2}\cdot\frac{1}{fg} \\ +\frac{3n+4-3n^2}{n^3}\cdot\frac{1}{af}-\frac{3n+1}{n^2}\cdot\frac{1}{ag}+\frac{3n+2}{n^3}\cdot\frac{1}{a^2}\end{matrix}\right\}$$

oder wenn man ſetzt:

$$\frac{n^3-2n^2+2}{n^3}\cdot\frac{1}{f^2}+\frac{2n^2-2n-1}{n^2}\cdot\frac{1}{fg}+\frac{1}{g^2}=M$$

$$\frac{3n+4-3n^2}{n^3}\cdot\frac{1}{f}-\frac{3n+1}{n^2}\cdot\frac{1}{g}=N$$

$$\frac{3n+2}{n^3}=O,$$

ſo wird für die Abweichung

$$-\frac{n\alpha^2x^2}{2p}\left(M+\frac{N}{a}+\frac{O}{a^2}\right);$$

endlich wenn man für a und p den reciproken Werth einführt:

$$-\frac{n\alpha^2x^2}{2}(M+NA+OA^2)\,Q.$$

Man erhält daher für P in der Bedeutung (S. 419)

$$P=\frac{n^2}{2}(M+NA+OA^2)\,Q.$$

Eben ſo wird die ſphäriſche Abweichung zweier in Berührung ſtehender Linſen

$$-\alpha^2x^2(P+P_1)$$

und es iſt

$$P_1=\frac{n_1^2}{2}(M_1+N_1A_1+OA_1^2)\,Q_1;$$

endlich iſt für ſolche Linſen noch

$$Q = A - A_1 \text{ oder } A_1 = -(Q - A).$$

Sollen ſie abweichungsfrei ſeyn, ſo hat man $P + P_1 = 0$ welcher Gleichung man entſpricht durch

$$n^2 Q M - n_1^2 Q_1 (M_1 - N_1 Q + O_1 Q^2) = 0 \quad (q)$$
$$n^2 Q N + n_1^2 Q_1 (N_1 - 2 O_1 Q) = 0 \quad (r)$$
$$n^2 Q O + n_1^2 Q_1 O_1 = 0. \quad (s)$$

Setzt man nun $F + G = \frac{Q}{n - 1} = R$; $F_1 + G_1 = \frac{Q_1}{n_1 - 1} = R_1$ ſo kann man R und R_1 als bekannte Größen anſehen und mittelſt derſelben aus den Gleichungen von M, N, M_1, N_1, die Größen G und G_1 eliminiren. Setzt man der Kürze halber

$$\frac{n+2}{n} = l;\ 2n + 1 = m,\ \frac{4(n+1)}{n} = q,\ 3n + 1 = r,\ \frac{3n+2}{n} = s$$

ſo erhält man:

$$n^2 M = l F^2 - m R F + n^2 R^2$$
$$n^2 N = q F - r R$$
$$n^2 O = s.$$

Eben ſo wird für die zweite Linſe:

$$n_1^2 M_1 = l_1 F_1^2 - m_1 R_1 F_1 + n_1^2 R_1^2$$
$$n_1^2 N_1 = q_1 F_1 - r_1 R_1$$
$$n_1^2 O_1 = s_1.$$

Dieſe Werthe in die Gleichungen (q) (r) (s) geſetzt, geben

$$\left.\begin{array}{l} Q(l F^2 - m R F) + Q_1 [l_1 F_1^2 - (m_1 R_1 + Q q_1) F_1] \\ + n^2 Q R^2 + n_1^2 Q_1 R_1^2 + Q Q_1 r_1 R_1 + Q_1 Q^2 s_1 \end{array}\right\} = 0 \quad (t)$$
$$q F Q + q_1 Q_1 F_1 - Q r R - Q_1 r_1 R_1 - 2 Q Q_1 s_1 = 0 \quad (u)$$
$$s Q + s_1 Q_1 = 0. \quad (v)$$

Die Ausdrücke (t) und (u) dienen zur Beſtimmung von F und F_1 mittelſt einer quadratiſchen Gleichung und dieſe Werthe braucht man zur Berechnung von G und G_1 mittelſt der Gleichungen $G = R - F$, $G_1 = R_1 - F_1$. Man hat daher alle vier Halbmeſſer der Doppellinſe, ja weil die quadratiſche Gleichung für f und g zwei Werthe gibt, ſo erhält man unter einem die Dimenſionen zweier achromatiſcher Doppellinſen. So z. B. erhält man für $n = 1.53$, $n_1 = 1.634494$ die quadratiſche Gleichung

$$F_1^2 - 2.60208 F_1 - 18.92597 = 0$$

und daher $F_1 = -3.23964$ oder $F_1 = 5.84172$. Ferner für den erſten Werth von F_1, $F = 1.47901$, $G = 3.30674$, $G_1 = 0.81811$ für

den zweiten Werth von F_1 hingegen $G_1 = -8.26325$, $F = 6.84076$ $G = -2.05501$ und daher folgende Werthe von f, g, f_1, g_1 wovon f und g dem Crownglaſe, f_1 und g_1 dem Flintglaſe zugehören:

$f = 0.67613$, $g = \quad 0.30241$; $f_1 = -0.30868$, $g_1 = \quad 1.22233$

$f = 0.14619$, $g = -0.48662$; $f_1 = \quad 0.17118$, $g_1 = -0.12102$.

Man kann zur Erleichterung der Rechnung nach dieſer Methode mit Vortheil die Tafel (XXI) brauchen.

256. Die Theorie der Oculare iſt im Allgemeinen in den Gleichungen enthalten, welche (37—50) entwickelt wurden, denn dieſe geben für ein Syſtem wie immer mit einander verbundener Linſen die optiſchen und geometriſchen Eigenſchaften der Bilder an. Sollen dieſe Bilder, in ſo weit ſie von den Ocularen herrühren, von der ſphäriſchen und chromatiſchen Abweichung frei ſeyn, ſo darf man nur den Ausdruck für jede dieſer Abweichungen $= 0$ ſetzen und daraus das Verhältniß jener Größen ſuchen, welche auf die Abweichungen Einfluß haben. Ein Umſtand, der die allgemeinen Ausdrücke, welche den Weg eines Strahls durch mehrere Linſen bezeichnen ꝛc., für Fernröhre ſpecialiſirt, iſt, daß die Strahlen in der Regel von ſo weit entfernten Puncten auf das Objectiv fallen, daß man ſie als parallel anſehen kann. Dadurch wird nämlich $a = \infty$, $\alpha = p$. Ferner nimmt man an, daß die Strahlen durch das letzte Ocular in paralleler Richtung ins Auge gelangen. Dadurch wird $a_n = p_n$, $\alpha_n = \infty$, $b = \infty$. Endlich iſt noch $l = a$. Führt man dieſe Bedingungen in die allgemeinen Gleichungen ein, ſo erhält man bei n Ocularen folgende wichtige Formeln für Fernröhre:

Vergrößerungszahl: $$m = p . \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}}.$$

Halbes Geſichtsfeld: $$\psi = \frac{z_{n-1} - z_{n-2} \ldots \mp z_2 \pm z_1}{m \pm 1}$$

Helligkeit: $$c = \frac{x^2}{0.0009\, m^2}$$

Öffnungshalbmeſſer wegen der Helligkeit: $$\varphi_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}{p\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} . x.$$

Öffnungshalbmeſſer wegen des Geſichtsfeldes:

$$z_n p_n = \left(\frac{p\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \pm p_n\right)\psi + \left(z_{n-1} - z_{n-2} \ldots \pm z_1\right) p_n$$

Ort des Auges: $$f = \frac{z_n p_n}{m \psi}$$

Bedingung der Farbenloſigkeit:

$$z_1 + \frac{a_2 z_2}{\alpha_1} + \frac{a_2 a_3 z_3}{\alpha_1 \alpha_2} + \ldots \frac{a_2 a_3 \ldots a_{n-1} z_{n-1}}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}} = 0.$$

Für Linſen aus einerlei Maſſe die Entfernung der Linſen von einander: $h = p + a_1$; $h_1 = \alpha_1 + \alpha_2$; $h_2 = \alpha_2 + a_2$.

Halbmeſſer der Kugelabweichung:

$$R = \frac{m x^3}{4 p^4} \left[\mu \lambda p + \frac{\mu_1 a_1^2 Q_1}{p_1} + \frac{\mu_2 a_2^2}{p^2} \left(\frac{a_1}{\alpha_1} \right)^4 Q_2 + \frac{\mu_3 a_3^3}{p^3} \left(\frac{a_1 a_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^4 Q_3 + \text{ꝛc.} \right].$$

Wo zwei Zeichen über einander vorkommen, da gilt das obere für einen ungeraden, das untere für einen geraden Werth von n.

Bei dieſen Formeln iſt zu bemerken, daß, wenn α_n und a_n poſitiv ſind, die zuſammengehörigen Vereinigungsweiten auf entgegengeſetzte Seiten der betreffenden Linſe fallen und daß dieſelbe ein wirkliches Bild gibt, während ſie nur ein imaginäres Bild gibt, wenn eine dieſer Größen poſitiv, die andere negativ iſt. Ausdrücke für die Lage des Bildes von demſelben Zeichen zeigen an, daß beide Bilder aufrecht oder verkehrt ſind, haben ſie aber entgegengeſetzte Zeichen, ſo iſt auch die Lage der Bilder einander entgegengeſetzt, oder eines iſt aufrecht, das andere verkehrt.

257. Nun handelt es ſich noch um eine kurze Anwendung dieſer Formeln auf beſondere Fernröhre. Wir wollen ſie zuerſt für die dioptriſchen und zwar nach der Ordnung, für das Galiläiſche, aſtronomiſche und für das Erdfernrohr vornehmen.

Das Galiläiſche Fernrohr beſteht bekanntlich aus dem Objective und einem concaven Oculare und es iſt daher $a_1 = p_1$ negativ und daher das Bild imaginär. Die Vergrößerungszahl iſt $m = -\frac{p}{p_1}$ und dieſes zeigt an, daß das Bild aufrecht erſcheint. Das halbe Geſichtsfeld iſt $\psi = \frac{z_1}{m+1}$; die Entfernung f des Auges vom Ocular $\frac{p_1 z_1}{m \psi}$ oder wenn man für ψ den Werth ſetzt: $f = \frac{(m+1)}{m} p_1$; ſetzt man aber für m den Werth $f = -(p + p_1) \frac{p_1}{p}$. Die Länge des Inſtrumentes iſt $p - p_1 = p \frac{(m-1)}{m}$. Der negative Werth

von f lehrt, daß die Strahlen die Axe vor dem Oculare ſchneiden, wo ſich doch das Auge nicht befinden kann; es muß daher möglichſt nahe an das Ocular gehalten werden. Iſt das Objectiv eines ſolchen Inſtrumentes achromatiſch und auch von der ſphäriſchen Abweichung möglichſt frei, ſo wird man den von der Farbenzerſtreuung des Oculars herrührenden Fehler, wenn dieſes Ocular überhaupt nicht gar zu ſcharf iſt, vernachläſſigen können und auch der von der ſphäriſchen Abweichung entſtehende Fehler wird nur ſehr klein ſeyn, wenn man dem Oculare die rechte Geſtalt gegeben hat.

258. Die einfachſte Art der aſtronomiſchen Fernröhre beſteht aus der Objectivlinſe und einem convexen Oculare. Für dieſes Inſtrument iſt wieder die Vergrößerung $= \frac{p}{p_1}$, das Bild erſcheint verkehrt, der Halbmeſſer des Geſichtsfeldes iſt $\psi = \frac{z_1}{m+1}$ oder wenn man, wie es meiſtens geſchieht: $z_1 = \frac{1}{4}$ ſetzt, $\psi = \frac{0.25}{m+1}$ oder wenn ψ in Minuten ausgedrückt werden ſoll: $\psi = \frac{0.25 \times 3438}{m+1}$ $= \frac{859}{m+1}$ Minuten. Die Entfernung f des Auges von der letzten Linſe iſt $\frac{z_1 p_1}{m \psi}$ oder $\frac{m+1}{m} p_1$. Jenes Geſichtsfeld kann daher das Auge wirklich erlangen, weil f eine poſitive Größe iſt und daher der Durchſchnittspunct der Strahlen mit der Axe außerhalb des Oculares liegt. Die Länge des Inſtrumentes iſt $p + p_1$.

259. Das Ocular iſt mit der ſphäriſchen und chromatiſchen Abweichung behaftet und gibt daher ein Bild, das undeutlich und mit einem farbigen Rande erſcheint, ſelbſt, wenn man ein vollkommenes Objectiv gebraucht hat. Dieſen Fehler kann man durch Einführung eines zweiten convexen Oculares wenigſtens ſtark vermindern. Bei einem Inſtrumente mit einem ſolchen Doppeloculare iſt:

$$m = \frac{p \alpha_1}{p_2 a_1}; \; \psi = \frac{z_2 - z_1}{m - 1}; \; \frac{z_1 p_1}{\varphi} = h.$$

Kommt noch dazu die Bedingung der Farbenloſigkeit der Ränder: $z_1 + \frac{a_2}{\alpha_1} z_2 = 0$ und die bekannte Gleichung $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\alpha_1}$; ſo laſſen ſich die Größen ψ_1, α_1, a_1, p_1 und p_2 beſtimmen und es

kommen in den Beſtimmungsgleichungen nur mehr die Größen z_1 z_2 und m vor. Man hat nämlich:

$$\psi = \frac{z_1 - z_2}{m - 1};\ a_1 = -\frac{p}{m} \cdot \frac{z_2}{z_1};\ p_1 = \frac{p\psi}{z_1}\left(1 - \frac{z_2}{m z_1}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1 p_1}{a_1 - p_1} \text{ und } p_2 = -\frac{\alpha_1 z_1}{z_2}.$$

Man nehme nun ein beſtimmtes Verhältniß zwiſchen z_2 und z_1 an, und ſetze $z_2 = \beta z_1$, dann nehmen dieſe Gleichungen folgende Form an:

$$\psi = \frac{(-\beta + 1) z_1}{m - 1};\ a_1 = -\frac{p}{m} \cdot \beta;\ p_1 = \frac{p\psi}{z_1}\left(1 - \frac{\beta}{m}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1 p_1}{a_1 - p_1} \text{ und } p_2 = \frac{\alpha_1}{\beta}.$$

Für den Ort des Auges hat man $f = \frac{p_2 z_2}{m\psi} = \frac{p_2 \beta z_1}{m\psi}$, für die Entfernung der Linſen von einander $h = p + a_1 = \frac{z_1 p_1}{\psi}$, $a_1 = h_2 + a_2$ und für die Länge des Inſtrumentes $h + h_1$.

Obiger Coefficient β muß dem jedesmaligen Zwecke des Inſtrumentes gemäß beſtimmt werden. So z. B. müßte man, wenn es ſich um ein beſonders großes Geſichtsfeld handelte, $\beta = -1$ mithin $z_2 = -z_1$ ſetzen.

260. Wenn man ein ſolches Inſtrument conſtruirt und die Oculare planconvex macht, ſo wird man die ſphäriſche Abweichung nicht ſonderlich zu befürchten haben. Ihre Größe läßt ſich aus den Formeln (49) berechnen und aus dem Ergebniſſe der Rechnung abnehmen, ob die übrig bleibende Abweichung nicht zu groß ſey. Eben ſo wird man, wenn einmal obige Größen beſtimmt ſind, die übrig bleibende chromatiſche Abweichung berechnen und ihren Einfluß vorläufig ſchätzen können. Übrigens iſt es leicht einzuſehen, daß das wahre Bild zwiſchen das Objectiv und das erſte Ocular oder zwiſchen die zwei Oculare fallen kann. Ob eines oder das andere Statt findet, erkennt man leicht, aus dem Werthe der Größe $\frac{\alpha_1}{a_2}$. Bei Dollonds und Fraunhofers Inſtrument fällt das Bild zwiſchen die Oculare, oder es iſt α_1 poſitiv und a_2 negativ. Setzt man für dieſe Einrichtung $\beta = -1$ und wie es in der Ausübung meiſtens geſchieht $z_1 = 0.3$, ſo erhält man folgende Ausdrücke:

$$\psi = \frac{1031.4}{m-1} \text{ Minuten.}$$

$$p_1 = \frac{2p(m+1)}{m(m-1)};\; p_2 = -\frac{2p(m+1)}{m(3m+1)}$$

$$a_1 = \frac{p}{m};\; \alpha_1 = -\frac{2p(m+1)}{m(3m+1)} = p_2$$

$$h = \frac{p(m+1)}{m};\; h_1 = -\frac{4p(m+1)}{m(3m+1)} = 2p_2.$$

261. Die Einrichtung des Erdfernrohres, das in ſeinem einfachſten Baue aus einem, hier achromatiſch angenommenen Objective, und aus drei convexplanen Ocularen beſteht, beſtimmen folgende Gleichungen:

$$1)\; m = \frac{p}{p_3} \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2}{a_1 a_2}; \qquad 2)\; \psi = \frac{z_3 - z_2 + z_1}{m+1};$$

$$3)\; z_1 p_1 = (p + a_1)\psi; \qquad 4)\; z_2 p_2 = \left(\frac{p\alpha_1}{a_1} - a_2\right)\psi + a_2 z_1;$$

$$5)\; z_3 p_3 = \left(\frac{p\alpha_1 \alpha_2}{a_1 a_2} + a_3\right)\psi + a_1 z_2;\; 6)\; 0 = z_1 + \frac{a_2}{\alpha_1} z_2 + \frac{a_2 a_3}{\alpha_1 \alpha_2} z_3.$$

Setzt man $z_3 = z_1$; $z_2 = -z_1$, ſo wird aus den Gleichungen 2), 4) und 6):

$$7)\; -z_1 p_2 = \left(\frac{p\alpha_1}{a_1} - a_2\right)\psi + a_2 z_1;\; 8)\; \psi = \frac{3z_1}{m+1};$$

$$9)\; 1 - \frac{a_2}{\alpha_1} + \frac{a_2 p_3}{\alpha_1 \alpha_2} = 0:$$

ſo daß man zur erſteren Beſtimmung der Unbekannten die Gleichungen 1), 3), 5), 7), 8), 9) hat. Nimmt man m, p und z_1 als gegeben an, ſo kann man mittelſt der vorhergehenden und der Gleichungen

$$p_1 = \frac{a_1 \alpha_1}{\alpha_1 + a_1};\; p_2 = \frac{a_2 \alpha_2}{\alpha_2 + a_2}$$

ſieben der Unbekannten p_1, p_2, p_3, a_1, a_2, α_1, α_2, ψ beſtimmen, und eine derſelben willkührlich annehmen. Setzt man nun $\alpha_1 = \beta a_2$, ſo erhält man mittelſt der vorhergehenden Gleichungen:

$$a_1 = -\frac{\beta p}{m(\beta-1)}; \quad \alpha_1 = \frac{3\beta p((m-1)\beta-m)}{m(\beta-1)((4m-2)\beta-3m)};$$

$$p_1 = \frac{3((m-1)\beta-m)}{m(m+1)(\beta-1)}p; \; p_2 = \frac{3m(\beta-1)-(m-2)}{m+1}a_4$$

$$\alpha_2 = \frac{p_2(m+1)}{5m-1-3m\beta}; \; p_3 = \alpha_2(1-\beta).$$

Die beſondere Einrichtung des Fernrohres hängt alſo von der Wahl der Größe β ab. Z. B. nimmt man a_1 und a_2 negativ an, ſo fällt das einzige reelle Bild zwiſchen die zweite und dritte Linſe. In dieſem Falle muß, wie man leicht zeigen kann, $\beta > 2$ ſeyn. Für $\beta = \frac{5}{2}$ wird

$$p_1 = \frac{(3m-5)p}{m(m+1)}; \; p_2 = \frac{(7m+4)(3m-5)p}{2m(m+1)(7m-5)};$$

$$p_3 = \frac{3p(7m+4)(3m-5)}{2m(5m+2)(7m-5)}p$$

$$a_1 = -\frac{5p}{3m}; \quad a_2 = \frac{3m-5}{m(7m-5)}p;$$

$$\alpha_1 = \frac{5p(3m-5)}{2m(7m-5)}; \; \alpha_2 = -\frac{(7m+4)(3m-5)p}{m(5m+2)(7m-5)}$$

$$h = \frac{(3m-5)}{3m}p; \; h_1 = \frac{7(3m-5)}{2m(7m-5)}p;$$

$$h_2 = \frac{(3m-5)(7m+4)p}{2m(7m-5)(5m+2)}$$

$$\psi = \frac{3z_1}{m+1}; \; f = \frac{p_3 z_1}{m\psi}.$$

262. Zur Beſtimmung der Einrichtung eines Fernrohres mit vier convexen Ocularen hat man:

$$m = \frac{p}{p_4} \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{a_1 a_2 a_3}; \; \psi = \frac{z_4 - z_3 + z_2 - z_1}{m-1};$$

$$z_1 + \frac{a_2}{\alpha_1}z_2 + \frac{a_2 a_3}{\alpha_1 \alpha_2}z_3 + \frac{a_2 a_3' a_4}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} z_4 = 0$$

$$z_1 p_1 = (p + a_1)\psi; \; z_2 p_2 = \left(p\frac{\alpha_1}{a_1} - a_2\right)\psi + a_2 z_1$$

$$z_3 p_3 = \left(p\frac{\alpha_1 \alpha_2}{a_1 a_2} + a_3\right)\psi + a_3 z_2;$$

$$z_4 p_4 = \left(p\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{a_1 a_2 a_3} - a_4\right)\psi + a_4 z_3.$$

Je nachdem man die Quotienten $\frac{\alpha_1}{a_1}$, $\frac{\alpha_2}{a_2}$ ꝛc. verſchieden annimmt, erhält man auch verſchiedene Einrichtungen der Fernröhre. Da die Anzahl der brauchbaren Einrichtungen dieſer Art ſo groß iſt, daß nicht daran zu denken iſt, hier alle derſelben abzuhandeln, ſo wollen wir mit Übergehung aller übrigen jene herausheben, welche Fraunhofer bei ſeinen Fernröhren gewählt hat.

Man ſetze $z_1 = 0.8z$, $z_2 = 0.3z$; $z_3 = -z$; $z_4 = z$, und nehme $\frac{\alpha_1}{a_2}$ und $\frac{\alpha_2}{a_3}$ negativ, ſo daß die beiden wahren Bilder zwiſchen die erſte und zweite, und zwiſchen die dritte und vierte Ocularlinſe fallen. Ferner nehme man

$$\frac{\alpha_1}{a_2} = -0.3; \quad \frac{\alpha_2}{a_3} = -5.0.$$

Dadurch erhält man aus der dritten obigen Gleichung $\frac{\alpha_3}{a_4} = 0.7692$, ſtatt deſſen man $\frac{1}{2}$ ſetzen kann, was hinreichend iſt, um die farbigen Ränder nur zu ſchwächen. Dennoch erhält man

$$\psi = \frac{15z}{10(m-1)}$$

$$p_1 = \frac{15(4m+3)}{32m(m-1)}p; \quad p_2 = \frac{25(4m+3)(2m-23)}{6m(m-1)(12m+23)}p$$

$$p_3 = \frac{5(4m+3)(5m+4)(2m-23)}{4m(m-1)(m+20)(12m+23)}p;$$

$$p_4 = \frac{5(4m+3)(5m+4)(2m-23)}{m(m+20)(12m+23)(7m+2)}$$

$$h = \frac{4m+3}{4m}p.; \quad h_1 = \frac{35(4m+3)}{4m(12m+23)}p$$

$$h_2 = \frac{10(4m+3)(2m-23)}{m(m+20)(m+23)}p;$$

$$h_3 = \frac{15(4m+3)(5m+4)(2m-23)}{2m(m+20)(12m+23)(7m+2)}p$$

oder wenn man die vorhergehenden Werthe in den nachfolgenden einführt:

$$p_1 = \frac{15(4m+3)}{32m(m-1)}p\;;\; h = \frac{3m+3}{4m}p$$

$$p_2 = \frac{80(2m-23)}{9(12m+23)}p_1\;;\; h_1 = \frac{35}{12m+23}h$$

$$p_3 = \frac{3(5m+4)}{10(m+20)}p_2\;;\; h_2 = \frac{8(2m-23)}{7(m+20)}h_1$$

$$p_4 = \frac{4(m-1)}{7m+2}p_3\;;\; h_3 = \frac{3(5m+4)}{4(7m+2)}h_2.$$

263. Bei den catoptriſchen Fernröhren wird die Objectivlinſe durch einen Hohlſpiegel vertreten. Das Bild, welches dieſer Spiegel macht, iſt von der chromatiſchen Abweichung gänzlich frei, und in dieſer Hinſicht übertrifft ein Spiegel die beſte achromatiſche Objectivlinſe, deren Achromatismus nie vollkommen iſt (61); eine ſphäriſche Abweichung findet zwar Statt, aber ſie iſt kleiner als bei einer Linſe von gleicher Öffnung. Man hat nämlich für einen Spiegel mit der halben Öffnung x und der Brennweite p, welcher von einem unendlich weit entfernten Objecte Licht erhält, als Ausdruck der Längenabweichung $\frac{x^2}{8p}$, während für eine Linſe von derſelben Öffnung und Brennweite dieſe Abweichung auf ihren kleinſten Werth gebracht $= \frac{\mu x^2}{p}$ iſt. Für eine Glaslinſe hat man überhaupt $n = 1.53$, und daher $\mu = 0.99$, mithin die Abweichung beim Spiegel mehr als acht Mal kleiner als bei der Linſe. Dafür abſorbiren die Spiegel mehr Licht als Linſen und verlieren ohne Vergleich eher ihren Glanz als eine Linſe ihre Durchſichtigkeit. Für die Vergrößerung, das Geſichtsfeld ꝛc., erhält man bei einem Syſteme von Spiegeln dieſelben Formeln wie für ein Syſtem von Linſen.

264. Aus der Verbindung einer convexen Ocularlinſe mit dem ſphäriſchen Hohlſpiegel geht bekanntlich das Herſchel'ſche Fernrohr hervor; erleiden aber die vom Hohlſpiegel reflectirten Strahlen, bevor ſie ſich zu einem Bilde vereinigt haben, eine Ablenkung unter einem rechten Winkel durch einen kleinen Planſpiegel, ſo erhält man das Newton'ſche Fernrohr. Der Bau dieſer beiden Inſtrumente beruhet auf denſelben Grundſätzen, und der ebene Spiegel ändert nur die Lage des Bildes und vermindert die Lichtſtärke, bringt aber ſonſt keine Wirkung hervor.

Die Vergrößerung, welche ein ſolches Inſtrument bewirkt, iſt $\frac{p}{p_1}$, die Größe des halben Geſichtsfeldes iſt $\frac{z_1}{m+1}$, der Ort des Auges hinter dem Oculare $= \frac{p_1 z_1}{m\psi}$; die Entfernung der Linſe vom Spiegel $= p + p_1$, und dadurch iſt zugleich die Länge des ganzen Inſtrumentes gegeben. Das Newton'ſche kann wegen der Ablenkung des Lichtes durch den kleinen Spiegel um ein weniges kürzer werden.

265. Gregory's Spiegelteleſkop kann als ein dioptriſches Fernrohr mit drei Ocularen behandelt werden, indem der kleine Spiegel gleichſam die Stelle eines Oculars vertritt, und zwei Convexlinſen wirklich als Oculare gebraucht werden. Es beziehen ſich hiernach alle Größen, welche bei einem ſolchen dioptriſchen Fernrohre für das dem Objectiv nächſte Ocular in Rechnung gebracht worden ſind, auf den kleineren Spiegel. Dieſem gemäß hat man für die Vergrößerungszahl $m = \frac{p\alpha_1\alpha_2}{p_3 a_1 a_2}$; für die halbe Öffnung des kleinen Spiegels $p_1 z_1 = (p + a_1)\psi$, für die halbe Öffnung der erſten Linſe $p_2 z_2 = \left(\frac{p\alpha_1}{a_1} - a_2\right)\psi + p_1 z_1$, und für das halbe Geſichtsfeld $\psi = \frac{z_3 - z_2 + z_1}{m+1}$. Damit die Bilder ohne farbigen Rand erſcheinen, muß dem Ausdrucke: $z_2 + \frac{a_3 z_3}{\alpha_2} = 0$ entſprochen werden. Dieſer iſt von dem für dioptriſche Inſtrumente entwickelten etwas verſchieden, weil der kleine, die Stelle eines Oculars vertretende Spiegel, keine Farbenabweichung hat, und darum aus der Rechnung wegfällt. Befindet ſich die erſte Linſe im Loche des großen Spiegels, ſo iſt $p + a_1 = \alpha_1 + a_2$. Nun muß über die Größen $\frac{p}{a_1}$, $\frac{\alpha_1}{a_2}$, $\frac{\alpha_2}{a_3}$ etwas näheres vorausgeſetzt werden. Man nehme $\frac{\alpha_1}{a_2}$ negativ und ſetze, um ein hinreichendes Geſichtsfeld zu erhalten $z_3 = -z$; $z_2 = z$; $z_1 = \beta z$. Dadurch erhält man mit Hülfe des Vorhergehenden folgende Gleichungen:

$$1)\, p+a_1=\alpha_1+a_2;\quad 2)\, 1-\frac{a_3}{\alpha_2}=0;\quad 3)\, \psi=\frac{(2-\beta)z}{m-1};$$

$$4)\, p_1\beta z=(p+a_1)\psi;\ 5)\, p_2 z=\left(\frac{p\alpha_1}{a_1}-a_2\right)\psi+p_2\beta z;$$

$$6)\ m=\frac{p\,\alpha_1\,\alpha_2}{p_3\,a_1\,a_2}.$$

Mittelſt dieſer ſechs Gleichungen hat man zehn Größen zu beſtimmen, wenn man jede der Größen $\frac{p}{a_1}$, $\frac{\alpha_2}{a_2}$, $\frac{a_3}{a_3}$ als eine annimmt. m, z und p können unbeſtimmt gelaſſen werden, und es bleiben daher noch ſieben übrig. Da zu ihrer Beſtimmung nur ſechs Gleichungen vorhanden ſind, ſo muß eine der freien Wahl überlaſſen werden. Dieſe ſey $\frac{p}{a_1}$. Die Aufgabe geht demnach dahin, alle übrigen Größen durch m, p, z und $\frac{p}{a_1}$ auszudrücken. Man nenne der Kürze wegen $\frac{p}{a_1}=A$, $\frac{\alpha_1}{a_2}=A_1$, $\frac{\alpha_2}{a_3}=A_2$, und man hat:

$$A_2=1,\ \text{und daher}\ \alpha_2=a_3=p_3;\ A_1=\frac{m}{A},$$

$$\text{ferner}\ a_1=\frac{p}{A};\ a_2=-\frac{\alpha_1}{A_1}.$$

Mittelſt dieſer Werthe endlich wird aus der Gleichung (1)

$$\alpha_1=\frac{(A+1)m}{A(m-A)}p.$$

Aus $\frac{1}{p_1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\alpha_1}$ findet man mittelſt der vorhergehenden Werthe von a_1 und α_1:

$$p_1=\frac{(A+1)m}{mA(A+2)-A^2}p.$$

Ferner iſt $a_2=-\frac{\alpha_1}{A_1}=-\frac{A}{m}\alpha_1=-\frac{A+1}{m-A}\cdot p.$

Sucht man βz ſowohl aus der Gleichung 3) als m aus 4), und beſtimmt dieſe Größe mittelſt der zwei gefundenen Werthe, ſo erhält man:

$$\beta=\frac{2m(A+2)-2A}{m(m+1)+(m-1)A}.$$

Mittelſt der Gleichung 5) und der vorhergehenden Werthe wird

$$p_2 = \frac{2(m-1)(A+1)}{m(m+1)+(m-1)A} \cdot p$$

und mittelſt $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{\alpha_2}$, oder $\frac{p_2}{\alpha_3} = 1 - \frac{p_2}{a_2}$ wird

$$\alpha_2 = \frac{2(m-1)(A+1)}{m(3m-1)-(m-1)A} \cdot p$$

$$= -\frac{zp_3}{m\psi} = \frac{m(m+1)+(m-1)A}{2m^2} p_3 = \text{nahe} \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{A}{m}\right)p_3.$$

266. Dieſe Theorie enthält unter einem auch die des Caſſegrainiſchen Teleſkopes, das ſich vom vorhergehenden nur durch die Geſtalt des kleineren Spiegels unterſcheidet. Man ſetzt wieder

$$z_1 = -\beta z,\; z_1 = -z,\; z_2 = z$$

$$\frac{p}{a_1} = -A;\; \frac{\alpha_1}{a_2} = -A_1;\; \frac{\alpha_2}{a_3} = A_2$$

und verfährt übrigens wie vorhin. Man erhält:

$$a_1 = -\frac{p}{A}$$

$$\alpha_1 = \frac{(A-1)m}{A(m-A)} p$$

$$p_1 = -\frac{m(A-1)}{mA(A-2)+A^2} \cdot p$$

$$a_2 = -\left(\frac{A-1}{m-A}\right) p$$

$$\alpha_2 = a_3 = p_3 = \frac{2(m+1)(A-1)}{m(3m+1)-A(m+1)} \cdot p$$

$$p_2 = \frac{2(m+1)(A-1)}{m(m-1)+A(m+1)} p$$

$$\beta = \frac{2m(A-2)+2A}{m(m-1)+A(m+1)}$$

$$\psi = \frac{2mz}{m(m-1)+A(m+1)}$$

$$f = \text{nahe } \tfrac{1}{2} p_3 \left(1+\frac{A-1}{m}\right).$$

267. In der vorhergehenden Theorie der Fernröhre wurde durchaus die Vergrößerungszahl, die Brennweite des Objectivs und der Öffnungshalbmeſſer des äußerſten Oculars als der freien Wahl überlaſſen oder als beſtimmt angeſehen. Je ſtärker man die Vergrößerung m annimmt, deſto größer muß auch die Brennweite p der Objectivlinſe und deſto größer ihre Öffnung ſeyn. Große Linſen fordern eine ungemeine Aufmerkſamkeit bei der Verfertigung, man hat da eine große Fläche in die ſphäriſche Form zu bringen und muß der mathematiſchen Genauigkeit dieſer Form näher kommen als bei kleineren Linſen, weil bei der bedeutenderen Größe des Bildes, welches ſie von einem fernen Gegenſtande entwerfen, auch alle ihre Fehler vergrößert erſcheinen. Dazu kommt noch, daß ſolche Linſen ſtets achromatiſch ſeyn müſſen und daß man kaum ſehr reine, vollkommen homogene Crownglasſtücke von bedeutendem Durchmeſſer findet, geſchweige erſt ſolche Stücke aus Flintglas, wovon ſchon Kuchen von ſechs Zoll Durchmeſſer zu den Seltenheiten gehören. Wollte man etwa mit einer kleinen Objectivlinſe eine bedeutende Vergrößerung erzielen, ſo müßte man auf hinreichende Klarheit des Bildes Verzicht leiſten. Dieſes zeigt die Formel für die Lichtſtärke

$$c = \frac{x^2}{0.0009\, m^2}.$$

Man pflegt den Fernröhren meiſtens mehrere Oculare anzupaſſen, die ſtufenweiſe ſtärker vergrößern, fängt in der Regel mit jener Vergrößerung an, wo das Bild des Objectes im Fernrohre eben ſo hell erſcheint, wie das Object ſelbſt mit freiem Auge, und nimmt jene Vergrößerung als die ſtärkſte an, bei welcher die natürliche Lichtſtärke auf die Hälfte reducirt iſt, wenn das Objectiv überhaupt ſo vollkommen conſtruirt iſt, daß bei einer ſolchen Vergrößerung noch eine hinreichende Deutlichkeit Statt findet. Obige Formel gibt leicht dieſe Vergrößerung an, indem für

$$c = 1,\ m = \frac{x}{0.03}.$$

iſt. Fernröhre zu beſonderen Zwecken, wie z. B. Cometenſucher, bekommen eine weit geringere Vergrößerung, um mehr Geſichtsfeld und Lichtſtärke zu erhalten. Übrigens muß man bei der Steigerung der Vergrößerungszahl durch Verminderung der Brennweite des Oculars auch berückſichtigen, daß mit dieſer die Abweichungen einen ſchädlichen Einfluß gewinnen und dem Bilde die Deutlich-

keit benehmen. Man meint, es dürfe die Brennweite des Oculars nicht unter $\frac{2}{9}$ Zoll ſinken.

Ein anderer Umſtand, welcher der Vergrößerung durch ein Objectiv von beſtimmter Brennweite Grenzen ſetzt, iſt die ſphäriſche Abweichung deſſelben. Der Ausdruck für den Halbmeſſer der Kugelabweichung lehrt, daß ſich für einen gleichen Werth deſſelben, alſo bei gleicher Deutlichkeit die dritte Potenz der Brennweite der Objective (p^3) zweier Fernröhre, wie die Producte aus der Vergrößerungszahl in die dritte Potenz der halben Öffnung ($m x^3$) verhalten. Es iſt nämlich für ein Objectiv $R = \frac{m x^3 \mu \lambda}{p^3}$, für ein anderes $R = \frac{m_{,} x_{,}^3 \mu \lambda}{p_{,}^3}$, mithin $\frac{m x^3}{p^3} = \frac{m_{,} x_{,}^3}{p_{,}^3}$.

Sollen beide gleiche Helligkeit haben, ſo iſt
$\frac{x}{m} = \frac{x_{,}}{m_{,}}$, und daher $\frac{x^4}{p^3} = \frac{x_{,}^4}{p_{,}^3}$, oder $p_{,} : p = \sqrt[3]{x_{,}^4} : \sqrt[3]{x^4}$.

Nimmt man an, daß ein vollkommen gut gearbeitetes achromatiſches Objectiv von neunzehn Zoll Brennweite eine Öffnung von zwanzig Linien vertrage, ſo erhält man $p_{,} = 19\ Z$, $x_{,} = 10\ L$ mithin
$19 : p = \sqrt[3]{10^4} : \sqrt[3]{x^4}$, oder $\log x = 0.2787536 + \frac{3}{4} \log p$.

Die dritte Größe, welche in den vorhergehenden Formen der freien Wahl überlaſſen wurde, iſt die Öffnung des letzten Oculars. Man macht ſie bei den aſtronomiſchen und terreſtriſchen Fernröhren gleich $\frac{6}{10}$ der Brennweite. Beim Galiläi'ſchen Fernrohre braucht ſie nicht größer zu ſeyn, als die Öffnung der Pupille, weil man das Auge hart an das Ocular anhalten muß; man läßt ſie aber doch viel größer und zwar gleich $\frac{6}{10}$ der Brennweite, um beim Weiterrücken des Auges nach und nach mehr überſehen zu können, welches um ſo nothwendiger iſt, da bei dieſen Inſtrumenten das Geſichtsfeld ohnehin ſehr klein ausfällt.

2. Prüfung eines Fernrohres.

268. Die Güte eines Fernrohres lernt man am beſten beim Gebrauche deſſelben kennen. Richtet man es auf einen wohl beleuchteten Gegenſtand, der auf dunklem Grunde erſcheint, ſo muß er ſcharf begrenzt und mit farbenloſen Rändern erſcheinen. Inſtrumente mit ſtarker Vergrößerung richtet man auf einen am

dunkeln Himmelsgewölbe ſichtbaren Stern. Iſt dieſes ein Fixſtern, ſo darf er ſich nur als Feuerpunct darſtellen. Da die ſcharfe Begrenzung des Bildes ein ſo weſentliches Erforderniß iſt, ſo wird man einen Doppelſtern als beſonders gutes Probeobject anſehen dürfen, weil er nur dann in zwei ſcharf von einander geſchiedene Sterne aufgelöſet wird, wenn jene Begrenzung Statt findet. Für ſchwächere Inſtrumente leiſtet eine feine, hinreichend entfernte Schrift, oder eine aus parallelen, ſchwarzen Linien beſtehende, auf weißem Papier befindliche Zeichnung, gute Dienſte. Die genannte Schärfe der Ränder ſoll aber nicht blos dann Statt finden, wenn das Object in der Mitte des Geſichtsfeldes erſcheint, ſondern dieſes muß auch außer der Mitte bis nahe am Glasrande der Fall ſeyn, jedoch iſt ſelbſt bei den beſten Fernröhren die Lichtſtärke da etwas geringer, weil von den außer der Axe liegenden Puncten weniger Lichtſtrahlen ins Auge kommen können, als von denen, die ſich in oder zunächſt um die Axe befinden. Ein Inſtrument, bei dem dieſer Unterſchied der Helligkeit gar auffallend iſt, verträgt wegen Fehlern des Objectivs nicht die gehörige Öffnung des Oculars, und kann nicht auf den ehrenvollen Namen eines ausgezeichneten Anſpruch machen, noch weniger iſt dieſes bei dem der Fall, das in gleicher Entfernung von der Axe, aber nach verſchiedenen Seiten eine ungleiche Deutlichkeit zeigt. Manche achromatiſche Inſtrumente haben dieſen Fehler, weil das zum Objectiv gebrauchte Flintglas nicht homogen genug iſt und an verſchiedenen Stellen ein verſchiedenes Brechungs- und Zerſtreuungsvermögen hat, oft liegt es auch in dem Mangel der gehörigen Figur der Objectivlinſe. Wenn man durch das Objectivglas auf das Ocular ſieht, ſo ſoll man ſelbſt von der äußerſten Stelle des erſteren noch durch letzteres ſehen können. Bei Fraunhofer's Inſtrumenten iſt dieſes immer, bei den engliſchen Inſtrumenten ſelten der Fall. Lerebour's ſonſt geprieſene Inſtrumente, ſelbſt der größten Art, ſind dieſem Fehler ſehr ſtark unterworfen. Wo dieſer eintritt, da iſt wieder der oben gerügte Fehler einer ſchlechten Öffnung des Oculars vorhanden, und es iſt wahrſcheinlich ſelbſt das Objectiv fehlerhaft conſtruirt.

269. Ein Objectiv, das den Nahmen eines achromatiſchen verdienen ſoll, muß bekanntlich die äußerſten, lebhafteſten Farben mit den mittleren Strahlen des Farbenbildes vereinigen. Aber von zwei Objectiven, deren jedes dieſes leiſtet, kann doch eines dem anderen vorzuziehen ſeyn, weil in einem der Reſt der Farben weniger

zerſtreut ſeyn kann, als in dem anderen. Um ſie mit einander zu vergleichen, richtet man die Fernröhre, an denen ſie ſich befinden, auf einen entfernten vertikalen Gegenſtand, z. B. auf einen Kamin, deckt die eine vertikale Hälfte des Objectivs mittelſt eines Schirmes und betrachtet mit dem ſchärfeſten Ocular jenes Object; da muß man den vertikalen Rand desſelben und alle vertikalen Linien an demſelben deutlich ſehen, wenn die Farbenzerſtreuung gehoben ſeyn ſoll, und dasjenige Objectiv wird das beſte ſeyn, wo hierin die größte Deutlichkeit Statt findet. Dabei darf man ſich aber durch die erſcheinenden Farben nicht beirren laſſen und ſoll nur auf die Schärfe und Deutlichkeit ſehen. Doch iſt es nicht gleichgültig, welche Farbe bei einem zum Theile gedeckten Objectiv erſcheint. Ein violetter Farbenſaum ſchadet weniger, als ein gelber oder oranger, weil erſtere Farbe im ganzen Farbenbilde die geringſte, letztere aber die größte Intenſität hat.

Wenn man das Ocular über die Stelle des deutlichen Sehens herauszieht, ſo zeigt jedes Fernrohr ſelbſt mit ganzem Objectiv Farbenſäume, und zwar deßhalb, weil es nicht alle farbigen Strahlen in einen Punct zu vereinigen vermag. Aber auch hier iſt es nicht einerlei, welche Farbe erſcheint. Wird das Ocular zu weit herausgezogen, ſo können die Ränder ſchwach weinroth, wird es aber zu weit hineingeſchoben, können ſie grüngelblich ſeyn, und doch wird man dem Objectiv die möglichſte Vollkommenheit nicht abſprechen können; denn dieſe Farben entſprechen den mittelſt zwei Gläſern nicht zu vereinigenden Strahlen.

270. Man kann die Güte eines Objectivs auch noch auf einem anderen Wege prüfen. Kennt man nämlich die Dicken und Halbmeſſer der zwei Beſtandlinſen eines achromatiſchen Objectivs, ſo berechnet man den Vereinigungsort der durch die Doppellinſe gebrochenen Strahlen mittelſt der Formel g (S. 593), indem man für n und $n_{,}$ den Brechungsexponenten der mittleren Strahlen ſetzt; hierauf thut man dasſelbe ſowohl mit jenem Werthe von n und $n_{,}$, welcher dem brechbarſten, als auch mit jenem, welcher dem am wenigſten brechbaren Lichte entſpricht. Sind alle ſo erhaltenen Vereinigungsweiten einander gleich, ſo haben die Centralſtrahlen in der Linſe keine Farbenabweichung. Hierauf berechnet man mit den Werthen von n und $n_{,}$, welche den äußerſten Strahlen des Farbenbildes entſprechen mittelſt der Formeln (a), (b), (c) und (d) die Vereinigungsweite $\alpha_{,}$. Stimmen auch dieſe Werthe mit dem vorigen

überein, ſo geben auch die Randſtrahlen ein farbenloſes Bild. Iſt endlich auch der mittelſt der mittleren Werthe von n und $n_{,}$, durch dieſelben Formeln gefundene Werth von $\alpha_{,}$ dem vorher gefundenen gleich, ſo iſt die Linſe auch von der ſphäriſchen Abweichung frei, und hat daher alle Eigenſchaften einer in mathematiſcher Beziehung vollkommenen Linſe. Ungeachtet dieſer Vollkommenheiten kann aber eine ſolche Linſe doch ſchlechte Dienſte leiſten, weil ſie Fehlern unterliegen kann, die nicht von einer Abweichung herrühren. Darum dient dieſe Methode mehr zur Prüfung des Werthes der Berechnungsweiſe, die der Conſtruction zum Grunde liegt, als der Vorzüglichkeit der Linſe ſelbſt. Wie eine ſolche Linſe in Beziehung auf die Beſchaffenheit des Glaſes, der Geſtalt ꝛc. geprüft wird, davon wird ſpäter die Rede ſeyn.

271. Die Oculare ſind keinen ſo großen Gebrechen unterworfen, wie das Objectiv, darum iſt es auch leichter, ſie zu prüfen. Farbenſäume an den Bildern rühren bei Inſtrumenten mit achromatiſchem Objectiv in der Regel von einer ſchlechten Stellung der Oculare gegen einander, oder des Oculars gegen das Collectivglas her, und laſſen ſich leicht durch zweckmäßige Änderung dieſer Stellung aufheben.

272. Das Objectiv iſt mit dem Oculare durch Röhren verbunden, die inwendig geſchwärzt und an den Stellen, wohin Bilder fallen, mit Diaphragmen von der Größe des Bildes verſehen ſind. Wo das Objectiv eine Öffnung von mehr als 24 L. hat, braucht man in der Regel nur zwei ſolche Röhren, wovon die kleinere den Oculareinſatz enthält und oft mittelſt einer beſonderen Schraubenvorrichtung, oft auch ohne eine ſolche mit freier Hand dem Objective genähert oder von demſelben entfernt werden kann, nur in beſonderen Fällen werden bei terreſtriſchen Oculareinſätzen die zwei äußerſten Oculare in eine eigene Röhre eingemacht, um ſie gegen das Objectiv bewegen und dadurch die Vergrößerung ändern zu können. Solche Oculare heißen Pankratiſche Oculare. Kleinere Fernröhre beſtehen aus mehreren Röhrenſtücken zum Ineinanderſchieben. Mit Silber oder Gold plattirte Röhren dieſer Art ſchieben ſich in einer mit Tuch gefütterten Büchſe, meſſingene in federnden Hülſen. Letztere können darum mehr zuſammengeſchoben werden, ohne daß man zu beſorgen braucht, es werden dadurch die Axen der einzelnen Linſen aus der geraden Linie gebracht. Da ſelten längere Röhrenſtücke vollkommen gerade

ſind, ſo haben auch bei einem aus einander gezogenen Fernrohre die einzelnen Linſen nur bei einer beſtimmten Stellung der Röhren die rechte Lage zu einander. Dieſe Lage bezeichnen aufmerkſame Künſtler meiſtens dadurch, daß ſie an den Röhrenenden Sternchen anbringen, die in eine gerade Linie fallen müſſen, wenn die rechte Stellung getroffen ſeyn ſoll.

Man kann demſelben Objectiv mehrere Oculare anpaſſen, die verſchiedene Brennweiten haben und daher verſchiedene Vergrößerungen erzeugen, ja es laſſen ſich mit einem ſolchen ſowohl aſtronomiſche als terreſtriſche Aufſätze verbinden, wenn es überhaupt für erſtere die nöthige Öffnung und Vollkommenheit hat.

273. Die Linſen werden häufig beſtaubt und gewähren dann keine ſo große Lichtſtärke mehr, wie im reinen Zuſtande. Darum muß man ſie zu reinigen verſtehen. Dieſes iſt beſonders bei den achromatiſchen Doppellinſen mit Vorſicht auszuführen, bei denen ſich der Staub zwiſchen die zwei Beſtandlinſen zieht und nicht ſo leicht weggeſchafft werden kann.

Will man die Reinigung einer ſolchen Linſe vornehmen, ſo nimmt man die Schräubchen oder den Ring weg, der ſie zuſammenhält, und trennt die Gläſer von einander, merkt aber wohl, welche Flächen gegen einander ſtanden. Oft liegen zwiſchen den zwei Linſen kleine Staniolplättchen, die erſt durch Naßmachen ſich loslöſen laſſen. Auch die Stellen, wo ſie ſich befinden, muß man ſich merken. Hierauf werden die Gläſer zuerſt mit einem in Weingeiſt getauchten Tuche geputzt, hierauf in Kreidewaſſer gewaſchen und mit einem Linnentuche wohl abgetrocknet. Zuletzt kehrt man den noch daran haftenden Staub mit einem Pinſel ab. Selten wird man die Staniolplättchen zum zweiten Male brauchen können, man muß ſich darum neue zu verſchaffen wiſſen, die vollkommen gleich dick ſind. Zu dieſem Ende ſchneidet man von einem gut gewalzten Staniolſtreifen mehrere rechtwinkelige Stücke los, legt die zwei Gläſer in der beſtimmten Lage auf einander und bezeichnet die drei Puncte, wohin die Plättchen kommen. Hierauf legt man ein Plättchen an eine beſtimmte Stelle und ſchiebt es ſo weit zwiſchen die Gläſer hinein, als die Faſſung reicht. Da wird man irgendwo farbige Ringe bemerken, welche ihren gemeinſchaflichen Mittelpunct an der Berührungsſtelle der zwei Linſen haben. Man meſſe mit einem Zirkel den Abſtand dieſes Punctes vom Rande, wo ſich das Plättchen befindet, ziehe dann letzteres heraus, erſetze es durch ein

anderes und beſtimme neuerdings den Abſtand des Mittelpunctes der Farbenringe von demſelben Rande. Iſt dieſer Abſtand dem vorigen gleich, ſo haben beide Plättchen einerlei Dicke, wo nicht, ſo ſind ſie ungleich dick, und man muß das vorige Verfahren ſo oft wiederholen, bis man drei gleich dicke Stücke gefunden hat. Dieſe werden nun an ihren beſtimmten Platz gebracht, nachdem man ſie mit einer ſchwachen Gummilöſung benetzt hat, etwas zuſammengedrückt, der hervorſtehende Theil derſelben weggeſchnitten, und ſie dann in die Faſſung gebracht. Man muß ſich hüten, die Gläſer zu ſtark oder ungleich an einander zu preſſen.

274. Oft wünſcht man die Vergrößerungszahl eines Fernrohres zu kennen. Sind die Abſtände und Brennweiten der Linſen bekannt, ſo fällt es nicht ſchwer, durch Rechnung nach den vorhergehenden Formeln dieſen Wunſch zu realiſiren; es gibt aber auch praktiſche Methoden, durch welche man zu demſelben Ziele gelangt, ohne obige Größen zu kennen.

Eine dieſer Methoden beſteht darin, daß man das Fernrohr auf einen entfernten, in gleiche Theile getheilten Gegenſtande, wie z. B. auf eine Ziegelmauer, wo die Ziegelreihen noch ſichtbar ſind, richtet, und mit einem Auge auf das Bild im Fernrohre, mit dem anderen auf den Gegenſtand ſieht, und beobachtet, wie viele Abtheilungen des Gegenſtandes in eine Abtheilung des Bildes fallen. Die Anzahl dieſer Abtheilungen gibt die Vergrößerungszahl des Fernrohrs. Dieſe Methode fordert aber einige Übung, und läßt ſich mit Sicherheit nur auf Fernröhre anwenden, deren vergrößernde Kraft nicht bedeutend iſt. Man erleichtert ſelbſt dem Ungeübten die Anwendung derſelben und macht ſie zugleich für ſehr ſtark vergrößernde Inſtrumente brauchbar, wenn man vor dem Oculare einen kleinen ebenen Mittelſpiegel ſo anbringt, daß ſeine ſpiegelnde Ebene unter 45° gegen die Axe des Rohres geneigt iſt, acht Zoll hinter dem Spiegel eine Tafel aufſtellt, auf deren ſchwarzem Grunde eine weiße Linienſcale verzeichnet iſt, und eine gleiche Tafel in einer beſtimmten Entfernung von dem Fernrohre anbringt. So kann man mit demſelben Auge in den Spiegel und neben demſelben vorbei ſehen, und ſo das Bild im Fernrohre auf der Scale hinter dem Spiegel projicirt erblicken und beobachten, wie viele Felder der direct geſehenen Scale in ein Feld des Bildes fallen. Da man nun weiß, unter welchem Winkel ein Zoll in einer beſtimmten Entfernung vom Auge erſcheint, und zugleich denſelben Winkel für

das Stück der direct geſehenen Scale kennt, welches vom Bilde gedeckt wird und ſich in der deutlichen Schwere = 8 Zoll befindet; ſo iſt es ein leichtes, die Vergrößerungszahl zu berechnen. Dazu dient, wenn die abſolute Größe des Objectes $= a$, die Entfernung, in welcher es ſich befindet $= d$, das Stück der Scale, welches a deckt $= A$ iſt, die Formel $\frac{Ad}{8a}$. Dieſe gibt nämlich die Vergrößerungszahl des Fernrohres ſelbſt an.

Eine andere Methode beſteht darin, daß man das Fernrohr ſo ſtellt, daß ziemlich viel Licht durch das Objectiv in dasſelbe gelangt. Dieſes tritt beim Ocular wieder aus, und iſt in einer gewiſſen Entfernung vor demſelben (in der Entfernung f (S. 599)) am meiſten concentrirt. Es bildet daher auf einem Papiere, mit dem man es an dieſer Stelle auffängt, einen Kreis, deſſen Durchmeſſer in dem Durchmeſſer des Objectivs ſo oft enthalten iſt, als die Vergrößerungszahl beträgt. Es läßt ſich leicht ein Inſtrument einrichten, mit welchem man die Meſſung der genannten Lichtſcheibe genau vornehmen kann.

275. Dieſem Verfahren iſt folgendes ähnlich: Man ſtelle das Fernrohr ſo, daß man in demſelben das Bild der Sonne ſehen kann, laſſe die Strahlen aus dem Ocular hervordringen und meſſe in einer beſtimmten Entfernung vom Ocular den Durchmeſſer der kreisförmigen leuchtenden Scheibe, welche die austretenden Strahlen bilden. Theilt man durch dieſen die Entfernung vom Ocular, in der man ihn gemeſſen, nachdem man ſie mit der doppelten Tangente des Sonnenhalbmeſſers multiplicirt hat, ſo gibt der Quotient die geſuchte Vergrößerungszahl. Wäre jene Entfernung der Cotangente des Sonnendurchmeſſers gleich, ſo gäbe der Radius des Sonnenbildes in dieſem Maße gemeſſen, den Werth der Vergrößerung ſelbſt an. Jene Entfernung müßte demnach im Jänner 105, im Juli 109, im April und October 107 betragen. Genau genommen müßte man von der ſo gefundenen Zahl noch den Durchmeſſer des kleinen Bildes abziehen, welches da entſteht, wo man zu meſſen anfängt. Sollte das Geſichtsfeld nicht das ganze Sonnenbild aufnehmen können, ſo könnte man das Geſichtsfeld ſtatt des Sonnendurchmeſſers in Rechnung bringen. Der Grund dieſes Verfahrens iſt leicht einzuſehen. Heißt a der ſcheinbare Sonnendurchmeſſer, α der Durchmeſſer des Bildes in der Entfernung d vor dem Oculare, m die Vergrößerungszahl, und ſind β und γ die Win-

kel, unter welchen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}\alpha$ vom optiſchen Mittelpuncte des Oculars aus erſcheinen, ſo iſt

$$\frac{\tang\gamma}{\tang\beta} = m;\ \tang\gamma = \frac{\alpha}{2d},\ \text{mithin}\ m = \frac{\alpha}{2d.\tang\beta}.$$

$$\text{Iſt}\ d = \cot\beta,\ \text{ſo iſt}\ m = \frac{\alpha}{2}.$$

Dieſes Verfahren rührt von Valz her.

276. Ein anderes einer großen Präciſion fähiges Mittel hat Gauß angegeben. Es beſteht in Folgendem: Wenn man das Ocular eines Fernrohres für einen Weitſichtigen einſtellt und es dann auf einen nicht fernen Gegenſtand richtet, ſo fahren die Strahlen parallel aus dem Ocular, ſo wie ſie durch das Objectiv eingetreten ſind. Kehrt man das Inſtrument um, ſo ſieht man das Bild des Gegenſtandes durch das Objectiv eben ſo vielmal verkleinert, als es durch das Ocular angeſehen vergrößert erſcheint, aber zugleich ſehr ſcharf und deutlich, ſo daß es wohl durch ein zweites Fernrohr eine Vergrößerung verträgt. Wendet man nun zu dieſer Vergrößerung ein Theodolithfernrohr an und mißt mit dem Theodolith, möglichſt genau, den Winkel zwiſchen der optiſchen Axe und dem Bilde des ſo betrachteten Objectes, und dann den Winkel zwiſchen der optiſchen Axe und dem Objecte ſelbſt; ſo wird die Vergrößerung gleich ſeyn dem Quotienten aus der Tangente des letzteren Winkels getheilt durch die des erſteren. Wählt man zwei Objecte, die von der optiſchen Axe gleich weit abſtehen, ſo braucht man nur den Winkel zwiſchen beiden ſowohl im Fernrohre als außerhalb desſelben zu meſſen, und deſſen Hälfte in Rechnung zu bringen.

G. Mikroſkope.

1. Theorie derſelben.

277. Mikroſkope haben den Zweck, nahe Gegenſtände vergrößert darzuſtellen. Ihre Theorie beruht auf den in (37—50) entwickelten Formeln. Setzt man $l = 8$ Zoll als der deutlichen Sehweite für ein geſundes Auge und läßt die Strahlen aus dem letzten Oculare in paralleler Richtung ausfahren, d. h. macht man α für die letzte Linſe $= \infty$, ſo ſind dieſe Formeln für Mikroſkope eingerichtet. Das Objectiv erhält das Licht von einem ſehr nahen Gegenſtande und leidet darum leicht an Undeutlichkeit wegen der ſphä-

riſchen Abweichung, wenn man die Öffnung desſelben nur einigermaßen groß macht. Das Geſichtsfeld wird hier nicht wie bei Fernröhren durch den Winkel beſtimmt, unter welchem die vom äußerſten Puncte herkommenden Strahlen die Axe ſchneiden, ſondern durch das Stück des Objectes ſelbſt, das man auf einmal überſieht.

278. Ein einfaches Mikroſkop beſteht aus einer einzigen Sammellinſe, deren Brennweite kleiner iſt als die deutliche Sehweite. Denkt man ſich das Object im Brennpuncte der Linſe ſtehend, und das Auge hart an dieſelbe angehalten, ſo bekommt dieſes parallele Strahlen, als wenn ſie von einem weit entfernten Gegenſtande kämen. Man wird zwar das Object nicht immer ſo ſtellen, weil man ſtets ein Bild in der deutlichen Sehweite beabſichtiget und dieſes nur für ein weitſichtiges Auge ſo ſteht, daß von ihm parallele Strahlen in dasſelbe gelangen; allein der Unterſchied im Reſultate wird nicht bedeutend ſeyn, und man betrachtet daher die Sache meiſtens ſo, als befände ſich das Object im Brennpuncte der Linſe.

279. Die Vergrößerungszahl eines einfachen Mikroſkopes iſt gegeben durch

$$m = \frac{l}{p} = \frac{8}{p}.$$

Die Helligkeit wird beſtimmt durch

$$c = \frac{x^2}{0.0009\,m^2} = \frac{p^2 x^2}{0.576}.$$

Um den Halbmeſſer des Stückes zu finden, das man auf einmal überſieht, ſey AB (Fig. 168) die mikroſkopiſche Linſe und FE die halbe Öffnung derſelben. Wird das Auge hart an das Glas angehalten, ſo hat der äußerſte Hauptſtrahl, der noch ins Auge kommt, die Richtung DCE. Würde demnach der eintretende Hauptſtrahl gar nicht gebrochen, ſo bezeichnete DG das halbe Geſichtsfeld. Iſt c die halbe Dicke der Linſe, u die halbe Öffnung ihrer Hinterfläche, ſo iſt der Winkel FCE nahe $= \frac{c}{u}$. Allein der Strahl DC erleidet eine Brechung, wodurch der Winkel FCE in $\frac{FCE}{n}$ übergeht; deßhalb iſt der Halbmeſſer des auf einmal überſehbaren Stückes des Objectes

$$a\psi = \frac{anc}{u} = \frac{lnc}{mu}.$$

Der Halbmeſſer der Kugelabweichung R iſt im Allgemeinen

$$R = \frac{m\,a\,x^3}{4\,l} \cdot \frac{\mu}{p} \left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\varepsilon}{a\,a}\right)$$

er geht aber wegen $\frac{l}{a} = m$, $a = \infty$ über in

$$R = \frac{\mu\,\lambda\,x^3}{4\,p^3}.$$

Setzt man $\frac{\mu\,\lambda\,x^3}{p^3} = \frac{1}{\rho^3}$ ſo wird $x = \frac{p}{\rho}\sqrt[3]{\frac{1}{\mu\,\lambda}} = \frac{l}{m\rho}\sqrt[3]{\frac{1}{\mu\,\lambda}}$.

Der Erfahrung gemäß darf ρ bei Mikroſkopen = 20 ſeyn.

280. Für eine Linſe aus gewöhnlichem Glaſe iſt $n = 1.55$ und hieraus $\mu = 0.9381$. Iſt dieſe Linſe gleichſchenkelig, ſo wird $\lambda = 1.63$, mithin

$$x = \frac{0.3472}{m} \text{ Zoll.}$$

Für eine Saphirlinſe iſt $n = 1.77$ und daher $\mu = 0.6018$ und bei einer gleichen Convexität von jeder Seite $\lambda = 1.95$, mithin

$$x = \frac{0.3792}{m} \text{ Zoll.}$$

Für eine Diamantlinſe endlich iſt $n = 2.47$, $\mu = 0.283$ und unter derſelben Vorausſetzung in Betreff der Geſtalt $\lambda = 1.519$, mithin

$$x = \frac{0.530}{m} \text{ Zoll.}$$

Es verträgt daher eine Diamantlinſe bei gleicher Deutlichkeit eine größere Öffnung als eine Saphir- und dieſe eine größere als eine Glaslinſe. Bei einerlei Krümmungshalbmeſſer hat eine Diamantlinſe auch eine viel ſtärkere Vergrößerung als eine Saphirlinſe und dieſe wieder eine ſtärkere als eine Glaslinſe. Für eine gleichſchenkelige Linſe erhält man nämlich $p = \frac{f}{2\,(n-1)}$ und daher für einerlei f, für die Glaslinſe $p = \frac{f}{1.1}$, für die Saphirlinſe $p = \frac{f}{1.54}$ für die Diamantlinſe $p = \frac{f}{2.94}$, alſo ſtehen bei gleichen Krümmungen die Vergrößerungen nahe in dem Verhältniſſe 11 : 15 : 29.

281. Bei einem Mikroſkope aus zwei nahe an einander geſtellten Linſen fallen die von der erſten Linſe gebrochenen Strahlen ſo auf die zweite Linſe auf, als wenn ſie vom Brennpuncte der letzteren

herkämen und verlaſſen dieſelbe deßhalb in paralleler Richtung. Es iſt klar, daß α negativ, $p > a$, $a_1 = p_1$ und $\alpha_1 = \infty$ ſeyn muß. Für dieſe Einrichtung iſt $m = \frac{l}{a} \cdot \frac{\alpha}{a_1} = -\frac{l}{a} \cdot \frac{\alpha}{p_1}$ oder wenn man den Abſtand der optiſchen Mittelpuncte beider Linſen von einander δa nennt, wo dann $a_1 = -\alpha + \delta a$ iſt

$$m = -\frac{l}{a} \cdot \frac{\alpha}{(\delta a - \alpha)}.$$

Für das Geſichtsfeld iſt $z_1 p_1 = (\alpha + a_1)\,\psi$ oder $a\psi = \frac{a p_1 z_1}{a_1 + \alpha}$ mithin, wenn man wieder für α obigen Werth ſetzt, der Halbmeſſer des Objectes

$$a\psi = \frac{p_1 z_1}{\delta} = \frac{(-\alpha + \delta a)\, z_1}{\delta}.$$

Der Halbmeſſer der Kugelabweichung iſt in der Vorausſetzung einer gleichen Maſſe für beide Linſen, d. h. wenn man $\mu = \mu_1$, $\lambda = \lambda_1$ ſetzt

$$\frac{\mu m a x^3}{4l}\left(\frac{1}{p^3} + \frac{\varepsilon}{p a \alpha} - \frac{1}{\alpha^3}\right) \text{ oder } \frac{\mu m x^3}{4a^2 l}\left(\frac{a^3}{p^3} + \frac{\varepsilon a^2}{p\alpha} - \frac{a^3}{\alpha^3}\right).$$

Setzt man $\frac{a}{p} = R$, $\frac{a}{\alpha} = -S$, ſo wird dieſer Ausdruck

$$\frac{\mu m x^3}{4a^2 l}(R^3 - \varepsilon R S + S^3).$$

Soll er ein Minimum werden, ſo muß ſeyn

$$3R^2 dR - \varepsilon(R dS + S dR) + 3S^2 dS = 0.$$

Aber wegen $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$ iſt $\frac{a}{p} - \frac{a}{\alpha} = 1$ oder $R + S = 1$ und $dR = -dS$, wird

$$3R^2 - \varepsilon(R - S) - 3S^2 = 0,$$

welcher Gleichung durch $S = R$ entſprochen wird, wodurch wieder $S = \frac{1}{2}$, $R = \frac{1}{2}$ angezeigt wird. Man hat daher im Falle der kleinſten Kugelabweichung $\frac{a}{p} = \frac{1}{2}$, $\frac{a}{\alpha} = -\frac{1}{2}$ und deßhalb $\alpha = -2a$, $p = 2a$, $a_1 = (2 + \delta)\, a$, $p_1 = (2 + \delta)\, a$ und daher die Vergrößerung

$$m = -\frac{2l}{(2 + \delta)\, a}$$

der Halbmeſſer des ſichtbaren Objectes, für $z_1 = \frac{1}{5}$

$$a\psi = \left(\frac{2+\delta}{5\delta}\right).a = \frac{2l}{5\delta m}.$$

Setzt man die vorhergefundenen Werthe von $\frac{a}{p}$, $\frac{a}{\alpha}$ ꝛc. in den Ausdruck des Halbmeſſers der Kugelabweichung, ſo erhält man für denſelben

$$\frac{2\mu\lambda(1-\mathfrak{E})m^3x^3}{8l^3}.$$

Setzt man ihn $= \frac{1}{4\rho^3}$ und ſucht daraus x, ſo findet man $x = \frac{l}{m\rho}\sqrt[3]{\frac{1}{[\mu\lambda(1-\mathfrak{E})]}}$. Für die einfache Linſe hat man gefunden $x = \frac{l}{m\rho}\sqrt[3]{\frac{1}{\mu\lambda}}$ und daher iſt für dieſen Fall x in dem Verhältniſſe $\sqrt[3]{\frac{1}{(1-\mathfrak{E})}}$: 1 größer als im vorigen Falle. Für $n = 1.55$ iſt $\mathfrak{E} = \frac{0.2326}{l}$ mithin die Öffnung einer Doppellinſe in dem Verhältniſſe 1.74 : 1 größer als die einer einfachen.

Auf ähnliche Weiſe kann man ein aus drei nahe an einander ſtehenden Linſen zuſammengeſetztes Mikroſkop berechnen.

282. Die gewöhnlichen zuſammengeſetzten Mikroſkope ſind wie aſtronomiſche Fernröhre gebaut; ſie haben wie dieſe ein convexes aber mikroſkopiſches Objectiv und ein, zwei oder gar drei convexe Oculare. Die Berechnung eines zuſammengeſetzten Mikroſkopes, welches aus einem Objective und einem gleichſeitigen Oculare beſteht, zwiſchen welche das reelle Bild des Objectes fällt, iſt ſehr einfach und völlig der bei einem aſtronomiſchen Fernrohre mit einfachem Oculare ähnlich. Man hat:

die Vergrößerungszahl $m = \frac{l}{a}.\frac{\alpha}{p_1}$

das Geſichtsfeld $a\psi = \frac{l z_1}{ma+l}$

den Ort des Auges $f = \frac{l}{a}.\frac{z_1 p_1}{m\psi} = \frac{ma+l}{a}.\frac{p_1}{m}$

die Entfernung des Objectes vom Objective $\alpha = \left(1+\frac{l}{mp_1}\right)p.$

Die Ableitung der erſten drei Werthe iſt für ſich klar. Die des vierten findet man aus $\frac{a}{p} = 1 + \frac{a}{\alpha} = 1 + \frac{l}{mp}$,

Um die halbe Öffnung des Objectives zu finden, ſetze man m ſehr groß, ſo daß $a = p$ und $\alpha = \infty$ wird. Wird dann noch dazu $\lambda = 1$ geſetzt, ſo erhält man den Halbmeſſer der Kugelabweichung

$$\frac{\mu m x^3}{4 l p^2}.$$

Setzt man dieſen $= \frac{1}{4\rho^3}$ und findet daraus x, ſo erhält man

$$x = \sqrt[3]{\frac{l p^2}{\mu m \rho^3}}.$$

Setzt man $l = 8$, $n = 1.55$ mithin $\mu = 0.9381$, $p = \frac{1}{2}$ $\rho = 20$, ſo wird $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3752\, m}}$.

283. Für ein ſolches Mikroſkop mit zwei Ocularen hat man folgende Gleichungen:

$$m = \frac{l}{a} \cdot \frac{\alpha \alpha_1}{a_1 a_2};\ p_1 z_1 = (\alpha + a_1)\, \psi;$$

$$p_2 z_2 = \left(\frac{\alpha \alpha_1}{a_1} - a_2\right) \psi + a_2 z_1;\ z_1 + z_2\ \frac{a_2}{\alpha_1} = 0.$$

Die erſte gibt die Vergrößerungszahl, die zweite die Öffnung des erſten, die dritte die Öffnung des zweiten Oculars, die vierte die Bedingung der Farbenloſigkeit der Bilder. Unter den darin vorkommenden Größen ſind a, α, α_1, a_2, z_1 poſitiv, a_1, z_2 negativ. Setzt man demnach $\frac{\alpha}{a_1} = -A$, $\frac{\alpha_1}{a_2} = B$, $z_2 = -z$, $z_1 = \nu z$, ſo gehen die vorigen Gleichungen in folgende über:

$$m = \frac{l}{a} AB;\ \frac{\nu z p_1}{a_1} = -(A - 1)\, \psi$$

$$z = (AB + 1)\, \psi - \nu z,\ \nu = \frac{1}{B}.$$

Aus der zweiten Gleichung wird $\psi = \frac{z(1+\nu)}{AB+1}$ woraus erhellet, daß man, um ein großes Geſichtsfeld zu erhalten, $\nu = 1$ ſetzen müſſe, woraus dann hervorgeht: $B = 1$, $\alpha_1 = a_2 = p_2$,

und mittelſt dieſer Werthe

$$m = \frac{l}{a}A;\ \psi = \frac{2z}{A+1};\ \frac{p_1}{a_1} = -\frac{2(A-1)}{A+1}.$$

Da A ſehr groß iſt, ſo wird $\frac{p_1}{a_1}$ nahe $=-2$ oder $p_1 = -2a_1$. Man kann dieſe Gleichung als ſtreng giltig anſehen, weil durch ihre Annahme nur das Geſichtsfeld etwas kleiner wird, wie der Werth von ψ zeigt. Aus $p_1 = -2a_1$ folgt aber mittelſt der Gleichung $\alpha_1 = \frac{a_1 p_1}{a_1 - p_1}$ unmittelbar $\alpha_1 = p_2 = \frac{1}{3}p_1$, woraus man ſieht, daß die Brennweite der Collectivlinſe $\frac{1}{3}$ der Brennweite der Ocularlinſe ſeyn muß.

Um die Entfernung des Objectes von der Objectivlinſe zu finden, hat man $\frac{a}{p} = 1 + \frac{a}{\alpha}$. Aber $\alpha = -\alpha_1 A = \frac{1}{2}Ap_1$; $a = \frac{lA}{m}$ mithin $\frac{a}{\alpha} = \frac{2l}{mp_1}$, und $\frac{a}{p} = 1 + \frac{2l}{mp_1}$ und daraus $a = \frac{mp_1 + 2l}{mp_1}p$ $= p + \frac{2l}{m}\cdot\frac{p}{p_1}$.

Die Entfernung des Objectives von der Collectivlinſe iſt $\alpha + a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{ma}{l} - 1\right)p_1$.

Die Entfernung der Collectiv- von der Ocularlinſe $\alpha_1 + a_2 = 2p_2 = \frac{2}{3}p_1$.

Aus $\psi = \frac{2z}{A+1} = \frac{2lz}{ma+l}$ wird der Halbmeſſer des ſichtbaren Objectes $\frac{2zal}{ma+l}$.

Der Ort des Auges wird beſtimmt durch $\frac{l}{a}\cdot\frac{z_2 p_2}{m\psi} = \frac{ma+l}{2ma}p_2$.

284. Bekanntlich werden ſeit geraumer Zeit auch die Objective der Mikroſkope ſo wie die der Fernröhre achromatiſch gemacht und beſtehen demnach ſo wie dieſe aus einer hohlen Flintglas- und aus einer oder zwei convexen Crownglaslinſe. Die Einrichtung dieſer Linſen weicht von der für Fernröhre näher beſprochenen nicht weſentlich ab; man braucht dabei nur zu berückſichtigen, daß bei Mikroſkopen die Strahlen nahe vom Brennpuncte des Objectives ausgehen, während ſie bei Fernröhren von einem ſehr weit entle-

genen Objecte auffallen und ſich im Brennpuncte vereinigen, und daß daher eine achromatiſche Linſe bei einem Mikroſkope mit der hohlen Flintglaslinſe gegen das Object gewendet ſeyn muß, während man dieſe bei Fernröhren einwärts kehrt. Man wird aber nie darauf rechnen dürfen, dieſen kleinen Beſtandlinſen eines achromatiſchen Objectives genau die Abmeſſungen geben zu können, welche zur Aufhebung der Farbenzerſtreuung und der ſphäriſchen Abweichung nothwendig ſind. Man hat in der neueſten Zeit angefangen, zwei oder gar drei nahe an einander geſtellte achromatiſche Linſen ſtatt einer einzelnen anzuwenden, und dadurch eine Reinheit der Bilder und eine Deutlichkeit zu Stande gebracht, die man nie zu erreichen hoffte. Der Grund dieſer Vorzüge liegt ohne Zweifel in der Theilung der Brechung, welche eintritt, wenn man ſtatt einer einzigen ſehr ſcharfen Linſe zwei oder drei minder ſcharfe, aber zuſammen doch jener an Schärfe gleichkommende anwendet. Um den Vorzug einer ſolchen Doppellinſe gegen eine einzige einzuſehen, denke man nur an das, was 281 geſagt wurde.

2. Einrichtung der Mikroſkope.

285. Es iſt nicht genug, daß bei einem Mikroſkope jede Linſe die gehörige Geſtalt, Brennweite, Öffnung und Lage habe, ſondern es muß auch die übrige Einrichtung dem Zwecke dieſer Inſtrumente entſprechend ſeyn, und der Phyſiker muß ſie kennen, um davon den rechten Gebrauch machen zu können.

Am einfachſten iſt die Einrichtung der Loupen. Da dieſe in der Regel nur aus einer Convexlinſe beſtehen, deren Öffnung über 5 L. beträgt, ſo braucht man ſie nur mit einer Faſſung zu verſehen und ſie ſind zum Gebrauche bereitet. Dieſe Faſſung beſteht meiſtens aus einem Ringe aus Horn, Holz oder Elfenbein, ſeltener aus Metall. Man macht die Linſe meiſtens gleichſeitig, damit man ſie mit gleicher Wirkung von jeder Seite brauchen kann, nur ſolche, welche in geübtere Hände kommen, werden planconvex oder gar mit Convexitäten, deren Radien ſich wie 1 : 6 verhalten, gemacht. Da müſſen ſie aber ſtets mit der convexeren Seite gegen das Object gerichtet ſeyn. Nicht ſelten braucht man zwei ſich faſt berührende Linſen als Loupe und gibt denſelben auch verſchiedene Brennweiten, damit man mit jeder einzelnen eine beſondere Vergrößerung, und mit beiden zugleich eine dritte Vergrößerung erlangen kann. Solche Loupen werden meiſtens in Ringe gefaßt, die einen Handgriff haben,

mit dem ſie mittelſt einer Charnier in eine Deckelvorrichtung paſſen. Eine Faſſung aus Horn iſt für ſie nicht zweckmäßig, weil dieſe ſich leicht verzieht und dann die Axen beider Linſen, wenn ſie über einander liegen, leicht von einer geraden Linie etwas abweichen. Es iſt gut, ſie durch eine mit einer Öffnung verſehene Zwiſchenplatte von einander zu trennen, welche nur die der gemeinſchaftlichen Axe nahen Strahlen durchläßt und der aus dem Gebiete der ganzen Öffnung hervorgehenden Undeutlichkeit ſteuert.

Plößl verfertiget ſeit einiger Zeit achromatiſche Loupen und zwar ſowohl einfache als doppelte. Sie bringen eine überraſchende Wirkung hervor.

Wenn man mit einer einfachen Loupe eine ſtarke Vergrößerung erzielen will, ſo braucht man ſie nur in eine lange Röhre zu faſſen, an einem Ende die Linſe einzuſetzen, am anderen die Öffnung für das Auge anzubringen. Man erlangt dieſe ſtärkere Vergrößerung aber nur auf Koſten des Geſichtsfeldes.

Wenn man eine Linſe in eine Röhre faßt, deren Länge der Brennweite der Linſe gleich iſt, und an dem der Augenöffnung entgegengeſetzten Ende einen Deckel mit einem quadratförmigen Loche anbringt, deſſen jede Seite mit einer feinen Linienſcale verſehen iſt, ſo kann man den Apparat als Leinwandmeſſer brauchen, weil die Anzahl der auf eine Seite des Ausſchnittes fallenden Fäden mit der Feinheit und Dichte des Gewebes zuſammenhängt.

286. Einfache Mikroſkope werden in der Regel mit einer Metallfaſſung verſehen, die zugleich eine Zange, einen in eine feine Spitze auslaufenden Stift ꝛc. anzubringen geſtattet. Scharfe Linſen bekommen an der Rückſeite der Faſſung einen metallenen Hohlſpiegel (Lieberkühn'ſchen Spiegel), der die Helligkeit erhöht, indem er die, die Linſe verfehlenden Strahlen auf das Object zurückwirft. Es iſt kaum möglich, eine mikroſkopiſche Linſe zu verfertigen, deren Brennweite kleiner iſt, als 0.4 L. und dieſe vergrößert linear 240 Mal, ja ſelbſt die Verfertigung ſolcher Linſen fordert ſchon eine große Geſchicklichkeit. Will man mittelſt eines einfachen Mikroſkopes eine ſtärkere Vergrößerung hervorbringen, ſo muß man entweder Diamant- oder Saphirlinſen anwenden, oder ſich mit einem Glaskügelchen begnügen, das aber nie die Deutlichkeit einer ordentlichen Linſe gibt. Man erhält ſolche Kügelchen, wenn man einen feinen Glasfaden in eine Stichflamme hält und das ſich ſehr ſchnell bildende Knöpfchen abbricht. Brewſter lehrt Waſſer-

tropfen, Fiſchaugen ꝛc. ſtatt einfacher Linſen mit Vortheil gebrauchen. Ein Waſſertropfen auf einem mit einem feinen Loche verſehenen Metallplättchen gewährt ſogar zwei verſchiedene Vergrößerungen, je nachdem man die Metall- oder die Waſſerſeite gegen das Auge kehrt, indem der Tropfen im erſteren Falle platter iſt, als im zweiten. Ein Tropfen Alkohol, Schwefelſäure, Ricinusöhl thut noch beſſere Dienſte, am beſten ſoll ein Tropfen Canadabalſam ſeyn. Alle dieſe Körper haben nämlich ein größeres Brechungs- und ein kleineres Zerſtreuungsvermögen als Waſſer, und geſtatten darum auch eine größere Öffnung und geben deutlichere Bilder.

Einfache mikroſkopiſche Linſen werden oft mit ihrer Faſſung in ein eigenes Poſtament eingeſetzt, das mittelſt einer beſonderen Vorrichtung dem Objecte die nöthige Entfernung vom Glaſe zu geben geſtattet, und mit einem paſſenden Beleuchtungsapparate verſehen iſt.

287. Zuſammengeſetzte Mikroſkope, die nur aus zwei oder drei einander faſt berührenden Linſen beſtehen, werden wie ein einfaches Mikroſkop eingerichtet, jene hingegen, wo das Objectivglas ein wirkliches Bild liefert, erhalten nebſt der eigentlichen Faſſung, die aus einer meiſtens metallenen Röhre beſteht, noch vieles Zugehör. In der Regel gehören zu einem ſolchen Mikroſkope mehrere Objectivlinſen mit verſchiedenen Brennweiten, und auch mehrere Oculare. Bei der größten Gattung der Fraunhofer'ſchen Inſtrumente, ſo wie bei denen von Plößl, befinden ſich ſechs Objective und zwei oder gar drei Doppeloculare. Erſtere laſſen ſich meiſtens am gehörigen Orte aufſchrauben, wie das Objectiv bei einem Fernrohre, manchmal ſind ſie aber in einer Scheibe befeſtigt, die ſich um eine mit der Axe des Inſtrumentes parallele Axe bewegen läßt, ſo daß man blos durch Drehen dieſer Scheibe das Objectiv wechſeln kann, eine Einrichtung, welche zwar beim Gebrauche ſehr bequem iſt, aber in der Ausführung große Vorſicht und Genauigkeit fordert, indem der geringſte Fehler in der Lage der Drehungsaxe ſchon einen merklichen Centrirungsfehler im Inſtrumente erzeugt. Die Linſen ſind gewöhnlich numerirt, und zwar die ſchärfſte mit der höchſten Nummer; man erkennt aber den Grad der Schärfe aus ihren Öffnungen, indem dieſe in dem Maße kleiner werden, wie die Vergrößerungsvermögen zunehmen. Übrigens werden die Objective faſt immer achromatiſch gebaut. Bei Plößl's, Amici's und den neueſten Münchner Mikroſkopen werden zwei oder drei Objective zugleich

aufgeſchraubt, ſo daß ſie ſich faſt berühren. Dabei iſt es nicht gleichgültig, welche Linſen man zuſammen verbindet, und der Künſtler muß angeben, welche der vorhandenen ſich combiniren laſſen. Man nennt ſolche Linſen aplanatiſche. Da beim Gebrauche verſchiedener Objective das Object auch eine verſchiedene Entfernung vom Objectivglaſe haben muß, ſo iſt es nöthig, daß entweder der Tiſch, welcher zum Objectträger beſtimmt iſt, oder die Röhre mit den Gläſern beweglich ſey. Ich ziehe ſtets letzteres vor. Die Bewegung geſchieht mittelſt einer gezähnten Stange und einem Getriebe, und ſoll ſtets ſehr ſanft vorgenommen werden können, beſonders bei ſtärkeren Vergrößerungen. Bei ſolchen dürfte eine Schraubenvorrichtung nach Art der gewöhnlichen Mikrometerſchrauben den gewöhnlichen Apparaten mit Zahn und Getriebe vorzuziehen ſeyn, weil ſie eine freiere Bewegung und ein beſſeres Einſtellen geſtattet.

Die Einrichtung des Tiſches iſt für ein brauchbar ſeyn ſollendes Mikroſkop ein Gegenſtand von großem Belange. Er muß ein Glasmikrometer, ferner einen Aufſatz mit einem Planglaſe aufnehmen können, auf welchem man kleine Tropfen von Flüſſigkeiten anbringt, die man durch das Mikroſkop betrachten will, dann einen größeren, aus zwei Hohlgläſern beſtehenden, zwiſchen welchen man kleine lebende Thiere einſperrt und ins Geſichtsfeld des Inſtrumentes bringt; ferner muß er mit einer Klemme verſehen ſeyn, in welche die Objectträger geſchoben und daſelbſt feſt gehalten werden können. Endlich muß ſich noch ein Zängelchen anſtecken laſſen, wodurch man kleine Objecte einzwängt.

An der größeren Gattung der Plößl'ſchen Inſtrumente beſteht der Tiſch aus zwei über einander befindlichen durchbohrten Platten, worunter die untere feſt iſt, die obere aber nach zwei Richtungen, die mit einander einen rechten Winkel einſchließen, mittelſt Schrauben bewegt werden kann, welche zwei Bewegungen bekanntlich zur Erzeugung jeder möglichen Bewegung in der horizontalen Ebene hinreichen. Auf dieſer Platte befindet ſich ein gabelförmiges Stück, das durch eine Spiralfeder an die Platte angedrückt wird, aber durch einen Druck mit dem Finger leicht gehoben werden kann und die Klemme abgibt, welche den Objectträger feſthält.

Vorzüglich kunſtreich iſt der Tiſch an denjenigen Fraunhofer'ſchen Inſtrumenten eingerichtet, welche zugleich mit einem Schraubenmikrometer zum Meſſen kleiner Objecte verſehen ſind. Fi-

gur 169 ſtellt ihn vor, wie er an der ſtählernen gezähnten Säule des Mikroſkopes angebracht iſt. Er beſteht aus zwei runden ringförmigen Tiſchplatten, wovon wieder die untere unveränderlich befeſtiget iſt, während die obere in einer auf der Axe des Mikroſkopes ſenkrechten Richtung nach allen Seiten bewegt werden kann. Einige dieſer Bewegungen dienen dazu, das zu meſſende Object in die gehörige Lage zu bringen, und nur eine dient zu der Bewegung, durch welche die eigentliche Meſſung vollzogen wird. Inſtrumente, welche mit dieſem Apparate verſehen ſind, müſſen an der Stelle des Diaphragma's ein rechtwinkeliges Fadenkreuz haben.

Ein ſehr wichtiger Theil eines zuſammengeſetzten Mikroſkopes iſt der Beleuchtungsapparat. Für durchſichtige Objecte wendet man einen Hohlſpiegel an, der ſich unter dem Tiſche befindet, für undurchſichtige hingegen eine Sammellinſe.

Eine bedeutend ſtärkere Beleuchtung gewährt aber für letztere eine prismatiſche Linſe, wie ſie zuerſt von Selligue in Paris angegeben wurde, die ein dreiſeitiges Prisma mit zwei convexen Flächen vorſtellt, welches macht, daß die Lichtſtrahlen, welche durch die erſte convexe Fläche einfallen und gebrochen werden, an der planen in der Faſſung befindlichen Seite eine Reflexion, und beim Austritte aus der zweiten convexen Fläche eine abermalige Brechung erleiden. Bei ſehr kleinen Objecten und ſtarker Vergrößerung ſah man ſich früher, wo man bei Mikroſkopen nur einfache Objectivlinſen, die nur eine ſehr geringe Öffnung vertragen, brauchte, genöthiget, nebſt dem gewöhnlichen Beleuchtungsſpiegel, noch einen Lieberkühn'ſchen Spiegel anzuwenden, der auf die Objectivfaſſung aufgeſteckt werden kann und das vom unteren Spiegel neben dem Objecte vorübergehende Licht wieder auf das Object zurückwirft, und es ſo beleuchtet. Heut zu Tage verzichtet man auf ſolche Spiegel gern. Dafür wendet man bei ſehr ſtarken Vergrößerungen mit bedeutendem Vortheil eine Sammellinſe an, durch die man das Licht concentrirt, bevor es auf den Hohlſpiegel fällt. Bei ſtarkem Tageslichte oder bei gutem Lampenlichte und nicht ſtarken Vergrößerungen reicht ſchon das direct auf das Object fallende Licht hin, um ein hinreichend helles Bild zu gewähren, und in einem ſolchen Falle bewirkt das vom Spiegel dem Objecte zugeſendete Licht nur eine unangenehme Blendung. Darum wendet man da den Spiegel um, ſo daß er ſeine Rückſeite dem Objecte zukehrt. Dieſe Seite ſoll darum auch ſtets geſchwärzt ſeyn.

Das Geſtell eines Mikroſkopes ſoll dem Inſtrumente die nöthige Feſtigkeit gewähren und ihm doch auch die nöthigen Bewegungen geſtatten. Manches Inſtrument läßt ſich ſowohl in die verticale als in die horizontale Lage bringen; an einigen kann man den Körper desſelben längs des ganzen Tiſches ſchnell hinſchieben, und ſo ſehr ſchnell von einem Objecte zum anderen, oder von einem Theile desſelben zum anderen übergehen. Manche Beobachter wollen die Objectivlinſe eines zuſammengeſetzten Mikroſkopes für ſich als einfaches Mikroſkop benützen; darum läßt ſich an einigen Inſtrumenten das Objectiv eigens an das Stativ anſchrauben und über dieſes dann die Röhre mit dem Reſte der Gläſer ſo anbringen, daß man letztere wegnehmen kann, und nur erſtere übrig bleibt.

So gut dieſes in mancher Hinſicht ſeyn mag, ſo kann man ſich doch nicht verhehlen, daß bei ſo vielfachen Bewegungen der einzelnen Theile gegen einander die Centrirung ſtets etwas leiden muß.

Zu dem mikroſkopiſchen Apparate gehören auch noch zwei in Glas getheilte Mikrometer, wovon einer an die Stelle des Objectes, der andere in das Diaphragma, wo das Bild des erſteren erſcheint, gebracht werden kann. Auch fein getheilte Scalen auf Elfenbein leiſten oft gute Dienſte. Überhaupt dienen ſolche Mikrometer zur Beſtimmung der Größe kleiner Körper und auch zum Meſſen der Vergrößerung, die ein Mikroſkop hervorbringt.

3. Gebrauch eines Mikroſkopes.

288. Beim Gebrauche eines Mikroſkopes hat man die Abſicht, entweder von einem kleinen Objecte nur ein vergrößertes, deutliches und klares Bild zu erhalten, oder zugleich auch die, die Größe des Gegenſtandes zu beſtimmen.

Zur Erreichung der erſten Abſicht wird blos erfordert, den Gegenſtand, um deſſen Betrachtung es ſich handelt, gehörig zubereitet in die paſſende Lage und Entfernung von der Objectivlinſe zu bringen und ihm den beſten Grad der Beleuchtung zu ertheilen.

289. Über die Zubereitung des Objectes zu mikroſkopiſchen Betrachtungen laſſen ſich keine allgemeinen Regeln aufſtellen, da dieſe mit der Natur der Objecte zu ſehr wechſelt; nur will ich bemerken, daß darauf ungemein viel ankomme und daß mancher auch mit dem beſten Mikroſkope das nicht ſieht, was der

andere mit einem minder guten wahrnimmt, weil er das Object nicht zweckmäßig zur mikroſkopiſchen Betrachtung zuzurichten verſteht. Dieſe Objecte werden meiſtens auf oder zwiſchen zwei Glasplatten gelegt; letzteres thut man aber nur, wenn man dieſelben längere Zeit hindurch aufbewahren oder als Probeobjecte erhalten will; man lauft aber immer Gefahr wegen kleiner Unreinigkeiten des Glaſes eine mindere Klarheit und wegen einer ungleichen Glasdicke eine geringere Deutlichkeit zu erhalten. Letzteres tritt beſonders leicht ein, wenn das Glas aus einer Glaskugel geſchnitten iſt, wie es häufig zu geſchehen pflegt; ebene Glasplatten, z. B. aus dünnen Spiegeln geſchnittene, ſind dieſem Fehler ſeltener unterworfen. Bei ſehr ſtarken Vergrößerungen iſt es unerläßlich, das Object unmittelbar auf ein Glas zu legen, weil die Dicke eines Glasdeckels oft nicht mehr erlaubt, den Gegenſtand der Objectivlinſe hinreichend zu nähern. Dieſes iſt beſonders bei den aplanatiſchen Mikroſkopen der Fall.

290. Beim Einlegen des Objectes auf den Tiſch des Mikroſkopes muß es in die Axe des Inſtrumentes geſtellt werden. Bei ſchwachen Vergrößerungen, wo das Geſichtsfeld hinreichend groß iſt, hat dieſes nie eine Schwierigkeit, bei ſtarken Vergrößerungen hingegen wird einiger Tact erfordert, ja es iſt manchmal ſogar nothwendig, zuerſt ein ſchwaches Objectiv aufzuſchrauben und das Object für dieſes in die Axe zu ſtellen, hierauf erſteres durch das ſchärfere zu erſetzen, in deſſen Axe ſich dann der Gegenſtand ebenfalls befinden wird, wenn man ihn während des Wechſelns nicht verrückt hat. Ein mit Rectificirungsſchrauben verſehener Tiſch leiſtet hierbei beſonders gute Dienſte, weil man damit Objecte in jeder Richtung ſanft und leicht bewegen kann.

291. Beim Einſtellen des Mikroſkopes ſoll man ſachte verfahren und beſonders bei ſtarken Vergrößerungen wohl darauf ſehen, daß man den Objectträger nicht an die Objectivlinſe andrücke und beſchädige. Je ſtärker die Vergrößerung iſt, deren man ſich bedient, deſto ſanfter muß die letzte Bewegung vorgenommen werden, wenn man nicht die Grenze der größten Deutlichkeit überſehen will. Da bringt ſchon die kleinſte Abweichung von der rechten Stellung einen großen Unterſchied in der Deutlichkeit hervor. Auch iſt es unumgänglich nothwendig, daß ſich jeder Beobachter das Object ſeinem Auge gemäß einſtelle, denn die kleinſte Differenz in der Sehweite wird bei ſcharfen Linſen ſchon

ſehr merklich. Auch iſt klar, daß man da nur jene Stellen des Objectes deutlich ſehen kann, welche gleiche Entfernung vom Objectiv haben. Will man das Object weiter rücken, um eine andere Stelle desſelben zu ſehen, ſo wird darum, falls dieſe eine andere Entfernung vom Glaſe hat, ein neues Einſtellen nothwendig werden. Beim Gebrauche flüſſiger Objecte muß darum auch der Tiſch eine horizontale Lage haben.

292. Ein weſentliches Erforderniß zum Gelingen mikroſkopiſcher Beobachtungen iſt die gehörige Beleuchtung des Objectes. Directes Sonnenlicht ſoll nie zur Beleuchtung gebraucht werden. Dieſes Licht beleidiget das Auge, ſtört die Klarheit des Sehens und bewirkt am Objecte durch die Erhitzung eine naturwidrige Verzerrung. Eben ſo ſoll man das von dunklen oder grellfarbigen Gegenſtänden reflectirte Licht meiden. Bei Tage gewährt das Licht weißer Wolken oder einer mäßig weißen, nicht direct von der Sonne beſchienenen Mauer die beſte Beleuchtung. Nachts leiſtet eine Wachskerze, eine Lampe mit Banddocht und einer gläſernen Zugröhre oder eine argandiſche, mit einer matten Glaskugel bedeckte Lampe die beſten Dienſte. Stellt man ein Mikroſkop in die Nähe eines Fenſters, ſo ſind oft die dunklen Fenſterkreuze der gehörigen Beleuchtung ſtark im Wege. Auf das Ocular ſoll kein grelles Licht fallen, ſonſt iſt es nöthig, einen Schirm daſelbſt anzubringen. Einen ſolchen kann ſelbſt die Hand des Beobachters abgeben.

Bei der Beleuchtung von unten durch den Spiegel läßt ſich das Licht ſchon durch die rechte Stellung des Spiegels mäßigen und verſtärken, dasſelbe gilt auch bei der Beleuchtung mittelſt einer Linſe von oben. Es iſt ſehr weſentlich, daß man dem Beleuchtungsapparate die gehörige Stellung zu geben weiß, weil von dieſer die Nettigkeit und Reinheit des Bildes ſo ſehr abhängt. Manche Gegenſtände, z. B. die Theilſtriche eines Glasmikrometers, ſieht man bei nur etwas ſtarker Beleuchtung gar nicht, andere nur unvollkommen, wieder andere fordern hingegen ein ſtarkes Licht. Bei der Anwendung der oberen Beleuchtung darf kein Licht vom Spiegel auf das Object fallen. Man erreicht dieſes, wenn man den Spiegel ſo ſtellt, daß ſeine Axe in die des Rohres fällt.

293. Wer einen Gegenſtand durch mikroſkopiſche Betrachtung desſelben näher kennen lernen will, beſehe denſelben zuerſt mit kleinen Vergrößerungen, um davon größere Parthien überſehen zu können und ſchreite erſt ſtufenweiſe zu den ſtärkſten Vergrößerun-

gen fort, die er verträgt. Man gebe während der Betrachtung bei derſelben Vergrößerung dem Beleuchtungsapparate verſchiedene Neigungen gegen die Axe des Rohres, um ſo bei mehreren Abſtufungen der Beleuchtung Beobachtungen anzuſtellen, wehre durch die Hand oder durch einen Schirm alles Licht ab, welches ſeitwärts unabhängig vom Beleuchtungsapparate auf das Object fällt, und vergeſſe nicht, jeden Gegenſtand, der eine untere Beleuchtung geſtattet, auch einmal von oben zu beleuchten und das untere Licht zu unterdrücken. Man lernt den Charakter eines Objectes nie vollſtändig kennen, wenn man es nur im durchgelaſſenen oder nur im reflectirten Lichte ſieht.

294. Sehr wichtig iſt es in vielen Fällen, die Größe eines mikroſkopiſchen Objectes meſſen zu können. Dieſes kann auf eine zweifache Weiſe, nämlich entweder mittelſt eines Glasmikrometers oder mittelſt eines Schraubenmikrometers geſchehen.

Im erſteren Falle legt man den Mikrometer auf den Tiſch des Inſtrumentes mit der Fläche, worauf die Scale verzeichnet iſt, nach dem Objectiv hingewendet, legt das zu meſſende Object darauf und ſieht, wie viele Felder, Bruchtheile eines Feldes mit eingerechnet, von demſelben bedeckt werden. Kennt man die Größe eines Feldes, ſo iſt dadurch und durch die vorhergehende Beobachtung auch die des Objectes leicht gefunden. Doch darf man nicht vergeſſen, daß ſolche Meſſungen nur bei mäßigen Vergrößerungen vorgenommen werden können, bei ſtarken iſt die Differenz im Abſtande des Objectes und des Mikrometers vom Objective zu groß, als daß man beide zugleich ſcharf ſehen könnte.

Will man mit einem Schraubenmikrometer eine Abmeſſung eines Objectes beſtimmen, ſo verfährt man auf folgende Weiſe: Es wird das Object auf den Tiſch des Mikroſkopes gelegt, und ſo eingeſtellt, daß ſein Bild im Geſichtsfelde deutlich erſcheint, und ſein Rand einen Faden des Fadenkreuzes im Ocular berührt, dann mittelſt der Mikrometerſchraube ſenkrecht auf die Richtung dieſes Fadens hingeſchoben, bis der entgegengeſetzte Rand wieder den Faden berührt und der Werth der Verſchiebung an der Theilung des Schraubenkopfes mittelſt eines Mikrometers abgenommen. Natürlich muß man den Werth eines Schraubenganges genau kennen. Bei einem Fraunhofer'ſchen Mikroſkope, welches das hieſige Muſeum beſitzt, beträgt dieſer Werth 0.00142 W. L. der Schraubenkopf iſt in hundert Theile getheilt und der Nonius gibt von jedem Theile $\frac{1}{10}$,

ſo daß man 0.0001 W. L. meſſen kann, wenn die Schraube keinen leeren Gang hat, welches wohl bei keinem Inſtrumente im ſtrengſten Sinne der Fall ſeyn dürfte. Für große Bewegungen, die mehrere Schraubengänge umfaſſen, iſt überdieß noch eine Längenſcale angebracht, die 0.142 W. L. angibt. Soll nun eine ſolche Meſſung richtig ſeyn, ſo muß man den erſten Rand des Objectes in genaueſte Berührung mit dem Faden ſetzen, die zu beſtimmende Dimenſion muß genau auf dieſem Faden ſenkrecht ſtehen und in einer auf der Axe des Inſtrumentes ſenkrechten Ebene liegen. Die erſte Berührung ſtellt man mit der Mikrometerſchraube ſelbſt her; um aber die zu beſtimmende Dimenſion in die auf dem Faden ſenkrechte Lage zu bringen, dienen Schrauben, durch welche die obere Tiſchplatte um ihren Mittelpunct gedreht werden kann. Man erkennt leicht, ob man das Object ſchon in die rechte Lage gebracht hat, wenn man es zugleich nahe an den zweiten Faden des rechtwinkeligen Fadenkreuzes bringt und darauf achtet, ob es beim Fortſchieben mittelſt der Mikrometerſchraube immer gleichweit von demſelben bleibt. Zur Bewegung dient eine fernere Schraube, durch welche man die obere Tiſchplatte nach einer Richtung verſchieben kann, welche auf der Richtung der Bewegung durch die Mikrometerſchraube ſenkrecht ſteht. Die Ebene des Tiſches iſt genau auf der Axe des Inſtrumentes ſenkrecht und bleibt ſo, wenn er auch durch eine Schraube verſchoben wird. Darum wird ein Object, das auf dem Tiſche oder auf einem dazu paſſenden Einſatz ſich befindet, ſtets in dieſer Lage verbleiben und richtig gemeſſen werden können. Bei der Unterſuchung der Flüſſigkeiten, deren Oberfläche ſtets horizontal iſt, muß man auch den Tiſch horizontal ſtellen; darum ſind die Füße des Inſtrumentes mit Stellſchrauben verſehen. Man braucht die Stellung nicht etwa mit einer Waſſerwage zu machen; ſondern dadurch, daß man es dahin zu bringen ſucht, daß das Object, wenn es von einem Ende des Geſichtsfeldes zum anderen fortgeſchoben wird, ſtets deutlich geſehen werden kann, ohne es dem Objectivglaſe nähern oder davon entfernen zu dürfen. Durch dieſes Kriterium bringt man auch Objecte, die ſich in einem Zängelchen befinden, in die gehörige Lage, um ſie meſſen zu können. Noch muß erinnert werden, daß das Fadenkreuz im Ocularaufſatze die vorhin vorausgeſetzte Stellung habe. Gewöhnlich iſt dieſes der Fall, wenn der Ocularaufſatz ganz in die Objectivröhre eingeſchraubt iſt, und man erkennt, daß die rechte Stellung des

Kreuzes vorhanden ſey, daraus, daß ein kleines Object ſtets mit einem Faden in Berührung bleibt, wenn es durch das ganze Geſichtsfeld mit der Mikrometerſchraube fortgeführt wird. Wo dieſe Stellung nicht vorhanden iſt, läßt ſie ſich leicht erreichen, indem man ſie ſo lange ändert, bis obige Berührung im ganzen Geſichtsfelde verharret.

4. Prüfung eines Mikroſkopes.

295. Die Prüfung eines Mikroſkopes bezieht ſich auf die Unterſuchung der Klarheit und Deutlichkeit der Bilder, auf die Größe und Reinheit des Geſichtsfeldes und auf die Stärke der vergrößernden Kraft. Über jeden dieſer Puncte war ſchon in der Naturlehre die Rede, hier ſoll noch etwas Näheres über dieſelben angeführt werden.

296. Die Klarheit oder Helligkeit der Bilder läßt ſich bei einer gewöhnlichen Beleuchtung aus der Lichtfülle abnehmen, unter welcher der Gegenſtand erſcheint. Ein in dieſer Beziehung tadelloſes Inſtrument gibt ſelbſt bei Vergrößerungen, die auf 300 reichen, mittelſt einer einfachen Kerzenflamme oder bei gewöhnlichem Tageslichte ein hinreichend helles Bild, wenn dieſes überhaupt eine Beleuchtung von unten verträgt; Mikroſkope, welche directes Sonnenlicht fordern, oder das Licht einer unbedeckten argandiſchen Lampe ohne zu blenden vertragen, gehören nicht zu den ausgezeichneten.

297. Die Deutlichkeit eines Bildes wird aus der beſtimmten Begrenzung desſelben und dem beſtimmten Hervortreten einzelner Theile erkannt. Wo dieſe Eigenſchaft in hohem Grade vorhanden iſt, wird man ein Object, welches das ganze Geſichtsfeld einnimmt, in allen Theilen desſelben, ſelbſt am Rande deutlich ſehen, und ſchon bei mäßigen Vergrößerungen manches wahrnehmen, was bei einer geringeren Deutlichkeit kaum bei der größten wahrgenommen wird. Hat man einmal einen etwas delicaten Gegenſtand mit einem ſehr guten Mikroſkope angeſehen und ſich das Bild wohl eingeprägt, ſo wird man die Güte eines anderen Inſtrumentes am beſten mit demſelben Objecte beurtheilen können. Solche Objecte ſind: ein in Öhl getödteter Floh, die Flügel der gemeinen Hausfliege oder der Gelſe, Haare vom Rücken einer Haus- oder Feldmaus, eines Maulwurfes, vom Bauche einer Fledermaus, Schuppen von einem Flügel des gemeinen weißen Schmetterlinges, des Papilio Menelaus,

der Kleidermotte. Die Figur 170 ſtellt einige dieſer Objecte ſo dar, wie man ſie durch ein gutes Mikroſkop ſieht.

298. Die **Vergrößerung** eines Mikroſkopes wird bekanntlich durch Vergleichung des Bildes im Geſichtsfelde mit dem des direct geſehenen Gegenſtandes gefunden. Man legt z. B. einen fein getheilten Mikrometer als Object ein und ſieht auf das Bild desſelben mit einem Auge, zugleich aber auch mit dem anderen auf einen in der Entfernung von 8 Z. befindlichen Maßſtab, ſo daß man auf dieſem die Projection des Bildes wahrnimmt. So vielmal die wirkliche Größe des Gegenſtandes in dem Stücke des Maßſtabes enthalten iſt, welches jenes Bild deckt, ſo groß iſt die Vergrößerungszahl.

Dieſe Methode fordert einige Übung und gewährt ſelbſt in den Händen des genaueſten Beobachters nicht die Schärfe, welche der nachfolgenden Methode zukommt, die wir dem F. v. Jacquin verdanken. Man ſtelle das Mikroſkop auf eine Baſis, an deren Seite ſich ein verticales Bret mit einer Linienſcale erhebt, und zwar in einer ſolchen Entfernung vom Mikroſkope, die der deutlichen Sehweite vom Oculare aus gleich geſetzt werden kann, befeſtige dann über dem Oculare einen kleinen metallenen Planſpiegel, mit der in Fig. 171 beſonders abgebildeten Vorrichtung, ſo daß ſeine ſpiegelnde Fläche um 45° gegen die Axe des Rohres geneigt und von der Wand, worauf die Scale ſich befindet, gerade abgewendet iſt. Hierauf lege man ein Glasmikrometer als Object ein, gebe ihm die rechte Entfernung vom Objective, um im Geſichtsfelde ein deutliches Bild zu erhalten, und ſuche den Spiegel ſo zu ſtellen, daß man dieſes Bild auf die Scale der verticalen Wand projicirt ſieht. Hier wird man leicht angeben können, wie viele Linien ein bekanntes Stück des Mikrometers deckt und wie groß daher die Vergrößerungszahl iſt.

Bei dieſer Operation wird erfordert, daß die Scale hinreichend deutlich gezeichnet und gehörig beleuchtet ſey. Es iſt ſehr gut, wenn die Zeichnung weiß auf ſchwarzem Grunde iſt und man die Unterſuchung Nachts anſtellt, wo man mittelſt einer Lampe leicht die rechte Beleuchtung trifft. Ferner müſſen die Theilſtriche des Mikrometers ſo liegen, daß ſie bei der Projection mit den Strichen der Scale parallel werden, und man muß dafür ſorgen, daß die Scale dem Oculare gerade gegenüber in derſelben Horizontalebene ſteht. Man ſoll dabei immer nur die Größe des Bildes in der Nähe der Axe der Röhre zum Vergleichungspuncte nehmen, nicht

aber die des dem Rande nahen, weil da ein anderes Vergrößerungsverhältniß herrſchen kann, als in der Mitte des Geſichtsfeldes. Meſſungen, auf ſolche Weiſe vorgenommen, haben eine deſto größere Schärfe, je geringer die vergrößernde Wirkung des Mikroſkopes iſt, bei ſtarken Vergrößerungen erſcheinen theils die Theilſtriche des Mikrometers ſo dick, daß bei der Beſtimmung ihrer Lage ſtets eine kleine Unſicherheit zurückbleibt, theils iſt man gezwungen, Bruchtheile des Abſtandes zweier Theilſtriche zu ſchätzen, eine Arbeit, die faſt nie fehlerfrei ablauft, indem man wegen zu geringem Geſichtsfelde ſelbſt bei ungemein fein getheilten Mikrometern kaum mehr als ein Intervall auf einmal zu ſehen bekommt. Man kann dieſe Methode zwar durch alle Combinationen der Objective und Oculare eines zuſammengeſetzten Mikroſkopes durchführen, wird aber bei den letzten ſtarken Vergrößerungen nur mit großer Mühe und nicht ohne Anſtrengung der Augen zum Ziele gelangen. Man kann ſich aber das Geſchäft bedeutend erleichtern, indem man ſo verfährt: Man ſuche nach der vorhergehenden Methode die Vergrößerungszahlen bei Anwendung jedes Ocularaufſatzes mit einem der ſchwächeren Objective. Hierauf lege man einen Mikrometer als Object ein, deſſen Scale ſchon bei der kleinſten Vergrößerung das ganze Geſichtsfeld ausfüllt. Steht einem kein ſolcher Mikrometer zu Gebote, ſo lege man in das Diaphragma einen Schirm mit einer Öffnung von ſo geringer Größe, daß ſie vom Bilde der Mikrometerſcale ganz eingenommen wird. Nun beobachte man mit allen Combinationen der Oculare und Objective die Anzahl der Intervalle des Mikrometers, die auf einmal überſehen werden. Da verhält ſich nun die Vergrößerungszahl m bei einer beſtimmten Verbindung eines Oculares mit einem Objective, zur Zahl m_1 bei einer anderen Verbindung, wie die Anzahl Intervalle n_1 des in letztem auf einmal überſehenen Mikrometerſtückes zur Anzahl dieſer Intervalle n im erſten Falle, oder man hat

$$m : m_1 = n_1 : n \text{ oder } m_1 = m \cdot \frac{n}{n_1}.$$

Da nun n und n_1 durch Beobachtung gegeben ſind, und m aus der Beſtimmung mittelſt der vorhergehenden Methode bekannt iſt, ſo läßt ſich m_1 leicht berechnen. Dieſes Verfahren hat zuerſt Ettingshauſen empfohlen.

299. Zu allen dieſen Unterſuchungen braucht man Mikrometer, von deren richtigen Theilung man vor ihrer Anwendung gehörig überzeugt ſeyn muß. Beſitzt man ein Mikroſkop mit einem

Schraubenmikrometer, ſo kann man ſich dieſe Überzeugung leicht verſchaffen, indem man den Mikrometer nur als Object einzuſetzen, und den Abſtand je zweier Theilſtriche mit Aufmerkſamkeit und wiederholt zu meſſen braucht.

Man kann auch zum Ziele gelangen, wenn man die Öffnung des Diaphragma eines Mikroſkopes hinreichend verengt, den Mikrometer als Object einſetzt, und, indem man verſchiedene Theile desſelben durch das Geſichtsfeld führt, beobachtet, ob immer gleich viele Längenſtücke des Mikrometers auf einmal geſehen werden.

H. Unterſuchung einzelner Linſen.

300. Zu einer richtigen Beurtheilung optiſcher Inſtrumente iſt es unerläßlich, brauchbare Linſen von fehlerhaften unterſcheiden, und alle Größen, welche auf die optiſchen Phänomene einen Einfluß haben, an denſelben beſtimmen zu können. Darum ſoll hier das Wichtigſte über dieſen Gegenſtand vorkommen.

301. Eine brauchbare Linſe ſoll aus vollkommen durchſichtigem, von Streifen, Wellen und Bläschen möglichſt freiem, allenthalben gleich dichtem Glaſe beſtehen, gut centrirt ſeyn und vollkommen kugelförmige Krümmungen haben. Bläschen, die ſich etwa in einer Linſe befinden, ſchaden zwar der Deutlichkeit der Bilder, welche ſie liefert, nicht viel, vermindern aber die Lichtſtärke, wenn ſie zahlreich und groß ſind. Merklich große Linſen ſind ſelten ganz blaſenfrei. Anders verhält es ſich mit den Wellen. So nennt man nämlich jene meiſt krummen, verwaſchenen Strichen ähnlichen Züge in einer Glasmaſſe, die denjenigen ſehr ſtark gleichen, welche man im Waſſer bemerkt, wenn man Weingeiſt hineingießt. Sie entſtehen aus einer Bewegung der ungleich erwärmten und wahrſcheinlich auch ungleichförmig gemengten flüſſigen Glasmaſſe, welche beim Abkühlen noch die kenntlichen Spuren ihrer Ungleichförmigkeit beibehält. Die Wellen ſind der Deutlichkeit der Bilder ſehr nachtheilig und es iſt eine Linſe ſtets verwerflich, die beſonders um die Axe herum ſolche Wellen enthält. Sie ſind bei Flintglaslinſen häufiger als bei denen aus Crownglas, jedoch bei letzteren leider auch viel öfter vorhanden, als man gewöhnlich glaubt. Man erkennt ſie oft ſehr ſchwer und nur bei vieler Übung mit bewaffnetem Auge, nur wo ſie häufig und groß ſind, kann man ſie bei einer oberflächlichen Betrachtung wahrnehmen. Nicht alle ſchaden gleich ſtark. Die langen ſtreifenartigen Wellen ſind viel ſchädlicher als die, welche von Bläschen ausgehen.

Das beſte Mittel, eine Linſe auf Wellen zu unterſuchen, iſt, ſie ſo gegen eine Kerzenflamme zu halten, daß das Bild ſich über die ganze Glasfläche erſtreckt und ſie ſehr ſtark beleuchtet. Nicht ſelten gehen die Wellen von kleinen länglichten Bläschen aus, an denen die Welle gleichſam eine ſchweifartige Verlängerung bildet. Darum muß man bei Prüfung einer Linſe in dieſer Beziehung die Umgebung ſolcher Bläschen beſonders ſorgfältig ins Auge faſſen.

302. Linſen beſtehen oft aus Glas, das ſchnell abgekühlt iſt, und ſind darum ungleich dicht. Man erkennt dieſes am beſten, wenn man ſie in polariſirtes Licht ſtellt und ſie wie einen Seebeck'ſchen Würfel anſieht. Gleichförmig dichtes Glas zeigt da keine Spur einer Färbung, während bei einer geringen Ungleichheit der Dichte ſtets eine ſolche bemerkbar wird, beſonders wenn man die Linſe bei verſchiedenen Stellungen gegen die Polariſationsebene betrachtet. Manchmal bewirkt eine ungleiche Spannung in der Faſſung oder ein zu ſtarkes oder ungleiches Anziehen der Schrauben eine Compreſſion des Glaſes, wodurch es fähig wird, im polariſirten Lichte ſich als ungleich dicht darzuſtellen. Doch kehrt die natürliche Dichte meiſt wieder zurück, wenn man die Schrauben etwas lüftet. Achromatiſche Doppellinſen ſind dieſem Fehler gar oft unterworfen, wenn ſie aus den Händen von Optikern kommen, welche die beiden Beſtandlinſen ſich unmittelbar berühren laſſen, und ſie überdieß feſtſchrauben.

303. Eine Linſe muß gut centrirt ſeyn, d. h. ihr optiſcher Mittelpunct muß in ihrer Axe liegen. Convexe Linſen, die am Rande ganz ausgeſchliffen ſind, müſſen demnach bei vollkommener Rundung einen gleich ſcharfen Rand haben, oder wenn die Schärfe weggenommen iſt, allenthalben gleich dick erſcheinen. Dasſelbe muß auch an Hohllinſen eintreten, wenn ſie centrirt ſeyn ſollen. Demnach wird von einer gut centrirten Linſe gefordert, daß ſie in jedem Kreiſe, deſſen Mittelpunct in die Axe fällt, durchaus gleich dick ſey, und die Unterſuchung dieſer Dicke wird das beſte Mittel, die Centrirung zu prüfen, abgeben. Sie muß aber mit einem ungemein empfindlichen Werkzeuge, nämlich mit dem ſo genannten doppelten Fühlhebel vorgenommen werden, wenn ſie zu einem genauen Reſultate führen ſoll. Dieſes auch zu anderen Zwecken höchſt brauchbare Inſtrument beſteht aus zwei neben einander befindlichen ungleicharmigen zweiarmigen Hebeln, wie ſie Fig. 172 darſtellt, die gleichſam eine Zange bilden. Zwiſchen die kürzeren Schenkel, welche

die Backen der Zange vorſtellen, kommt die Linſe, während die längeren über einer Scale ſich befinden. Iſt die Linſe in eine Drehbank ſo eingeſpannt, daß ihre Axe in die Drehungsaxe der Spindel fällt, und wird ſie um dieſe Axe langſam gedreht, ſo zeigt die Bewegung der längeren Hebelarme die geringſte Ungleichheit der Linſe an. Bei einer centrirten Linſe bleiben dieſe vollkommen ruhig.

Eine ſo eingeſpannte Linſe kann man noch auf eine andere Weiſe unterſuchen. Stellt man nämlich in einige Entfernung von ihr eine brennende Kerze und laßt dann die Linſe umlaufen, ſo darf man nur die an beiden Glasflächen reflectirten Bilder der Flamme genau beobachten, um ſich vom Zuſtande der Centrirung der Linſe zu überzeugen. Sind dieſe Bilder beim Rotiren der Linſe vollkommen ruhig, ſo iſt die Linſe gut centrirt, iſt dieſes aber nur mit einem der Fall, während das andere ſich bewegt, ſo iſt die Fläche, zu welcher das bewegte Bild gehört, ſchlecht centrirt. Sollten ſich gar beide Bilder bewegen, ſo hat die Linſe überhaupt nicht die gehörige Lage an der Docke der Drehbank.

Man kann noch auf eine andere Weiſe durch die Lage der reflectirten Bilder die Centrirung einer Linſe prüfen. Man ſtelle ſie gegen einen weit entfernten leuchtenden Gegenſtand ſo, daß die an beiden Flächen durch Reflexion entſtandenen Bilder entweder ſich decken, falls ſie gleich groß ſind, oder wenn dieſes nicht der Fall iſt, ſo daß das kleinere mitten in das größere fällt, und merke den Mittelpunct des kleineren Bildes, den man, wenn dieſes überhaupt ſehr klein iſt, wie es ſtets ſeyn ſoll, leicht treffen wird, mit einem Tupf an. Hierauf kehrt man die Linſe um, und nimmt dieſelbe Operation wieder vor, wodurch man einen zweiten Punct bekommt, und jeder dieſer zwei Puncte muß der Mittelpunct des entſprechenden kreisförmigen Umfanges der Linſe ſeyn, wenn ſie centrirt iſt.

304. Das ganze Geſchäft der Prüfung der Centrirung ſetzt freilich voraus, daß die krummen Flächen der Linſen Kugelflächen ſeyen, welches wohl bei kleinen Linſen meiſtens der Fall iſt, bei großen aber, wo auch die richtige Centrirung am ſchwerſten zu erreichen iſt, gibt es oft bedeutende Abweichungen von der Kugelgeſtalt. Dieſe kommen häufig vom unzweckmäßigen Verfahren beim Poliren her, wohl auch von einem unbedachtſamen Einſpannen der Glasmaſſe beim Schleifen. Meiſtens kittet man dieſe Maſſe an eine Handhabe, falls man ſie aus freier Hand ſchleift, oder an den Radius der Schleifmaſchine an. So wie man ſie dabei feſt an den warmen Kitt

andrückt, geräth ſie in eine unnatürliche Spannung, die beim Erkalten noch größer wird, und wenn ſie nun auch vollkommen kugelförmig geſchliffen wird, ſo verliert ſie doch dieſe Form augenblicklich, ſobald man ſie vom Kitt losmacht, weil da die Glastheile wieder ihre natürliche Lage gegen einander annehmen. Eine andere Quelle, aus welcher eine Abweichung von der Kugelgeſtalt fließt, iſt die Erwärmung an der im Schleifen begriffenen Glasfläche. Der ſelige Fraunhofer, der allen Schwierigkeiten auf das Beſte zu begegnen wußte, ſorgte daher ſtets dafür, daß die Glasmaſſe, welche vor dem Schleifen nur eine Glasſcheibe, wie ſie beim ſo genannten Senken entſtanden war, vorſtellte, nur mit ihrem eigenen Gewichte den weichen Kitt drückte und beim Schleifen ein beſtändiger Durchzug der Luft zwiſchen der Linſe und dem Radius der Maſchine Statt finden konnte. Deßhalb wurde eine Glasſcheibe mit mehreren im Kreiſe herum befindlichen Kitttropfen verſehen, die zu ſchleifende Glasmaſſe darauf gelegt und beide zuſammen an einen Ort gebracht, wo der Kitt ſich erweichen und hierauf wieder feſt werden mußte, ohne ſo zuſammen zu ſinken, daß ſich beide Gläſer berühren konnten. Nach dieſem wird erſt das Glas, welches als Baſis diente, an den Radius der Maſchine befeſtiget und zum Schleifen geſchritten.

305. Es iſt oft von Wichtigkeit die Halbmeſſer einer Linſe genau zu kennen. Der Optiker, welcher die Linſen ſchleift, kann dieſe freilich leicht aus ſeiner Schleifſchale oder aus dem Radius der Maſchine abnehmen, aber außer dem iſt dieſe Beſtimmung ziemlich ſchwierig.

Folgendes Verfahren rühmt Boscovich als zweckmäßig. Man leite in ein verfinſtertes Zimmer mittelſt eines Helioſtats einen horizontalen Lichtbüſchel, befeſtige aber an der Öffnung am Fenſter ein Blatt feines weißes Papier und über dieſes ein zartes Haar. Iſt nun die zu prüfende Linſe eine Concavlinſe, ſo halte man ſie in den Lichtbüſchel und nähere ſie dem Fenſter ſo weit, bis das durch Reflexion entſtandene Bild des Haares am Fenſterladen neben demſelben ganz deutlich und ſcharf begrenzt erſcheint. In dieſem Falle iſt offenbar die Entfernung der Hohlfläche vom Orte des Bildes der Halbmeſſer derſelben. Bei einer Convexlinſe iſt das Verfahren etwas verwickelter; man läßt das Licht von jener Seite in die Linſe kommen, welche der Fläche entgegenſteht, deren Halbmeſſer man ſucht, und verfährt wieder wie vorhin; da aber hier der Strahl

zwei Brechungen nebſt einer Reflexion erleidet und erſtere nur in Rechnung gebracht werden kann, wenn man das Brechungsverhältniß für die Maſſe der Linſe kennt, ſo muß auch dieſes mitunter beſtimmt werden. Dieſes kann nach Abſch. IV. 63 u. 64 oder ſo geſchehen: Es ſey AB (Fig. 173) eine beiderſeits convexe Linſe, deren Halbmeſſer man kennen lernen will. Iſt C der leuchtende Punct, von welchem das Licht nach D kommt, gebrochen wird und ſeinen Weg nach E fortſetzt, endlich nach einer Reflexion und einer abermaligen Brechung wieder in C anlangt, ſo erfolgt alles gerade ſo, als wenn der Strahl von der entgegengeſetzten Seite die Linſe träfe, und nach dem Punct G hinzielte. Heißt daher $FC = b$, ſo darf man in der Formel $\frac{naf}{na - a - f}$ nur für n, a, f die Größen $\frac{1}{n}$, $-(g-c)$ und $-f$ ſetzen, um den Werth von b zu erhalten. Da iſt nämlich

$$b = \frac{(g-c)f}{(n-1)(g-c)+nf} \text{ und } \frac{1}{b} = \frac{n-1}{f} + \frac{n}{g-c}$$

oder wenn man die Dicke der Linſe c vernachläſſiget:

$$\frac{1}{b} = \frac{n-1}{f} + \frac{n}{g} \;\ldots\ldots\; (1).$$

Nun kehrt man die Linſe um, und wiederholt denſelben Verſuch; es heiße nun $b_{,}$, was vorhin b war, und man hat wieder

$$\frac{1}{b_{,}} = \frac{n-1}{g} + \frac{n}{f-c}$$

oder mit Vernachläſſigung der Linſendicke

$$\frac{1}{b_{,}} = \frac{n-1}{g} + \frac{n}{f} \;\ldots\; (2).$$

Hierauf ſtelle man die Linſe ſo gegen das Haar, daß hinter derſelben ein deutliches Bild davon entworfen wird, und beſtimme die Bildweite α und die Gegenſtandsweite a, wobei man hat

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = (n-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right) = \frac{1}{p} \;\ldots\; (3).$$

Man erhält nun aus der erſten und zweiten Gleichung, ohne Rückſicht auf die Glasdicke

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b_{,}} = (2n-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right)$$

und mittelſt der letzten Gleichung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b_1} = \frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{p}$$

und hieraus

$$n = \frac{(b+b_1)p - bb_1}{(b+b_1)p - 2bb_1}.$$

Iſt einmal n gefunden, ſo hat es keine Schwierigkeit, mittelſt den zwei erſten Gleichungen f und g zu beſtimmen. Bei Menisken läßt ſich ein Halbmeſſer unmittelbar durch Reflexion finden, wie bei Hohlgläſern überhaupt; zur Beſtimmung des Halbmeſſers der convexen Seite braucht man nur eine der zwei erſten und die dritte Gleichung, weil nur zwei unbekannte Größen, nämlich n und f oder g vorkommen; nur bei zerſtreuenden Menisken iſt die Beſtimmung des Radius der Convexität nicht auf dieſem Wege ausführbar, weil da durch Reflexion an dieſer Seite kein wirkliches Bild entſteht.

306. Eine beſondere Schärfe geſtattet das von Stampfer angegebene Verfahren, das auch auf der Reflexion des Lichtes beruht. Es iſt demjenigen ähnlich, wodurch man das Brechungsverhältniß einer Linſe beſtimmt, und unterſcheidet ſich von demſelben nur dadurch, daß man hier nur die durch Reflexion an der vorderen Glasfläche entſtehenden Bilder mißt. Um es zu verſtehen, ſey AB (Fig. 174) ein Durchſchnitt der zu unterſuchenden ſphäriſchen Fläche, C ihr Mittelpunct, D und E zwei Objecte, die ihr Licht auf AB ſenden und wovon die von F und G reflectirten Strahlen nach H geſendet werden, wo ſich ein Theodolith befindet, in deſſen Fernrohr die Strahlen FH und GH gelangen können. Liegen nun die Puncte D, F, G, E, H in derſelben Ebene, D und E von H gleichweit entfernt, ſo daß $HD = HE$ iſt und mißt man mittelſt des Theodoliths die Winkel $EHD = 2\,DHx = 2\alpha$, $FHG = 2\,FHC = 2\beta$, ſo kann man daraus mittelſt der Entfernung $DH = A$, und $HK = B$ den doppelten Einfallswinkel $HFy = 2D$ und mittelſt deſſelben den Halbmeſſer $CK = \rho$ berechnen.

Es iſt nämlich, wenn man annäherungsweiſe $HF = HK$ ſetzt:

$$HF : HD = \sin HDF : \sin HFD$$

oder

$$B : A = \sin(\alpha + \beta - 2\gamma) : \sin 2\gamma$$

und hieraus

$$\tang 2\gamma = \frac{A \sin(\alpha+\beta)}{B + A\cos(\alpha+\beta)}$$

ferner

$$HF : FC = \sin FCH : \sin FHC$$

oder

$$B : \rho = \sin(\gamma - \beta) : \sin\beta$$

und daraus

$$\rho = \frac{B \sin\beta}{\sin(\gamma - \beta)}.$$

Will man ſich bei der Berechnung des Radius nicht einmal die Erlaubniß nehmen, die Linien HF und HK für gleich anzuſehen, wiewohl dadurch meiſtens nur ein Fehler erzeugt wird, der innerhalb jener Grenzen der Unſicherheit von ρ liegt, welche von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern abhängen; ſo kann man an dem, nach den vorhin angeführten Formeln gefundenen Werthe von ρ noch eine Correction $d\rho$ anbringen, welche man erhält durch:

$$d\rho = \tfrac{1}{2}(B + \rho)\sin^2\beta \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho \operatorname{tang} 2\gamma}{\sin\beta\,[B + A\cos(\alpha + \beta)]} \right\}.$$

Dieſe Methode iſt auf alle Linſen anwendbar, deren Halbmeſſer nicht viel unter 2 Z. iſt, für kleinere läßt ſie ſich, wie ſie hier dargeſtellt wurde, nicht mehr anwenden. Die Linſe wird aufgeſtellt, wie S. 435 gelehrt wurde, und die Wahl der leuchtenden Puncte wird ebenfalls nach der dort angegebenen Weiſe getroffen.

307. Eine andere Größe, deren Kenntniß bei Linſen oft Noth thut, iſt die Brennweite. Dieſe kann entweder nach S. 434 oder auch nach Maskelyne auf folgende Weiſe beſtimmt werden. Man richte ein gutes dioptriſches Fernrohr auf einen ſehr weit entfernten Gegenſtand, z. B. auf den Mond, und ſtelle das Ocular ſo, daß man ihn deutlich ſieht. Hierauf bringe man die Linſe, ohne das Ocular zu verrücken, vor das Objectiv des Fernrohres und ſtelle in einiger Entfernung davon ein mit kleinen Lettern gedrucktes Buch auf, regulire deſſen Entfernung von der Linſe ſo, daß man es durch das Fernrohr leſen kann. In dieſem Falle gelangen von jedem Puncte der Schrift parallele Strahlen ins Fernrohr, und die Entfernung des Buches von der Linſe iſt deren Brennweite.

308. Außer den Halbmeſſern der Krümmung einer Linſe muß man oft auch ihren Öffnungsdurchmeſſer und ihre Dicke in der Mitte kennen. Beide Größen kann man unmittelbar mit einem Zirkel meſſen, letztere aber auch aus der Dicke am Rande und dem Durchmeſſer berechnen. Iſt Fig. 175 eine Linſe, ab ihre Rand-

dicke, fh ihre Dicke in der Mitte, ſo iſt $fh = ab + (fg + eh)$. Heißen die Halbmeſſer σ und ρ, die Öffnung x, ſo iſt $fg = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\sigma}$, $he = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\rho}$ mithin $fg + he = \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\right)$ und wenn die Randdicke P heißt, die geſuchte Dicke

$$P + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\right).$$

In dieſem Abſchnitte wurden vorzüglich benützt:

W. Herschel on the light in der Encyclop. metrop. London. 1828.

Klügel's Dioptrik. Leipzig 1778.

Littrow's Dioptrik. Wien 1830.

Santini Theorica degli stromenti ottici. Padova 1828.

Prechtl's practiſche Dioptrik. Wien 1828.

Jahrbücher des polytechniſchen Inſt. in Wien Bd. 13.

Zeitſchrift für Phyſik und Math. 3. 129 u. 285; 4. 1, 17, 195, 316; 7. 257.

Mémoire sur la double refraction par Fresnel. Mém. de l'Acad. de Paris. T. VII.

Ampère in Annales de Chim et de Phys. tom. 39.

Fünfter Abſchnitt.

Die Wärme.

1. Die Theorie der Wärme befindet ſich noch nicht auf jener Stufe der Vollendung, die andere Zweige der Phyſik erreicht haben; wir kennen in der Regel nur die Geſetze derſelben für geringe Grade ihrer Intenſität und haben Grund vorauszuſetzen, daß dieſe gleichſam nur die erſten Theile eines mehrgliederigen Ausdruckes ſind, der die Wirkungsweiſe der Wärme in voller Strenge darſtellt. Indeß iſt man auch in dieſem Gebiete in der neuern Zeit um ein Gutes weiter gekommen und einige Theile der Wärmelehre haben durch Anwendung der Mathematik auf ſie bedeutend gewonnen.

Erſtes Kapitel.

Bewegung der Wärme.

A. Theorie der ſtrahlenden Wärme.

2. Es iſt bekannt, daß jeder Körper Wärme nach Außen ſendet, die ſich im leeren Raume geradlinig und ſtrahlend fortpflanzt. Dieſe Strahlen kommen nicht blos von der Oberfläche der Körper, ſondern auch vom Innern ihrer Maſſe. Man denke ſich einen Punct im Innern eines Körpers, welcher der Oberfläche ſo nahe liegt, daß von ihm Strahlen nach Außen gelangen können; von dieſem gehen nach allen Richtungen Strahlen aus. Jene, welche die Oberfläche ſenkrecht treffen, gelangen auf dem kürzeſten Wege nach Außen und die ſchief ausfahrenden haben Wege zurückzulegen, welche im Verhältniſſe des Coſinus des Neigungswinkels gegen das Loth größer ſind. Davon, meint nun Fourier, komme es her, daß die Intenſität der Wärmeſtrahlen im geraden Verhältniſſe mit dem Coſinus dieſes Winkels abnimmt.

3. Es ſey s ein Element einer Fläche, welche Wärmeſtrahlen nach einem Puncte O im leeren Raume ſendet. Fahren dieſe unter dem Winkel φ aus und iſt a die Entfernung des Elementes s von O, ſo iſt der Ausdruck für die Wärmemenge, die O erhält:

$$\frac{M s \cos\varphi}{a^2} \; \ldots\ldots \; (A)$$

wo M eine Conſtante iſt, die von der Temperatur und der Beſchaf-

fenheit der ausſtrahlenden Fläche abhängt. Denkt man ſich aus O mit dem Halbmeſſer $= 1$ eine Kugelfläche beſchrieben, ſo wird ein Stück ω derſelben von den nach O fahrenden Wärmeſtrahlen getroffen, und dieſes bildet gleichſam die Baſis des Strahlenkegels. Denkt man ſich dieſen Kegel bis zum Elemente s verlängert, ſo wird ſeine Baſis $a^2 \omega$ und zugleich $= s \cos\varphi$, und man hat daher

$$s \cdot \cos\varphi = a^2 \omega.$$

Daraus erhält man mittelſt (A) für obige Wärmemenge

$$M \omega.$$

Haben die einzelnen Elemente des Körpers, welcher Wärme nach O ſendet, verſchiedene Temperaturen oder ein verſchiedenes Ausſtrahlungsvermögen, ſo wird man die nach O geſendete Wärmemenge für jedes einzelne Element berechnen müſſen und ihre Summe gibt die geſammte nach O geſendete Wärmemenge. Haben aber alle Elemente einerlei Ausſtrahlungsfähigkeit und Temperatur, ſo wird jedes Stück der ganzen ausſtrahlenden Fläche, deſſen Projection auf die vorhin angenommene Kugelfläche vom Halbmeſſer 1 gleich Ω iſt, die Wärmemenge

$$M \Omega$$

nach O ſenden. Schließt dieſe ausſtrahlende Fläche den Raum rings um O ein, ſo nimmt ihre Projection auf jener Kugelfläche dieſelbe ganz ein und man hat $\Omega = 4\pi$, wo π das Kreisverhältniß bezeichnet. Der Raum A innerhalb der genannten Fläche enthält demnach die Wärmemenge $4 M A \pi$ oder der Raum $= 1$ die Wärmemenge $4 M \pi$. Dieſe kann man füglich die **Dichte der ſtrahlenden Wärme** im betreffenden Raume A nennen. Sie iſt es, welche die Temperatur dieſes Raumes beſtimmt.

4. Iſt der Punct O (Fig. 176) innerhalb eines geſchloſſenen Raumes befindlich und ab ein Stück der Begrenzung, das ihm Wärme zuſendet, und $a_1 b_1$ ein Schirm, welcher die von ab kommenden Strahlen auffängt, ſo bleibt doch die nach O gelangende Wärmemenge dieſelbe, ſobald der Schirm die Temperatur des Stückes ab und der Kegel $a_1 O b_1$ dieſelbe Öffnung hat wie $a O b$.

Denkt man ſich den Schirm ohne Strahlungsvermögen, aber im Stande, alle auffallenden Strahlen zu reflectiren, ſo beſteht ſeine Wirkung einzig darin, die Temperatur eines anderen Stückes der Umgebung, wie cd nach O zu übertragen. Hat demnach cd eine höhere Temperatur als ab, ſo wird durch den Schirm die

Temperatur von O geſteigert; das Gegentheil erfolgt, wenn die Temperatur von cd geringer iſt, als die von ab.

Bisher wurde O im leeren Raume angenommen, es wird aber nahe dasſelbe Reſultat Statt finden, wenn es ſich in der Luft befindet, falls der Weg, den die Wärmeſtrahlen in derſelben zurückzulegen haben, nicht gar groß iſt; denn die Dichte der Luft iſt ſo gering, daß man in dieſem Falle ihr Strahlungsvermögen gleich Null ſetzen kann.

5. Im Ausdrucke der Wärmemenge $M\omega$, welche das Element s nach O ſendet, hängt M von der Temperatur und Beſchaffenheit der Oberfläche des Elementes ab und hat ſeinen größten Werth m, wenn das Element in dem Zuſtande ſich befindet, wo es alle auffallende Wärme abſorbirt und nichts davon reflectirt. Man kann füglich $M = \mu m$ ſetzen, wo μ den Theil der Wärme bezeichnet, welcher von dem Elemente abſorbirt wird und für den Fall des Maximums $= 1$ iſt. Auf ähnliche Weiſe läßt ſich auch die Wärmemenge, welches jedes andere Element s_1, s_2 ꝛc. nach O ſendet, durch $\mu_1 m_1$, $\mu_2 m_2$ ꝛc. ausdrücken.

6. Wenn die Elemente der Wärme ausſtrahlenden Oberfläche auch ein Reflexionsvermögen beſitzen, ſo ſendet jedes Element nicht blos die von demſelben ausfahrenden, ſondern auch einen Theil der von anderen Elementen auf dasſelbe gelangenden Wärmeſtrahlen durch Reflexion nach einem beſtimmten Puncte. Es ſey z. B. $aa = s$ (Fig 177) das betreffende Element, und O der Punct, dem Wärme zugeſendet wird. Zieht man die Geraden aa_1, aa_1 ſo, daß ſie gegen s eben ſo geneigt ſind, wie gegen Oa und mit derſelben in einerlei Ebene liegen, ſo kommt die von $a_1 a_1 = s_1$ ausſtrahlende Wärme nach aa. Wäre aa kein Hinderniß, ſo würden dieſe Strah- nach O_1 gelangen, gerade ſo wie die Strahlen des Elementes aa nach O kommen. Auf gleiche Weiſe würden von dem Elemente $a_2 a_2 = s_2$ Strahlen nach O_2 gelangen. Nimmt man die Entfernung des Punctes O von $aa = a$, ſo wird die Entfernung des Punctes O_1 von $a_1 a_1$ gleich $a + a_1$, die des Punctes O_2 von $a_2 a_2$ gleich $a + a_1 + a_2$ u. ſ. f. Iſt daher φ der Winkel, unter welchem die Strahlen das erſte Element verlaſſen und φ_1 φ_2 ꝛc. derſelbe Winkel für die anderen Elemente, ſo iſt die Wärme, welche die betreffenden Elemente nach der Reihe nach O, O_1, O_2 ſenden:

$$\frac{s\mu m\cos\varphi}{a^2};\quad \frac{s_1\mu_1 m_1\cos\varphi_1}{(a+a_1)^2};\quad \frac{s_2\mu_2 m_2\cos\varphi_2}{(a+a_1+a_2)^2}\ \text{ꝛc.}$$

Dieſe ganze Wärme würde nach O durch Reflexion gelangen, wenn die Umhüllung des Punctes O alle Wärmeſtrahlen zu reflectiren vermöchte; da aber dieſe einen Theil derſelben abſorbirt, ſo fällt die Wärmemenge, welche nach O gelangt, kleiner aus. Das Element s_1 ſendet nämlich die Wärme $\frac{s_1 \mu_1 m_1 \cos\varphi_1}{(a+a_1)^2} = \mu_1 m_1 \omega$ nach s, in s wird der Theil μ abſorbirt und nur $(1-\mu)\mu_1 m_1 \omega$ nach O geſendet. Eben ſo ſendet s_2 die Wärme $\mu_2 m_2 \omega$ nach s_1, und von da wird $(1-\mu_1)\mu_2 m_2 \omega$ nach s reflectirt und von dieſer gelangt nur wieder $(1-\mu)(1-\mu_1)\mu_2 m_2 \omega$ dadurch eine zweite Reflexion nach O. Umſchließt die Hülle den Punct O ringsum, ſo gelangen Strahlen nach O, die eine, andere, die zwei, wieder andere, die drei Reflexionen erlitten haben und ſo fort bis zu jenen, die unendlichmal reflectirt worden ſind. Es erhält demnach O eine Wärmemenge, welche durch die unendliche Reihe

$$\mu m \omega + (1-\mu)\mu_1 m_1 \omega + (1-\mu)(1-\mu_1)\mu_2 m_2 \omega + \ldots$$

ausgedrückt wird. Haben nun alle Elemente dieſelbe Temperatur, ſo iſt $m = m_1 = m_2$ ꝛc. und daher dieſe Wärmemenge

$$m\omega\,[\mu + (1-\mu)\mu_1 + (1-\mu)(1-\mu_1)\mu_2 + \ldots].$$

Da nun μ, μ_1, μ_2 ꝛc. lauter poſitive echte Brüche ſind, ſo nähert ſich der Werth des Factors innerhalb der Klammern deſto mehr der Einheit, je mehr Glieder man genommen hat. Für eine unendliche Anzahl ſolcher Glieder wird dieſer Theil $= 1$, und daher die Wärmemenge, welche O durch ein Element erhält, $= m\omega$, mithin gerade ſo, als wenn jedes Element nur Wärme ausſtrahlte, aber keine reflectirte. Die von der ganzen Umhüllung nach O gelangende Wärmemenge wird erhalten, wenn man den Ausdruck $m\omega$ integrirt. Da erhält man $4\pi m$. Dieſe Wärme iſt von der Geſtalt der Umhüllung, von der Natur der Wände und von der Lage des Punctes O innerhalb derſelben unabhängig.

7. Man denke ſich nun einen Körper ſtatt des Punctes O innerhalb einer Umhüllung und unterſuche das Geſetz, nach welchem derſelbe durch Ausſtrahlen die Wärme verliert. Es ſey zu dieſem Ende σ ein Element dieſes Körpers und man beſchreibe aus einem Puncte deſſelben mit dem Halbmeſſer $= 1$ eine Kugelfläche und nenne wieder wie vorhin ω ein Element derſelben. Iſt der Winkel, welchen die von σ nach ω gezogene Gerade mit dem auf σ errichteten Lothe macht, ψ, ſo ſendet dieſes Element in der unendlich kleinen

Zeit t dem Elemente ω die Wärmemenge

$$\nu q \sigma t \omega \cos\psi$$

wo ν einen von der Natur der ausſtrahlenden Fläche abhängigen Bruch derſelben Art, wie vorhin μ, q aber eine von der Temperatur des Elementes σ abhängige Größe vorſtellt. Denkt man ſich die Fläche von σ nach allen Seiten verlängert, ſo begrenzt ſie eine Halbkugel und die von σ ausſtrahlende Wärme muß ſich demnach in eine ſolche ergießen. Integrirt man daher den vorhergehenden Ausdruck von $\omega \cos\psi = 0$ bis nach $\omega \cos\psi = \pi$, ſo erhält man die ganze Wärmemenge, welche σ in der Zeit t verliert, nämlich

$$\pi \nu q \sigma t \,\ldots\ldots\, (a).$$

Die Wärmemenge, welche das Element s der Umhüllung in der Zeit t nach einer Richtung ausſendet, die mit dem Lothe dieſes Elementes den Winkel φ einſchließt, und welche eine unendlich kleine Fläche σ_1 ſenkrecht trifft, die ſich in der Entfernung a befindet, wird ſeyn

$$\frac{q_1 t s \sigma_1 \cos\varphi}{a^2}$$

wo q_1 blos von der Temperatur der Umhüllung abhängt und dem Maximum der Emiſſion entſpricht. Stellt σ_1 die Projection des Elementes σ in einer auf den Strahlen ſenkrechten Ebene vor, ſo iſt $\sigma_1 = \sigma \cos\psi$ und wenn man das Element σ von der auffallenden Wärme ν aufnimmt, ſo erhält man für dieſe Wärme

$$\frac{q_1 \nu t s \sigma \cos\varphi \cos\psi}{a^2}.$$

Man hat aber wieder $s \cos\varphi = a^2 \omega$, wenn ω die Öffnung des Kegels vorſtellt, der ſeine Baſis in einer Kugelfläche vom Radius $= 1$ und ſein Centrum im betreffenden Elemente hat, und darum die ganze von σ aufgenommene Wärmemenge

$$q_1 \nu t \sigma \omega \cos\psi$$

und durch Integriren

$$\pi \nu q_1 \sigma t \,\ldots\ldots\, (b).$$

Zieht man (b) von (a) ab, ſo erhält man als Wärmeverluſt des Elementes σ in der Zeit t

$$\pi \nu (q - q_1) \sigma t \,\ldots\ldots\, (B).$$

Für nicht ſehr hohe Temperaturen iſt die Größe $q - q_1$ der

Temperaturdifferenz der Elemente σ und s proportionirt und man kann deßhalb ſetzen, wenn dieſe Temperaturen τ und τ_1 ſind:

$$(\tau - \tau_1) m = q - q_1,$$ mithin obige Wärmemenge

$$\pi v m (\tau - \tau_1) \sigma t \text{ oder } k (\tau - \tau_1) \sigma t$$

wo k eine von der Beſchaffenheit der Oberfläche abhängige Größe iſt, die als Maß des dem Elemente σ zugehörigen Strahlungsvermögens angeſehen werden kann.

Befindet ſich das betreffende Element nicht im leeren Raume, ſondern in der Luft, ſo wird demſelben auch durch letztere Wärme entzogen. Man kann dieſe durch $K (\tau - \tau_2) \sigma t$ ausdrücken, wenn τ_2 die Temperatur der Luft, K eine blos von der Natur dieſer Luft und von ihrer Ausdehnſamkeit abhängige Größe bedeutet und der geſammte Wärmeverluſt in der Zeit t iſt demnach

$$\{k (\tau - \tau_1) + K (\tau - \tau_2)\} \sigma t \; \ldots\ldots \; (C).$$

B. Verſuche über Abkühlung durch Ausſtrahlen und Mittheilung der Wärme.

8. Die Geſetze der Wärmeausſtrahlung von irgend einem Körper laſſen ſich auf dem Erfahrungswege natürlich nur im luftleeren Raume vornehmen. Hat man dieſe Geſetze einmal erkannt, ſo iſt es leicht, auch jene auszumitteln, nach welchen der Wärmeverluſt durch Berührung eines Gaſes erfolgt. Beide Unterſuchungen haben Dulong und Petit angeſtellt und aus ihrer claſſiſchen Arbeit iſt das Folgende entnommen.

9. Der Apparat, deſſen ſich die genannten Gelehrten bedienten, iſt in Fig. 178 abgebildet. A iſt ein Ballon von $0^m.3$ Durchmeſſer aus dünnem Kupferblech. Er iſt zur Abhaltung der Wärmeſtrahlung inwendig mit Lampenruß überzogen und wird durch Querleiſten in einer Wanne feſt gehalten, die Waſſer enthält, welches durch Dämpfe, die man durch das gebogene Rohr BC hineinleitet, nach Belieben erwärmt werden kann. Er iſt am Halſe horizontal abgeſchnitten und die Begrenzungsebene mittelſt einer Waſſerwage horizontal geſtellt. Auf dem Rande des Halſes befindet ſich eine gut abgeſchliffene Glasplatte DE, die luftdicht darauf paßt, in der Mitte eine Öffnung hat, um einen Stöpſel aufnehmen zu können, und zu beiden Seiten derſelben noch zwei andere kleine, zu einem anderen ſpäter zu erwähnenden Zwecke. Der Stöpſel iſt ſelbſt wieder durchbohrt und in das Bohrloch paßt genau ein Thermometer,

deſſen Kugel in dem Mittelpuncte des Ballons ſich befindet, wenn der unterſte Theilſtrich der Scale gerade über dem Stöpſel zu ſtehen kommt. Zwiſchen der Kugel des Thermometers und der eigentlichen Röhre dieſes Inſtrumentes befindet ſich als Verbindungsſtück ein Röhrchen von ſehr geringem Durchmeſſer, um mit wenig Queckſilber eine lange Säule zu geben. Zu Beobachtungen in hohen Temperaturen, bei denen die Abkühlung gar ſchnell vor ſich geht, braucht man ein ſolches Thermometer mit einer Kugel von $0^{m}.06$ Durchmeſſer und beinahe 2 Pf. Queckſilber, zu Beobachtungen in niederen Temperaturen thut ein Thermometer mit einer kleineren Kugel gute Dienſte, weil man da die Abkühlung eher zu beſchleunigen als zu verzögern ſuchen muß. An die Platte, woran das Thermometer durch bloße Reibung feſthält, läßt ſich ein hohler Cylinder *FG* anſchrauben, deſſen oberes Ende mit einer Metallfaſſung verſehen iſt, an welche ſich eine Bleiröhre *H* anſchließt, deren Communication aber durch einen Hahn aufgehoben werden kann. Dieſe Bleiröhre reicht bis zum Teller einer guten Luftpumpe *I*, und läßt ſich zugleich mit einem mit Luft gefüllten Recipienten *K* in Verbindung ſetzen, der auf der Brücke einer pneumatiſchen Wanne ſteht. Die Röhre *L*, welche vom Teller der Luftpumpe weggeht, und die andere *M*, die in den genannten Recipienten reicht, ſind durch ein weites Metallſtück *N* verbunden, das trockenen ſalzſauren Kalk enthält, um die Luft auszutrocknen.

10. Vor dem Verſuche wurde das Thermometer nebſt der Glasplatte vom Ballon weggenommen und mit der Kugel in einen Ofen geſtellt, wo es ſo lange blieb, bis das Queckſilber dem Siedpuncte nahe ſtand, und zugleich dem Waſſer in der Wanne die nöthige Temperatur ertheilet. Sobald beide erreicht waren, wurde das Thermometer in den Ballon an ſeinen Platz gebracht, und in dem Augenblicke, als es ſich daſelbſt befand, die Luftpumpe in Thätigkeit geſetzt, um die Luft ſo weit zu verdünnen, als es anging. Dabei mußte natürlich die Röhre, welche vom Ballon in den Glasrecipienten führt, geſchloſſen ſeyn, und dieſe ganze Vorrichtung iſt nur für Abkühlungsverſuche in einem Gaſe. Sobald die gehörige Luftverdünnung erreicht war, wurde die Zeit beobachtet, in welcher das Thermometer um eine beſtimmte Anzahl Grade ſank.

11. Um aus dieſen Thatſachen das eigentliche Abkühlungsgeſetz zu finden, mußte man vorläufig an den beobachteten Thermometergraden die nöthigen Correctionen anbringen. Dieſe waren zwei:

1) wurde das Queckſilber in der Kugel nicht blos durch das Ausſtrahlen der Wärme, ſondern auch durch das kalte aus der Röhre herabgeſunkene Queckſilber erkaltet; 2) mußte die Anzeige des Queckſilberthermometers beſonders für hohe Temperaturen auf Luftthermometergrade reducirt werden. Zur Berechnung der Erkältungsgeſchwindigkeit, d. h. der Abkühlung für eine Zeiteinheit und eine Temperaturdifferenz von 1° ſollte das Geſetz der Erkältung vorläufig bekannt ſeyn; man kann aber auch ein ſolches Geſetz hypothetiſch annehmen, hieraus die Erkaltungsgeſchwindigkeit berechnen und aus der Übereinſtimmung oder Abweichung der Rechnungsreſultate von denen der Beobachtung auf die Zuläſſigkeit jener Annahme ſchließen. Die am natürlichſten erſcheinende Vorausſetzung iſt, daß wohl die Erkaltungsgeſchwindigkeit der herrſchenden Temperaturdifferenz proportionirt ſey. Heißt demnach T die zur Zeit t herrſchende Temperaturdifferenz, ſo hat man unter dieſer Vorausſetzung

$$\frac{dT}{dt} = -aT$$

wo a eine conſtante Größe iſt, welche die Abkühlungsgeſchwindigkeit für die Temperaturdifferenz 1° bezeichnet (weil für $T = 1°$ $\frac{dT}{dt} = a$ iſt). Das Negationszeichen zeigt, daß mit der Zunahme der Zeit t die Temperaturdifferenz abnimmt. Durch Integriren erhält man

$$\log T = \text{const} - at.$$

Zur Beſtimmung der const ſetze man die anfängliche Temperaturdifferenz A. Da dieſe zur Zeit o eintritt, ſo iſt $\log A = \text{const}$, mithin

$$\log T = \log A - at,\quad T = Am^{-at}$$

oder wenn man das Negationszeichen an a hängend betrachtet·

$$T = Am^{at}.$$

Dieſe Formel entſpricht der Erfahrung nicht vollkommen zum Beweiſe, daß die obige Vorausſetzung nicht ganz naturgemäß iſt. Man muß demnach eine andere Hypotheſe wählen. Die natürlichſte iſt die in folgender Formel enthaltene.

$$T = Am^{at+bt^2}$$

wo m, a, b conſtante Größen vorſtellen, welche aus den Reſultaten der Beobachtungen beſtimmt werden müſſen. Dieſe Gleichung

entſpricht den Ergebniſſen der Beobachtung vollkommen. Verwandelt man ſie in eine logarithmiſche und differenziirt ſie nach T und t, ſo findet man

$$\frac{dT}{dt} = T(a + 2\,bt)\log m. \qquad (D)$$

Dieſer Ausdruck bezeichnet offenbar die Abkühlungsgeſchwindigkeit ſelbſt. Die beobachtete Geſchwindigkeit hing aber nicht blos von der Wärmeausſtrahlung, ſondern auch von der im Ballon zurückgebliebenen Luft ab, deren Dichte man aus der Barometerprobe abnehmen konnte. Um den Einfluß derſelben auf die Abkühlungsgeſchwindigkeit zu erfahren, mußten vorläufige Verſuche bei einer verſchiedenen Dichte der zurückgebliebenen Luft gemacht werden, daraus entnahm man das Geſetz, nach welchem dieſe Geſchwindigkeit mit der Dichte abnimmt und konnte ſo den fraglichen Einfluß finden und vom ganzen Reſultate abziehen. Der Reſt gab die wahre Abkühlungsgeſchwindigkeit im leeren Raume.

Auf dieſem Wege erhielt man folgende Reſultate:

Temperaturunterſchied	Temperatur der Umgebung				
	0°	20°	40°	60°	80°
	Abkühlungsgeſchwindigkeit				
240°	10°.69	12°.40	14°.35	—	—
220	8.81	10.41	11.98	—	—
200	7.40	8.58	10.01	11.64	13.45
180	6.10	7.04	8.20	9.55	11.05
160	4.89	5.67	6.61	7.68	8.94
140	3.88	4.57	5.32	6.14	7.19
120	3.02	3.56	4.15	4.84	5.64
100	2.30	2.74	3.16	3.68	4.29
80	1.74	1.99	2.30	2.73	3.18
60	—	1.40	1.62	1.88	2.17

Jede einzelne verticale Reihe von Abkühlungsgeſchwindigkeiten mit der ihr entſprechenden Temperaturdifferenz zwiſchen dem erkaltenden Körper und der Umgebung verglichen, zeigt, daß das ſonſt allgemein als gültig angenommene Geſetz: die Abkühlungsgeſchwindigkeiten ſeyen den Temperaturüberſchüſſen proportionirt, nicht gültig ſey. So zeigt z. B. die zweite Spalte bei 100° Über-

ſchuß die Geſchwindigkeit 2.30, bei 200° aber 7.40, alſo faſt dreimal mehr als im erſten Falle. Vergleicht man die Zahlen der zweiten und dritten Spalte und ſo die der dritten und vierten, der vierten und fünften mit einander, ſo findet man als Exponenten ihrer geometriſchen Verhältniſſe

1.16, 1.18, 1.16, 1.15, 1.16, 1.17, 1.17, 1.18, 1.15
1.16, 1.15, 1.16, 1.16, 1.17, 1.16, 1.17, 1.15, 1.16, 1.16
1.15, 1.16, 1.16, 1.15, 1.17, 1.16, 1.18, 1.16
1.15, 1.15, 1.16, 1.17, 1.16, 1.17, 1.17, 1.15.

Es wachſen daher bei mittleren Temperaturen die Abkühlungsgeſchwindigkeiten in einem geometriſchen Verhältniſſe, wenn die Temperaturdifferenzen im arithmetiſchen zunehmen.

12. Nach dem Principe des beweglichen Gleichgewichtes der Wärme hängt die Abkühlungsgeſchwindigkeit beim Ausſtrahlen der Wärme von der Differenz der Ausſtrahlung des wärmeren und kälteren Körpers ab. Heißt daher t die Temperatur des leeren Raumes, worin die Abkühlung vor ſich geht, τ der Temperaturüberſchuß des abzukühlenden Körpers, mithin $t+\tau$ ſeine Temperatur, ſo hat man für die Abkühlungsgeſchwindigkeit v den Ausdruck

$$v = f(t+\tau) - f(t)$$

wo f eine noch unbeſtimmte Function bedeutet. Dem vorhergehenden gemäß iſt aber

$$f(t) = m\,a^t + \text{const}$$

wo m eine unbeſtimmte Zahl bezeichnet, und daher auch

$$f(t+\tau) = m\,a^{t+\tau} + \text{const}$$

mithin

$$v = m\,a^t\,(a^\tau - 1) \;\ldots.\; (E).$$

Die Größe a findet man aus den vorhin beobachteten Thatſachen. Der Mittelwerth aller vorhin angegebenen Verhältniſſe der Abkühlungsgeſchwindigkeiten, für welche τ immer um 20° größer wird, t aber conſtant iſt, wird 1.165, daher hat man

$$a^{20} = 1.165 \text{ und } a = \sqrt[20]{1.165} = 1.0077.$$

Die Formel D gibt die Beobachtungsreſultate ſo genau wieder, daß man nicht umhin kann, ſie für den Ausdruck des wahren Abkühlungsgeſetzes zu halten.

13. Die Formel $f(t) = m\,a^t + \text{const}$ ſtellt das Ausſtrahlen des Ballons dar. Wählt man die Temperatur desſelben ſo, daß const $= 0$ iſt, ſo hat man $f(t) = m\,a^t$, mithin das abſolute Ausſtrah-

lungsvermögen oder den Wärmeverluſt ohne Rückerſatz durch Reflexion. Setzt man dieſen Verluſt $= M$, ſo iſt

$$v = M\,(a^{\tau} - 1).$$

Um hieraus den Wärmeverluſt nach Thermometergraden zu finden, den der Körper in der Zeit ϑ erleidet, bedenke man, daß man hat

$$v = -\frac{dt}{d\vartheta} \text{ oder } d\vartheta = -\frac{d\tau}{M\,(a^{\tau} - 1)}$$

und durch Integriren

$$\vartheta = \frac{1}{M \log a}\left[\log\left(\frac{a^{\tau} - 1}{a^{\tau}}\right)\right] + \text{const} \;\ldots\ldots\; (F).$$

14. Mit dem vorhin beſchriebenen Apparate laſſen ſich auch Verſuche über das Geſetz der Abkühlung in einem Gaſe anſtellen. Man braucht nur die atmoſphäriſche Luft mittelſt der Luftpumpe möglichſt aus dem Recipienten zu entfernen, das betreffende Gas durch die Bleiröhre hineinzuleiten und etwa, um den Reſt der atmoſphäriſchen Luft, welcher im Ballon zurückgeblieben iſt, möglichſt zu entfernen, das zuerſt eingelaſſene Gas wieder auszupumpen und neuerdings friſches Gas nachzufüllen. Wird die Thermometerkugel und das Gas auf den Wärmegrad gebracht, für welchen man den Verſuch machen will, ſo braucht man nach der Hand nur noch die Abkühlungsgeſchwindigkeit zu beobachten und ſie wie vorhin angegeben wurde, zu corrigiren. Dabei erfährt man aber die Abkühlungsgeſchwindigkeit, die von zwei Urſachen herrühret und zwar vom Ausſtrahlen der Wärme und von der Ableitung durch das Gas. Es iſt aber leicht, dem Vorhergehenden gemäß anzugeben, was auf Rechnung der erſten Urſache kommt und daher die Wirkung der zweiten rein darzuſtellen.

15. Dulong und Petit haben bei ihren Unterſuchungen über dieſen Gegenſtand damit den Anfang gemacht, auszumitteln, ob die Beſchaffenheit der Oberfläche des abkühlenden Körpers auf die Abkühlungsgeſchwindigkeit einen Einfluß habe. Sie nahmen daher zwei Thermometer, deren eins eine freie, das andere eine mit Blattſilber belegte Kugel hatte und machten mit denſelben einen Verſuch. Der Erfolg war in beiden Fällen derſelbe, zum Beweiſe, daß auf den Wärmeverluſt, in ſo weit er von der Berührung des Gaſes abhängt, die Beſchaffenheit der Oberfläche keinen Einfluß habe.

Hierauf wurden bei demſelben Luftdrucke und bei einerlei Tem-

peraturdifferenz aber bei verſchiedenen abſoluten Temperaturen in der atmoſphäriſchen Luft, dann in Waſſerſtoffgas, Kohlenſäuregas und öhlbildendem Gas Beobachtungen angeſtellt. Das Reſultat dieſer Unterſuchungen war, daß die Abkühlungsgeſchwindigkeit von der Dichte und Temperatur des Gaſes abhänge, jedoch ſo, daß dieſe Geſchwindigkeit denſelben Werth erlangt, wenn ſich Dichte und Temperatur zugleich ändern und die Spannkraft unverändert bleibt. Da man nun wußte, man habe bei derlei Unterſuchungen nur auf die Spannkraft des Gaſes zu ſehen, ſo wurden die Abkühlungsgeſchwindigkeiten bei verſchiedenen Spannkräften unterſucht, und zwar bei jenen, denen ein Druck von $0^m.72$, $0^m.36$, $0^m.18$, $0^m.09$ und $0^m.045$ entſprach. Man fand dabei das Geſetz, 1) daß die Änderung der Abkühlungsgeſchwindigkeit bei einer Änderung der Spannkraft und derſelben Temperaturdifferenz von der Natur des Gaſes unabhängig iſt, 2) daß für einerlei Temperaturdifferenz das Erkaltungsvermögen des Gaſes im geometriſchen Verhältniſſe ſteht, wenn ſich die Spannkraft desſelben in geometriſchem Verhältniſſe ändert, jedoch hat jenes Verhältniß für jedes Gas einen anderen Exponenten. War z. B. der Exponent des Verhältniſſes der Spannkräfte $= 2$, ſo war der für das Erkaltungsvermögen in atmoſphäriſcher Luft $= 1.366$, in Waſſerſtoffgas $= 1.301$, in Kohlenſäuregas $= 1.431$, in öhlbildendem Gas $= 1.415$. Das letztere Geſetz läßt ſich auch ſo ausdrücken: Das Erkaltungsvermögen eines Gaſes iſt bei übrigens gleichen Umſtänden einer gewiſſen Potenz der Spannkraft dieſes Gaſes proportional, und der Exponent des Verhältniſſes ändert ſich mit der Natur des Gaſes. Setzt man dieſen Exponenten $= m$, ſo iſt

das Erkaltungsvermögen einer Gasart bei dem Drucke	p gleich	e
„ „ „ „	$2p$ „	me
	$2^n p$ „	$m^n e$

Es ſey $2^n p = P$, $m^n e = E$, ſo wird

$$n = \frac{\log P - \log p}{\log 2} = \frac{\log E - \log e}{\log m}$$

und hieraus

$$\left(\frac{P}{p}\right)^\mu = \frac{E}{e}$$

wenn man $\frac{\log m}{\log 2} = \mu$ ſetzt. Dieſe Größe μ iſt für atmoſphäriſche

Luft $= 0.45$, für Waſſerſtoffgas $= 0.38$, für Kohlenſäuregas $= 0.517$, für öhlbildendes Gas $= 0.501$.

16. Faßt man alles zuſammen, was über das Abkühlungsvermögen der Gaſe geſagt worden iſt, ſo erſieht man, daß dieſes von der Beſchaffenheit der Oberfläche des abzukühlenden Körpers unabhängig ſey, daß die Dichte und Temperatur des Gaſes nur in ſo weit darauf Einfluß haben, als ſie die Spannkraft desſelben ändern, und daß demnach die Spannkraft des Gaſes und die Temperaturdifferenz zwiſchen dem Gas und dem abzukühlenden Körper die einzigen Elemente ſind, von denen das Abkühlungsvermögen abhängt. Iſt v_1 die Abkühlungsgeſchwindigkeit, welche als Maßſtab des Abkühlungsvermögens anzuſehen iſt, p der Druck, der als Maß der Spannkraft des Gaſes gilt, und t die Temperaturdifferenz, ſo wird

$$v_1 = q p^{\mu} t^{b}.$$

In dieſer Formel hat b für jedes Gas und jeden Körper denſelben Werth $= 1.233$, μ hängt von der Natur des Gaſes ab, q endlich iſt von der Natur des Gaſes und von den Dimenſionen des warmen Körpers abhängig.

17. Nun hält es nicht ſchwer, die geſammte Abkühlung V eines Körpers in einem Gaſe, in ſo fern ſie vom Ausſtrahlen der Wärme und der Wärmemittheilung an das Gas abhängt, durch einen einzigen mathematiſchen Ausdruck darzuſtellen. Man hat nämlich

$$V = v + v_1 = M\,(a^t - 1) + q p^{\mu} t^{b}.$$

Bezeichnet man $q p^{\mu}$ mit m, ſo erhält man

$$V = M\,(a^t - 1) + m t^{b} \;\ldots\ldots\; (G)$$

wo $a = 1.077$, $b = 1.233$ iſt.

C. Theorie der Wärmebewegung in feſten Körpern.

18. Die Theorie der Bewegung der Wärme in feſten Körpern läßt ſich auf zweifache Weiſe behandeln. Man kann ſich nämlich die Fortpflanzung derſelben wie die Ausbreitung einer gasförmigen Flüſſigkeit vorſtellen oder dieſe Fortpflanzung auch im Innern der Körper als eine Strahlung anſehen, und dieſem gemäß die Sache behandeln. Den erſten Weg hat Fourier, den zweiten Poiſſon eingeſchlagen; auf beiden gelangt man zu denſelben Endreſultaten und da dieſelben mit den Erfahrungen, ſo weit

man ſie kennt, genau übereinſtimmen, ſo läßt ſich auch daraus weder zu Gunſten der einen noch der anderen Vorausſetzung ein Schluß ziehen und hieraus über den Werth derſelben nichts entſcheiden, wiewohl beide mit den gangbaren Hypotheſen über die Natur der Wärme in innigſter Verbindung ſtehen. Wir wollen von beiden Behandlungsweiſen die Grundzüge angeben, theils um den Leſer mit dem Geiſte beider Behandlungsweiſen vertraut zu machen, theils um ihn zu weiteren Forſchungen über dieſen Gegenſtand zu vermögen.

19. Auf dem von Fourier eingeſchlagenen Wege wird als Baſis der geſammten Unterſuchung angenommen, es ſtehe die Wärmemenge, die ein Element einem daran grenzenden in einer beſtimmten Zeit abtritt, mit der Temperaturdifferenz in geradem Verhältniſſe, eine Annahme, die für ſehr kleine Differenzen vollkommen gerechtfertiget iſt, für größere aber zu irrigen Schlüſſen führen müßte.

Man denke ſich eine gleichartige, zwiſchen zwei parallelen, unbegrenzten Ebenen befindliche Maſſe und nehme an, ihre untere Fläche A werde bei der Temperatur T, die obere B bei der Temperatur t erhalten und es ſey $T > t$. Hat dieſe Maſſe anfangs die Temperatur t, ſo muß, ſobald die Wärme auf die unterſte Fläche zu wirken anfängt, dieſelbe von Theilchen zu Theilchen ſich fortpflanzen und in jedem mit der Grenze parallelen Schnitt muß einerlei Temperatur herrſchen. Sobald eine ſtationäre Temperatur eintritt, muß in derſelben Zeit durch jeden ſolchen Schnitt gleich viel Wärme gehen. Sind die Wärmemengen, welche durch zwei ſolche Schnitte A_1 und B_1 gehen, q und q_1 und iſt ϑ die Temperatur einer unendlich nahe an A_1, aber unterhalb derſelben liegenden Stelle, ϑ_1 hingegen die Temperatur einer eben ſo gegen A_1, aber oberhalb gelegenen Stelle und endlich τ und τ_1 die Temperaturen zweier eben ſo gegen B_1 gelegenen Stellen, ſo hat man

$$q : q_1 = \vartheta - \vartheta_1 : \tau - \tau_1$$

und wegen $q = q_1$ auch $\vartheta - \vartheta_1 = \tau - \tau_1$.

Heißt demnach die Entfernung der zwei Ebenen A und B von einander e, ſo iſt für die Temperatur v einer Stelle, welche von A um die Größe z abſteht:

$$T - v : T - t = z : e \text{ oder } v = T - \left(\frac{T-t}{e}\right) z.$$

Für einen zweiten eben ſo beſchaffenen Körper, für welchen v_1, T_1, t_1, e_1 dieſelben Bedeutungen haben, wie die gleichen Buchſtaben für den vorhergehenden, iſt

$$v_1 = T_1 - \left(\frac{T_1 - t_1}{e_1}\right) z.$$

Aus dieſer und der vorhergehenden Gleichung wird

$$d\,v = -\left(\frac{T-t}{e}\right) d\,z;\ d\,v_1 = -\left(\frac{T_1 - t_1}{e_1}\right) d\,z$$

und daher, wenn man die in einer beſtimmten Zeit durch einen Schnitt des Körpers gehende Wärmemenge für den erſten Körper Q, für den zweiten Körper Q_1 nennt, wegen $Q : Q_1 = d\,v : d\,v_1$

$$Q : Q_1 = \frac{T-t}{e} : \frac{T_1 - t_1}{e_1}.$$

Nimmt man die Temperatur T_1 als Einheit an, und ſetzt $t_1 = 0°$, $e_1 =$ der Längeneinheit und nennt die Wärmemenge, welche durch eine Flächeneinheit in eine Zeiteinheit geht, k; ſo wird

$$Q = k\left(\frac{T-t}{e}\right) = -k\frac{d\,v}{d\,z}.$$

Die Größe k bezeichnet die innere Leitungsfähigkeit der Maſſe für die Wärme.

20. Wird die Fläche B nicht bei einer conſtanten Temperatur erhalten, ſondern iſt ſie der Luft ausgeſetzt, ſo kann man ihre ſtationäre Temperatur t für den Fall, wo alles übrige wie vorhin geblieben iſt, berechnen. Die Wärmemenge, welche in einer Zeiteinheit durch einen Querſchnitt $= 1$ geht, iſt $k\left(\frac{T-t}{e}\right)$. Dieſe Wärme fließt in derſelben Zeit in die Luft ab; da dieſer Abfluß dem Vorhergehenden gemäß $h\ (t - \tau)$ iſt, wenn die Temperatur der Luft τ heißt, ſo hat man

$$k\left(\frac{T-t}{e}\right) = h\ (t - \tau) \text{ oder } t = \frac{k\,T + h\,e\,\tau}{k + h\,e}.$$

21. Nach denſelben Grundſätzen findet man auch die Bewegung der Wärme durch ein unendlich langes, ſehr dünnes rechtwinkeliges Prisma, das an einem Ende einer beſtändigen Wärmequelle ausgeſetzt iſt. Es habe dieſes Prisma einen quadratiſchen Querſchnitt, deſſen Seite $= 2\,a$ iſt, und dieſer werde ſo klein angenommen,

daß man es für erlaubt halten kann, die Temperatur aller Puncte deſſelben Querſchnittes als gleich anzuſehen. Sobald nun das Ende A dieſes Prisma's erwärmt wird, fließt die Wärme von dieſem Ende in den daran grenzenden Querſchnitt, von dieſem gelangt ſie wieder zum nächſt folgenden u. ſ. f. Während der Erwärmung der einzelnen Querſchnitte geht an der Oberfläche eine Erkältung vor ſich, und es tritt eine ſtationäre Temperatur ein, ſobald der Wärmeabfluß dem Zufluſſe gleich iſt. Iſt x die Entfernung des Querſchnittes $4a^2$ von der Wärmequelle, v die Temperatur deſſelben und k die innere, h die äußere Leitungsfähigkeit des Prisma's; ſo iſt die Wärmemenge, welche in der Zeit $= 1$ durch dieſen Querſchnitt fließt $= -4a^2 k \frac{dv}{dx}$. Verwandelt man x in $x + dx$, ſo geht der vorige Ausdruck für die Wärmemenge in $-4a^2 k\left(\frac{dv}{dx} + d.\frac{dv}{dx}\right)$ über, und der Unterſchied dieſer beiden Ausdrücke $4a^2 k d\left(\frac{dv}{dx}\right)$ gibt die Wärmemenge an, die das Prisma, welches durch x und $x + dx$ begrenzt wird, in einer Zeiteinheit erhält. Die äußere Fläche dieſes Stückes iſt $8adx$, und die davon in einer Zeiteinheit abfließende Wärmemenge $8havdx$. Soll die Temperatur ſtationär ſeyn, ſo hat man:

$$4a^2 k d\left(\frac{dv}{dx}\right) = 8ahv\,dx$$

oder

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{2h}{ak}v.$$

Das vollſtändige Integral dieſer Gleichung iſt

$$v = Ae^{-x\sqrt{\frac{2h}{ak}}} + Be^{-x\sqrt{\frac{2h}{ak}}}$$

wo A und B willkührliche Conſtanten bezeichnen. In der Vorausſetzung, daß x unendlich groß iſt, wird v unendlich klein, und es verſchwindet der zweite Theil des zweiten Gliedes gegen den erſten ſo, daß man erhält:

$$v = Ae^{-x\sqrt{\frac{2h}{ak}}} \quad \ldots (H).$$

Für ein ähnliches Prisma aus demſelben Materiale hat man

$$v_1 = A e^{-x_1 \sqrt{\frac{2h}{k a_1}} \, t}$$

wo v_1, x_1 a_1 den Zeichen $v\,x\,a$ analoge Werthe haben. Daraus ergibt ſich für Stellen von einerlei Temperatur, d. h. für $v = v_1$ die Gleichung

$$\frac{x^2}{x_1{}^2} = \frac{a}{a_1}$$

oder die Quadrate der Entfernungen gleich warmer Stellen vom erwärmten Ende verhalten ſich wie die Dicke der Stäbe. Haben die Prismen gleiche Dimenſionen und dieſelbe Beſchaffenheit der Oberfläche, beſtehen aber aus verſchiedenem Materiale, ſo daß k für den zweiten in k_1 übergeht, ſo wird für gleich warme Stellen

$$e^{-x \sqrt{\frac{2h}{k a}}} = e^{-x_1 \sqrt{\frac{2h}{k_1 a}}} \text{ oder } \frac{x^2}{x_1{}^2} = \frac{k}{k_1},$$

d. h., es verhalten ſich die Quadrate der Entfernungen gleich warmen Stellen von der Wärmequelle wie die inneren Leitungsfähigkeiten.

22. Man denke ſich ein rechtwinkeliges, vierſeitiges Prisma, und man ſuche die Temperatur v eines Punctes, dem die mit den Grenzflächen des Körpers parallelen Coordinaten x, y, z entſprechen, in der Vorausſetzung, daß eine Grenzfläche des Körpers einer beſtändigen Wärmequelle ausgeſetzt ſey. Die Wärmemenge, welche durch ein Stück der von xy begrenzten Ebene geht, iſt offenbar in der ganzen Ausdehnung dieſer Ebene dieſelbe. Es ſey ihre Temperatur $v = a + bx + cy + fz$, mithin die des Punctes in der Ebene xy, die dem Coordinate z entſpricht, gleich $v = a + fz$. Nach dem Vorhergehenden iſt ſie aber $a - \left(\frac{a-t}{e}\right) z$, mithin $f = -\frac{a-t}{e} = -\frac{dv}{dz}$ und die geſuchte Wärmemenge für eine Zeiteinheit iſt $-kf$. Auf dieſelbe Weiſe findet man die Wärmemenge, welche in einer Zeiteinheit durch eine mit xz oder yz begrenzte Ebene von der Ausdehnung $= 1$ geht. Man erhält für ſie nach der erſten Richtung $-kc$, nach der anderen $-kb$ und $c = \frac{dv}{dy}$,

$b = \frac{dv}{dx}$. Demnach geht durch ein Stück w des mit xy parallelen Schnitts in der Zeit dt die Wärmemenge $-k\frac{dv}{dz}w\,dt$, und eben ſo durch ein ſolches Stück des mit yz, xz parallelen Schnittes die Wärmemenge $-k\frac{dv}{dy}w\,dt$, $-k\frac{dv}{dx}w\,dt$.

23. Man denke ſich einen ſehr dünnen Ring, wovon jeder Querſchnitt den Umfang p und die Fläche ω hat, nenne ſeine innere Leitungsfähigkeit k, die äußere h, ſeine Dichte σ, ſeine Capacität für die Wärme c, und mache, daß er ſich an verſchiedenen Puncten willkührlich erwärme, dann aber wieder ſich ſelbſt überlaſſen der Luft von der Temperatur $= 0°\,C$ ausgeſetzt werde, ſo daß die Temperatur jedes Punctes zugleich den Temperaturunterſchied zwiſchen ihm und der Luft angibt. Der Wärmezuſtand dieſes Ringes ändert ſich, es fließt Wärme nach Außen ab. Man ſoll nun die Temperatur eines Punctes für einen gegebenen Augenblick beſtimmen. Wegen der ſehr geringen Dicke des Ringes kann man annehmen, alle Theile eines Querſchnittes haben dieſelbe Temperatur, und braucht demnach von jedem ſolchen Schnitt nur die Temperatur eines Punctes zu kennen. Heißt die Temperatur eines Schnittes, dem die Coordinate x entſpricht, $= v$, ſo fließt durch ihn in der Zeit dt die Wärmemenge $-k\omega\frac{dv}{dx}dt$, durch einen anderen, dem die Coordinate $x + dx$ entſpricht, fließt in derſelben Zeit die Wärmemenge $-k\omega\frac{dv}{dx}dt$ $-k\omega\frac{d^2v}{dx^2}dx\,dt$, und das von den Schnitten, denen x und $x + dx$ entſprechen, begrenzte Ringſtück erhält demnach in der Zeit dt die Wärmemenge $k\omega\frac{d^2v}{dx^2}dx\,dt$.

Die Oberfläche dieſes Ringſtückes iſt $p\,dx$, und daher der Wärmeverluſt $hpv\,dx\,dt$, weil ſeine Temperatur nahe v iſt. Demnach behält das genannte Stück die Wärmemenge

$$k\omega\frac{d^2v}{dx^2}dx\,dt - hpv\,dx\,dt,$$

wodurch ſeine Temperatur geändert wird. Da $c\sigma\omega\,dx$ die Wärmemenge iſt, welche die Temperatur des Ringſtückes um $1°\,C$ erhöht,

und die in der Zeit dt Statt habende Temperaturerhöhung $\frac{dv}{dt}\,dt$ ſo wird für 100theilige Grade

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\omega\frac{d^2v}{dx^2} - hpv}{c\sigma\omega} = \frac{k}{c\sigma}\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{hp}{c\sigma\omega}v$$

Man ſetze, um dieſe Gleichung zu integriren, $\frac{k}{c\sigma} = q$, $\frac{hp}{c\sigma\omega} = h$ und man erhält:

$$\frac{dv}{dt} = q\frac{d^2v}{dx^2} - hv.$$

Setzt man ferner $v = e^{-ht}u$, wo u eine neue unbeſtimmte Variable iſt, differenziirt dieſen Ausdruck und ſetzt den ſo erhaltenen Werth von $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2v}{dx^2}$ in die vorhergehende Gleichung, ſo wird

$$\frac{du}{dt} = q\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Die Integration dieſer Gleichung wird nach Fourier dadurch vollzogen, daß man zuerſt beſondere Integrale für dieſe Gleichung ſucht und aus dieſen dann das allgemeine Integrale findet. Der Gleichung $\frac{du}{dt} = q\frac{d^2u}{dx^2}$ geſchieht Genüge, wenn man $u = ae^{-qn^2t}\sin nx$ ſetzt, wobei erfordert wird, daß u durch eine Vergrößerung des x um $2\rho\pi$ nicht geändert wird, weil ſonſt der Ring an derſelben Stelle gleichzeitig verſchiedene Temperaturen haben müßte. Deßhalb muß $2n\rho\pi$ ein Vielfaches i vom Umfange $2\rho\pi$ ſeyn und man hat $n = \frac{i}{\rho}$, dadurch wird obiges Integrale $ae^{\frac{-qi^2t}{\rho^2}} \cdot \sin\frac{ix}{\rho}$. Dieſes muß aber auch den anfänglichen Zuſtand des Ringes angeben, wenn man $t = 0$ ſetzt. Man hat demnach $u = a\sin\frac{ix}{\rho}$, und obiges Integrale drückt den Zuſtand der Wärmevertheilung in der Zeit t nur dann richtig aus, wenn die anfänglichen Temperaturen verſchiedener Puncte den Sinuſſen der Winkel proportionirt ſind, den die Halbmeſſer, welche zu dieſen Puncten gehören, mit dem Radius des Anfangspunctes der Coordinaten ma-

chen. Mittelſt u findet man leicht aus $v = e^{-ht} u$ den Werth von v.

Durch ein gleiches Verfahren wird man belehrt, daß, wenn der anfängliche Wärmezuſtand des Ringes dem Ausdrucke $\cos \frac{ix}{\rho}$ entſpricht, man für die Wärmebewegung in der Zeit t das Integral $a\, e^{-\frac{q i^2 t}{\rho^2}} \cos \frac{ix}{\rho}$ erhält. Dieſem gemäß wird das allgemeine Integrale ſo heißen:

$$u = b^\circ + \left.\begin{matrix} a_1 \sin \frac{x}{\rho} \\ b_1 \cos \frac{x}{\rho} \end{matrix}\right\} a e^{-\frac{q t}{\rho^2}} + \left.\begin{matrix} a_2 \sin \frac{2x}{\rho} \\ b_2 \cos \frac{2x}{\rho} \end{matrix}\right\} a e^{-\frac{q t}{\rho^2}} + \ldots$$

wo $b_0\, a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2$ unbeſtimmte Coefficienten ſind.

Man multiplicire dieſe Gleichung mit e^{-ht} und bedenke, daß ſie für $t = 0$ den urſprünglichen Wärmezuſtand des Ringes angeben muß. Iſt dieſer eine Function von $x = f(x)$, ſo hat man:

$$f(x) = \left\{\begin{matrix} a_1 \sin \frac{x}{\rho} \\ b_1 \cos \frac{x}{\rho} \end{matrix}\right. + \left\{\begin{matrix} a_2 \sin \frac{2x}{\rho} \\ b_2 \cos \frac{2x}{\rho} \end{matrix}\right. + \left\{\begin{matrix} a_3 \sin \frac{3x}{\rho} \\ b_3 \cos \frac{3x}{\rho} \end{matrix}\right. + \ldots$$

Man nehme zuerſt nur die von den Sinuſſen abhängigen Glieder, ſetze darin $\rho = 1$ und nehme an, es gehe wegen der Vernachläſſigung der vom Cos. abhängenden Glieder f in φ über, ſo hat man

$$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots .$$

Werden beide Glieder mit $\sin ixdx$ multiplicirt und dann integrirt, ſo wird

$$\int \varphi(x) \sin ixdx = a_1 \int (\sin x \sin ixdx)$$
$$+ a_2 \int (\sin 2x \sin 1xdx) + \ldots .$$

Es iſt aber $2\int^{\pi} \sin lx \,.\, \sin ixdx = \frac{1}{(i-l)} \sin (i-lx)$ $- \frac{1}{(i+l)} \sin (i-lx) + C$, und es müſſen für $x = \pi$ daher alle Glieder des zweiten Theiles obiger Gleichung gleich Null

ſeyn, wenn i und l verſchiedene Werthe haben. Iſt aber $i = l$, ſo wird dieſes Glied $= \pi$, darum hat man:

$$a_1 = \int \frac{\varphi(x) \sin x\, dx}{\frac{1}{2}\pi},\ a_2 = \int \frac{[\varphi(x) \sin 2x\, dx]}{\frac{1}{2}\pi} \text{ꝛc.}$$

Setzt man dieſe Werthe in die obige Gleichung, ſo wird

$$\tfrac{1}{2}\pi\varphi(x) = \sin x \int \varphi(x) \sin x\, dx + \sin 2x \int \varphi(x) \sin 2x\, dx + \ldots$$

und auf gleichem Wege

$$\tfrac{1}{2}\pi\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\int \varphi(x)\, dx + \cos x \int \varphi(x) \cos x\, dx$$
$$+ \cos 2x \int \varphi(x) \cos 2x\, dx + \ldots$$

Beide Ausdrücke mit einander verbunden und ſtatt x geſetzt $\frac{x}{\rho}$ wird

$$\pi\rho f(x) = \tfrac{1}{2} \int f(x)\, dx + \begin{matrix} \sin \frac{x}{\rho} \int \sin \frac{x}{\rho} f(x)\, dx \\ \cos \frac{x}{\rho} \int \cos \frac{x}{\rho} f(x)\, dx \end{matrix}$$

$$+ \begin{matrix} \sin \frac{2x}{\rho} \int \sin \frac{2x}{\rho} f(x)\, dx \\ \cos \frac{2x}{\rho} \int \cos \frac{2x}{\rho} f(x)\, dx \end{matrix} + \ldots\ldots$$

Dieſe Gleichung mit e^{-ht} multiplicirt, macht

$$\rho\pi v = e^{-ht} \cdot \tfrac{1}{2} \int f(x) dx + \left\{ \begin{matrix} \sin \frac{x}{\rho} \int \sin \frac{x}{\rho} f(x)\, dx \\ \cos \frac{x}{\rho} \int \cos \frac{x}{\rho} f(x)\, dx \end{matrix} \right\} e^{\frac{kt}{\rho^2}}$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \sin \frac{2x}{r} \int \sin \frac{2x}{\rho} f(x) dx \\ \cos \frac{2x}{r} \int \cos \frac{2x}{\rho} f(x) dx \end{matrix} \right\} e^{-\frac{h_2 t}{\rho}} + .$$

wo die Integration von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ auszudehnen iſt. Sobald die Temperatur des Ringes ſtationär geworden iſt, ändert ſich v nicht mehr mit der Zeit oder es iſt $\frac{dv}{dt} = 0$, mithin $\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{hp}{k\omega} v$ oder

$$v = Ae^{-x\sqrt{\frac{ha}{k\omega}}} + Be^{x\sqrt{\frac{ha}{k\omega}}} \dots (I).$$

24. Es ſcheint dem Gange der Natur angemeſſen zu ſeyn, die Fortpflanzung der Wärme im Innern der Körper als Reſultat einer Strahlung anzuſehen, die von jedem Theilchen aus bis auf eine gewiſſe, aber ſehr geringe Entfernung wirkt, wie dieſes Poiſſon gethan hat; denn dadurch wird es begreiflich, wie ein erwärmtes Theilchen auf mehrere andere wirken kann, um ſo jene Continuität herzuſtellen, die nicht vorhanden iſt, wenn man nur jedes Theilchen auf das nächſt vorhergehende oder nachfolgende wirken läßt, wodurch die Anwendung der Differenzialrechnung unzuläſſig würde. Um die Anlage der Rechnung bei dieſer Annahme näher zu zeigen, denken wir uns unter (Fig. 179) eine unendlich lange, homogene, prismatiſche oder cylindriſche Stange, deren Dicke ſo gering iſt, daß man alle Puncte eines Querſchnittes derſelben als gleich warm anſehen kann und die Fortpflanzung der Wärme durch dieſelbe blos nach ihrer Länge zu betrachten braucht. Es ſey OR ein im Innern dieſer Stange mit einer ihrer Seitenflächen parallele Linie und ein Punct O derſelben der Anfangspunct der Coordinaten; ferner M eine Ebene, deren Entfernung von O gleich x iſt, und der Querſchnitt des Elementes und der Stange $= \omega$, die Dicke des erſteren dx, mithin ſein Volumen ωdx. Die Temperatur dieſes Elementes ſey zur Zeit t gleich v. Soll nun die Temperaturveränderung desſelben in der Zeit dt beſtimmt werden, ſo muß man die Wärmemenge kennen, welche dieſes Element durch das vorhergehende und nachfolgende Element gewinnt oder verliert und man muß vorläufig die Größe dieſes Verluſtes oder Gewinnes ausmitteln. Es ſeyen dieſe Elemente $M_{,}$ und M', die Entfernung jedes derſelben von M ſey e, ſo daß dem erſteren $x-e$, dem letzteren $x+e$ entſpricht, ihre Temperaturen heißen u und $u_{,}$. Nimmt man an, die Wärmeſtrahlung ſey der Zeit, durch welche ſie dauert, der Temperaturdifferenz zwiſchen den Puncten, bei denen ſie Statt findet und einer noch unbeſtimmten Function (f) ihrer Entfernung proportionirt; ſo iſt die Wärmemenge, welche ein Punct des Elementes M in der Zeit dt durch die in der Linie de des Elementes $M_{,}$ liegenden Puncte (auf welche alle ſich die Strahlung jenes Punctes erſtreckt) erhält oder verliert, dem Ausdrucke $(u-v)\,de\,dt$ und die Wärme, welche alle in dx liegenden Linien durch M er-

halten oder verlieren, dem Ausdrucke $(u-v)\,dx\,de\,dt$ proportionirt. Dieſe Wärmemenge wird in der Zeit dt dem Elemente M ſo vielmal von dem der Dicke de entſprechenden Stücke des Elementes M_1 geſendet oder genommen, als ſolche phyſiſche Puncte in ω enthalten ſind. Demnach iſt dieſe Wärmemenge dem Ausdrucke $\omega\,(u-v)\,dx\,de\,dt$ proportionirt, und für die Wärmemenge ſelbſt hat man

$$\omega\,(u-v)\,f(e)\,dx\,de\,dt.$$

Auf gleiche Weiſe findet man die Wärmemenge, welche das der Dicke de entſprechende Stück des Elementes M' an M in der Zeit dt abgibt oder davon erhält, nämlich

$$\omega\,(u_1-v)\,f(e)\,dx\,de\,dt$$

und daher die in der Zeit dt dem Elemente M zu Theil werdende poſitive oder negative Erwärmung

$$\omega\,dx\,dt\int(u_1+u-2v)\,f(e)\,de.$$

Nebſt dieſer inneren Strahlung geht auch noch eine äußere vor ſich. Iſt der äußere Umfang eines Querſchnittes des Elementes M gleich p, und daher die Oberfläche des Elementes $p\,dx$ und h die äußere Leitungsfähigkeit ſeiner Oberfläche, nimmt man ferner die Temperatur der Umgebung = o an, ſo erhält man für den in der Zeit dt durch äußere Strahlung erlittenen Wärmeverluſt

$$hpv\,dx\,dt$$

mithin die Wärmezunahme des betreffenden Elementes in der Zeit dt

$$\left\{\omega\int(u_1+u-2v)\,f(e)\,de-hpv\right\}dx\,dt\;\ldots.\;(K).$$

25. Iſt die Capacität der Stange für die Wärme σ, ſo iſt $\sigma\omega\,dx\,\frac{dv}{dt}.\,dt$ die der Temperaturdifferenz dv entſprechende Wärmezunahme, mithin

$$\sigma\omega\,\frac{dv}{dt}=\omega\int(u_1+u-2v)\,f(e)\,de-hpv\quad(a).$$

Nun hat man dem Taylor'ſchen Lehrſatze gemäß

$$u_1=v+\frac{dv}{dx}\,e+\frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{e^2}{2}+\frac{d^3v}{dx^3}\cdot\frac{e^3}{2.3}+\ldots.$$

$$u_1=v+\frac{dv}{dx}\,e+\frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{e^2}{2}-\frac{d^3v}{dx^3}\cdot\frac{e^3}{2.3}+\ldots.$$

und hieraus

$$\int (u_1 + u - 2v) f(e)\, de = \frac{d^2 v}{dx^2} \int f(e) e^2 de + \frac{1}{3.4} \frac{d^4 v}{dx^4} \int f(e) e^4 de + ..$$

Die Integration ſollte von $e=0$ bis zur Grenze der Strahlungsphäre ausgedehnt werden, man kann ſie aber auch ohne Fehler von $e=0$ bis $e=\infty$ vornehmen. Setzt man demnach

$\int f(e)\, e^2 de = k$, $\int f(e)\, e^4 de = b$ ꝛc., ſo wird

$$\int (u_1 + u - 2v) f(e)\, de = k \frac{d^2 v}{dx^2} + b \frac{d^4 v}{dx^4} + \ldots\ldots$$

oder weil b gegen k offenbar verſchwindend klein iſt:

$$\int (u_1 + u - 2v) f(e)\, de \doteq k \frac{d^2 v}{dx^2}$$

und mit Hilfe dieſer Gleichung aus (a)

$$\sigma \omega \frac{dv}{dx} = k \omega \frac{d^2 v}{dx^2} - hpv$$

oder wenn man $\frac{k}{\sigma} = q^2$, $\frac{hp}{\sigma \omega} = r$ ſetzt:

$$\frac{dv}{dt} = q^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - rv.$$

Dieſe Gleichung integrirt gibt

$$v = \frac{e^{-rt}}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r t} \varphi (x + 2 q \alpha \sqrt{t})\, d\alpha$$

wo φ eine willkührliche Function, e die Baſis der Neper'ſchen Logarithmen, α eine Variable, π das Kreisverhältniß bedeutet.

Für $t = 0$ iſt $v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi x \int e^{-\alpha^2} d\alpha = \varphi x$

und daher läßt ſich obige Function aus dem anfänglichen Wärmezuſtande der Stange ganz oder zum Theil beſtimmen.

26. Geſetzt, man habe es mit einer Stange zu thun, die zu beiden Seiten des Punctes O eine unbegrenzte Länge hat und an der Stelle von $x=0$ bis $x=l$ einer beſtimmten Wärmequelle ausgeſetzt iſt, während der übrige Theil die Temperatur des umgebenden Mittels ($=0$) hat. Da iſt nun $\varphi(x) =$ für alle Puncte jenſeits der Grenzen $x=0$ und $x=l$. Setzt man nun

$x + 2q\alpha\sqrt{t} = x_1$, ſo wird

$$\alpha = \frac{x_1 - x}{2q\sqrt{t}},\ d\alpha = \frac{dx_1}{2qx\sqrt{t}},\ \text{und}$$

$$v = \frac{e^{-rt}}{2q\sqrt{\pi t}} \int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4q^2 \cdot t}} \varphi x_1\, dx_1.$$

Die Temperatur eines Punctes, der vom Erwärmungsorte ſehr weit abſteht, kann man nahe finden, wenn man x_1 gegen x in der Entwicklung der Exponentialgröße vernachläſſiget. Dadurch wird

$$v = e^{-rt}\, e^{-\frac{x^2}{4q^2 t}} \int \varphi(x_1)\, dx_1$$

Heißt die der Stange mitgetheilte Wärmemenge A, ſo wird

$$A = \sigma\omega \int \varphi\, x_1\, dx_1$$

und deßhalb

$$v = \frac{A e^{-rt}\, e^{-\frac{x^2}{4q^2 t}}}{2\sigma\omega q\sqrt{\pi t}}.$$

Es hängt daher die geſuchte Temperatur nur von der Wärmemenge A, nicht von der Form der Function φ ab.

27. Abſtrahirt man bei einer Stange, wie die bis jetzt behandelte war, von der Ausſtrahlung der Wärme durch die Seiten, d. h., ſetzt man $h = 0$, alſo $r = 0$, ſo wird

$$v = \frac{A e^{-\frac{x^2}{4q^2 t}}}{2\sigma\omega q\sqrt{\pi t}}\ \text{oder}\ \sigma\omega v = \frac{A e^{-\frac{x^2}{4q^2 t}}}{2q\sqrt{\pi t}}\ \ldots\ (M).$$

$\sigma\omega v$ bezeichnet die Wärmemenge, welche in der Zeit t durch die der Größe x entſprechende Stelle geht, ſie hat den größten Werth für $t = \frac{x^2}{2q^2} = \frac{\sigma x^2}{2k}$. Demnach erlangt dieſe Stelle deſto eher das Maximum ihrer Temperatur, je größer k und je kleiner σ iſt. Erſtere Größe k bezeichnet daher die Geſchwindigkeit der Wärmefortpflanzung in der Mitte der Stange, oder ihre Leitungsfähigkeit für die Wärme. Aus $h = \int (e)\, e^2\, de$ ſieht man, daß dieſe Leitungsfähigkeit deſto größer iſt, auf je größere Entfernung ſich die Strahlung eines Punctes im Innern der Maſſe erſtreckt, oder je intenſiver ſie am Urſprunge iſt.

D. Verſuche über Wärmefortpflanzung in feſten Körpern.

28. Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln laſſen ſich durch Verſuche prüfen und geſtatten manche intereſſante Anwendung. Wir wollen einen ſolchen von Biot angeſtellten Verſuch näher betrachten.

Eine Eiſenſtange *A B* (Fig. 180) von ſo geringer Dicke, daß man alle in einem Querſchnitte liegenden Puncte als gleich warm anſehen durfte, wurde am Ende *A* einer beſtändigen Wärmequelle ausgeſetzt. Dieſes erreichte man dadurch, daß man ſie unmittelbar mit dieſem Ende in Queckſilber tauchte, das durch Lampenfeuer bei einer beſtimmten Temperatur erhalten wurde. Damit aber dieſe Quelle der Wärme nicht auf die übrige Stange durch Strahlung wirken konnte, wurde ein polirter Schirm *C* angebracht. An mehreren Stellen hatte die Stange Löcher zur Aufnahme der Kugeln von Thermometern, welche die Temperatur ſolcher Stellen anzugeben beſtimmt waren; jede dieſer Kugeln wurde mittelſt etwas Queckſilber mit den Wänden der Öffnung in metalliſche Berührung gebracht. Wenn die Wärme auf das Ende *A* zu wirken begann, fingen auch die Thermometer zu ſteigen an, und zwar jenes zuerſt, das der Wärmequelle am nächſten war. Nach einiger Zeit hatten alle einen unveränderlichen Stand erreicht, zum Beweiſe, daß nun der Wärmezufluß dem Abfluſſe gleich war. In dieſem Zuſtande wurden die Temperaturen, ſo wie ſie jedes einzelne Thermometer angab, und zugleich die Entfernung x jedes einzelnen von der Wärmequelle angegeben. Bei einem ſolchen Verſuche, der bei einer Lufttemperatur von 13° R. angeſtellt wurde, erhielt Biot folgende Zahlenwerthe:

Zahl des Thermometers	Abſtand von der Wärmequelle in Decimetern x	Beobachteter Temperaturunterſchied zwiſchen der Luft und der Stange v
0	0.000	69°.00
1	2.115	23.50
2	3.115	14.00
3	4.009	9.00
4	4.970	5.75
5	5.902	3.75
6	7.777	1.75
7	9.671	1.00
8	11.556	unmerklich

Die Temperatur der Wärmequelle betrug nach einem darin befindlichen Thermometer 82° R., nach einem andern ſpäter zu erwähnenden Mittel 81°.475. Dieſe Reſultate ſollen nun durch die Formel (H) dargeſtellt werden. Setzt man in derſelben $e = 10^{-\frac{1}{m}}$, wo m der Modulus der gewöhnlichen Logarithmen $= 2.302585$ iſt, und $2h = f$, $ak = g$, ſo iſt

$$v = A.\ 10^{-\frac{x}{m}\sqrt{\frac{f}{g}}} \quad \text{oder} \quad \log v = \log A - \frac{x}{m}\sqrt{\frac{f}{g}}.$$

Für $x = 0$ iſt $\log v = \log A$, oder $v = A$, und daher A der Temperaturunterſchied zwiſchen der Wärmequelle und der Luft, d. h. eine gegebene Größe. Es erübrigt daher nur mehr der Werth von f und g oder von $\sqrt{\frac{f}{g}}$. Zur Kenntniß deſſen führt der Verſuch ſelbſt. Es iſt nämlich

$$\text{für } x = 2.115 \quad v = 23°.5$$
$$x = 4.009 \quad v = 9$$

mithin

$$\log 23.5 = \log A - \frac{2.115}{m}\sqrt{\frac{f}{g}};\ \log 9 = \log A - \frac{4.009}{m}\sqrt{\frac{f}{g}},$$

und daraus

$$\frac{1}{m}\sqrt{\frac{f}{g}} = \frac{\log 23.5 - \log 9}{4.009 - 2.115} = 0.2200767.$$

Man hat daher

$$\log v = 1.835331 - 0.2200767 \cdot x.$$

Führt man die Rechnung für die beobachteten Werthe von x, ſo findet man die Temperaturen, welche in Folgendem enthalten ſind, und durch Vergleichung mit den oben angegebenen beobachteten Temperaturen die nebenſtehenden Differenzen.

Zahl des Thermometers	Berechnete Temperatur-differenz v	Beobachtete Temperatur-differenz	Unterſchied
0	68°.48	69°.00	— 0°.52
1	23.50	23.50	0.00
2	14.16	14.00	+ 0.16
3	9.00	9.00	0.00
4	5.55	5.75	— 0.20
5	3.45	3.75	— 0.30
6	1.33	1.75	— 0.42
7	0.51	1.00	— 0.49
8	—	unmerklich	

29. Die große Übereinſtimmung zwiſchen den Ergebniſſen des Verſuches und der Rechnung geſtattet die Anwendung der letzteren in Fällen, wo es ſich darum handelt, durch einen Verſuch eine aus directen Beobachtungen nicht wohl ableitbare Größe zu beſtimmen. Eine ſolche Anwendung läßt ſich zur Beſtimmung der **Temperatur** eines Körpers machen, die zu hoch iſt, als daß ſie ſich durch Thermometer genau beſtimmen ließe. Betrachtet man nämlich den Körper, um deſſen Temperatur es ſich handelt, als Wärmequelle, bringt damit eine der vorhergehenden ähnliche Stange in Berührung und beobachtet ſowohl die ſtationären Temperaturen mehrerer Stellen, als den Abſtand dieſer Stellen von der Wärmequelle; ſo erhält man aus obiger Formel die Temperatur von A, aus der man dann leicht mittelſt der Temperatur der Luft t zur Zeit des Verſuches den geſuchten Wärmegrad $A+t$ berechnet. So z. B. findet man aus dem vorhergehenden Verſuch $\log A = 1.835531$ und $A = 68.475$, mithin wegen $t = 13°$, $A+t = 81°.475$.

30. Eine andere Anwendung läßt ſich auf die Beſtimmung der **Leitungsfähigkeit** der Körper machen. Beobachtet man nämlich die Entfernung gleich warmer Stellen von der Wärmequelle, ſo gibt das Verhältniß des Quadrats dieſer Entfernungen das Verhältniß der inneren Leitungsfähigkeit, wie aus (21) klar iſt. Zu demſelben Ziele gelangt man auch aus Beobachtungen der Temperatur mehrerer gegen die Wärmequelle gleich gelegener Stellen an Stangen von verſchiedenem Materiale. Daß man dabei die äußere Leitungsfähigkeit der Körper möglichſt beſchränken und ſie darum

von Außen ſchwärzen müſſe, iſt einleuchtend. Die Leitungsfähigkeiten, welche Despretz gefunden hat und die in Tafel XXII enthalten ſind, wurden auf dieſem Wege erhalten. Doch darf man dieſes Verfahren ohne Irrthum höchſt wahrſcheinlich nur auf gut leitende Körper anwenden, und muß dieſelben von ſolcher Länge nehmen, daß ſelbſt das Thermometer, deſſen Kugel nicht mehr durch die Wärmequelle afficirt wird, vom Ende der Stange weit genug entfernt iſt, weil die obige Formel nur für unendlich lange Stangen gilt.

Zweites Kapitel.

Gleichgewicht der Wärme.

A. Gleichgewicht der Wärme mit ſich ſelbſt.

31. Die in einem Körper enthaltene Wärme muß, wenn ſie im Gleichgewichte ſtehen ſoll, der Wärme der äußeren Umgebung und den Kräften, welche den Aggregationszuſtand der Körper beſtimmen, entgegenwirken. In erſterer Beziehung wird zum Beſtehen des thermometriſchen Gleichgewichtes in jedem Körper eine gewiſſe Wärmemenge enthalten ſeyn müſſen, die für jeden Grad der Erwärmung der Umgebung auch um eine beſtimmte Quantität wachſen muß. Dieſe auf die Maſſe = 1 bezogene Wärmemenge heißt die ſpecifiſche Wärme. Die Beſtimmung dieſer Größe iſt demnach zur Ausmittlung der Geſetze des Gleichgewichts unumgänglich nothwendig. Man gelangt zu ihrer Kenntniß durch Anwendung des Calorimeters, der Miſchungs- und der Abkühlungsmethode. Jede derſelben fordert beſondere Vorſichten, wenn ſie zu einem glücklichen Ziele führen ſoll, und dieſe ſollen hier angegeben werden.

32. Da beim Gebrauche des Calorimeters die Wärmemenge, um die es ſich handelt, durch die geſchmolzene Eismenge beſtimmt wird, ſo muß man ſein ganzes Augenmerk darauf richten, alle äußeren Einflüſſe, wodurch Eis geſchmolzen werden könnte, abzuhalten und die geſchmolzene Eismenge ganz genau auszumitteln. In dieſer Beziehung verdient die Temperatur des Eiſes und des Beobachtungslocales eine beſondere Berückſichtigung. Die Temperatur des Eiſes ſoll = 0° C ſeyn und nicht geringer, damit nicht etwa ein Theil der Wärme, welchen der zu prüfende Körper abgibt,

zur Erwärmung des Eiſes verwendet werden muß; die Temperatur des Locals, worin man den Verſuch macht, darf nur wenige Grade über o° *C* ſeyn, denn es iſt unvermeidlich, daß nicht etwas Luft in den Calorimeter eindringe, ſich mit dem darin befindlichen Körper bis auf o° *C* abkühle und ſo ein zu hohes Reſultat erzeuge. Nur wenn die Temperatur der umgebenden Luft wenig über o° *C* ſteht, kann man ihren Einfluß vernachläſſigen und das Reſultat als rein anſehen.

Bei der Beſtimmung der geſchmolzenen Eismenge hat man zu bedenken, daß nicht alles Waſſer, das ſich aus dem Eis gebildet hat, alſogleich in den dazu beſtimmten Behälter abfließt, ſondern daß an jedem Eisſtückchen eine kleine Waſſerſchichte hängen bleibt, was bei der großen Anzahl der vorhandenen Stücke auf das Endreſultat wohl einen beachtenswerthen Einfluß haben muß. Man beugt dieſem Übelſtande dadurch vor, daß man den Apparat einige Zeit in dem dazu beſtimmten Locale ſtehen läßt, bevor man den zu unterſuchenden Körper einſetzt. Da ſchmilzt ſchon durch den Einfluß der Luft ein kleiner Theil des Eiſes und jedes Eisſtückchen überzieht ſich mit einer Waſſerſchichte, die für die zuletzt hängen bleibende vollen Erſatz gibt. Nur wenn beim Verſuche die Eismaſſe zu ſtark vermindert wird, bleibt am Ende weniger Waſſer zurück, als anfänglich ſchon vorhanden war, und man verfällt in den entgegengeſetzten Fehler. Darum hat man auch dafür zu ſorgen, daß die Eismaſſe durch den Verſuch nicht zu ſtark vermindert werde, um ſo mehr, als ſonſt außer dem angedeuteten Nachtheil noch der eintritt, welcher von der in den Calorimeter eindringenden Luft herrührt.

Das Reſultat wird nach der Formel $C = \frac{N - mct}{MT}$ berechnet, wo C und c die Capacitäten des betreffenden Körpers und des Gefäßes, m die Maſſe des letzteren, M die des erſteren, t und T ihre Temperaturen und N die geſchmolzene Eismenge bedeuten.

33. Bei der Anwendung der Miſchungsmethode ſind zwei Umſtände beſonders zu berückſichtigen, nämlich die Wärmeconſumtion durch das Gefäß und der Wärmeabfluß nach Außen. Um den Einfluß des Gefäßes zu vermindern, muß man demſelben möglichſt wenig Maſſe geben, und um ihn ganz aufzuheben, die von demſelben hervorgebrachte Erkältung in Rechnung bringen. Dazu muß man aber vorläufig ſein Gewicht und ſeine Wärmecapacität kennen. Iſt m die Maſſe des Gefäßes, nach der Einheit gemeſſen, welche

man bei der Beſtimmung der Capacität zum Grunde gelegt hat, c ſeine Capacität für die Wärme, σ die des Waſſers, ſo vertritt offenbar das Gefäß die Stelle einer Waſſermenge von der Maſſe $\frac{mc}{\sigma}$. Man hat demnach in der Berechnung des Reſultates ſtatt der wirklichen Waſſermenge M die Menge $M + \frac{mc}{\sigma}$ in Rechnung zu bringen und im Übrigen ſo zu verfahren, als hätte das Gefäß gar keinen Einfluß auf den Erfolg des Verſuches. Iſt die Capacität c nicht bekannt, ſo muß man ſie durch einen vorläufigen Miſchungsverſuch beſtimmen. Folgendes aus Crawford's Werk über die Wärme entlehnte Beiſpiel wird das hierbei nöthige Verfahren erläutern. Es wurde in einem Zimmer, bei einer Temperatur der Luft $= 20°.14$, 40 Unzen Waſſer von $20°.0833$ eilig in ein Gefäß aus Weißblech von der Temperatur $42°.916$ gegeben. Nach 3 Minuten hatte das Waſſer die nahe conſtante Temperatur $20°555$ angenommen. Betrachtet man das Gefäß als den in Waſſer getauchten Körper, ſo läßt ſich auf dasſelbe die Formel $\frac{mc(t-\tau)}{M(\tau-T)}$ anwenden, wo $T = 20°.0833$, $t = 42°.916$, $\tau = 20.555$, und daher $C = \frac{mc}{47.4}$ iſt.

Viel ſchwerer iſt es, den Wärmeverluſt durch die Umgebung zu beſtimmen oder zu vermindern. Crawford bediente ſich hierzu des Mittels, daß er das Geſetz der fortſchreitenden Abkühlung der Miſchung beobachtete, nach dieſem den Wärmeverluſt berechnete, und um das, was dieſe Rechnung angab, die conſtant gewordene Temperatur der Miſchung erhöhte. Allein es iſt nicht erwieſen, daß dieſes Geſetz auch auf den Fall angewendet werden darf, wo das Gleichgewicht der Wärme noch nicht hergeſtellt iſt. Sehr ſinnreich iſt das Mittel, deſſen ſich Rumford zu demſelben Zwecke beim Gebrauche ſeines Calorimeters bedient, der doch auch im Grunde auf der Miſchungsmethode beruht; er bringt ſeinen Apparat auf eine Temperatur, welche die der Luft um 5° — 6° übertrifft und unternimmt dann den Verſuch. So lange nun die Temperatur der Umgebung geringer iſt als die des Apparates, mußte jener Wärme mitgetheilt werden, ſo wie aber ſeine Temperatur während des Verſuches unter die der Luft fällt, bekommt er Wärme von derſelben. Befindet ſich nun der Apparat eben ſo lange in jenem als in dieſem Zuſtande, ſo müſſen beide Wirkungen ſich aufheben und das Reſultat rein zurücklaſſen. Das vorzüglichſte Mittel, dieſem Wärmeverluſte an die Umgebung vorzu-

beugen, dürfte wohl das ſeyn, die Maſſen und Temperaturen der Körper ſo zu wählen, daß ſie nach der Miſchung die Temperatur der atmoſphäriſchen Luft annehmen. Zur näheren Beſtimmung der hierzu nöthigen Maſſen und Temperaturen wird aber ein vorläufiger Verſuch nothwendig ſeyn. Daß man die Miſchung ſchnell vornehmen muß, iſt klar. Auch verſteht es ſich von ſelbſt, daß man bei der Beſtimmung der Temperatur der Flüſſigkeit ſowohl, als des zu prüfenden Körpers ſehr genau verfahren müſſe. Es iſt darum nothwendig, die Flüſſigkeit fleißig umzurühren, um ihre Temperatur allenthalben gleich zu erhalten und ſie dann an mehreren Stellen zu unterſuchen. Der feſte zu prüfende Körper ſoll der Flüſſigkeit eine möglichſt große Oberfläche darbieten. Er wird am beſten in einem Bade von beſtimmter Temperatur, z. B. im ſiedenden Waſſer, Öhl oder Queckſilber erwärmt, und ſo lange darin gelaſſen, bis man Grund hat, eine durchaus gleiche Erwärmung desſelben vorauszuſetzen. Beim Herausnehmen wird es leicht geſchehen, daß ſich eine Schichte der Badflüſſigkeit an ihm anhängt; die ſo mitgenommene Maſſe ſoll durch einen vorläufigen Verſuch beſtimmt und dann in Rechnung gebracht werden.

Die Formel für das Verhältniß der Capacitäten des betreffenden Körpers und der Flüſſigkeit iſt bekanntlich

$$\frac{C}{c} = \frac{m(\tau - t)}{M(T - \tau)} \quad \ldots . (N)$$

wo C die Capacität, M die Maſſe, T die Temperatur des wärmeren Körpers iſt, c m t dasſelbe für den kälteren bedeuten, τ aber die Temperatur der Miſchung bezeichnet.

Iſt die Capacität des Gefäßes, worin die Miſchung gemacht wird, γ, μ ſeine Maſſe und t ſeine Temperatur, ſo hat man

$$M\,C\,(T - \tau) = (m\,c + \mu\,\gamma)\,(\tau - t).$$

Iſt endlich das Gewicht der dem erwärmten Körper anhängenden Flüſſigkeit $= m_1$, ihre Capacität c_1 und ihre Temperatur T, ſo iſt

$$(M\,C + m_1\,c_1)\,(T - \tau) = (m\,c + \mu\,\gamma)\,(\tau - t) \ldots\ldots (O).$$

34. Die Abkühlungsmethode fordert, daß man den zu unterſuchenden Körpern eine gleich große und mit gleichem Strahlungsvermögen begabte Oberfläche ertheile und ihn in demſelben Mittel ruhig erkalten laſſe. Dulong und Petit, welche auch dieſe Methode mit der größten Sorgfalt angewendet haben, wählten eine

kleine, ſehr dünne ſilberne Kugel als Gefäß, in welches der abzukühlende Körper kam, und ließen die Abkühlung in verdünnter Luft vor ſich gehen. Es iſt aber weſentlich, daß die Hülle durch ihr Leitungsvermögen nur einen ſehr geringen Einfluß auf das Reſultat ausübe; darum muß ſie ſehr wenig Maſſe haben, das Ausſtrahlungsvermögen ſoll ſehr klein und darum die Oberfläche fein polirt ſeyn, und endlich ſoll die Abkühlung ſehr langſam vor ſich gehen, welches wieder fordert, daß die Temperaturdifferenz zwiſchen dem abkühlenden Körper und der Luft ſehr gering (5°—10°) ſey.

Zur Berechnung der Capacitäten nach dieſem Verfahren kann man die Formel

$$T = Am^{-at}$$

anwenden, welche für kleine Temperaturdifferenzen hinreichend genaue Reſultate gibt. Da hier a die Abkühlungsgeſchwindigkeit bezeichnet und dieſe mit der Zeit t, der Capacität c, der Dichte d und dem äußeren Leitungsvermögen h im verkehrten Verhältniſſe ſtehen muß, ſo wird

$$T = Am^{-\frac{t}{\mu dch}} \text{ oder } \mu dch = \frac{t}{\log A - \log T}.$$

Für einen anderen Körper erhält man eben ſo $\mu_1 d_1 c_1 h_1 = \frac{t_1}{\log A_1 - \log T_1}$ weil aber der Natur des Verſuches gemäß $T = T_1$, $\mu_1 = \mu$, $h = h_1$, $\log A = \log A_1$ iſt, ſo hat man

$$\frac{dc}{d_1 c_1} = \frac{t}{t_1} \; .... \; (P).$$

35. Die drei angeführten Methoden zur Beſtimmung der Wärmecapacität der Körper laſſen ſich zwar unbeſchränkt auf feſte und tropfbare Körper anwenden, jedoch dürfte in delicaten Fällen die Miſchungsmethode den anderen vorzuziehen ſeyn. Wirklich haben auch Dulong und Petit, die anerkannten Meiſter in der Behandlung der Wärmephänomene, dieſe Methode zur Beſtimmung der Capacitäten bei verſchiedenen Temperaturen angewendet und ihr dadurch gleichſam das Wort geſprochen. Für gasförmige Stoffe iſt dieſe Methode die einzige anwendbare, jedoch bedarf ſie einer kleinen Modification. Es handelt ſich bei ſolchen Körpern darum, durch eine Gasportion dem Waſſer eine Temperatur zu ertheilen, welche durch ein ferneres Unterhalten des Gaszufluſſes nicht mehr erhöht wird,

und bei der demnach die Wärmeabgabe von Seite des Gaſes an das Waſſer dem Wärmeabfluſſe vom Waſſer an die Luft gleich ſeyn muß. Bei dieſer Unterſuchung kommt es vorzüglich darauf an, einen ganz gleichförmigen Gasſtrom, den man völlig in ſeiner Macht hat, durch das Waſſer zu leiten und die ſtationäre Temperatur des letzteren ſehr genau zu beſtimmen. Die hierzu paſſenden Mittel haben Laroche und Bérard bei ihrer wichtigen Arbeit über die Capacität der Gaſe gebraucht, von der nun die Rede ſeyn ſoll.

36. Das Gefäß, welches das zu erwärmende Waſſer enthält und den eigentlichen Calorimeter abgibt, iſt in Fig. 181 abgebildet; das Gas wurde durch eine Schlangenröhre geleitet und kam aus einem Gaſometer, der in Fig. 182 dargeſtellt iſt und folgende Einrichtung hat: Das Gas, um welches es ſich handelt, iſt in der Blaſe *A* enthalten und die Blaſe ſelbſt befindet ſich im Ballon *B*, communicirt aber mit einer Röhre *C* und durch dieſelbe gelangt das Gas an ſeinen Beſtimmungsort. Um das Gas in einem beſtändigen Strome aus der Blaſe zu vertreiben, iſt der Ballon *B* durch die Röhre *D*, die mit einem Hahn *a* verſchloſſen werden kann, mit der Flaſche *E* in Verbindung, die nebſt der genannten Communication noch zwei andere *b* und *c* hat. Das Gefäß *F* hat am Deckel zwei Öffnungen, wovon ſich eine mit einem Pfropf luftdicht ſchließen läßt, während durch die andere, ebenfalls luftdichte, eine beiderſeits offene Röhre geht, deren unteres Ende *d* bis nahe an den Hals des Gefäßes reicht.

Wird dieſes Gefäß mit Waſſer gefüllt, während *E* und *B* Luft enthalten und hierauf mittelſt des Pfropfes geſchloſſen, ſo beginnt dieſes Waſſer, ſobald die Hähne *b* und *a* geöffnet werden, mit einer der conſtanten Druckhöhe *de* entſprechenden Geſchwindigkeit in das Gefäß *E* hinabzufließen, es verdrängt demnach die Luft aus dieſem Gefäße, treibt ſie nach *B* und veranlaßt ſo einen vermehrten Druck auf die Blaſe, durch welchen nun das Gas gezwungen wird, durch *C* zu entweichen. Von da geht es durch ein über 1^m langes Stück dieſer Röhre, welches mit einer weiteren, von ſiedheißen Waſſerdünſten erfüllten umgeben iſt, und von da gelangt es in das Gefäß Fig. 181. Um aber das einmal durch dieſes Gefäß geleitete Gas abermals zur Fortſetzung des Verſuches brauchen zu können, wird es von der Schlangenröhre in eine zweite Blaſe geleitet, welche ſich unter gleichen Umſtänden mit der vorhin genannten befindet. Zum beſſeren Verſtehen der ganzen Einrichtung dient der Grundriß des

ganzen Apparates (Fig. 183). *E* und *E'* ſind die Gefäße der zwei Gaſometer, wie jene in Fig. 182 durch dieſelben Buchſtaben bezeichneten, *B* und *B'* die zwei Ballons, und *A* und *A'* die zwei Blaſen, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t* ſind Hähne, welche an den aus der Zeichnung erſichtlichen Röhren angebracht ſind. Man denke ſich nun die Blaſe *A* mit dem Gas gefüllt, den Ballon *B* Luft enthaltend, während *A'* leer iſt und *B'* Waſſer enthält. Werden die Hähne *m*, *o*, *r*, *s* geöffnet und der Gaſometer in Thätigkeit geſetzt, ſo vertreibt das Waſſer die Luft aus *E* und dadurch das Gas aus der Blaſe *A* durch die Röhre, welche in *GH* mit der Hülle verſehen iſt, die vom Keſſel *l* ſiedheiße Waſſerdünſte erhält, und gelangt ſo in das Gefäß *K* mit der Spiralröhre, wo es abgekühlt wird. Aus dieſem Gefäße dringt es durch die fernere Röhre und den Hahn *r* in die Blaſe *A'*, ſchwellt dieſelbe und treibt ſo aus dem Ballon *B'* das Waſſer nach *E'*, durch eine bis auf den Boden dieſes Gefäßes reichende Röhre (wie *c* in Fig. 182). Das zuletzt in dieſem Gefäße enthaltene Waſſer kann durch den Hahn *u* ablaufen. Iſt auf ſolche Weiſe alles Gas in *A'* geſammelt, ſo werden die Hähne *m*, *o*, *r*, *s* geſchloſſen und dafür *t*, *q*, *p*, *n* geöffnet, damit das Gas abermals aus *A'* durch *GH* nach *K*, und von da wieder durch die Hahnöffnung *p* nach *A* zurückkehren kann.

Auf dieſem Wege erhielt man bei einem Luftdrucke von 0ᵐ.76 und übrigens gleichen Umſtänden durch folgende Gaſe die beigeſetzten ſtationären Temperaturen:

Atmoſphäriſche Luft . . .	15°.734
Hydrogengas	14.214
Kohlenſäuregas	19.800
Oxygengas	15.365
Stickſtoffoxydgas	21.246
Kohlenwaſſerſtoffgas . . .	24.435
Kohlenoxydgas	16.270

37. Mittelſt dieſes Verfahrens war man wohl im Stande, die Capacität der Gaſe unter einander zu vergleichen, aber ihr Verhältniß zu dem des Waſſers konnte man doch nicht ausmitteln. Es mußte zu dieſem Zwecke die Wärmemenge beſtimmt werden, welche ein Waſſerſtrom, der durch die Schlangenröhre des Calorimeters ging, demſelben in einer beſtimmten Zeit mittheilte. Die Beſtimmung dieſer Wärmemenge ließ ſich durch zwei Mittel erlangen, und zwar

durch Berechnung der Abkühlungsgeſchwindigkeit des bereits zur ſtationären Temperatur gebrachten Calorimeters, oder durch Beſtimmung der Temperaturerhöhung, die ein beſtimmtes Luftvolumen dem Calorimeter ertheilt.

Heißt A der Unterſchied zwiſchen der Temperatur des Calorimeters und der Luft, C die Wärmemenge, welche der Calorimeter in der Zeit t, a diejenige, welche er für die Temperaturdifferenz $= 1°$ in einer Zeiteinheit verlieren würde, ſo iſt

$$C = aAt \text{ , oder } a = \frac{C}{At}.$$

Hat der Calorimeter, nachdem die Luft aufgehört hat durch ſeine Schlangenröhre zu ſtrömen, in der Zeit t die Temperatur B angenommen, ſo iſt

$$\log A = \log B + \frac{at}{m}.$$

Setzt man für a den vorhergehenden Werth, ſo iſt

$$C = Am\,(\log A - \log B).$$

Da nun die im Calorimeter enthaltene Wärmemenge, das Waſſer und die Wärmecapacität des Calorimeters ſelbſt, ſo wie das in einer gegebenen Zeit durch die Schlangenröhre ſtreichende Gasquantum bekannt iſt, ſo iſt es leicht zu berechnen, um wie viel die Luftmaſſe $= 1$ von $100° C$ eine Waſſermaſſe $= 1$ von beſtimmter Temperatur zu erwärmen im Stande iſt.

Zum Behufe des zweiten oben angegebenen Mittels mußte das Volumen und die Temperatur der Luft beſtimmt werden, welche die Temperatur des Calorimeters um eine beſtimmte Anzahl von Graden zu erhöhen vermag. Um den Wärmeabfluß nicht in Rechnung bringen zu dürfen, wurde das 33 erwähnte Rumford'ſche Mittel angewendet und der Calorimeter vorläufig um ſo viel unter die Temperatur der Luft erkaltet, als er nachher über dieſelbe ſtieg. Iſt μ die Maſſe des im Calorimeter enthaltenen Waſſers, c ſeine Capacität, t ſeine urſprüngliche und τ ſeine ſpätere Temperatur, $\mu_{,}\ c_{,}$ die Maſſe und Capacität der feſten Theile des Calorimeters, v das Gasvolumen, x ſeine Capacität und δ ſeine urſprüngliche Temperatur; ſo beträgt der Wärmeverluſt von Seite des Gaſes $\left(\delta - \frac{t+\tau}{2}\right) v\,x$, der Wärmegewinn von Seite des Calorimeters $\mu\,c\,(\tau - t) + \mu_{,}\,c_{,}\,(\tau - t)$,

mithin iſt

$$v\,x\left(\delta-\frac{t+\tau}{2}\right)=\mu c(\tau-t)+\mu_1 c_1(\tau-t)$$

woraus x leicht gefunden wird.

38. Um die Capacität eines Gaſes bei einem verſchiedenen Drucke zu beſtimmen, kann man ſich desſelben Verfahrens bedienen, welches vorhin beſprochen wurde, nur iſt es da nothwendig, das Gas einem verſchiedenen Drucke unterwerfen zu können. Laroche und Bérard haben auch dieſe Unterſuchung, aber nur mit atmoſphäriſcher Luft angeſtellt, weil ſie vorausſetzen zu können glaubten, es müſſe das Verhalten der übrigen Gaſe dem der atmoſphäriſchen Luft ähnlich ſeyn. Dieſe Beſchränkung auf atmoſphäriſche Luft geſtattete ihnen aber von dem Apparate, Fig. 183, die Ballons $B\,B'$, ſo wie die Blaſen $A\,A'$ wegzulaſſen und gleich die Luft des Gaſometers $E\,E'$ in den Calorimeter zu treiben. Zur Erhaltung eines größeren Druckes erhielt das Aufſatzgefäß des Calorimeters eine längere Zwiſchenröhre und der ganze Apparat geſtaltete ſich wie Fig. 184 zeigt. An die Hähne u und v ſind zwei Röhren angelöthet, die ſich in eine einzige vertical aufwärts ſteigende münden und mit dem Gefäße M in Communication ſtehen, ſo daß die Höhe des oberen Randes dieſes Gefäßes über den Röhren bei u und v den Druck auf das Gas beſtimmt. Im Übrigen läßt ſich dieſer Apparat wie der vorige brauchen und bedarf demnach keine weitere Erläuterung.

39. Der Apparat Fig. 182 iſt auch zur Beſtimmung der Capacität der Dünſte geeignet. Laroche und Bérard machten dieſe Beſtimmung mit Waſſerdampf, leiteten aber nicht dieſen allein durch die Schlangenröhre, ſondern mit Dünſten imprägnirte Luft von der Art, daß die Dünſte weder beim Eintritt noch beim Austritt aus dem Calorimeter das Maximum ihrer Spannkraft hatten. Man erhielt da allerdings ein von der Capacität der Dünſte und der Luft abhängiges Reſultat; allein man war im Stande, die Dunſtmenge aus ihrer Spannkraft, und demnach auch die Menge der reinen Luft zu berechnen und ſo den Einfluß der Dünſte iſolirt darzuſtellen.

40. Alle bisher erwähnten Mittel geben nur die Capacität der Gaſe bei conſtantem Drucke an. Bekanntlich ſoll man die Capacität derſelben auch bei conſtantem Volumen kennen. Bis jetzt konnte man derlei Verſuche nur für atmoſphäriſche Luft anſtellen, und es iſt S. 342 gezeigt worden, wie Clément und Desormes

das Verhältniß der Capacität derſelben bei conſtantem Drucke zu der bei conſtantem Volumen beſtimmt haben, woraus ſich dann leicht die Capacität für ein conſtantes Volumen berechnen läßt. Für andere Gaſe haben wohl neueſtens Larive und Marcet dasſelbe leiſten wollen, ohne daß es ihnen aber gelungen wäre, die Beiſtimmung der Phyſiker für die Reſultate ihrer Arbeit gewinnen zu können, weil man die Art ihrer Unterſuchung nicht für zuläſſig erkennen konnte. Sie haben nämlich nach und nach mehrere Gaſe unter gleichem Volumen und übrigens gleichen Umſtänden auf eine gewiſſe, ſcharf beſtimmte Temperatur gebracht, und die Zeit der Erkaltung oder Erwärmung beſtimmt, mithin eigentlich das 34 angeführte Verfahren auf Gaſe ausgedehnt. Allein Dulong hat gezeigt, daß ſich dieſes Verfahren auf Gaſe nicht anwenden laſſe, weil die Wärmemenge, welche das Gefäß, worin ſich das Gas befand, abſorbirt oder abgibt, gegen die ganze vom Gaſe abgegebene oder aufgenommene Wärmemenge zu groß iſt, und die Erkaltungsgeſchwindigkeit bei flüſſigen Körpern überhaupt nicht blos von ihrer Maſſe und Capacität, ſondern auch von der Beweglichkeit ihrer kleinſten Theile abhängt, eine Eigenſchaft, die ſich nicht in Rechnung bringen läßt.

41. Glücklicher Weiſe bedarf man gar keinen directen Verſuch zur Beſtimmung der Capacität der Gaſe unter conſtantem Volumen, indem ſich dieſe Größe für alle Gaſe aus der bekannten Capacität unter conſtantem Druck und ihrem Verhältniſſe zu der Capacität unter conſtantem Volumen berechnen läßt, letzteres Verhältniß aber aus akuſtiſchen Unterſuchungen ſich ergibt. Sucht man nämlich die Geſchwindigkeit des Schalles in einem Gaſe, entweder unmittelbar (S. 365), oder aus der Tonhöhe, die eine Gasſäule von beſtimmter Länge gibt (S. 368), und vergleicht dieſe mit der nach Newton's Formel (S. 340) berechneten, ſo erhält man das geſuchte Verhältniß l. Denn iſt a dieſe Geſchwindigkeit nach der Erfahrung, a_1 dieſelbe nach Newton's Formel, ſo hat man (S. 343)

$$a = a_1 \sqrt{l} \text{ oder } l = \frac{a^2}{a_1^2},$$

mithin wenn C die Capacität unter conſtantem Drucke bedeutet, die Capacität c unter conſtantem Volumen

$$C = c \cdot l = c \cdot \frac{a^2}{a_1^2}.$$

Zur Ausmittelung der Schallgeſchwindigkeit in einem Gaſe aus der Tonhöhe einer Gasſäule iſt aber nothwendig, die Länge der tönenden Gasſäule genau zu kennen, und dieſe Kenntniß kann man ſich nicht mit der Schärfe verſchaffen, wie ſie zu dem gegenwärtigen Gebrauche nothwendig iſt (S. 374), darum thut man beſſer, das Verhältniß dieſer Geſchwindigkeit im Gaſe zu der in der Luft aus der Tonhöhe, welche dieſelbe Pfeife gibt, zu ſuchen und daraus l zu berechnen. Beziehen ſich wieder a und A, l und L auf die Luft und auf das betreffende Gas, und iſt D die Dichte des letzteren in Bezug auf die Dichte der erſteren, ſind ferner t und T die Temperaturen beider Verſuch, ſo hat man

$$a^2 : A^2 = (1 + 0.00375\,t)\; l : (1 + 0.00375\,T)\;\frac{L}{D},$$

und in dieſer Proportion iſt L die einzige Unbekannte.

42. Wird die Schallgeſchwindigkeit in der Luft oder in einem Gaſe bei einem ſehr verſchiedenen Luftdrucke durch Verſuche gefunden und das jedesmalige Reſultat mit dem Ergebniſſe aus Newton's Formel verglichen, ſo erhält man für jede ſolche Vergleichung den Werth von l und L. Dieſes Verfahren lehrt, daß das Verhältniß der Capacitäten in der genannten zweifachen Beziehung vom Drucke unabhängig ſey.

43. Es läßt ſich auch durch Verknüpfung der Naturgeſetze, welche ſich in einer mathematiſchen Form darſtellen laſſen, mit gewiſſen naturgemäßen Hypotheſen auf mathematiſchem Wege ein Ausdruck für die Capacität einer Luft- oder Dampfmaſſe in der zweifachen Beziehung, von welcher vorher die Rede war, finden.

Heißt man die Dichte eines Gaſes bei der Temperatur t nach dem hunderttheiligen Queckſilberthermometer $=\sigma$, den Druck, welcher das Maß ihrer Expanſivkraft iſt, h, ſo hat man

$$h = b\,\sigma\,(1 + \alpha t) \;\ldots\; (a),$$

wobei b eine von der Natur des Gaſes abhängige Größe, $\alpha = 0.00375$ iſt. Heißt ferner q die Wärmemenge, um welche das Gas bei der Temperatur t und dem Drucke h mehr enthält, als bei einem anderen willkührlich gewählten Druck und Temperatur, ſo iſt q eine Function von h, σ und t, oder weil dieſe Größen mittelſt obiger Gleichung zuſammenhängen, eine Function (f) von h und σ, ſo daß man hat

$$q = f\,(h, \sigma) \;\ldots\; (b).$$

Der Ausdruck $\frac{dq}{dt}$ iſt ſehr nahe der ſpecifiſchen Wärme des Gaſes gleich, und zwar, wenn darin nur h als veränderlich betrachtet wurde, der ſpecifiſchen Wärme unter einerlei Volumen, und wenn nur σ als veränderlich behandelt wurde, derſelben unter einerlei Druck. Aus (b) hat man zuerſt

$$dq = \frac{dq}{dh}\, dh + \frac{dq}{d\sigma} . d\sigma,$$

mithin

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{dq}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt},$$

oder wenn man die Capacität unter demſelben Druck C, unter demſelben Volumen c nennt:

$$\frac{dq}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = c; \quad \frac{dq}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = C.$$

Aber aus (a) iſt

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{a\sigma}{1+at}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{ah}{1+at},$$

mithin

$$C = -\frac{dq}{d\sigma} \cdot \frac{a\sigma}{1+at}, \quad c = \frac{dq}{dh} \cdot \frac{ah}{1+at} \ldots (c),$$

und wenn man $\frac{C}{c} = l$ ſetzt:

$$\sigma \frac{dq}{d\sigma} + lh . \frac{dq}{dh} = 0.$$

Integrirt man dieſe Gleichung, ſo erhält man als allgemeinen Ausdruck

$$q = \varphi\left(\frac{h^{\frac{1}{l}}}{\sigma}\right) \text{ oder } q = \varphi\left(b h^{\frac{1}{l}-1} (1+\alpha t)\right) ..(d),$$

wo φ eine willkührliche Function bezeichnet. Eine ſpecielle Form davon iſt

$$l \log \sigma - \log h = q \ldots . (e).$$

Aus (d) folgt

$$h = \sigma^l \psi(q) \text{ oder mittelſt } (a)\ 1+\alpha t = \frac{1}{b} \sigma^{l-1} \psi(q) ..(Q),$$

wo ψ wieder eine willkührliche Function bedeutet.

44. Wenn zwei Gaſe, die ſich nicht chemiſch mit einander verbinden, aus einem Zuſtande des Gleichgewichtes, wo ſie nach Maßgabe ihrer Dichten über einander gelagert waren, in den anderen, wo ſie gleichförmig mit einander gemengt ſind, übergehen; ſo bemerkt man weder eine Erhöhung noch eine Verminderung ihrer Temperatur, mithin weder eine Wärmeentwicklung noch eine Wärmeabſorption. Erhöht man ihre Temperatur um 1°, ſo braucht man dazu gleich viel Wärme, es mag die eine oder die andere Art ihres Gleichgewichtes Statt finden. Sind demnach M und m die Maſſen ſolcher Gaſe, C und c ihre Wärmecapacitäten, c' die Capacität ihres Gemenges, ſo braucht man zur Erhöhung ihrer Temperatur um 1° im erſten Zuſtande des Gleichgewichtes die Wärmemenge $MC + mc$, im zweiten $(M+m)c'$, und man hat

$$MC + mc = (M+m)\,c' \ldots (f).$$

Durch dieſe Gleichung wird man in den Stand geſetzt, aus den bekannten Capacitäten der Beſtandtheile eines Gasgemenges und ihrem quantitativen Mengungsverhältniſſe die Capacität des Gemenges zu finden. Eine ähnliche Gleichung findet man, wenn man für die Capacitäten bei conſtantem Drucke die bei conſtantem Volumen ſetzt. Heißen letztere C_v, c_v, c'_v, ſo iſt eben ſo wie vorhin

$$MC + mc_v = (M+m)\,c'_v.$$

Setzt man $\frac{C}{C_v} = L$, $\frac{c}{c_v} = l$, $\frac{c'}{c'_v} = l'$,

ſo hat man aus (f)

$$MLC_v + mlc_v = (M+m)\,l'c'_v.$$

Hat l für jedes Gas einen anderen Werth, ſo wird die Wärmecapacität jedes Gaſes durch eine andere Potenz von h ausgedrückt, und es iſt l' für ein Gasgemenge nicht mehr vom Drucke unabhängig, wenn dieſes auch für einfache Gaſe gilt. Daß ſich bei den Verſuchen mit atmoſphäriſcher Luft dieſe Größe von h ſcheinbar unabhängig zeigte, könnte auch davon herkommen, daß die Werthe von c für beide Beſtandtheile derſelben wenig von einander verſchieden ſind.

45. Der Exponent des Verhältniſſes der Capacitäten eines Gaſes in der zweifachen Beziehung, von welcher oben die Rede war, iſt immer größer als 1, wenn man die Capacität unter conſtantem Volumen zur Einheit annimmt, mithin auch die Capacität un-

ter conſtantem Drucke größer als die unter conſtantem Volumen. Hier liegt der Grund, warum beim Comprimiren eines Gaſes Wärmeentwicklung eintritt. Die ſo ausgeſchiedene Wärmemenge würde vom Gas wieder abſorbirt, wenn man es das vorige Volumen einnehmen ließe. Der genannte Exponent l um 1 vermindert, d. h. $l-1$ iſt das Maß des thermometriſchen Effectes, den die durch eine Compreſſion von $\frac{1}{267}$ hervorgebrachte Wärmemenge bei conſtantem Volumen und 0° C erzeugt; denn wird eine Gasmaſſe von 0° C auf 1° C erwärmt, ſo dehnt ſie ſich um $0.00375=\frac{1}{267}$ des urſprünglichen Volumens aus. Heißt die Wärmemenge, wodurch man dieſes Gas bei conſtantem Volumen von 0° C auf 1° C gebracht hätte, $=1$, ſo iſt die zu derſelben Erwärmung mit Änderung des Volumens nothwendige Wärmemenge $=l$, und daher $l-1$ jene Wärmemenge, welche zur Ausdehnung des Gaſes verwendet wurde, und die ſich demnach bei einer dieſer Ausdehnung gleichen Compreſſion entwickelt.

46. Da nach Laroche und Bérard die Capacität unter conſtantem Druck für alle chemiſch einfachen Gaſe gleich groß iſt, und nach Dulong auch das Verhältniß der Capacitäten unter conſtantem Drucke und Volumen für dieſe Gaſe denſelben Werth hat; ſo wird durch eine gleiche Compreſſion dieſer Gaſe eine gleiche Wärmemenge entwickelt werden, und die dadurch erzeugte Temperaturerhöhung muß daher ebenfalls gleich ſeyn.

Zuſammengeſetzte Gaſe erwärmen ſich bei einer beſtimmten Compreſſion zwar ungleich, allein dieſe Ungleichheit kann beſtehen, wenn auch die abſoluten entwickelten Wärmemengen für alle gleich groß ſind, denn ſie kann von der Verſchiedenheit der Capacitäten unter conſtantem Volumen herrühren. Dieſes wird ſchon daraus wahrſcheinlich, daß die Erwärmung deſto größer wird, je kleiner die Capacität iſt, aber völlig gewiß aus dem Umſtande, daß, wenn man aus der Vorausſetzung der Gleichheit der bei einer Compreſſion entwickelten Wärmemenge für alle Gaſe die Capacität verſchiedener zuſammengeſetzter Gaſe berechnet, man Reſultate findet, die ſich mit den durch directe Verſuche gefundenen recht wohl vertragen.

Sind C und c die Capacitäten der atmoſphäriſchen Luft und irgend eines zuſammengeſetzten Gaſes unter conſtantem Drucke, $C_{,}$ und $c_{,}$ dieſelben Größen bei conſtantem Volumen, und T und t die einer beſtimmten Compreſſion entſprechende Temperaturerhöhung von 0° C angefangen; ſo iſt

$$C = C_1 (1 + T);\; c = c_1 (1 + t).$$

Hat man nun $C_1 : c_1 = t : T$, ſo iſt $c_1 = \frac{C_1 T}{t}$, und $c = \frac{C_1 T}{t} (1 + t)$.

Legt man nun die Capacität C der atmoſphäriſchen Luft als Einheit zum Grunde, ſo iſt $C = 1$, mithin

$$c_1 = \frac{T}{t},\; c = \frac{T(1 + t)}{t(1 + T)}.$$

Für öhlbildendes Gas iſt $t = 0.240$, ferner $T = 0.421$, mithin $c_1 = 1.754$, $c = 1.530$. Verſuche geben $c_1 = 1.754$, $c = 1.553$.

47. Die Kenntniß des Werthes von l ſetzt uns in den Stand, mittelſt der vorher aufgeſtellten Formeln die Temperaturerhöhung zu berechnen, welche ein Gas durch eine beſtimmte Compreſſion erfährt. Man hat nämlich

$$h = \sigma^l \psi(q);\; 1 + \alpha t = \frac{1}{b} \sigma^{l-1} \psi(q).$$

Ändert ſich h, t und σ und gehen ſie in h_1, t_1 und σ_1 über, ſo wird

$$h_1 = \sigma_1{}^l \psi(q);\; 1 + \alpha t_1 = \frac{1}{b} \sigma_1{}^{l-1} \psi(q),$$

und hieraus, weil nun $\frac{1}{\alpha} = 266.67$, oder nahe 267 iſt:

$$\frac{h_1}{h} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^l;\; t_1 = (267 + t)\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{l-1} - 267^\circ \ldots (S).$$

$t_1 - t$ gibt die der Compreſſion $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ entſprechende Temperaturänderung an. Setzt man für ein einfaches Gas eine fünffache Verdichtung voraus, wie man ſie mit atmoſphäriſcher Luft im pneumatiſchen Feuerzeuge annehmen muß, wenn ſich Schwamm entzünden ſoll, ſo hat man: $\sigma_1 = 5\sigma$, und $t_1 = (267 + t)\, 5^{0.421} - 267$, oder $t_1 - t = 258^\circ + 0.97\, t$.

Demnach iſt dieſe Temperaturerhöhung deſto größer, von einer je höheren Temperatur man ausgeht.

48. Es iſt klar, daß die vorhergehenden Gleichungen (d) die Frage, um deren Beantwortung es ſich handelt, zu unbeſtimmt beantworten, indem ſie die Function φ enthalten. Die wahre Beſtimmung dieſer Function iſt aber nur durch eine hypothetiſche Vorausſetzung über

die Verbindung zwiſchen dem Zuwachſe der Wärme und der ihr entſprechenden Temperaturänderung möglich. Nimmt man mit Laplace und den meiſten Phyſikern an, dieſe Zuwüchſe ſeyen den Temperaturen proportional, ſo muß die Function φ in Bezug auf die in ihr enthaltene Variable vom erſten Grade ſeyn und die Gleichung für q erhält die Form

$$q = A + B\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) h^{\frac{1}{l} - 1} \ldots (h),$$

wo A und B willkührliche Conſtanten ſind. Sucht man daraus die Werthe von C und c, ſo bekommt man:

$$C = B h^{\frac{1}{l} - 1}\,;\; c = \frac{1}{l} B h^{\frac{1}{l} - 1} \ldots (R).$$

Laroche und Bérard haben für atmoſphäriſche Luft bei einem Luftdrucke von $0^m.76$ gefunden $C = 0.2669$. Setzt man dieſen Druck $= H$, ſo wird

$$\frac{0.2669}{H^{\frac{1}{l} - 1}} = B \text{ und daher}$$

$$C = 0.2669 \left(\frac{H}{h}\right)^{1 - \frac{1}{l}}\,;\; c = \frac{0.2669}{l} \left(\frac{H}{h}\right)^{1 - \frac{1}{l}}.$$

Heißt m die Wärmemenge, welche eine Maſſeneinheit Luft verliert, wenn ihre Temperatur um τ^0 vermindert wird, ſo iſt

$$m = 0.2669\, \tau \left(\frac{H}{h}\right)^{1 - \frac{1}{l}}.$$

Sind m_1, h_1 dieſelben Größen für eine Luftmaſſe, wie m, h für die bisher betrachtete, ſo iſt

$$m_1 = 0.2669\, \tau \frac{h_1}{h} \left(\frac{H}{h_1}\right)^{1 - \frac{1}{l}},$$

mithin

$$\frac{m}{m_1} = \left(\frac{h}{h_1}\right)^{\frac{1}{l}}.$$

49. Die vorhin gemachte Vorausſetzung verlangt zugleich, daß die Capacitäten für verſchiedene Temperaturen dieſelben ſeyen, denn nur unter dieſer Bedingung ſind die Wärmezuwüchſe den Temperaturen proportionirt; allein dieſe Vorausſetzung iſt ſchon für ſich wenig wahrſcheinlich, nimmt man aber noch dazu, daß nach Dulong

und Petit die Capacität der Metalle mit ihrer Temperatur wächſt, ſo möchte dieſes wohl auch für andere, wenigſtens für feſte und tropfbare Körper der Fall ſeyn, wenn man auch annehmen wollte, daß Gaſe, welche der Wirkung der Wärme kein Hinderniß in den Weg ſetzen, für alle Temperaturen eine gleiche Wärmecapacität beſitzen. Indeß hat ſelbſt die Gleichung (*d*) ein ſpecielles Integrale von der Form $q = l \log \frac{\sigma}{h}$, aus welchem hervorgeht, daß der Werth von q bei demſelben Druck im arithmetiſchen Verhältniſſe zunimmt, wenn σ im geometriſchen wächſt, und man kann daher die Expanſivkraft eines Gaſes, welche bei der Temperatur x gleich a iſt, bei der Temperatur $x + 1$ gleich an, bei der Temperatur $x + 2$ gleich an^2, und allgemein bei der Temperatur $x + y$ gleich an^y ſetzen. Demnach müßte man den Fundamentalabſtand eines Thermometers nicht nach arithmetiſchem, ſondern nach geometriſchem Verhältniſſe theilen. Behält man die 100theilige Abtheilung bei, und bedenkt, daß bei der Temperatur von 100° die Expanſivkraft eines Gaſes 1.375 a, bei 200° hingegen $(1.375)^2 a$ iſt, ſo muß die der Temperatur t (nach dem geometriſch getheilten Thermometer) entſprechende Expanſivkraft $a\,(1.375)^{\frac{t}{100}} = e_t$ ſeyn. Daraus findet man:

$$\log e_t = \log a + \frac{t}{100} \log 1.375 \text{ und } t = 723.06\,(\log e_t - \log a).$$

Für eine andere Temperatur τ hat man eben ſo

$$\tau = 723.06\,(\log e \;\; - \log a),$$

mithin

$$t - \tau = 723.06\,(\log e_t - \log e_\tau),$$

woraus man erſieht, daß die Differenzen der Temperaturen den Differenzen der Logarithmen der Expanſivkräfte proportionirt ſind, wie es obiges Integrale verlangt. Der Einführung ſolcher Thermometergrade würde wohl die größere Schwierigkeit der Theilung längere Zeit im Wege ſtehen, doch würde man ohne Zweifel über dieſes hinausgehen, wenn einmal ihre Nothwendigkeit vollkommen erwieſen wäre.

Die Tafel XXIII enthält ein reichhaltiges Verzeichniß der Wärmecapacitäten.

B. Gleichgewicht der Wärme mit den in Körpern vorhandenen Kräften.

50. Die Wärme wirkt durch ihre abſtoßende Kraft der Anziehung, welche die materiellen Theile der Körper auf einander ausüben, beſtändig entgegen. Wird einem Körper Wärme mitgetheilt, ſo erfolgt eine Entfernung ſeiner kleinſten Theile von einander, bis die Anziehung, mit welcher ſie auf einander wirken, der abſtoßenden Kraft gleich iſt, und der Erfolg dieſer Wärmemittheilung iſt entweder eine Volumenvergrößerung oder eine Änderung des Aggregationszuſtandes.

51. Die Größe der durch Erwärmung bewirkten Ausdehnung der Körper iſt ſchon früher angegeben und zugleich gezeigt worden, wie man ſie mißt; es bliebe nur noch übrig, die ausdehnende Kraft mit der dazu erforderlichen Wärmemenge und anderen mechaniſchen Kräften zu vergleichen. Zu dieſem Geſchäfte reichen aber unſere bisherigen Kenntniſſe noch nicht hin, denn dazu müßte die jeder Temperatur nach dem gewöhnlichen Luftthermometer entſprechende Wärme und das Geſetz bekannt ſeyn, nach welchem ſich die den kleinſten Theilen der Körper eigene Anziehung bei vermehrter Entfernung dieſer Theile von einander ändert. Man kann höchſtens Vorausſetzungen über dieſe Puncte machen, und ſehen, wie die daraus gezogenen Folgerungen mit den Ergebniſſen der Erfahrung übereinſtimmen. Nimmt man an, daß die Anziehung der kleinſten Körpertheilchen mit zunehmender Volumenvergrößerung abnimmt, wie dieſes naturgemäß zu ſeyn ſcheint, ſo muß durch einen gleichen Wärmezuſatz eine deſto größere Ausdehnung erfolgen, je mehr Wärme bereits ſchon zugeſetzt worden iſt. Schitko, der dieſem Gegenſtande eine beſondere Aufmerkſamkeit geſchenkt hat, ſubſtituirt der vermehrten Ausdehnung einen vermehrten Wärmeeinfluß, und ſucht demnach die Größe, um welche die gewöhnlichen Wärmegrade vermehrt werden müſſen, um die geſammte Ausdehnung des Körpers ſo zu erhalten, wie ſie die Erfahrung gibt. Bezeichnet α ein ſolches Wärmeincrement, und würde das Volumen eines Körpers, welches bei 0° C gleich ν iſt, in der Vorausſetzung eines conſtanten Widerſtandes für den erſten Wärmegrad in $\nu(1+\mu)$ übergehen, ſo müßte es bei nachlaſſendem Widerſtande in $\nu(1+\mu)(1+\mu)^{\alpha} = \nu(1+\mu)^{1+\alpha}$ übergehen. Eben ſo müßte dieſes Volumen für zwei Wärmegrade $\nu(1+\mu)^{2+\alpha}(1+\mu)^{3\alpha} = \nu(1+\mu)^{2+4\alpha}$,

und allgemein für n Wärmegrade $v(1+\mu)^{n+\alpha n^2}$ ſeyn. Nennt man dieſes Volumen V, ſo iſt für $v=1$

$$\log V = (n+\alpha n^2) \log (1+\mu).$$

Für n_1 Wärmegrade

$$\log V_1 = (n_1+\alpha n_1^2) \log (1+\mu),$$

mithin

$$\log (1+\mu) = \frac{\log V_1}{n_1+\alpha n^2} = \frac{\log V}{n+\alpha n^2},$$

und

$$\alpha = \frac{n \log V_1 - n_1 \log V}{n^2_1 \log V - n^2 \log V_1}.$$

52. Nun handelt es ſich noch um Beſtimmung der Werthe von n oder der Grade des Thermometers, welches dieſen Vorausſetzungen zum Grunde liegt. Daß dieſes nicht das gemeine Luft- oder Queckſilberthermometer ſey, iſt klar; denn für erſteres iſt, weil die Luft der ausdehnenden Kraft der Wärme keinen ungleichen Widerſtand entgegenſetzt, $\alpha=0$ und $V=v(1+\mu)^n$, und es müßte der Logarithmus des Volumens der Luft in dem Verhältniſſe der Wärmegrade wachſen, während doch nach dieſem Thermometer die Volumina und die Wärmegrade einander gerade proportionirt ſind. Zur Beſtimmung von n nach dem gemeinen Luftthermometer ſetze man die Grade des letzteren, welche n entſprechen, gleich l und man erhält, weil für die Luft $\mu=0.00375=b$ iſt:

$$1+bl=(1+\mu)^n \text{ oder } \log (1+bl) = n \log (1+\mu), \text{ und}$$

$$n = \frac{\log (1+0.00375\, l)}{0.00172556}.$$

Für ein Queckſilberthermometer (deſſen Wärmegrade nach der 100theiligen arithmetiſchen Scale mit t bezeichnet werden, und wo $\mu=0.00018018$ iſt) erhält man auf demſelben Wege:

$$n = \frac{-1+\sqrt{[(1+153.7850506) \log (1+0.00018018\, t)]}}{0.00599839}.$$

53. Berechnet man nun die Ausdehnung der Körper, für welche μ aus Verſuchen bekannt iſt, indem man n und α und daraus V ſucht, ſo findet man eine ungemeine Übereinſtimmung der Reſultate mit der Erfahrung, ſo daß man nicht anſtehen darf, ſie in jedem Falle, wo directe Erfahrungen mangeln, den empiriſchen Reſultaten zu ſubſtituiren, ja

es ſcheint ſogar, als dürfte man ſie wirklichen Erfahrungswerthen vorziehen, weil ſie von den bei Verſuchen unvermeidlichen Störungen frei ſind. Schitko hat für mehrere Körper obige Werthe von α und μ berechnet, und uns dadurch in den Stand geſetzt, für dieſelben die Ausdehnung leicht zu finden. Es iſt nämlich für

Queckſilber:	$\alpha = 0.0029991969$;	$\log(1+\mu) = 0.0000780101$
Waſſer:	$\alpha = 2.53970053$;	$\log(1+\mu) = 0.000001296$
Eiſen:	$\alpha = 0.01116219$;	$\log(1+\mu) = 0.00000399$
Kupfer:	$\alpha = 0.00336067$;	$\log(1+\mu) = 0.000007317$
Zink:	$\alpha = 0.0046175$;	$\log(1+\mu) = 0.0000116$
Glas:	$\alpha = 0.07722248$;	$\log(1+\mu) = 0.000000764$

54. Bei ſteigender Erwärmung feſter oder tropfbarer Körper tritt eine Änderung des Aggregationszuſtandes ein, und gleichzeitig mit derſelben eine Bindung der Wärme. Es hält nicht ſchwer, die beim Schmelzen eines feſten oder beim Verdünſten eines tropfbaren Körpers gebundene Wärme nach der Miſchungsmethode zu finden. (Naturlehre II. Th., II. Abſch., II. Kap. C.) Denn man erhält als die zum Schmelzen einer Maſſeneinheit eines Körpers, z. B. des Eiſes, nöthige Wärmemenge x durch die Gleichung

$$x = \frac{M(T-t) - mt}{m},$$

wo m die Eismaſſe, M die damit gemiſchte Flüſſigkeit, T die Temperatur der letzteren vor dem Verſuche, t dieſelbe nach der Miſchung bedeutet. Eben ſo findet man die zur Dunſtbildung nöthige Wärmemenge x durch

$$x = \frac{M(T-t_{,}) - m(t_{,}-t)}{M},$$

wo T und M die Temperatur und Maſſe der Dünſte, t und m die Temperatur und Maſſe der tropfbaren Flüſſigkeit, und $t_{,}$ die Temperatur der Miſchung bedeuten.

55. Bis jetzt kann man weder die Schmelz- noch die Siedhitze nach blos theoretiſchen Principien beſtimmen, ſondern muß zur Erforſchung derſelben einen beſonderen Verſuch anſtellen. Eben ſo wenig kann man die Dichte und Expanſivkraft der Dünſte einer Maſſe a priori beſtimmen. Nur nach Schitko's vorher erwähnter Anſicht läßt ſich hierin Einiges leiſten. Er nimmt an, die Körper beſchränken die Spannkraft der Wärme um ſo mehr, je weiter ſie bereits durch die-

ſelbe ausgedehnt worden ſind. Heißt nun der ſo gebundene (latent gewordene) Theil der Wärme β, mithin der bis n Wärmegrade gebundene $n\beta^2$, ſo iſt die Wärmemenge, welche der Körper über einen beſtimmten Punct aufnimmt, $n + \beta n^2$. Die fühlbare Wärme wird blos durch n beſtimmt und es iſt demnach das Verhältniß dieſer zur geſammten in dem Körper enthaltenen Wärmemenge $n : n + \beta n^2 = 1 : 1 + \beta n$. Wird demnach das ſpecifiſche Bindungsvermögen eines Körpers P genannt, ſo iſt die der Temperatur n entſprechende ſpecifiſche Wärmemenge $P(1 + \beta n)n$, und die Wärmemenge für die Maſſe m gleich $Pm(1 + \beta n)n = Q$. Für die Temperatur n_1 desſelben Körpers von der Maſſe m_1 erhält man: $Q_1 = Pm_1(1 + \beta n_1)n_1$. Werden dieſe mit einander gemengt, ſo erhält das Gemenge die Wärmemenge $Q + Q_1 = P\{(m + \beta n)n + m_1(1 + \beta n_1)n_1\}$, und wenn das Gemenge die Temperatur N annimmt:

$$Q + Q_1 = P(m + m_1)(1 + \beta N)N,$$

und daher

$$m(n + \beta n^2) + m_1(1 + \beta n_1)n_1 = (m + m_1)(N + \beta N^2),$$

und hieraus, für $n = 0$

$$\beta = \frac{mN - m_1(n_1 - N)}{m_1(n_1^2 - N^2) - mN^2}.$$

Für Waſſer iſt $\beta = 0.00275038$.

Wird die Wirkung der Wärme auf eine Flüſſigkeit nach den Geſetzen continuirlich wirkender Kräfte beurtheilt, und daher dem Producte aus ihrer Menge in ihrer Geſchwindigkeit (Temperatur) proportionirt geſetzt, und bedacht, daß die eine Flüſſigkeit durchſtrömende Wärme zur Dunſterzeugung verwendet wird; ſo hat man, wenn die Dichte der Dünſte für die Temperatur der Siedhitze n und die Temperatur n_1 durch 1 und d bezeichnet wird:

$$1 : d = Qn^2 : Q_1 n_1^2 \text{ oder } d = \frac{Q_1 n_1^2}{Qn^2}.$$

Da aber in demſelben Verhältniſſe mehr Dampf erzeugt wird, als derſelbe Wärme bindet, und dieſes in deſto geringerem Maße geſchieht, bei je höherer Temperatur er ſich bildet, ſo wird die wahre Dichte des Dampfes

$$d = \frac{Q_1 n_1^2}{Qn} \cdot \frac{n_1}{n} = \frac{Q_1 n_1^3}{Qn^3} \cdot = \frac{Q_1 n_1^3}{A},$$

wenn man $Q\,n^3 = A$ ſetzt. Da aber $Q_{,} = n_{,} + \beta\, n_{,}^3$ iſt, ſo wird

$$d = \frac{n_{,}^4 (1 + \beta\, n_{,})}{A} \text{ oder } \log d = 4 \log n_{,} + \log (1 + \beta\, n_{,}) - \log A.$$

Man findet für Waſſer $\log A = 7.7021180$.

Die ſpecifiſche Spannkraft des Dampfes e iſt dem Volumen proportionirt, welches derſelbe bei jeder Temperatur einnimmt; darum iſt, wenn man vom Siedpuncte n ausgeht, die Spannkraft für den Siedpunct $= 1$ geſetzt:

$$e = \frac{(1 + \mu)\, n_{,}}{1.375} \text{ oder } \log e = n_{,} \log (1 + \mu) - \log 1.375,$$

oder weil $\log (1 + \mu) = 0.0017256$, $\log 1.375 = 0.1383027$ iſt:

$$\log e = 0.0017256\, n_{,} - 0.1383027.$$

Die abſolute Spannkraft E des Dampfes iſt das Product aus der ſpecifiſchen in ſeine Dichte d, mithin $E = d\,e$.

Setzt man aber in dieſe Gleichung, nachdem ſie zu einer logarithmiſchen gemacht iſt, für d und e die vorhin gefundenen Werthe, ſo erhält man:

$$\log E = 4 \log n_{,} + \log (1 + \beta\, n_{,}) + 0.0017256\, n_{,} - 7.8404207.$$

Dieſe Formel gibt Reſultate, die ſelbſt mit den neueſten und genaueſten von Dulong nahe übereinſtimmen, und verdient darum, wenn auch noch manche genauere Erörterung der bei ihrer Entwicklung gemachten Annahmen zu wünſchen übrig bleibt, die Aufmerkſamkeit der Phyſiker in hohem Grade.

56. Durch Entziehen der Wärme kann man gasförmige Körper tropfbar, tropfbare flüſſig machen. Dabei geht eine Annäherung der Theile gegen einander vor ſich, und dadurch wird ihre Kraft ermächtiget, den Körper in einen anderen Zuſtand der Aggregation zu bringen. Ein mechaniſcher Druck bewirkt dieſelbe Annäherung der Theile an einander und auch eine Änderung des Aggregationszuſtandes. Unter den Phänomenen dieſer Art ſind die von Faraday an Gaſen hervorgebrachten Liquefactionen beſonders wichtig, und darum werth, beſonders beſprochen zu werden.

Will man ein Gas durch Condenſiren tropfbar machen, ſo wird vor allem eine Glasröhre gewählt, welche ohne Sprünge und Knöpfe, gleichförmig dick und ſtark genug iſt, um den nöthigen Druck auszuhalten, und in dieſelbe jener Stoff gegeben, welcher durch Er-

hitzung das zu condenſirende Gas liefert. Sollte es keinen ſolchen geben und die Gaserzeugung nur durch chemiſches Aufeinanderwirken zweier Stoffe bewirkt werden können, ſo kommen dieſe beiden Stoffe zugleich in die Glasröhre, werden aber durch ein Platinblech von einander getrennt. Die Glasröhre, welche nur etwa acht Zoll lang zu ſeyn braucht, wird vor dem Einfüllen der betreffenden Stoffe unter einem Winkel von 130° — 140° gebogen, am offenen Ende in eine Spitze ausgezogen, und nach dem Einfüllen feſt zugeſchmolzen. Nachdem dieſes geſchehen iſt, bringt man ſie mit dem Scheitel des Winkels, den ſie bildet, nach aufwärts gekehrt, an einen ſicheren Platz, erhitzt den Stoff, welcher das Gas liefern ſoll, oder läßt die zwei Stoffe, aus deren Aufeinanderwirken es ſich entwickeln ſoll, auf einander wirken, und deckt den Schenkel, worin ſich das Gas durch ſeinen eigenen Druck verdichten ſoll, mit naſſem Löſchpapier. Will man zugleich den Druck erfahren, unter welchem das Gas tropfbar wird, ſo ſchmilzt man in dieſe Röhre eine offene Thermometerröhre ein, ſchließt ſie an dem hervorragenden Ende luftdicht, nachdem man einen Queckſilberpfropf hineingebracht hat, und beurtheilt aus dem Stande dieſes Pfropfes nach der Condenſation den Druck, welcher darauf gewirkt hat.

Oft wird die durch Condenſation des Gaſes erzeugte Flüſſigkeit von dem in der Röhre rückſtändigen feſten Soff eingeſaugt, kann aber durch neues Erhitzen wieder ausgetrieben werden. Es iſt klar, daß man ſolche Verſuche nur mit Vorſicht, mit einer Maske vor dem Geſicht anſtellen ſoll, und die Glasröhre, worin ſich die condenſirte Flüſſigkeit befindet, ſtets mit großer Behutſamkeit behandeln müſſe.

Die Tafel XXIV enthält den Druck, bei welchem die nebenſtehenden Gaſe tropfbar werden, die Tafel XXV hingegen die Schmelz- und Siedhitze vieler Körper.

Drittes Kapitel.

Erwärmung der Erde durch die Sonne.

57. Die Erwärmung, welche einer beſtimmten Stelle der Erde durch die Sonne zu Theil wird, läßt ſich als ein gewöhnliches Problem der Wärmemittheilung eines wärmeren Körpers an einen minder warmen behandeln. Heißt v die Temperatur, welche der betref-

fenden Stelle der Erde in der Zeit zukommt, welche durch den Stundenwinkel t vom Mittag an gerechnet, bezeichnet wird, und V die Sonnenwärme, die dieſem Stundenwinkel t entſpricht, ſo wird die Wärmeänderung in dem Zeittheilchen dt durch

$$dv = a\,(V - v)\,dt$$

ausgedrückt, wo a einen beſtändigen Factor bezeichnet. Durch Integriren wird

$$v = a e^{-at}\,(\int V e^{at} dt + C),$$

wenn man mit C die willkührliche Conſtante bezeichnet. Die Größe V hängt offenbar von dem Winkel, unter welchem die Sonnenſtrahlen einfallen, d. h. von der Sonnenhöhe ab. Nimmt man die den ſenkrecht einfallenden Strahlen entſprechende Erwärmung als Einheit an, und heißt die Entfernung der Sonne vom Pol ω, die des Zenithes von demſelben hingegen γ, ſo hat man:

$$V = \cos\omega\cos\gamma + \sin\omega\sin\gamma\cos t,$$

oder wenn man $\cos\omega\cos\gamma = M$, $\sin\omega\sin\gamma = N$ ſetzt:

$$V = M + N\cos t.$$

Dadurch geht obige Formel über in

$$v = a e^{-at}\{\int M e^{at} dt + \int N e^{at}\cos t\,dt + C\},$$

oder weil $\int e^{at}\cos t\,dt = \frac{e^{at}}{1+a^2}(\sin t + a\cos t)$ iſt:

$$v = M + \frac{aN}{1+a^2}(\sin t + a\cos t) + a C e^{-at}.$$

Zur Beſtimmung von C hat man für einen beſtimmten Stundenwinkel τ, welcher durch Erfahrung beſtimmt werden muß und mit der Jahreszeit wechſelt, ein Maximum der Erwärmung; mithin für dieſen Winkel $\frac{dv}{dt} = 0$. Dieſe Gleichung gibt

$$-a^2 C e^{-a\tau} + \frac{aN}{1+a^2}(\cos\tau - a\sin\tau) = 0$$

$$\text{und } C = \frac{\cos\tau - a\sin\tau}{(1+a^2)\,a}\,.\,e^{a\tau} N.$$

Setzt man dieſen Werth in die vorhergehende Gleichung, ſo wird

$$v = M + \frac{N}{1+a^2}\Big[(\cos\tau - a\cos\tau)\,e^{a(\tau-t)} + a\sin t + a^2\cos t\Big]$$

oder wegen $V = M + N\cos t$,

$$v = V + \frac{Ne^{-at}}{1+a^2}\Big((\cos\tau - a\sin\tau)\, e^{a\tau} - (\cos t - a\sin t)\, e^{at}\Big).$$

Für $t = \tau$ bezeichnet v die größte Tageswärme $= v_\tau$, und für dieſe iſt daher $v_\tau = V$. Weil aber V ſelbſt eine Function von t iſt, ſo bezeichne man die dem Werthe $t = \tau$ entſprechende mit V_τ, und es iſt

$$v_\tau = V_\tau.$$

Für den Auf- und Untergang der Sonne iſt $V = o$, mithin

$$M + N\cos t = o;\ \cos t = -\frac{M}{N};\ \sin t = \mp\frac{1}{N}\sqrt{(N^2 - M^2)}.$$

Heißt die halbe Tageslänge, durch den Stundenwinkel ausgedrückt, λ, ſo iſt $\cos\lambda = -\frac{M}{N}$, und für die dem Aufgange und Untergange entſprechende Erwärmung $v_{-\lambda}$ und v_λ

$$v_{-\lambda} = \frac{1}{1+a^2}\Big((\cos\tau - a\sin\tau)\, Ne^{a(\lambda+\tau)} + M - a\sqrt{(N^2 - M^2)}\Big)$$

$$v_\lambda = \frac{1}{1+a^2}\Big((\cos\tau - a\sin\tau)\, Ne^{a(\tau-\lambda)} + M + a\sqrt{(N^2 - M^2)}\Big)$$

58. Um die Größe a zu beſtimmen, ſuche man für C aus der kleinſten Tageswärme einen zweiten Werth, und ſetze ihn dem vorher gefundenen gleich, woraus ſich dann eine Gleichung ergibt, aus der ſich a finden läßt. Tritt nämlich das Minimum der Wärme für den Stundenwinkel $-\delta$ ein, ſo hat man

$$d.\frac{v\delta}{d\delta} = o, \text{ oder}$$

$$o = -a^2\, Ce^{a\delta} + \frac{aN}{1+a^2}(\cos\delta + a\sin\delta),$$

und mittelſt obigem Werthe von C

$$(\cos\delta + a\sin\delta)\, e^{-a\delta} = (\cos\tau - a\sin\tau)\, e^{a\tau},$$

oder

$$a = \frac{1}{\tau+\delta}\log\left(\frac{\cos\tau + a\sin\tau}{\cos\delta - a\sin\delta}\right).$$

Setzt man $a = \text{tang}\,\alpha$, ſo wird

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\tau+\delta}\log nat\,.\,\alpha\,\frac{\cos(\delta-\alpha)}{\cos(\tau+\alpha)},\ \text{oder}$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2.30258}{\tau+\delta}\log\left(\frac{\cos(\delta-\alpha)}{\cos(\tau+\alpha)}\right).$$

Für einen Tag, wo die niedrigſte Temperatur um 6^h Morgens, die höchſte um $2^h\ 40'$ Nachmittags eintritt, iſt $\tau = \frac{40^\circ}{180}\pi$, $\delta = \frac{\pi}{2}$, und

$$a = \frac{2.30258}{(\frac{2}{9}+\frac{1}{2})\pi}\log\frac{a}{\cos 40^\circ - a\sin 40^\circ};\ a = 1.0385.$$

59. Der Temperatur v liegt die den ſenkrecht einfallenden Sonnenſtrahlen entſprechende Wärme als Einheit zum Grunde. Um ſie auf die gewöhnlichen Thermometergrade zu reduciren, nenne man $\varDelta$ und T die nach denſelben geſchätzte höchſte und niedrigſte Temperatur und ſetze:

$$\varDelta - T = m\,(v_\tau - v_{-\delta}).$$

Man hat aber auch $(v_\tau - v_{-\delta}) = (V_\tau - V_{-\delta})$, und daher

$$m = \frac{\varDelta - T}{V_\tau - V_{-\delta}}.$$

60. Bei dieſer ganzen Unterſuchung wurde auf den Wärmeverluſt keine Rückſicht genommen, den die Erde während der erwärmenden Einwirkung der Sonne erfährt. Man kommt aber auch, mit Berückſichtigung dieſes Umſtandes zu Ausdrücken von derſelben Geſtalt, wie die Vorhergehenden ſind, weil die Abkühlung ſo wie die Erwärmung eine Function des Wärmeunterſchiedes der Körper iſt.

61. Die mittlere Temperatur eines Tages iſt offenbar $\int\frac{v\,dt}{2\pi}$.,
wobei die Integration von einem Sonnenaufgang bis zum nächſtfolgenden zu nehmen iſt. Dieſe Integration läßt ſich aber nicht auf einmal vornehmen, weil v für den Tag eine andere Function als für die Nacht iſt, und man muß dieſes Integral als Summe zweier Integrale anſehen, deren ſich eines auf den Tag, das andere auf die Nacht bezieht. Für den Tag hat man

$$\int v\,dt = \int_{-\lambda}^{+\lambda}\left(M + \frac{aN}{1+a^2}(\sin t + a\cos t) + aCe^{-at}\right)dt =$$

$$= 2M\lambda + \frac{2a^2N}{1+a^2}\sin\lambda + C(e^{a\lambda} - e^{-a\lambda}),$$

oder weil $M + N\cos\lambda = 0$ iſt

$$\int v\,dt = \frac{2N}{1+a^2}(a^2\sin\lambda - (1+a^2)\lambda\cos\lambda) + C(e^{a\lambda} - e^{-a\lambda}).$$

Dieſes Integrale wollen wir mit $(\int v\,dt)$ bezeichnen.

Während der Nacht iſt in der Fundamentalgleichung $V=0$, und daher $dv = -av\,dt$, oder durch Integriren

$$v = \int v_\lambda\, e^{-a(t-\lambda)},$$

und daher das Integrale von $v\,dt$

$$\int v\,dt = \int v_\lambda\, e^{-a(t-\lambda)}\,dt = v_\lambda\, e^{a\lambda}\int e^{-at}\,dt.$$

Wird dieſes innerhalb der Grenzen $t=\lambda$ und $t=2\pi-\lambda$ genommen, und mit $[\int v\,dt]$ bezeichnet, ſo erhält man:

$$\left[\int v\,dt\right] = \frac{V_\lambda}{a}\left(1 - e^{-2a(\pi-\lambda)}\right),$$

oder wenn man für V_λ ſeinen Werth ſetzt:

$$\left[\int v\,dt\right] = \left(\frac{N}{a(1+a^2)}(a\sin\lambda - \cos\lambda) + Ce^{-a\lambda}\right)\left(1 - e^{-2a(\pi-\lambda)}\right).$$

Demnach wird der Ausdruck für die mittlere Tageswärme:

$$\frac{(\int v\,dt) + [\int v\,dt]}{2\pi} = \left\{\begin{array}{l}\frac{2a^2N}{2+a^2}\sin\lambda - 2N\lambda\cos\lambda + Ce^{a\lambda}(1-e^{-2a\pi}) \\ + \frac{N}{a(1+a^2)}(a\sin\lambda - \cos\lambda)(1-e^{-2a(\pi-\lambda)})\end{array}\right\}\frac{1}{2\pi}$$

62. Der Ausdruck für die mittlere Tageswärme $\int\frac{v\,dt}{2\pi}$ zeigt, daß man dieſelbe durch die Quadratur einer Curve finden kann, deren Abſciſſen die Werthe der Beobachtungszeit t, und deren Ordinaten die in derſelben beobachteten Temperaturen v ſind. Dieſe Curve durch eine einzige Gleichung auszudrücken, iſt aus dem oben angegebenen Grunde unmöglich, ſie muß immer als aus zwei verſchiedenen Curven, deren jede ein beſonderes Geſetz befolgt, beſtehend angeſehen werden. Tralles, von welchem die vorhergehende

Behandlung der in Rede ſtehenden Frage entlehnt iſt, betrachtet ſie aus vier paraboliſchen Bögen zuſammengeſetzt; den von ihm eingeſchlagenen Weg haben aber Hallſtröm und Kämtz weiter verfolgt und dem Ziele näher geführt.

63. Es ſey nun $CDEFG$ (Fig. 185) die Curve der täglichen Wärme, AB ſtelle die Dauer eines Tages (von 24 Stunden) vor und werde als Einheit angenommen, ſo daß man durch den Flächeninhalt $ACDEFGB$ die mittlere Wärme ſelbſt findet. C ſey ihr Anfangspunct, G ihr Endpunct, und die vier Bögen, welche zu verſchiedenen Parabeln gehören, aus denen die Wärmecurve zuſammengeſetzt iſt, ſeyen CD, DE, EF, FG. An den Puncten D, E und F haben dieſe Parabeln die kleinſte Krümmung und dieſe brauchen daher nicht beſonders ſcharf beſtimmt zu werden. Darum mag es erlaubt ſeyn, die durch D und F geführte Linie mit AB parallel anzunehmen. Man hat daher als Flächeninhalt der ganzen Curve

$$AB.AH - (\tfrac{2}{3}CH.HD + \tfrac{2}{3}GK.FK) + \tfrac{2}{3}DF.ME.$$

Weil aber $HC = KG$, $DH + FK = HK - DF$, mithin $\frac{2}{3}(CH . HD + GK . FK) = \frac{2}{3}HC(HK - DF)$, ferner $AH = AC + CH$; mithin $AB . AH = AB(AC + CH)$, endlich $ME + CH = EL - AC$ und $AB = 1$ iſt, ſo wird der Ausdruck für die mittlere Tageswärme v

$$v = AC + \tfrac{1}{3}CH + \tfrac{2}{3}DF(LE - AC).$$

Nennt man die größte Tageswärme T, die kleinſte t, ſo erhält man

$$v = t + \tfrac{1}{3}CH + \tfrac{2}{3}DF(T - t).$$

Aus Beobachtungen, die zu Paris, Halle und zu Åbo angeſtellt worden, fand Hallſtröm $AB : DF = 24 : 14$ oder $DF = \frac{14}{24}AB = \frac{7}{12}$ und glaubt annehmen zu müſſen, CH ſey eine Function von $(T - t)$. Er ſucht aus denſelben Beobachtungen den Werth von $\frac{T-t}{CH}$ und findet ihn für jeden Ort anders. Kämtz hingegen ſchlägt einen etwas anderen Weg bei der Benützung der Beobachtungen ein, und findet dadurch DF mit dem Stande der Sonne veränderlich, den Quotienten $\frac{T-t}{CH}$ für Leith und Padua gleich groß und zwar im Mittel $= 2.36$. DF findet er gleich $\frac{\alpha}{24}$, wo

α für jeden Monat einen anderen Werth erhält, und zwar für Jänner 10.1, Februar 14.0, März 13.0, April 15.0, Mai 13.5, Juni 12.7, Juli 13.0, Auguſt 13.0, September 12.0, October 10.9, November 8.4, December 7.3. Nimmt man dieſe Werthe als die wahren an, ſo erhält man für die mittlere Tageswärme

$$v = t + \frac{T-t}{7.08} + \frac{\alpha}{36}(T-t) = t + \left(0.141 + \frac{\alpha}{36}\right)(T-t)$$

wobei man den Coefficienten von $T-t$ für jeden Tag des Jahres eigens berechnen kann.

64. Man nimmt häufig das Mittel aus der größten und kleinſten Tagestemperatur als den Werth der mittleren Tageswärme ſelbſt an. Daß man dadurch zu keinem ganz genauen Reſultate gelange, zeigt obige Formel. Bezeichnet man die ſo gefundene mittlere Tagestemperatur mit v_1, ſo iſt

$$v_1 = \frac{T+t}{2};\ v = t + \left(0.141 + \frac{\alpha}{36}\right)(T-t)$$

mithin

$$v - v_1 = \left(\frac{\alpha}{36} - 0.359\right)(T-t)$$

und dieſe Größe bezeichnet die Correction, welche an den aus den Temperaturextremen gefundenen Tagestemperatur angebracht werden muß. Sie iſt nicht conſtant, weil α ſich von Tag zu Tag ändert. Der Coefficient $(T-t)$ wird für den 15ten eines jeden Monates nach Kämtz, wie folgt:

Jänner	— 0.081	Mai	+ 0.014	September	— 0.027
Februar	— 0.045	Juni	+ 0.016	October	— 0.062
März	— 0.015	Juli	+ 0.010	November	— 0.103
April	+ 0.005	Auguſt	— 0.006	December	— 0.151

65. Dem Vorhergehenden gemäß kann man aus den zwei Wärmeextremen eines Tages mittelſt einer Correction die mittlere Tageswärme finden. Allein wo man nicht ein beſonderes Maximum- und Minimumthermometer zu Gebote hat, fällt es ſchwer, dieſe Extreme zu erhalten, beſonders da ſie nicht immer zu derſelben Zeit eintreten. Darum zieht man es meiſtens vor, einige Male des Tages zu beobachten und aus den erhaltenen Daten das Mittel zu nehmen. Man erhält aber dadurch nie ein vollkommen richtiges Reſultat, ſondern es iſt zur Erlangung eines ſolchen immer nöthig, eine Cor-

rection an dem gefundenen Mittel anzubringen, die ſich von Tag zu Tag, und was das Schlimmſte iſt, oft auch noch von Ort zu Ort ändert. Am leichteſten ſcheint man zum Ziele zu gelangen, wenn man nach Brewſter's Rath täglich um 10 Uhr Vormittags und um 10 Uhr Abends beobachtet; denn das Mittel aus dieſen Beobachtungsdaten ſcheint nach Hallſtröm durch eine einfache allerorts gültige und nur von Monat zu Monat veränderliche Correction auf den wahren Werth gebracht werden zu können. Hallſtröm hat das Mittel, welches ſich aus Beobachtungen ergab, die zu Paris, Halle, Åbo um 10 Uhr Abends angeſtellt wurden, mit dem wahren Mittel verglichen und nahe gleiche Correctionswerthe gefunden. Dieſe Werthe ſind:

Monat	Correction	Monat	Correction
Jänner	+ 0°.01	Juli	— 0°.67
Februar	— 0.15	Auguſt	— 0.51
März	— 0.36	September	— 0.30
April	— 0.56	October	— 0.10
Mai	— 0.70	November	+ 0.04
Juni	— 0.74	December	+ 0.08

66. Es läßt ſich auch eine allgemeine Regel aufſtellen, wie man aus einer Anzahl Temperaturbeobachtungen, die an verſchiedenen Stellen angeſtellt wurden, die mittlere Temperatur beſtimmen kann. Aus dem Vorhergehenden iſt klar, daß man die mittlere Tageswärme kennt, wenn man im Stande iſt, die Curve der Temperaturveränderungen innerhalb eines Tages zu quadriren, und daß daher alle Kunſtgriffe, die man bei der Quadratur der Curven anzuwenden pflegt, auch hier von Nutzen ſeyn können. Auf einem ſolchen Kunſtgriffe beruht nun folgendes Verfahren: Es ſeyen v die Ordinaten, t die Abſciſſen der Curve des täglichen Ganges der Wärme, mithin die Area derſelben $\int v\,dt$, und man ſetzt:

$$v = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + \ldots\ldots$$

ſo daß man erhält für $t = 0$ bis $t = y$

$$\int v\,dt = ay + \tfrac{1}{2}by^2 + \tfrac{1}{3}cy^3 + \tfrac{1}{4}dy^4 + \ldots\ldots$$
$$= y\,(a + \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{3}cy^2 + \tfrac{1}{4}dy^3 + \ldots\ldots)$$

Betrachtet man nun die geſuchte Area als das Product zweier Größen y und v, ſo wird

$$v = a + \tfrac{1}{2} b y + \tfrac{1}{3} c y^2 + \tfrac{1}{4} d y^3 + \ldots\ldots$$

und das ganze Geſchäft lauft darauf hinaus, aus einigen innerhalb der Grenzen $t = 0$ und $t = y$ liegenden Werthen der Ordinaten der zu quadrirenden Curve v zu beſtimmen, ohne der Kenntniß der Coefficienten a, b, c, d ꝛc. zu bedürfen. Es ſeyen daher v_0, v_1 v_2, v_3, v_4 ꝛc. Ordinaten der Wärmecurve, die den Abſciſſen $t = 0$,

$t = \frac{1}{\alpha} . y$, $t = \frac{1}{\beta} . y^2$, $t = \frac{1}{\gamma} . y^3$ ꝛc. entſprechen, wo jede Größe α, β, γ größer als 1 iſt, und man kann immer Zahlen, wie A, B, C, D ꝛc. finden, welche ſo beſchaffen ſind, daß $A v_0 + B v_1$ $C v_2 + \ldots$ mit $a + \frac{1}{2} b y + \frac{1}{3} c y^2 + \frac{1}{4} d y^3 + \ldots$ identiſch wird. Es laſſen ſich da zwei Wege einſchlagen, indem man die Abſtände der Ordinaten v_0, v_1, v_2 ꝛc. als beſtimmt z. B. alle gleich groß annehmen oder ſie unbeſtimmt laſſen kann. Auf letzterem Wege, den Gauß zuerſt betrat, kommt man zu einem viel genaueren Reſultate und darum ſoll auch hier nur von dieſem die Rede ſeyn. Man kann aber dabei eine verſchiedene Anzahl von Abſciſſen annehmen und für jede die betreffende Größe α, β, γ ꝛc. beſonders beſtimmen. Wir wollen drei derſelben annehmen, ſo daß wir erhalten:

$$v_1 = a + \frac{1}{\alpha} . b y + \frac{1}{\alpha^2} . c y^2 + \ldots\ldots$$

$$v_2 = a + \frac{1}{\beta} . b y + \frac{1}{\beta^2} . b y^2 + \ldots\ldots$$

$$v_3 = a + \frac{1}{\gamma} . b y + \frac{1}{\gamma^2} . b y^2 + \ldots\ldots$$

ferner

$$B v_1 + C v_2 + D v_3 = (B + C + D)\, a + \left(\frac{B}{\alpha} + \frac{C}{\beta} + \frac{D}{\gamma}\right) b y$$
$$+ \left(\frac{B}{\alpha^2} + \frac{C}{\beta^2} + \frac{D}{\gamma^2}\right) c y^2 + \ldots.$$

mithin wegen

$$a + \tfrac{1}{2} b y + \tfrac{1}{3} c y^2 + \text{ꝛc.} = B v_1 + C v_2 + D v_3$$

$$B + C + D = 1$$
$$\frac{B}{\alpha} + \frac{C}{\beta} + \frac{D}{\gamma} = \tfrac{1}{2}$$
$$\frac{B}{\alpha^2} + \frac{C}{\beta^2} + \frac{D}{\gamma^2} = \tfrac{1}{3}$$
$$\frac{B}{\alpha^3} + \frac{C}{\beta^3} + \frac{D}{\gamma^3} = \tfrac{1}{4}.$$

. . . .

Eliminirt man aus den zwei erſten Gleichungen D, dann aus den ſo erhaltenen C und aus den dadurch erlangten B, und ſetzt

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = p;\ \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} = q;\ \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = r$$

ſo erhält man

$$\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}p + \tfrac{1}{2}q - r = 0$$
$$\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{4}p + \tfrac{1}{3}q - \tfrac{1}{2}r = 0$$
$$\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{5}p + \tfrac{1}{4}q - \tfrac{1}{3}r = 0$$

und hieraus

$$p = \tfrac{3}{2};\ q = \tfrac{3}{5};\ r = \tfrac{1}{20}.$$

Setzt man in obigen Gleichungen $\frac{1}{\alpha} = z$, ſo findet man:

$$z^3 - 12z^2 + 30z - 20 = 0$$

und daraus

$$z = 2 = z = \frac{10}{5 + \sqrt{15}},\ 2 = \frac{10}{5 - \sqrt{15}}.$$

Eine ganz übereinſtimmende Gleichung findet man für $\frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\gamma}$, ſo daß man ſetzen kann:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{5 - \sqrt{15}}{10},\ \frac{1}{\beta} = \tfrac{1}{2},\ \frac{1}{\gamma} = \frac{5 + \sqrt{15}}{10}$$

wobei die numeriſchen Werthe auch verwechſelt werden können. Mittelſt dieſer Werthe findet man endlich leicht:

$$B = \tfrac{5}{18},\ C = \tfrac{8}{18},\ D = \tfrac{5}{18}$$

und daher iſt die geſuchte Area der Curve

$$\frac{5v_1 + 8v_2 + 5v_3}{18}$$

und die Ordinaten v_1, v_2, v_3 entſprechen den Abſciſſen:

$$t_1 = \frac{5-\sqrt{15}}{10}.y = 0.1127017\,y$$

$$t_2 = \tfrac{1}{2}y \qquad = 0.5y$$

$$t_3 = \frac{5+\sqrt{15}}{10}y = 0.872983y.$$

Auf ähnliche Weiſe hätte man verfahren müſſen, wenn man ſtatt drei Abſciſſen deren nur zwei, oder vier, fünf ꝛc. gewählt hätte. Gauß hat alle numeriſchen Beſtimmungen bis auf ſieben Abſciſſen vorgenommen, wie folgt:

1) für zwei Abſciſſen

$$t_1 = 0.2113249, \quad B = \tfrac{1}{2}$$
$$t_2 = 0.7886751, \quad C = \tfrac{1}{2}$$

2) für drei Abſciſſen

$$t_1 = 0.1127017, \quad B = \tfrac{5}{18}$$
$$t_2 = 0.5 \quad\;\;, \quad C = \tfrac{8}{18}$$
$$t_3 = 1.8872983, \quad D = \tfrac{5}{18}$$

3) für vier Abſciſſen

$$t_1 = 0.0694318, \quad B = 0.1739274$$
$$t_2 = 0.3300095, \quad C = 0.3260726$$
$$t_3 = 0.6699905, \quad D = C$$
$$t_4 = 0.9305682, \quad E = B$$

4) für fünf Abſciſſen

$$t_1 = 0.0469101, \quad B = 0.1184634$$
$$t_2 = 0.2307653, \quad C = 0.2393143$$
$$t_3 = 0.5 \quad\;\;, \quad D = 0.2844444$$
$$t_4 = 0.7692347, \quad E = C$$
$$t_5 = 0.9530899, \quad F = B$$

5) für ſechs Abſciſſen

$$t_1 = 0.0337652, \quad B = 0.0856622$$
$$t_2 = 0.1693953, \quad C = 0.1803808$$
$$t_3 = 0.3806904, \quad D = 0.2339570$$
$$t_4 = 0.6193096, \quad E = D$$
$$t_5 = 0.8306047, \quad F = C$$
$$t_6 = 0.9662348, \quad G = B$$

6) für ſieben Abſciſſen

$$t_1 = 0.0254460, \quad B = 0.0647425$$
$$t_2 = 0.1292344, \quad C = 0.1398527$$
$$t_3 = 0.2970774, \quad D = 0.1909150$$
$$t_4 = 0.5 \quad\quad\;\; , \quad E = 0.2089796$$
$$t_5 = 0.7029226, \quad F = D$$
$$t_6 = 0.8707656, \quad G = C$$
$$t_7 = 0.9745540, \quad H = B.$$

67. Aus dieſen Werthen findet man nun leicht ſowohl die Zeit der Beobachtung für jede Anzahl derſelben von zwei bis ſieben, als auch die mittlere Temperatur nach den Ergebniſſen der Beobachtungen. Die Werthe von t geben nämlich die Beobachtungszeit, indem man ſie mit 24 als der Anzahl der Stunden in einem Tage multiplicirt und dazu die Stunde addirt, von wo man ausgeht, welche bei den hier in Rede ſtehenden Beobachtungen zugleich die Stunde des Sonnenaufganges iſt. So hätte man z. B. zur Zeit, wo die Sonne um 6 Uhr aufgeht, falls man mit zwei Beobachtungen ausreichen wollte, um $6 + 0.2113$ .... $\times 24 = 11.07^h$ und um 24.7^h oder um $0^h 42'$ des folgenden Tages zu beobachten. Man muß aber auch bei der Anwendung dieſer Methode bedenken, daß die Wärmecurve für den Tag anders ausfällt als für die Nacht und daß man daher eigentlich ſowohl für den Zeitraum vom Aufgang der Sonne bis zum Untergange derſelben beſonders, als für den vom Untergange bis zum Aufgange wieder beſonders die vorgeſchriebenen Beobachtungen anzuſtellen habe, wo für die Tagesperiode die Zeit der Gegenwart der Sonne über dem Horizont, für die Nachtperiode die der Abweſenheit der Sonne als Factor, der vorhin $= 24$ geſetzt wurde, anzunehmen iſt. So hätte man z. B. für die Zeit, wo die Sonne um 5^h auf- und um 7^h untergeht und wo man für den Tag und für die Nacht zwei Beobachtungen, alſo zuſammen innerhalb 24 Stunden vier Beobachtungen anzuſtellen Willens wäre, die Tagsbeobachtungen um $5 + 0.2113 \times 14 = 7.9^h = 7^h 54'$ F. und um $5 + 0.7887 \times 14 = 5^h$, die Nachtbeobachtungen aber um $7 + 0.2113 \times 10 = 9.1^h = 9^h 6'$ Abends und um $7 + 0.7887 \times 10 = 2^h. 54'$ Morgens anzuſtellen.

68. Außer der mittleren Tageswärme ſind noch der Gang der Wärme innerhalb eines Jahres, die mittlere Jahrestemperatur und die Extreme der Temperatur einer beſonderen Betrachtung werth.

Die mittlere Jahreswärme läßt ſich auf mathematiſchem Wege wie die mittlere Tagestemperatur beſtimmen, man kann ſie aber auch durch Benützung des Verfahrens kennen lernen, das S. 22 dargeſtellt und im Verlaufe dieſes Werkes ſchon öfters mit Vortheil benutzt worden iſt. Wir wollen das letztere Mittel um ſo lieber ergreifen, als es uns unter Einem in den Stand ſetzt, mit der mittleren Jahreswärme die Extreme der Temperatur während eines Jahres und den Gang der Wärme überhaupt darzuſtellen.

Denkt man ſich das Jahr unter der Geſtalt eines in 12 gleiche Theile eingetheilten Kreiſes, nennt die mittlere Jahrestemperatur V, die Zahl, welche den betreffenden Monat des Jahres bezeichnet, m, ferner p, q, a, b ꝛc. conſtante, erſt zu beſtimmende Größen; ſo hat man für die Temperatur v irgend eines Monates oder Tages im Jahre

$$v = V + p \sin(30^\circ . m + a) + q \sin(60^\circ m + b) + \ldots$$

wo man gleich bei dem dritten Gliede ſtehen bleiben kann. In dieſer Formel werden die Conſtanten durch die Gleichungen beſtimmt, welche S. 25 entwickelt wurden. Da V die mittlere Temperatur des Jahres bezeichnet, ſo hat man für den Fall, wo v dieſe Größe darſtellen ſoll, $v = V$ und darum als Ausdruck für die Zeit, wo die mittlere Jahreswärme in der Wirklichkeit vorhanden iſt:

$$0 = p \sin(30^\circ m + a) + q \sin(60^\circ m + b).$$

Die Zeit des Maximums oder Minimums der Temperatur, falls von jedem nur eines vorkommt, wie es außerhalb der Tropen der Fall iſt:

$$0 = p \cos(30^\circ m + a) + q \cos(60^\circ m + b).$$

69. Mehrere Gelehrte, wie z. B. Walbeck, Hallſtröm, Kämtz, Beſſel, haben für einzelne Orte der Erde die numeriſchen Coefficienten obiger Gleichung beſtimmt. Folgendes Verzeichniß enthält die Wärmegleichungen mit dieſen Coefficienten nach hunderttheiligen Graden und vom Anfang des Jahres an gerechnet:

1) Enontekis

$$v = -2^\circ.8625 + 16.62 \sin(30^\circ m + 251^\circ 59') + 1.0658 \sin(60^\circ m + 14^\circ 21')$$

Mittel am 28. April und 22. October, Max. am 26. Juli, Minim. am 20. Jänner.

2) Åbo

$$v = 4^\circ.33 + 10.863 \sin (30^\circ m + 247^\circ 66') + 0.776 \sin (60^\circ m + 64^\circ 48')$$

Mittel am 26. April und 19. October, Max. am 21. Juli, Minim. am 24. Jänner.

3) Chriſtiania

$$v = 5^\circ.3312 + 10.639 \sin (30^\circ m + 249^\circ 26') + 1.1865 \sin (60^\circ m + 44^\circ 29')$$

Mittel 3. Mai und 14. October; Max. 20. Juli; Minim. 17. Jänner.

4) Upſala

$$v = 5^\circ.3892 + 10.98 \sin (30 m + 251^\circ 23') + 0.5932 \sin (60^\circ m + 30^\circ 15')$$

Mittel 22. April und 18. October; Max. 21. Juli; Minim. 16. Jänner.

5) London

$$v = 9^\circ.33 + 7.407 \sin (30 m + 252^\circ.29') + 0.476 \sin (60^\circ m - 19^\circ 30')$$

Mittel 19. April und 18. October, Max. 17. Juli, Minim. 14. Jänner.

6) Paris

$$v = 10^\circ.70 + 7.763 \sin (30 m + 251^\circ 49') + 0.539 \sin (60^\circ m + 319^\circ 9')$$

Mittel 17. April und 17. October, Max. 22. Juli, Minim. 17. Jänner.

7) Mancheſter

$$v = 8^\circ.7025 + 6.718 \sin (30^\circ m + 249^\circ 46') + 0.5336 \sin (60^\circ m + 342^\circ 38')$$

Mittel 27. April und 23. October, Max. 27. Juli, Minim. 12. Jänner.

8) Turin

$$v = 11^\circ.685 + 11.156 \sin (30^\circ m + 252^\circ 41') + 1.0055 \sin (60^\circ m + 313^\circ 41')$$

Mittel 18. April und 26. October, Max. 27. Juli; Minim. 3. Jänner.

9) Padua

$$v = 12^\circ.3367 + 11.6865 \sin(30\,m + 245^\circ\,52')$$
$$+ 0.6382 \sin 60\,[(m + \tfrac{1}{2}) + 351^\circ\,17']$$

Mittel: 20 April und 15 October, Max. 26 Juli, Minim. 15 Jänner.

10) Rom

$$v = 15^\circ.4833 + 8.1333 \sin(30^\circ\,m + 245^\circ\,21')$$
$$+ 0.6825 \sin(60\,m + 356^\circ\,14')$$

Mittel: 1 Mai und 24 October, Max. 1 Auguſt, Minim. 16. Jänner.

11) Fort Sulivan (vereinigte Staaten 44° n. B.)

$$v = 5^\circ.45 + 11.449 \sin(30\,m + 243^\circ\,31')$$
$$+ 0.2729 \sin(60^\circ\,m + 331^\circ\,3')$$

Mittel: 26. April und 26. October, Max. 29. Juli, Minim. 24. Jänner.

12) Fort Johnſton. (Vereinigte Staaten Br. 34° 0′)

$$v = 19^\circ.2233 + 8.440 \sin 30\,(m + 250^\circ\,31')$$
$$+ 0.2705 \sin(60^\circ\,m + 18^\circ\,28')$$

Mittel: 21. April und 18. October, Max. 21. Juli, Minim. 18. Jänner.

13) Abushehr (am perſiſchen Meerbuſen Br. 28° 58′ 15″ n.)

$$v = 25^\circ.0317 + 9.3842 \sin(30\,m + 247^\circ\,27)$$
$$+ 0.8726 \sin(60\,m + 322^\circ\,20')$$

Mittel: 23. April und 22. October, Max. 18. Juli, Minim. 12. Jänner.

14) Capſtadt (33° 15′ ſ. Br.)

$$v = 19^\circ.1592 + 4.845 \sin(30\,m + 249^\circ\,38')$$
$$+ 0.7111 \sin(60\,m + 327^\circ\,43')$$

Mittel: 28. April und 21. October, Max. 4. Februar, Minim. 6. Juli.

Es iſt merkwürdig, daß die Größe a für alle Orte nahe denſelben Werth hat.

70. Die mittlere Jahrestemperatur läßt ſich bekanntlich durch

$$\tfrac{1}{12} \int v\,dm$$

ausdrücken, wenn die Integration von $m = 0$ bis $m = 12$ ausgedehnt wird. Wegen

$$v = V + p\sin(30^\circ m + a) + q\sin(60^\circ m + b)$$

wird aber

$$\tfrac{1}{12}\int v\,dm = \tfrac{1}{12}\left[Vm - \tfrac{1}{30}p\cos(30^\circ m + a) - \tfrac{1}{60}q(60^\circ m + b)\right]$$

und daher die mittlere Wärme

$$V - \tfrac{1}{360}p\cos a - \tfrac{1}{720}q\cos b$$

V iſt das gewöhnliche arithmetiſche Mittel und daher der Zuſatz die nöthige Correction, welche an dem ſo gefundenen Mittel angebracht werden ſoll. Sie iſt aber wenigſtens für Paris, London und Åbo ſo gering, daß man ſie wohl vernachläſſigen kann.

Quellen:

Fourier theorie de la chaleur. Paris 1822.

Poisson sur la distribution de la chaleur dans les corps solides im Journal de l'école polytech. tom. 12.

Poisson sur la chaleur royannante in Annal. de Chem. et de Phys. tom 23.

Dulong et Petit recherches sur la mesure de temperatures et sur les lois de la communication de la chaleur im Journal de l'école polytech. tom. 11.

Tralles über die Erwärmung der Erde von der Sonne in Abh. der k. Akad. der Wiſſenſchaften zu Berlin für 1818—1819.

Gauss Methodus nova integralium valorem per approximationem inveniendi. Götting. 1815 (Arch. in den Comment. soc. sc. Götting. tom. III. p. 39)

Hallſtröm über die Beſtimmung der mittleren Temperatur der Luft in Pogg. Ann. 4. 373.

Kämtz über denſelben Gegenſtand in Schweigg. J. 48. 1.

Derſelbe über den Gang der Temperatur im Jahre. Schweigg. J. 55. 375.

Sechster Abschnitt.

Magnetismus.

Erſtes Kapitel.

Kräfte, welche die Lage einer Magnetnadel beſtimmen.

1. Die Lage einer frei ſchwebenden Magnetnadel wird durch die Schwere derſelben und durch die Richtung der Kraft beſtimmt, mit welcher der Erdmagnetismus auf jedes magnetiſche Element derſelben wirkt. Iſt eine ſolche Nadel im Schwerpuncte aufgehängt und daher die Wirkung ihrer Schwere aufgehoben, ſo bleibt blos die magnetiſche Richtkraft übrig, und die Nadel muß eine Lage annehmen, in welcher ihre Axe mit der Reſultirenden zuſammenfällt, die aus der abſtoßenden und anziehenden Kraft des Erdmagnetismus hervorgeht.

2. Iſt AB (Fig. 186) eine Magnetnadel, a ein phyſiſcher Punct derſelben, welchem der freie Magnetismus ſüdlicher oder nördlicher Natur $=p$ einwohnet, und R die Kraft, welche aus der auf dieſen Punct wirkenden magnetiſchen Anziehung und Abſtoßung der Erde hervorgeht; ſo iſt die daraus für a entſpringende Wirkung $= Rp$. Ähnliche Wirkungen und zwar nach parallelen Richtungen, aber mit verſchiedenen Intenſitäten, ergeben ſich für jeden anderen Punct, und aus der Summe aller dieſer Wirkungen geht die Wirkung auf jene Hälfte der Nadel hervor, deren Magnetismus p bezeichnet. Heißt das Element, wozu a gehört, dm, ſo iſt die Wirkung auf dieſes Element $Rp\,dm$, und die auf die betreffende Hälfte der Nadel $\int Rp\,dm$, oder weil R für alle Theile der Nadel gleich iſt, $R\int p\,dm$. Die Kräfte, welche jedem Elemente zugehören, laſſen ſich zuſammenſetzen und geben wegen ihres Parallelismus gleich den Schwerkräften der Körper einen Mittelpunct, den man ſich als Angriffspunct der reſultirenden Kraft denken kann, die Magnetnadel mag was immer für eine Lage haben. Dieſer Punct heißt der Pol der Nadelhälfte.

Heißt a der veränderliche Abſtand eines Punctes der Nadel vom Aufhängungspuncte, und A der Abſtand des Poles von demſelben Puncte, ſo iſt das Moment aller magnetiſchen Kräfte der betreffenden Nadelhälfte in Bezug auf den Unterſtützungspunct ſowohl $R\int p\,a\,dm$ als $AR\int p\,dm$, und daher

$$A = \frac{\int p\,a\,dm}{\int p\,dm} \dots (A).$$

Für die andere Hälfte der Nadel findet man ein ähnliches Reſultat, und man kann ſich demnach jede ſolche Nadel als eine Linie von der Länge 2 A vorſtellen, an deren einem Ende die Kraft $\int p\,dm$, am anderen die Kraft $-\int p\,dm$ angebracht iſt.

3. Wird eine Magnetnadel um den Winkel σ aus der Lage ihres Gleichgewichtes gebracht, ſo ſtrebt ſie in dieſelbe wieder zurückzukehren. Die Kraft für eine Hälfte iſt $R \sin \sigma \int p\,dm$, ihr Moment $AR \sin \sigma \int p\,dm$, oder wenn man ſtatt A obigen Werth ſetzt, $R \sin \sigma \int p\,a\,dm$. Für die andere Hälfte gibt es eine ähnliche Kraft; beide wirken zuſammen, um eine Drehung hervorzubringen. Setzt man $\sin \sigma \int p\,a\,dm$ für eine Nadelhälfte $= \mu$, für die andere $\mu_{\prime}$, ſo wird die Summe der Momente, welche die Nadel zu drehen ſuchen,

$$R\,(\mu + \mu_{\prime}) \dots (B).$$

4. Es ſey A (Fig. 187) ein Pol einer Magnetnadel, B der andere und C der Unterſtützungspunct, der außerhalb ihres Schwerpunctes liegt, und man ſuche die Kräfte, welche auf die Nadel in der verzeichneten Lage wirken. Man denke ſich die ganze Kraft des Erdmagnetismus für die Nadelhälfte CA in A vereinigt, durch $AD = P$ die Richtung und Größe desſelben vorgeſtellt, ziehe die Verticale Ax und verlängere AB nach M, nenne $MAx = \alpha$, $DAx = i$, den Winkel, welchen die Ebene MAx mit DAx macht, β, und zerlege DA zuerſt in die mit Ax parallele AE und in die darauf ſenkrechte DE, und endlich letztere in eine in der Ebene MAx liegende FE und in eine auf derſelben ſenkrechte DF. Man hat demnach

$$\left.\begin{aligned} AE &= X = DA \cos i = P \cos i \\ DF &= Y = DE \sin \beta = P \sin i \sin \beta \\ FE &= Z = DE \cos \beta = P \sin i \cos \beta \end{aligned}\right\} \dots (C).$$

Zu dieſen vom Erdmagnetismus herrührenden Kräften kommt noch

die Einwirkung der Schwere. Iſt G der Schwerpunct der Magnetnadel, $GC = f$, $HCG = \gamma$ und das Gewicht der Nadel $= Q$, ſo wird jener Theil der Schwere, welcher ſenkrecht auf die Richtung der Nadel wirkt $= Q \sin(\alpha - \gamma)$ und ſein Moment in Beziehung auf C, $Qf \sin(\alpha - \gamma)$, der mit ihr parallele Theil hingegen $Q \cos(\alpha - \gamma)$. Aus der Zuſammenwirkung dieſer Kräfte geht die jedesmalige Lage des Gleichgewichtes der Nadel hervor.

5. Iſt die Nadel um eine horizontale Axe beweglich, wie eine gewöhnliche Neigungsnadel, und in der verzeichneten Lage AB im Gleichgewichte, ſo iſt wegen des Widerſtandes der Axe $Y = 0$, und die Kräfte, welche in dieſer Lage ſie zu drehen ſuchen, ſind 1) der auf AB ſenkrechte Theil von X oder $P \cos i \sin \alpha$ mit dem Momente $AP \cos i \sin \alpha$, wenn $A = AC$ geſetzt wird. 2) Der ebenfalls auf AB ſenkrechte Theil von Z oder $P \sin i \cos \beta \cos \alpha$ mit dem Momente $- AP \sin i \cos \beta \cos \alpha$, endlich 3) der auf AB ſenkrechte Theil der Schwere mit dem Momente $Qf \sin(\alpha - \gamma)$. Für den Fall des Gleichgewichtes muß daher ſeyn

$$PA(\cos i \sin \alpha - \sin i \cos \beta \cos \alpha) + Qf \sin(\alpha - \gamma) = 0,$$

oder wenn man $\frac{Qf}{PA} = c$ ſetzt:

$$\sin \alpha \cos i - \sin i \cos \beta \cos \alpha + c \sin(\alpha - \gamma) = 0.$$

Der Winkel α, welchen die magnetiſche Axe mit der Verticallinie macht, ergibt ſich hieraus alſobald, wie folgt:

$$\tan g\, \alpha = \frac{c \sin \gamma + \sin i \cos \beta}{\cos i + c \cos \gamma} \ldots . (D).$$

Befindet ſich die Nadel in der Verticalebene des magnetiſchen Meridians, ſo iſt $\beta = 0$, $\cos \beta = 1$, und daher

$$\tan g\, \alpha = \frac{c \sin \gamma + \sin i}{c . \cos \gamma + \cos i}.$$

In einer auf dem Meridiane ſenkrechten Ebene wird $\beta = 90°$ [und $\cos \beta = 0$, mithin

$$\tan g\, \alpha = \frac{c \sin \gamma}{c \cos \gamma + \cos i}.$$

Für eine vollkommen äquilibrirte, d. h. eine ſolche Nadel, deren Schwerpunct genau in der Axe liegt, iſt $f = 0$, mithin $c = 0$, und

$$\tan g\, \alpha = \frac{\sin i \cos \beta}{\cos i} = \tan g\, i \cos \beta.$$

Befindet ſie ſich in der Verticalebene des magnetiſchen Meridians, ſo iſt

$$\text{tang}\ \alpha = \text{tang}\ i \text{ und } \alpha = i.$$

In einer darauf ſenkrechten Ebene hat man

$$\text{tang}\ \alpha = 0 \text{ und } \alpha = 0,$$

mithin die Nadel in verticaler Lage.

6. Die Richtung einer im Gleichgewichte befindlichen Magnetnadel gibt, da ſie durch die vorher betrachteten Kräfte beſtimmt wird, die nöthigen Daten, um die Richtung jener Kräfte ſelbſt zu finden. Geht die Axe einer Nadel durch ihren Schwerpunct, ſo iſt der Einfluß der Schwere auf ihren Stand aufgehoben und dieſer hängt einzig und allein von der magnetiſchen Kraft der Erde ab. Die Abweichung einer ſolchen Nadel vom aſtronomiſchen Meridian und ihre Neigung gegen die Horizontalebene beſtimmen demnach die Richtung dieſer Kraft vollkommen, und man muß, wenn man dieſe Richtung kennen lernen will, jene zwei Größen beſtimmen.

7. Zur Beſtimmung der magnetiſchen Abweichung hat man beſondere Inſtrumente, Declinatorien. Ein ſehr vorzügliches Inſtrument dieſer Art hat Gambey angegeben. Es iſt in Fig. 188 abgebildet. Die etwa 15 Zoll lange, prismatiſche Magnetnadel hat an jedem Ende einen kupfernen Ring, an welchem ein feiner Spinnenfaden in der Längenrichtung der Nadel ausgeſpannt iſt, ſie ſteckt mit der Mitte in einer kupfernen Scheide, welche an einem feinen ungezwirnten Seidenfaden hängt, und befindet ſich in einem prismatiſchen Kaſten, welcher an der oberen Wand zwei mit gleichförmig dicken Glasplatten verſchloſſene Öffnungen hat, durch die man die zwei Enden der Magnetnadel ſehen kann. Das ganze Käſtchen ruht auf einem horizontalen, eingetheilten Kreiſe, und läßt ſich auf demſelben drehen und der Drehungswinkel meſſen. Zu beiden Seiten der längeren Flächen des Käſtchens erheben ſich zwei verticale Säulen, welche die Stützen eines kleinen, wie für einen Theodolith eingerichteten Fernrohres abgeben. Dieſes Fernrohr hat vor dem eigentlichen Objective und mit dieſem verbunden noch eine zweite kleinere Convexlinſe, die ſich mit einer Metallplatte decken läßt, ſo daß man durch den von dieſer Linſe nicht bedeckten Theil des eigentlichen Objectives ein ſehr fernes Ziel, durch die kleinere Linſe hingegen die im Käſtchen befindliche Magnetnadel deutlich ſehen kann, ohne das Ocular herausziehen oder hinein-

ſchieben zu müſſen. Die Drehungsaxe dieſes Fernrohres muß genau horizontal ſtehen und der mitten im Geſichtsfelde des Rohres angebrachte Faden muß in die optiſche Axe des Rohres fallen.

Beim Gebrauche richtet man das Fernrohr auf ein Ende der Nadel und bewegt es mittelſt der Micrometerſchraube am horizontalen Kreiſe dahin, daß der Spinnenfaden im Ringe genau auf den Faden im Fernrohre fällt, wendet dann das Rohr um, und ſucht dieſelbe Coincidenz des Fadens im Fernrohr mit dem Spinnenfaden am anderen Ende der Nadel durch Verſchieben ihres Aufhängepunctes zu bewerkſtelligen. Iſt dieſes erreicht, ſo nimmt man die Nadel aus ihrer Scheide, wendet ihre untere Fläche nach oben, ſteckt ſie wieder hinein und bringt ihre zwei Fäden an den Enden wieder mit dem Faden des Fernrohres zur Coincidenz. Das arithmetiſche Mittel aus dieſer und jener Ableſung am Horizontalkreiſe gibt die Lage der magnetiſchen Axe der Nadel hinreichend genau an. Nun richtet man das Fernrohr auf ein fernes, im aſtronomiſchen Meridian befindliches Merkzeichen oder überhaupt auf einen Gegenſtand, deſſen Azimuth man genau kennt, und entnimmt aus dem Bogen des Horizontalkreiſes zwiſchen der Axe der Nadel und dem zuletzt beobachteten Puncte die geſuchte Abweichung.

8. Dieſes Inſtrument gewährt zwar eine große Genauigkeit, iſt aber ſehr koſtbar und fordert zur Erlangung eines Reſultates gar viele Meſſungen. Um die Arbeit zu vereinfachen und um einen geringeren Preis zu erzielen, ſchlägt Horner folgendes Inſtrument vor, das in Fig. 189 abgebildet iſt. Auf einer Marmorplatte, die ſich durch Stellſchrauben horizontal ſtellen läßt, befindet ſich ein meſſingener, gut getheilter Sector, den man mittelſt einer feinen Schraube ohne Ende verſchieben kann, und auf demſelben ein hölzernes, prismatiſches Käſtchen, das an beiden Seiten mit Glasfenſtern verſehen iſt. In dieſem Käſtchen ſchwebt an einem Seidenfaden die Magnetnadel, an welcher das Objectiv und das mit einem Fadenkreuze verſehene Ocular eines Fernrohres angebracht iſt, ohne eine Röhre zur Aufnahme dieſer Gläſer. An einer äußeren Seite des Kaſtens befindet ſich ein zweites, nur im verticalen Sinne bewegliches Fernrohr, wieder mit einem Fadenkreuz.

Beim Gebrauche wird die Marmorplatte ungefähr in den magnetiſchen Meridian geſtellt, der Sector dahin gedreht, daß die Nadel nahe in der Mitte des Käſtchens ſchwebt und wenn ſie in Ruhe gekommen iſt, durch das an der Nadel befindliche Fernrohr der Ge=

genſtand bemerkt, auf welchen der Verticalfaden fällt. Hierauf wird derſelbe Gegenſtand durch Drehen des Käſtchens mittelſt der Mikrometerſchraube in das Geſichtsfeld des zweiten Fernrohres gebracht, ſo daß ihn der Faden in demſelben wie der vorhergehende trifft. Hat man den Stand des Käſtchens an der Eintheilung bemerkt, ſo öffnet man es, kehrt die Nadel um, ſo daß das Fernrohr über dieſelbe zu ſtehen kommt und wiederholt dieſelbe Operation, welche bei der vorhergehenden Stellung der Nadel vorgenommen wurde. Das Mittel beider Stellungen des äußeren Fernrohres gibt die Richtung des magnetiſchen Meridians. Wird nun wie vorher das äußere Rohr auf einen im aſtronomiſchen Meridian befindlichen Gegenſtand oder auf ein Object von bekanntem Azimuth gerichtet, ſo findet man wie in 7 die geſuchte Abweichung.

9. Noch einfacher gelangt man zur Kenntniß der Abweichung, wenn man an die frei ſchwebende horizontale Magnetnadel einen Planſpiegel befeſtiget, deſſen ſpiegelnde Ebene mit der magnetiſchen Axe desſelben parallel iſt, und mittelſt eines Theodolithes oder eines Spiegelſextanten den Winkel mißt, welchen ein ferner Gegenſtand von bekanntem Azimuth mit ſeinem Bilde in dieſem Spiegel macht. Iſt z. B. AB (Fig. 190) der Durchſchnitt eines Planſpiegels mit einer verticalen Ebene, auf welchen von einem ſehr weit entfernten Gegenſtande Strahlen auffallen, wie SC, während andere in der mit SC parallelen Richtung in das in D befindliche Theodolithfernrohr gelangen, ſo braucht man nur den Winkel $SDC = \alpha$ zu meſſen, welchen der direct geſehene Gegenſtand mit ſeinem Bilde im Spiegel macht. Da hier offenbar $\frac{1}{2}\alpha = ACD = \beta$ iſt, und β der Differenz des Azimuthes des Objectes und des Spiegels iſt, ſo hat man, wenn das Azimuth des Objectes A heißt, die Abweichung der Ebene des Spiegels vom aſtronomiſchen Meridian, mithin auch die der Magnetnadel:

$$\delta = A \pm \tfrac{1}{2}\,\alpha \ldots. (E).$$

Wäre das Object nicht ſo nahe, daß man SC mit SD als parallel annehmen könnte, ſondern ſo, daß DS nach der punctirten Linie fällt, ſo iſt für dieſe Linie $CDS = \alpha$, $DCS = 180^\circ - 2\beta$, $CSD = 2\beta - \alpha$, und daher $DS : DC = \sin 2\beta : \sin 2\beta - \alpha$, woraus man leicht, wenn β, DS, DC gemeſſen ſind, β berechnet.

Dieſe Methode ſetzt voraus, daß die Puncte D, C, S in derſelben Horizontalebene liegen, der Spiegel genau vertical, mit der

Axe des Magnetes parallel ſey. Die erſten zwei Bedingungen laſſen ſich leicht erreichen, zur Erreichung der letzteren iſt ein zweiter, am beſten mit dem erſten paralleler Spiegel nothwendig, der ſich auf der entgegengeſetzten Seite des Magnetes befindet. Man dreht nun den Magnet um 180° um ſeine geometriſche Axe, ſo daß letzterer Spiegel an die Stelle des erſteren komme, und macht die Beobachtung noch einmal. Findet man für α einen anderen Werth, ſo nimmt man aus dieſem und dem vorhin gefundenen das arithmetiſche Mittel und führt mit dieſem die weitere Rechnung. Der Spiegel wird aus einem gleichförmig dicken Metallplättchen, oder aus einem gleichförmig dicken, ebenen Glasplättchen gemacht, das auf jeder Fläche zur Hälfte geſchwärzt iſt. In beiden Fällen erhält man mit einem Plättchen beide Spiegel. Der Magnetſtab kann 1 L. dick, 10—12 Z. lang ſeyn, er muß an einem ungedrehten Seidenfaden hängen und ſammt dem Spiegel ſich in einem Käſtchen mit Glasfenſtern befinden. Der Theodolith ſteht weit genug von der Nadel ab, wenn dieſe ſeine Entfernung 9—12 Fuß beträgt. Man ſtellt ihn am beſten ſo, daß der Winkel α recht ſtumpf wird. Fig. 191 ſtellt dieſen Apparat ohne Käſtchen vor, wie ihn Poggendorff angibt. Ein ähnliches Inſtrument hat Rieſe (Pogg. Ann., Bd. 9, S. 67) beſchrieben.

10. Zur Beſtimmung der magnetiſchen Neigung kann man zwei verſchiedene Methoden anwenden. Die erſte beſteht darin, daß man den Stand einer um eine horizontale Axe beweglichen Magnetnadel, die ſich innerhalb eines getheilten Kreiſes befindet, beobachtet; die zweite darin, daß man die Schwingungszahl einer ſolchen Magnetnadel in zwei verſchiedenen Lagen beobachtet. Die erſtere Methode würde unmittelbar zur Kenntniß der Neigung führen, wenn man im Stande wäre, den Schwerpunct der Nadel genau in ihre Axe zu bringen. Dieſes iſt aber faſt unausführbar, oder wenn es einem gelingt, ſo hat daran ein glücklicher Zufall einen großen Antheil. Wenn man auch glaubt, durch Beobachten der Stellung einer ſolchen Nadel vor dem Magnetiſiren zum Zwecke gelangt zu ſeyn, ſo täuſcht man ſich dabei doch meiſtens, weil derlei Nadeln ſchon bei der Bearbeitung, beim Härten ꝛc. etwas magnetiſch werden, und man es daher ſchon vor dem eigentlichen Magnetiſiren durch Streichen mit einer, wenn auch nur ſchwach magnetiſchen Nadel zu thun hat.

11. Bei der Unmöglichkeit, eine Magnetnadel zu verfertigen,

deren Schwerpunct genau in ihrer Axe liegt, bleibt nichts übrig, als Mittel anzuwenden, wodurch die Wirkung der Schwere aus dem Reſultate eliminirt wird. Dieſes kann auf zweifache Weiſe geſchehen, nämlich durch entgegengeſetztes Magnetiſiren der Nadel, oder nach Mayers Anleitung durch phyſiſches Umkehren derſelben. Im erſteren Falle wird die Lage der Nadel gegen den Horizont, während ſie im magnetiſchen Meridian ſich befindet, beobachtet, hierauf dieſelbe ſo magnetiſirt, daß der Nordpol zum Südpol wird und umgekehrt, dann wieder der Stand derſelben gegen den Horizont beobachtet. Da die Schwere die Neigung in einem Falle ebenſo vermehren muß, wie ſie dieſelbe im anderen vermindert, ſo wird das Mittel aus beiden Neigungen die wahre Neigung geben. Zum Behufe dieſer Beobachtungen kann man das Inſtrument anwenden, welches Fig. 192 darſtellt und das eigentlich aus einem vertical zu ſtellenden getheilten Kreiſe beſteht, zu deſſen Seiten ſich zwei Stützen erheben, welche die Pfannen für die Axe der Nadel abgeben und ſich daher genau bis zum Centrum des Kreiſes erheben. Es iſt vortheilhaft, wenn dieſer Kreis zugleich auf einem horizontalen ruht und ſich mit dieſem um eine verticale Axe drehen läßt, theils um die Nadel genau in den magnetiſchen Meridian ſtellen zu können, theils auch, um in zwei auf einander ſenkrechten Richtungen beobachten zu können. Beobachtet man nämlich in zwei ſolchen, wie immer gegen den magnetiſchen Äquator gelegenen Ebenen, ſo iſt, wenn das Azimuth der Nadel in einer ſolchen Ebene $= \beta$ iſt, dasſelbe in der anderen Ebene $= 180° - \beta$, und man findet, wenn man in (D) den Factor $c = 0$ ſetzt, für den erſten Fall

$$\tang \alpha = \frac{\sin i \cos \beta}{\cos i} = \tang i \cos \beta,$$

und für den zweiten, für welchen α in $\alpha_{,}$ übergeht:

$$\tang \alpha_{,} = \tang i \sin \beta,$$

mithin aus beiden Gleichungen

$$\tang^2 \alpha + \tang^2 \alpha_{,} = \tang^2 i.$$

Es verſteht ſich von ſelbſt, daß man unter α und $\alpha_{,}$ die Werthe meint, welche ſich im Mittel aus der Beobachtung vor und nach dem Umkehren der Pole ergeben, ſo wie, daß man durch Vervielfältigung der Beobachtungen in mehreren Ebenen der Wahrheit bedeutend nahe kommen könne.

12. Dasſelbe Inſtrument läßt ſich auch mit Vortheil brauchen,

wenn man zum Behufe der Elimination der Schwere die Nadel umwendet, ohne ihre magnetiſchen Pole zu verändern. Bei dieſer Methode muß aber die Nadel ſo beſchaffen ſeyn, daß ihr Schwerpunct merklich außerhalb ihrer Axe liegt und ſie daher ſelbſt im unmagnetiſchen Zuſtande eine ſchiefe Lage gegen den Horizont annehmen würde. Die Unterſuchung beſteht darin, daß, wenn bei der erſten Beobachtung der Schwerpunct der Nadel unter ihrer Drehungsaxe ſich befand, derſelbe bei der darauf folgenden über dieſe Axe zu liegen kommt. Stellt nun Fig. 187 dieſe Nadel in einer Lage vor, und haben alle in der folgenden Formel vorkommenden Größen die Bedeutung, welche ihnen in 4 beigelegt wurde, ſo erhält man für den Fall, wo ſich die Magnetnadel im magnetiſchen Meridian befindet:

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{c \sin \gamma + \sin \imath}{\cos \imath + c \cos \gamma} \ldots . (a).$$

Wird nun die Nadel umgewendet, ſo wird γ negativ, und es geht α in $\alpha_{\prime}$ über, mithin iſt

$$\text{tang}\, \alpha_{\prime} = \frac{\sin i - c \sin \gamma}{\cos i + c \cos \gamma} \ldots . (b).$$

Wäre nun γ bekannt und z. B. gleich 90°, ſo erhielte man mittelſt dieſer zwei Gleichungen

$$\frac{\text{tang}\, \alpha + \text{tang}\, \alpha_{\prime}}{2} = \text{tang}\, i \ldots . (F).$$

Iſt aber γ nicht bekannt, ſo kann man auf zwei Wegen dieſen Werth umgehen. Der eine und wie es ſcheint der ſicherſte, beſteht darin, daß man, nachdem man den Werth α und $\alpha_{\prime}$ durch Beobachtung erhalten hat, die Pole der Nadel durch Streichen mit einem Magnet umkehrt, und mit derſelben wieder zwei Beobachtungen, ähnlich den vorhergehenden macht, wobei man die Werthe A und $A_{\prime}$ ſtatt α und $\alpha_{\prime}$ erhält. Hat die Nadel nicht genau den vorigen Magnetismus erhalten, ſo mag k das bedeuten, was vorhin c war, ferner iſt γ in $180 - \gamma$, mithin $\cos \gamma$ in $- \cos \gamma$ übergegangen und man hat für die Beobachtung vor und nach dem Umlegen der Nadel

$$\text{tang}\, A = \frac{\sin i + k \sin \gamma}{\cos i - k \cos \gamma};\ \text{tang}\, A_{\prime} = \frac{\sin i - k \sin \gamma}{\cos i - k \cos \gamma} \ldots . (c).$$

Aus dieſen und den Gleichungen (a) und (b) laſſen ſich nun die vier Unbekannten c, k, γ und i beſtimmen, mithin auch die Neigung $= 90° - i$ finden.

Der zweite vorhin genannte Weg beſteht darin, daß man, nachdem man zwei Beobachtungen im magnetiſchen Meridian gemacht hat, zwei ähnliche in einer darauf ſenkrechten Verticalebene anſtellt. Die zwei erſten geben die Gleichungen (a) und (b). Erhält man für die zwei letzteren, wo in der Formel (D) $\beta = 90^\circ$ zu ſetzen kommt,

$$\tan a = \frac{c \sin\gamma}{\cos i + c\cos\gamma},\ \tan a_1 = \frac{-c\sin\gamma}{\cos i + c\cos\gamma} \ldots (e);$$

ſo kann man aus dieſen Gleichungen mit Hülfe von (a) oder (b) ebenfalls i finden.

13. Man mag nun die magnetiſche Neigung auf dieſe oder die vorher (11) erwähnte Weiſe beſtimmen, ſo muß die dazu verwendete Magnetnadel mit großer Vorſicht gewählt und adjuſtirt werden. Man macht ſie am beſten aus gutem Stahl in parallelepipediſcher Form, mit einer Länge von 10 P. Z., einer Breite von 4 L. und einer Dicke von $\frac{1}{4}$—$\frac{1}{5}$ L. Bei dieſen Dimenſionen darf man weder beſorgen, daß ſie ein zu großes Gewicht hat, noch daß ſie ſich biegt. Zieht man auf beiden Seiten einer ſolchen Nadel eine gerade, durch die Drehungsaxe gehende, mit einer Kante parallele Linie, ſo kann dieſe als Merkzeichen dienen, wenn man es nicht etwa vorzieht, nebſt dieſer auf die ganze Länge der Nadel ſich erſtreckenden Linie noch an jedem Ende mehrere andere zu ziehen, welche die Stelle eines Nonius vertreten können. Die Nadel ſpitzig zu machen, wie Viele thun, oder ſie aus zwei an den Baſen verbundenen Kegeln zuſammenzuſetzen, wie Le Noir gethan, iſt minder rathſam, weil erſtere ſich beſſer und regelmäßiger magnetiſiren laſſen. Der Stahl muß gehärtet ſeyn, damit ſein Magnetismus dauerhaft genug werde.

Die Axe, um welche ſie ſich drehen ſoll, muß genau cylindriſch ſeyn und auf der Ebene der Nadel ſenkrecht ſtehen. Es iſt gut, wenn ſie an beiden Enden in feine Spitzen auslauft und mittelſt dieſen auf den Pfannen ruht. Sie wird aus Stahl gemacht und nur wenig gehärtet.

Die Pfannen müſſen aus Achatplatten beſtehen, die zur beſſeren Fixirung einer beſtimmten Lage der Nadel etwas ausgehöhlt ſeyn ſollen. Sie müſſen ſich durch beſondere Schrauben reguliren und in eine ſolche Lage bringen laſſen, daß die darauf gelegte Nadel ſich in der Ebene des getheilten Kreiſes bewegt und ihre Drehungsaxe genau durch den Mittelpunct dieſes Kreiſes geht.

Von Wichtigkeit iſt es, daß die magnetiſche Axe der Nadel ihre Drehungsaxe ſchneide und mit ihren Kanten parallel laufe. Dieſes wird erreicht, wenn man beim Magnetiſiren gehörig verfährt. Zu dieſem Ende wird die Nadel in ein ebenes Bret eingelaſſen, und ihr zur Seite in paralleler Richtung eine etwas hervorſtehende gerade Leiſte angebracht, die dem zum Magnetiſiren gebrauchten Magnet zum Führer dient. Man thut am beſten, zu letzterem zwei gleiche, parallelepipediſche Stäbe anzuwenden, deren entgegengeſetzte Pole man auf die im Brete aufwärts gekehrte Fläche der Nadel ſo ſtellt, daß ſie dieſelbe der ganzen Breite nach decken und zugleich an jene Führleiſte anſtehen. Hat man ſie mit gleicher Stärke und Geſchwindigkeit einige Male hin- und hergeführt, ſo kehrt man die Nadel um und verfährt eben ſo mit der anderen Fläche derſelben. Um ſich zu überzeugen, daß die Nadel den nöthigen Grad des Magnetismus angenommen habe, ſoll man ſie nach dem Streichen in den Kreis einſetzen und ihren Stand beobachten, hierauf abermals einige Striche auf die vorher genannte Weiſe anbringen und ihren Stand im Kreiſe wieder beobachten. Findet man im letzteren Falle die Neigung nicht größer, ſo hat die Nadel bereits den nöthigen Grad der Stärke erlangt. Doch darf man nicht vergeſſen, daß ſie dieſen Grad nicht immer behält, ſondern beſonders durch die Einwirkung der Wärme eine Schwächung erleidet. Iſt die Nadel in Betreff aller bis jetzt beſprochenen Puncte in Ordnung, ſo muß man noch ihre Empfindlichkeit beurtheilen. Um dieſe kennen zu lernen, neigt man ſie, wenn die Axe in den Pfannen ruht, läßt ſie dann frei und ſieht zu, ob ſie wieder auf den vorigen Stand kommt. Letzteres iſt für eine brauchbar ſeyn ſollende Nadel unerläßlich.

14. Die bisher angegebenen Maßregeln reichen für das nach Mayer's Vorſchlag eingerichtete Inclinatorium hin; will man ſich aber des gewöhnlichen Inſtrumentes zur Beſtimmung der magnetiſchen Neigung bedienen, ſo muß nebſt den bereits erwähnten Arbeiten auch noch das Juſtiren der Nadel, wodurch man unterſucht, ob ihr Schwerpunct in der Axe liege oder nicht, vorgenommen werden. Iſt nämlich eine Nadel ſo weit ausgearbeitet, daß man ihr die Adjuſtirung zu geben hat, ſo glüht man ſie aus, um ihr allen Magnetismus zu benehmen, legt ſie dann mit der Axe in die dazu beſtimmten Pfannen und ſieht zu, ob ſie in jeder Lage im Gleichgewichte ſteht oder nicht. Dabei ſoll aber die Axe von Nord nach Süd gerichtet ſeyn, und daher die Nadel von Oſt nach Weſt ſich bewegen,

damit ſie nicht etwa vom Erdmagnetismus eine ſchädliche Einwirkung während der Probe erfahre. Bleibt ſie da in jeder Lage im Gleichgewichte, ſelbſt nachdem man ſie verkehrt in die Pfannen gelegt, ſo kann man ſie als juſtirt anſehen; iſt dieſes nicht der Fall, ſo muß man da, wo es nöthig iſt, durch Wegſchleifen zu Hülfe kommen. Dieſes darf aber nicht mit einem ſtählernen Werkzeug geſchehen (ſo wie überhaupt die Nadel nicht weiter mit Stahl oder Eiſen berührt werden ſoll), ſondern man muß die überflüſſige Maſſe mittelſt eines Schleifſteines wegnehmen. Man darf nicht erwarten, auf ſolche Weiſe eine vollkommen juſtirte Nadel zu erhalten; wohl aber wird man vorausſetzen können, daß ſich dadurch der Juſtirungsfehler bis auf eine ſehr kleine Größe vermindern läßt und daß man ſich dann die Erlaubniß nehmen darf, das arithmetiſche Mittel aus der Neigung bei einer beſtimmten Magnetiſirung der Nadel und aus der bei der entgegengeſetzten Magnetiſirung als wahre Neigung anzuſehen, welches nicht der Fall wäre, wenn der Juſtirungsfehler eine merkliche Größe überſchritte.

Selbſt bei der Anwendung der Mayer'ſchen Methode kann man ſich durch eine gute Juſtirung die Arbeit bedeutend erleichtern. Hat man es nämlich dahin gebracht, daß die ausgeglühte Magnetnadel nur in horizontaler Lage im Gleichgewichte bleibt, ſo liegt ihr Schwerpunct ſenkrecht unter ihrer Drehungsaxe, man hat $\gamma = 90°$ und kann daher mittelſt der Formel (F) die Neigung finden.

15. Eine andere, ſehr brauchbare Methode zur Beſtimmung der magnetiſchen Neigung beſteht darin, daß man die völlig juſtirte Nadel um die Lage ihres Gleichgewichtes, zuerſt in der Ebene des magnetiſchen Meridians, dann in einer darauf ſenkrechten Ebene ſchwingen läßt, und die Anzahl der in einer beſtimmten Zeit in beiden Ebenen vollbrachten Schwingungen genau beſtimmt.

Um das Weſen dieſer Methode beſſer einzuſehen, bedenke man, daß eine Magnetnadel in einer beſtimmten Lage eben ſo im Gleichgewichte erhalten wird, wie ein ſchwerer Körper in der Verticalebene im Gleichgewichte iſt, und daß die Magnetnadel, wenn ſie aus der Lage des Gleichgewichtes gebracht und dann ſich ſelbſt überlaſſen iſt, gleich einem ſchweren Körper Schwingungen macht, ja die Geſetze der Schwingungen ſchwerer Körper laſſen ſich auf magnetiſche Pendel vollſtändig anwenden, wenn man ſtatt der Schwere die magnetiſche Richtkraft ſetzt. Nennt man demnach die Zeit einer Schwingung t und das Kreisverhältniß π, ſo iſt (nach 3)

$$t^2 = \frac{\pi^2 \int p^2\, dm}{R\,(\mu + \mu_{,})}.$$

Iſt die Nadel prismatiſch und hat jeder auf der Axe des Prisma's ſenkrechte Querſchnitt den Umfang b, ſo iſt $dm = b\,dp$, und daher $\int p^2\, dm = \frac{2}{3}\, b\, A^3$, wo A die halbe mathematiſche Nadellänge bezeichnet. Bedeutet aber P das Gewicht der Nadel, g die Schwere, ſo iſt $2gbA = P$ und $\int p^2\, dm = \frac{1}{3}\frac{PA^2}{g}$, und daher

$$t^2 = \frac{\pi^2\, P A^2}{3g\,R\,(\mu + \mu_{,})} \;\ldots\; (G).$$

Bedeutet nun insbeſondere t die Schwingungsdauer der Magnetnadel im magnetiſchen Meridian, τ dieſelbe in einer darauf ſenkrechten Ebene, ſo hat man für t die Gleichung (G), für τ hingegen

$$\tau^2 = \frac{\pi^2\, P A^2}{3 \cos i\,.\, R\,(\mu + \mu_{,})},$$

mithin $\frac{t^2}{\tau^2} = \cos i$ alſo i und daher auch $90° - i$, d. h. die magnetiſche Neigung gegeben.

Schwingt die Nadel einmal im magnetiſchen Meridian, darauf aber in einer horizontalen Ebene, für welche man ſtatt g hat $g \sin i$, ſo wird die Schwingungsdauer für letzteren Fall T, und es iſt

$$T^2 = \frac{\pi^2 P A^2}{3 \sin i\,.\, R\,(\mu + \mu')},$$

und daher $\frac{t^2}{T^2} = \sin i$, mithin durch $90° - i$ wieder die magnetiſche Neigung gegeben.

Wäre $R\,(\mu + \mu_{,})$ bekannt, ſo könnte man die Neigung mittelſt des bloßen Werthes von T beſtimmen und daher die ſtets ſchwierigen und leicht fehlerhaften Schwingungen in der Verticalebene ganz entbehren. Man kann dieſen Werth finden, wenn man das Gewicht q ſucht, das man der im Schwerpuncte aufgehängten Nadel anhängen muß, um ſie in eine horizontale Lage zu bringen, und die Entfernung b von der Axe, wo dieſes angebracht werden muß. Da hat man nämlich:

$$\frac{bq}{\cos i} = R\,(\mu + \mu_{,}),$$

mithin mittelſt obigem Werthe von T^2

$$\tang i = \frac{\pi^2 P A^2}{3 g q b T^2}.$$

Wie A gefunden wird, iſt aus der Naturlehre bekannt.

16. Sowohl die Abweichung als die Neigung unterliegen kleinen periodiſchen Variationen, die man auch kennen muß. Bedient man ſich eines ſehr empfindlichen Declinatoriums und Inclinatoriums, ſo kann man jedes Mal die abſoluten Größen dieſer Art kennen lernen, und daraus auch auf ihre Variationen einen Schluß machen. Allein dieſe Variationen ſind in der Regel ſo klein, daß ſie für die gewöhnlichen Beſtimmungen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen, und man muß darum beſonders empfindliche Apparate anwenden, bei denen man nur darauf ausgeht, die Größe der Veränderung kennen zu lernen. Ein ſolches Inſtrument hat Coulomb für die Änderungen der Abweichung angegeben. Es beſteht aus einem etwa 18 Zoll langen Magnetſtabe, der an ein Bündel ungedrehter Seidenfäden angehängt iſt und in einem Kaſten in horizontaler Richtung ſich frei bewegen kann. An jedem Ende der Nadel befindet ſich ein feines Merkzeichen, und über demſelben iſt ein Mikroſkop mit einem Fadenkreuze angebracht, das ſich mittelſt einer Mikrometerſchraube mit eingetheiltem Kopfe ſtets ſo ſtellen läßt, daß ein Faden des Mikroſkopes auf das Zeichen an der Nadel fällt. Hat man einmal beide Mikroſkope auf die entſprechenden Zeichen eingeſtellt, ſo braucht man nur die Umdrehungen der Schraube und ihre Bruchtheile zu kennen, durch welche dieſe Einſtellung nach einer beſtimmten Zeit wieder bewirkt wird, um daraus die in der Zwiſchenzeit erfolgte Ablenkung kennen zu lernen. Fig. 193 ſtellt dieſes Inſtrument und den zum Verſchieben der zwei Mikroſkope eingerichteten Tiſch insbeſondere vor. Zum Behufe der Variationen der Neigung beſitzt man noch kein ſo empfindliches Inſtrument.

17. Kennt man einmal aus der Abweichung und Neigung der Magnetnadel die Richtung der Kräfte, durch welche die Lage derſelben beſtimmt wird, ſo erübrigt noch die Kenntniß der Intenſität dieſer Kraft. Dieſe hängt zwar zugleich von der Kraft des Magnetes und der Erde ab, aber wenn wir erſtere als beſtändig betrachten, wie wir es vor der Hand thun wollen, ſo handelt es ſich nur um die des Erdmagnetismus.

Die Intenſität des Erdmagnetismus lernt man aus Schwingungsverſuchen kennen. Schwingt eine Nadel im magnetiſchen Meridian, ſo hängt ihre Schwingungsdauer nur von jener Kraft ab, und das Quadrat der Dauer iſt dieſer Kraft verkehrt proportionirt. Allein man kann einer ſo ſchwingenden Nadel nicht die nöthige Empfindlichkeit geben, weil dieſer die Reibung an der Schwingungsaxe im Wege ſteht. Darum zieht man es vor, die Nadel in einer horizontalen Ebene oſcilliren zu laſſen, indem man ſie an einem ſehr feinen Faden aufhängt, damit ſtatt der Reibung nur die viel kleinere Torſion des Fadens eintritt, aber man erfährt dadurch nur den horizontal wirkenden Theil des Erdmagnetismus und muß daher die Stärke der geſammten magnetiſchen Kraft der Erde aus dieſer mittelſt der bekannten Neigung ſuchen.

18. Sowohl die hier genannten als die früher zur Beſtimmung der magnetiſchen Neigung erwähnten Schwingungen müſſen mit gehörig eingerichteten Apparaten und mit beſonderen Vorſichten angeſtellt werden, wenn ſie zum Ziele führen ſollen. Zu Schwingungsverſuchen braucht man eine 3 Zoll lange, prismatiſche oder cylindriſche Magnetnadel, die, wenn ſie in einer Verticalebene ſchwingen ſoll, mit beſonderen Axen verſehen und auf horizontale Pfannen gelegt wird. Soll ſie in einer horizontalen Ebene ſchwingen, ſo ſteckt man ſie am beſten in eine papierene Scheide von $\frac{1}{2}$ Z. Länge, die an einem, oder wenn es Noth thut, an mehreren ungezwirnten Seidenfäden von 6 — 10 Z. Länge aufgehängt wird. Man gibt die Nadel in ein Glaskäſtchen, an deſſen Seite oder Boden eine genaue Kreistheilung zur Beſtimmung des Ausſchlagwinkels angebracht iſt. Sie ſoll möglichſt gehärtet ſeyn, um ihre Kraft wenigſtens bei derſelben Temperatur unverändert zu erhalten, und man ſoll wiſſen, um wie viel dieſe Kraft für eine beſtimmte Temperaturveränderung ab- oder zunimmt.

Die Uhr, welche man zur Beſtimmung der Dauer einer beſtimmten Anzahl von Schwingungen braucht, ſoll einen genau bekannten Gang haben und eine Viertelſtunde bis auf $\frac{1}{10}$ S. angeben. Es iſt ſehr gut, wenn ſie in jeder Secunde einen oder eine ganze Anzahl Schläge macht, damit man ſich mehr auf das Gehör als auf die Bewegung des Zeigers verlaſſen kann, der oft wegen Theilungsfehlern oder einer Excentricität des Zeigerſtiftes falſche Angaben liefert. Muß man aber der Bewegung des Zeigers folgen, ſo ſoll man ſich vorläufig von der Richtigkeit der Theilung des Zifferblattes und

der Centrirung des Zeigerſtiftes überzeugen und die etwaigen Fehler kennen lernen.

Man ſoll eine hinreichende Anzahl Schwingungen beobachten, um ein deſto ſichereres Reſultat zu erlangen. Bei einer Nadel von 3 Z. Länge genügt es, 250—300 Schwingungen zu beobachten, die in etwa 15 M. vollbracht werden. Um ſicher zu ſeyn, daß man ſich im Zählen nicht geirrt habe, hat man nur zu bemerken, daß, wenn man mit dem Ausſchlag der Nadel nach der Rechten mit 0 zu zählen angefangen hat, jede Schwingung von gerader Anzahl wieder rechts vollbracht iſt. Fiele einmal eine ungerade Zahl auf die rechts erfolgende Schwingung, ſo wäre es ein Zeichen, daß man ſich um eine Schwingung geirrt habe. Es iſt nicht wahrſcheinlich, daß man ſich auf einmal um zwei Oſcillationen verzählt habe, und daher ungeachtet eines Zählungsfehlers jede gerade Schwingung rechts erfolge. Hanſteen empfiehlt ein anderes Mittel, das noch ſicherer jedem Fehler begegnet und überdieß noch einen anderen Vortheil gewährt. Man linire ſich vorläufig ſein Tagebuch ſo, daß für die Schwingungszeit 30 Spalten entſtehen und notire in dieſelben die Zeit, welche nach Verlauf von je 10 Oſcillationen verfloſſen iſt, zähle auch immer nur von 1—10. Dabei irrt man ſich gewiß weniger als beim Fortzählen bis 300. Hat man alle 30 Rubriken ausgefüllt, ſo ſind auch 300 Schwingungen vorüber. Man kann über dieſe Zahl noch 60 Schwingungen auf gleiche Weiſe beobachten und dann die Dauer von 300 Schwingungen aus der Zeit zwiſchen der 0ten und $300^{\text{ſten}}$, der 10ten und 310ten u.ſ.f. bis zur $60^{\text{ſten}}$ und $360^{\text{ſten}}$ berechnen, aus allen 6 Reſultaten das Mittel nehmen, und dieſes als Werth der wahren Dauer von 300 Oſcillationen anſehen. Auf dieſe Weiſe vertreten 360 Schwingungen die Stelle von 6×300. Es iſt unerläßlich, ſowohl bei der erſten als bei der letzten Schwingung den Schwingungsbogen zu beobachten, zu notiren und dann mittelſt der Formel (S. 310) alle Schwingungen auf unendlich kleine Bögen zu reduciren. Bei der Beſtimmung der Bögen hat man ſich vor Fehlern, die von der Parallaxe herrühren, möglichſt in Acht zu nehmen. Die Ablenkung der Magnetnadel aus der Lage ihres Gleichgewichtes bewirkt man mittelſt eines in ihre Nähe gebrachten Stückes weichen Eiſens, das man aber nach der Hand entfernt. Man beginnt erſt zu zählen, wenn die Nadel den Ausſchlagwinkel erlangt hat, den man beabſichtiget, vermeidet aber möglichſt jedes Schwanken des Fadens. Aus dieſem Grunde muß man ſich während

einer ſolchen Beobachtung äußerſt ruhig verhalten und ja das Gefäß mit dem Magnete nicht berühren.

Werden ſolche Beobachtungen an mehreren Orten angeſtellt, ſo hat man nicht blos die unmittelbaren Reſultate derſelben anzumerken, ſondern auch die wichtigeren Umſtände, unter denen man ſie erlangt hat. Darum muß ſtets die Höhe des Beobachtungsortes, die geognoſtiſche Beſchaffenheit des Bodens, die Temperatur genau bemerkt werden.

19. Bisher wurde vorausgeſetzt, daß die Schwingungszeit einer Magnetnadel blos von der Stärke des Erdmagnetismus abhänge und daher ſtillſchweigend angenommen, daß ſich die Kraft dieſer Nadel nicht mit der Zeit ändere. Bekanntlich treten durch allerlei Umſtände, beſonders durch die Temperaturänderungen ſtarke Variationen in der Kraft einer Magnetnadel ein, und man kann deßhalb aus den Änderungen der Schwingungszeit derſelben nach langen Zwiſchenzeiten nicht mit Beſtimmtheit auf die Änderungen des Erdmagnetismus ſchließen, weil jene eben ſo wohl von der veränderten Stärke der Nadel als von der des Erdmagnetismus abhängen können. Da es aber doch ſehr zu wünſchen iſt, die erſt nach längeren Zeiten eintretenden Variationen der magnetiſchen Kraft der Erde zu kennen, und der Nachwelt über den gegenwärtigen Zuſtand des Erdmagnetismus die nöthigen Thatſachen an die Hand gegeben werden ſollen, ſo muß man ein Mittel einſchlagen, welches von der Stärke der Magnetnadel unabhängig iſt und ſich blos nach der Größe des Erdmagnetismus richtet. Ein ſolches Mittel hat Poiſſon angegeben. Es beſteht in Folgendem: Man laſſe eine Magnetnadel aus gut gehärtetem Stahle, die in ihrem Schwerpuncte aufgehängt iſt, nach beiden Seiten des magnetiſchen Meridians Schwingungen machen und beſtimme aus der Dauer einer hinreichend großen Anzahl ſolcher Schwingungen die Zeit einer einzigen. Daſſelbe thue man auch mit einer zweiten ebenfalls wohl gehärteten Magnetnadel. Hierauf bringe man dieſe beiden Nadeln in eine ſolche Lage, daß ſich ihre Axen in der Richtung des Erdmagnetismus befinden und ihre Mittelpuncte ſo weit von einander entfernt ſind, daß die Nadeln auf einander wirken, ohne die Anordnung ihres Magnetismus zu ſtören. In dieſer Lage läßt man eine nach der anderen ſchwingen und beſtimmt die Dauer einer Schwingung für jede derſelben. Dieſe wird natürlich anders ausfallen als vorhin, weil die Magnete nun nicht mehr blos durch die Einwirkung des Erdmagnetismus gegen

die Lage des Gleichgewichtes hingezogen werden, ſondern außer dem auch noch durch ihre gegenſeitige Einwirkung. Aus den ſo beobachteten Schwingungszeiten und der Entfernung der Schwerpuncte beider Magnete im letzteren Theil des Verſuches kann man einen Ausdruck finden, der nur von der Größe des Erdmagnetismus, nicht aber von der Kraft der zwei gebrauchten Magnete abhängt.

20. Man denke ſich an der erſten der oben genannten Magnetnadeln einen auf ihre Axe ſenkrechten Querſchnitt in der Entfernung x vom Schwerpuncte derſelben und nenne p den freien Magnetismus des Elementes 1 an dieſem Querſchnitte, ſo daß der Magnetismus des Elementes dx gleich $p\,dx$ iſt. Iſt nun f die Kraft des Erdmagnetismus, ſo iſt die Kraft, wodurch dieſes Element in die Lage des Gleichgewichtes gebracht wird $= f p\,dx$. Wird der Magnet um den Winkel γ aus der Lage des Gleichgewichtes gebracht, ſo iſt das Moment der Kraft, wodurch das betreffende Element in dieſelbe zurückzukehren ſucht, auf den Schwerpunct bezogen gleich $f p x\,dx.\sin\gamma$ und das Moment aller magnetiſchen Kräfte wird $f \sin\gamma \int p x\,dx$, wobei das Integrale auf die ganze Länge des Magnetes ausgedehnt werden muß. Iſt γ ſehr klein und t die Zeit einer Schwingung der Nadel, ſo hat man

$$t = \pi \sqrt{\frac{k}{fh}} \text{ oder } fh = \frac{\pi^2 k}{t^2} \quad (a)$$

wo k das Trägheitsmoment des Magnetes und h das Integral von $p x\,dx$ iſt. Auf ähnliche Weiſe findet man für den zweiten Magnet, für welchen dieſelben, durch Accente unterſchiedenen Buchſtaben gelten:

$$fh_1 = \frac{\pi^2 k_1}{t^2_1} \; \ldots\ldots \; (b)$$

wobei zugleich $h_1 = \int p x_1\,dx_1$ iſt.

Werden dieſe zwei Magnete in die Richtung des Erdmagnetismus gebracht, ſo daß ihre Schwerpuncte die Entfernung r von einander haben, ſo wird die Einwirkung der zwei magnetiſchen Elemente auf einander, deren Entfernung $= r + x - x_1$ iſt:

$$\frac{g p p_1\,dx\,dx_1}{(r + x - x_1)^2}$$

wo g die Stärke des Magnetismus $= 1$ in der Entfernung $= 1$ bedeutet. Wird der Magnet um den Winkel γ aus der Lage des Gleichgewichtes gebracht, ſo wird das Moment der Kraft, die ihn zurückzuführen ſucht, obige Größe multiplicirt mit $x \sin\gamma$. Die

Summe der Momente aller aus der gegenſeitigen Wirkung der zwei Magnete hervorgehenden Kräfte, wodurch ein Magnet in die Lage des Gleichgewichtes zurückgeführt wird, iſt demnach

$$g \sin\gamma \iint \frac{pp_1\, x\, dx\, dx_1}{(r+x-x_1)^2}.$$

Zu dieſem Momente kommt noch das der Kraft des Erdmagnetismus $fh \sin\gamma$ und daher wird für die Dauer T eine Schwingung durch Einfluß beider Kräfte:

$$T = \pi \sqrt{\frac{k}{fh+gb}} \text{ und } fh + gb = \frac{\pi^2 k}{T^2}$$

wenn man $\iint \frac{pp_1\, x\, dx\, dx_1}{(r+x-x_1)^2} = b$ ſetzt. Aus dieſer Gleichung erhält man mittelſt (a)

$$gb = \pi^2 k \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{t^2}\right) \ldots\ldots (c).$$

Auf gleiche Weiſe findet man für den zweiten Magnet

$$gb_1 = \pi^2 k_1 \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{t_1^2}\right) \ldots\ldots (d)$$

wobei wieder

$$\iint \frac{pp_1\, x\, dx\, dx_1}{(r+x_1-x)^2} = b_1 \text{ iſt.}$$

Entwickelt man die Werthe von b und b_1 nach den negativen Potenzen von r und bedenket, daß man hat $\int p\, dx = 0$ und $\int p_1 dx_1 = 0$, weil dieſe Integrale auf die ganze Länge des Magnetes auszudehnen ſind, wo die beiden magnetiſchen Kräfte einander aufheben, ferner daß man hat: $\int p\, x^2 dx = 0$, $\int p_1\, x_1^2\, dx_1$, $\int p\, x^4 dx = 0$, $\int p_1\, x_1^4\, dx_1 = 0$ u. ſ. f. ſobald die beiden Hälften des Magnetes ſymmetriſch ausgearbeitet ſind; ſo wird in der Vorausſetzung, daß man folgende Bezeichnungen einführt:

$\int p\, x\, dx = h$, $\int p_1\, x_1\, dx_1 = h_1$, $\int p\, x^3\, dx = i$, $\int p_1 x_1^3 dx_1 = i_1$ u. ſ. f.

$$b = \frac{2hh_1}{r^3} + \frac{4(3ih_1 + hi_1)}{r^5} + \frac{6(5lh_1 + 10ii_1 + hl_1)}{r^7} + \text{ꝛc.}$$

$$b_1 = \frac{2hh_1}{r^3} + \frac{4(3hi_1 + ih_1)}{r^5} + \frac{6(5hl_1 + 10ii_1 + lh_1)}{r^7} + \text{ꝛc.}$$

Dieſe Reihen convergiren deſto mehr, je größer r gegen die Länge der Magnete iſt. Setzt man nun der Kürze wegen

$3h_1 i + hi_1 = \frac{1}{2} m$; $5lh_1 + 10ii_1 + hl_1 = \frac{1}{3} n$ ꝛc.

$3hh_1 + h_1 i = \frac{1}{2} m_1$; $5hl_1 + 10ii_1 + lh_1 = \frac{1}{3} n_1$ ꝛc.

und ſubſtituirt in (c) und (d) für b und b_1 die gefundenen Werthe, ſo erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k\pi^2 r^3 (t^2 - T^2)}{2T^2t^2} &= ghh_1 + \frac{gm}{r^2} + \frac{gn}{r^4} + \ldots \\ \frac{k_1\pi^2 r_1^3 (t_1^2 - T_1^2)}{2T_1^2 t_1^2} &= ghh_1 + \frac{gm_1}{r^2} + \frac{gn_1}{r^4} + \ldots \end{aligned}\right\} e.$$

Macht man r ſo groß, daß man die Glieder, welche im Nenner r^2, r^4 enthalten, vernachläſſigen kann, ſo wird endlich

$$\frac{k(t^2-T^2)}{T^2t^2} = \frac{k_1(t_1^2-T_1^2)}{T_1^2t_1^2}.$$

Eliminirt man aus (a) und (b) die Größen h und h_1, ſo erhält man folgende für beide Nadeln ſymmetriſche Formel

$$f^2 = \frac{2\pi^2 g T T_1 \sqrt{kk_1}}{r^3 t t_1 \sqrt{(t^2-T^2)(t_1^2-T_1^2)}}.$$

Durch dieſen Ausdruck wäre demnach f gegeben und daher die Aufgabe gelöſet. Allein der ſo gefundene Werth von f kann nur wenig Genauigkeit gewähren, weil man doch die Nadeln etwas weit von einander entfernen muß, damit die Anordnung ihres Magnetismus nicht durch ihre zu große Nähe leide, und daher die Differenzen $t - T$, $t_1 - T_1$ ſo klein werden, daß die unvermeidlichen Beobachtungsfehler einem zu großen Theil derſelben gleich kommen. Um die Nadeln einander hinreichend nähern zu können und den Werth von f richtig zu finden, laſſe man dieſelbe Nadel in verſchiedenen Entfernungen von der anderen ſchwingen, wovon aber die größte klein genug iſt, um den Beobachtungsfehlern keinen zu großen Einfluß auf $t - T$ zu geſtatten, nehme dann für dieſe Beobachtungen von den Gleichungen (e) nur wenige der erſteren Glieder und finde aus denſelben die Größen ghh_1, gm, gn, gm_1, gn_1 und bilde eine Gleichung, die nur die Unbekannte $ghh_1 = \psi^2$ enthält. Aus (a) und (b) wird durch Multiplication: $f^2 hh_1 = \frac{\pi^4 kk_1}{(tt_1)^2}$ oder mittelſt $ghh_1 = \psi^2$, $\frac{f^2\psi^2}{g} = \frac{\pi^4 kk_1}{(tt_1)^2}$ und wenn man $\frac{\pi^2\sqrt{kk_1}}{tt_1\psi} = \Phi$ ſetzt $f^2 = \Phi^2 g$.

Daß die Schwingungen vor der Aufnahme ihrer Dauer in die Rechnung auf unendlich kleine Bögen reducirt werden müſſen, iſt für ſich klar.

Zweites Kapitel.

Freier Magnetismus künſtlicher Magnete.

21. Die Geſammtkraft eines Magnetes hängt vom Magnetismus ſeiner einzelnen Stellen ab. In jeder Hälfte des Magnetes erſcheint eine der zwei vorhandenen Kräfte, des ſüdlichen und nördlichen Magnetismus vorwaltend und man erhält für jede eine Reſultirende, deren Angriffspunct ein magnetiſcher Pol heißt. In der Regel haben beide Pole dieſelbe Stärke und die Kraft erſcheint in beiden magnetiſchen Hälften auf gleiche Weiſe vertheilt. Man kann dieſe Vertheilung bekanntlich durch Schwingungsverſuche oder mittelſt der magnetiſchen Wage ausmitteln.

22. Worin das Weſen des magnetiſchen Princips auch immer beſtehen mag, ſo kann man ſich doch den inneren Verlauf der Herſtellung des magnetiſchen Gleichgewichtes in einem Magnetſtabe auf folgende Weiſe vorſtellen: In jedem Elemente des Stabes befindet ſich Nord- und Südmagnetismus und beide wirken auf den Magnetismus des angrenzenden Elementes, bewirken dadurch das Hervortreten ähnlicher Kräfte; die ſich anziehenden, ungleichnamigen Kräfte binden ſich gegenſeitig und ſchwächen dadurch ihre Wirkung nach Außen. Denkt man ſich einem Elemente, welches an einem Ende eines Magnetſtabes liegt, die magnetiſche Kraft A ertheilt, ſo erwecket dieſe den Magnetismus des nächſten Elementes, bindet einen Theil desſelben, ſo daß nur noch Am übrig bleibt, und dieſes iſt der freie Magnetismus des betrachteten Elementes. Die Kraft dieſes Elementes weckt die des zweiten, bindet aber wieder davon den Theil m ſo, daß deſſen freier Magnetismus Am^2 iſt u. ſ. f. bis zum ν^{ten} Elemente, das den Magnetismus Am^ν haben wird. Allein dieſes bezieht ſich nur auf einen Pol des Magnetes, z. B. auf den nördlichen. Der ſüdliche bewirkt etwas ähnliches und wenn man das äußerſte Element der ſüdmagnetiſchen Hälfte als das n^{te} anſieht und in demſelben die Kraft B erweckt denkt, ſo muß dieſes im ν^{ten} Elemente ſüdlichen Magnetismus von der Intenſität $Bm^{n-\nu}$ hervorrufen. Heißt demnach I die Intenſität der magnetiſchen reſultirenden Kraft des ν^{ten} Elementes, ſo erhält man

$$I = Am^{\nu} - Bm^{n-\nu}$$

oder weil in der Regel $A = B$ iſt:

$$I = A(m^{\nu} - m^{n-\nu}).$$

Das Verhältniß zwiſchen n und ν hängt offenbar blos von der Länge des Magnetſtabes ab. Heißt a die halbe Länge desſelben, x die Entfernung des Elementes, dem die Zahl ν entſpricht, von dem Ende, deſſen Magnetismus A genannt wurde, ſo iſt offenbar $\nu = \frac{n}{2a}.x$; $n - \nu = \frac{n}{2a}(2a - x)$, und daher

$$I = A\left(m^{\frac{n}{2a}.x} - m^{\frac{n}{2a}(2a-x)}\right)$$

oder wenn man $m^{\frac{n}{2a}} = \lambda$ ſetzt:

$$I = A(\lambda^{x} - \lambda^{2a-x}) \ldots\ldots. (H).$$

23. Eine nähere Analyſe dieſes Ausdruckes zeigt, in wie weit er mit der Erfahrung übereinſtimmt. Am erſten Ende des Stabes iſt $x = 0$ und daher $I = A(1 - \lambda^{2a})$; am anderen Ende iſt $x = 2a$ und deßhalb $I = A(\lambda^{2a} - 1)$, mithin ſind beide der Intenſität nach gleich, nur den Zeichen nach entgegengeſetzt, wie es der Erfahrung gemäß iſt. Bei einem Verſuche Coulomb's wurde an einem dünnen 27 Z. langen Magnetſtabe für $x = 1$, $I = 90$ und für $x = 4.5$, $I = 9$ gefunden. Sucht man daraus A und λ, ſo findet man mit Vernachläſſigung des ſubtractiven, ſtets ſehr kleinen Theiles $90 = A\lambda$ und $9 = A\lambda^{4.5}$ und daraus $\lambda = 0.517948$, $A = 173.76$. Mittelſt dieſer Werthe kann man nun die den anderen Puncten entſprechenden leicht berechnen. Folgende Tafel enthält ſowohl die Reſultate der Rechnung, als die der Beobachtung nebſt der zwiſchen beiden obwaltenden Differenz.

Entfernung vom Nordende in Zollen	Magnetiſche Kraft		Differenz
	berechnet	beobachtet	
0	173.76	165 +	+ 8.76 —
1	90.00	90	0
2	46.62	48	— 1.38
3	24.14	23	+ 1.14
4.5	9.00	9	0.00
6	3.35	6	— 2.65

Bedenket man die Schwierigkeit ſolcher Beobachtungen und den Umſtand, daß ſich das erſte Reſultat nicht unmittelbar daraus ergab, ſondern dem Gange der Beobachtung gemäß von **Coulomb** angenommen wurde, ſo wird man mit der Übereinſtimmnng der berechneten Columnen mit den Beobachtungen nicht unzufrieden ſeyn können.

24. Nach der vorhergehenden Formel iſt der freie Magnetismus an einem Ende $A(1-\lambda^{2a})$. Befindet ſich der Magnet genau im Sättigungspuncte, ſo kann dieſe Größe nur von der Länge a ganz unabhängig ſeyn. Dieſes fordert, daß A im verkehrten Verhältniſſe mit $(1-\lambda^{2a})$ ſteht, und deutet zugleich darauf hin, daß auch für den Fall, als der Magnetſtab nicht geſättiget iſt, A eine Form wie etwa $\frac{M(1+\lambda^{aa})}{1-\lambda^{aa}}$ hat, wo M eine andere Conſtante und α eine ganze, poſitive Zahl bedeutet, die größer iſt als 1. Dieſem gemäß erhält man für den freien Magnetismus des vorhin betrachteten Endes den Ausdruck

$$\frac{M(1-\lambda^{2a})(1+\lambda^{\alpha a})}{1-\lambda^{\alpha a}}$$

und für die Intenſität der Stelle, welcher die Abſciſſe x entſpricht:

$$I = M\,\frac{(1+\lambda^{\alpha a})}{1-\lambda^{\alpha a}}\,(\lambda^{x}-(\lambda^{2a-x})\;\ldots\ldots(I)$$

Sucht man die Reſultirende R aller Intenſitäten und nennt X die Abſciſſe ihres Angriffspunctes, d. h. des magnetiſchen Poles, ſo erhält man

$$R = -\,\frac{M(1+\lambda^{\alpha a})\,(1-\lambda^{a})^{2}}{\log\operatorname{hyp}\lambda\,(1-\lambda^{\alpha a})}$$

$$X = -\,\frac{2a\mu^{a} - \frac{1-\lambda^{2a}}{\log\operatorname{hyp}\lambda}}{(1-\lambda^{a})^{2}}$$

und für den Abſtand des betreffenden Poles von der Mitte des Magnetes

$$a - X = \frac{a(1+\lambda^{2a}) + \frac{1-\lambda^{2a}}{\log\operatorname{hyp}\lambda}\lambda}{(1-\lambda^{a})^{2}}\;\ldots\ldots(K).$$

25. Die Größe $a-X$ bezeichnet die Länge des Hebelarmes, auf welchen der Erdmagnetismus wirkt, um den Magnet in die Lage des Gleichgewichtes zu bringen. Heißt h der horizontal wirkende

Theil dieſer Kraft für jeden der zwei Pole, ſo wird das Moment Q der beſagten Kraft

$$Q = -\frac{2Mh(1+\lambda^{\alpha a})}{\log hyp^{\lambda}(1-\lambda^{\alpha a})}\left\{a(1+\lambda^{2a}) + \frac{(1-\lambda^{2a})}{\log hyp\,\lambda}\right\} \dots (L)$$

Iſt der Magnet um den Winkel γ aus dem magnetiſchen Meridian gebracht, ſo muß dieſes Moment mit $\sin\gamma$ multiplicirt werden. Für einen Magnet, deſſen Länge 6 Z. überſchreitet, verſchwindet $\lambda^{\alpha a}$ gegen 1, und für einen ſolchen wird daher

$$Q = -\frac{2Mh}{\log hyp\,\lambda}\left(a + \frac{1}{\log hyp\,\lambda}\right)\sin\gamma.$$

Hat man an zwei Magneten, deren Länge $2a_1$ und $2a_2$ ſind, die Momente Q_1 und Q_2 kennen gelernt, ſo kann man mittelſt derſelben den conſtanten Factor $-\frac{2Mh}{\log hyp\lambda}\sin\gamma = N$ und $\log hyp\,\lambda$ eliminiren. Denn man hat:

$$Q_1 = N\left(a_1 + \frac{1}{\log hyp\,\lambda}\right);\ Q_2 = N\left(a_2 + \frac{1}{\log hyp\,\lambda}\right)$$

und daraus

$$N = \frac{Q_1 - Q_2}{a_1 - a_2};\ \log hyp\,\lambda = -\frac{(Q_1 - Q_2)}{Q_1 a_2 - Q_2 a_1}.$$

26. Mittelſt der vorausgegangenen Formel iſt man auch im Stande, die Schwingungsdauer eines magnetiſchen Pendels auf theoretiſchem Wege kennen zu lernen. Vorher (15) wurde nämlich das Moment der horizontalen Richtkraft eines magnetiſchen Pendels gleich $\frac{2\pi^2 ba^3}{3t^2}$ gefunden; in (25) ergab ſich für das Moment dieſer Richtkraft die Gleichung (L). Beide Werthe einander gleich geſetzt geben:

$$t^2 = -\frac{\pi^2 b \log hyp\,\lambda(1-\lambda^{a\alpha})}{3Mh(1+\mu^{a\alpha})} \cdot \frac{a^3}{a(1+\lambda^{2a}) + \frac{1-\lambda^{2a}}{\log hyp\,\lambda}} \quad (M)$$

Iſt der Magnet ſo lang, daß λ^{2a} und $\lambda^{\alpha a}$ eine nur unmerkliche Größe erhalten, ſo wird dieſe Formel geſchmeidiger, nämlich

$$t^2 = S^2 . \frac{a^3}{a + \frac{1}{\log hyp\,\lambda}} = S^2 . \frac{a^3}{a(1+\lambda^{2a} + \frac{1-\lambda^{2a}}{\log hyp\,\lambda}} \quad (N)$$

wo $S^2 = -\frac{\pi^2 b \log hyp\,\lambda}{3Mh}$ iſt.

27. Die Formel (I), welche die Grundlage aller ferneren Entwickelungen war, iſt bekanntlich nicht aus der Natur der Sache ab-

geleitet, ſondern blos nach einer ſehr wahrſcheinlichen Vorausſetzung angenommen. Es muß daher ihre Übereinſtimmung mit der Natur durch Vergleichung ihrer Ergebniſſe mit denen der Erfahrung ausgemittelt werden. Zu dieſem Behufe dienen die von Coulomb angeſtellten Beobachtungen. Dieſer Gelehrte fand, daß die Vertheilung der magnetiſchen Kraft in der Nähe der Endſtellen von Stäben, deren Länge 6 Z. überſchreitet, von der Länge der Stäbe unabhängig iſt, indem die Curve, deren Abſciſſen die Entfernung von dem Endpuncte, deren Ordinaten der Stärke des freien Magnetismus proportionirt ſind, für Stäbe von verſchiedener Länge gilt. Die Formel (I) zeigt auch in der That, daß für Stäbe, bei welchen man $\lambda^{2\alpha a}$ und λ^{2a-x} gegen 1 vernachläſſigen kann.

$$I = M\lambda^{x}$$

alſo eine von a unabhängige Größe iſt.

Die Formel (L) gibt den aus theoretiſchem Geſichtspuncte abgeleiteten Werth des Momentes der horizontal wirkenden Richtkraft des Erdmagnetismus für einen beſtimmten Magnetſtab an, für welchen die Conſtanten bekannt ſind. Dasſelbe Moment kann man auch mittelſt der magnetiſchen Drehwage finden, indem die Torſion des Fadens, woran der Magnet hängt, durch welchen die Ablenkung β (30°) vom magnetiſchen Meridian erzielt wird, dieſen Momenten offenbar gleich ſeyn muß. Vergleicht man die berechneten und beobachteten Momente, ſo findet man eine Übereinſtimmung, die bei einem ſo ſchwierigen Gegenſtande kaum größer ſeyn kann. Folgende Tafel enthält die Belege zu dieſer Behauptung aus einem von Coulomb angeſtellten Verſuche.

Länge des Magnetes 2 a	Moment		Differenz
	berechnet	beobachtet	
18 Z.	285°.913	288°	— 2°.087
12	171.347	172	— 0 653
9	114.523	115	— 0.477
6	59.905	59	+ 0.905
4.5	35.366	34	+ 1.366
3	15.356	13	+ 2.356
1.5	3.229	3	+ 0.229
1	1.326	1.46	— 0.134
0.5	0.326	0.32	+ 0 006

Auch die Formel über die Schwingungsdauer läßt ſich mit der Erfahrung vergleichen. Coulomb brauchte zu ſolchen Verſuchen ein rechtwinkeliges Stahlblech von 3 L. Breite und 1 L. Dicke, und fand

bei einer Länge von	die Dauer von 20 Schwingungen
16 Z.	231″
12	180
10	154
8	136
6	98
4	80

Mittelſt der zwei erſten Beobachtungen kann man die Größe s und λ beſtimmen. Man findet $S = 1.3067$, $\log \lambda = 0.6998120 - 1$. Berechnet man nun die Schwingungsdauer mittelſt dieſer Werthe und der Formel (N), ſo findet man folgende Reſultate:

Länge 2 a	Dauer von 20 Schwingungen		Differenz
	berechnet	beobachtet	
10	155	154	+ 1
8	130	125	+ 5
6	107	98	+ 9
4	84	80	+ 4

28. Alle dieſe Verſuche, bis auf die zuletzt genannten, wurden mit der magnetiſchen Drehwage angeſtellt, deren Einrichtung hier wohl als bekannt vorausgeſetzt werden kann. Beim Gebrauche derſelben iſt es ſehr weſentlich, genau zu wiſſen, in welcher Lage der Magnetnadel der Faden, woran ſie hängt, keine Windung hat. Dieſe Lage wird man aber mit der Magnetnadel ſelbſt ſchwerlich finden, weil dieſe nicht da ruht, wo ſie der Faden nicht zu drehen ſucht, ſondern da, wo ſie der Windung dieſes und zugleich dem Erdmagnetismus genügt. Man muß deßhalb ſtatt der Magnetnadel eine kupferne Nadel einſetzen und den Zeiger, wodurch der Faden gewunden wird, ſo weit drehen, bis dieſe Nadel auf dem Nullpuncte der Eintheilung ſtehen bleibt. Soll nun der Faden keine Torſion haben, wenn die Nadel in den magnetiſchen Meridian einſpielt, ſo muß man den Kaſten dahin drehen, daß der Nullpunct ſeiner Theilung ſich in dieſem Meridiane befindet. Starke Schwankungen des Magnetes kann man dadurch vermindern, daß man ſtatt des ge=

bräuchlichen, den Faden ſpannenden Gewichtes eine Blechplatte anbringt, welche der Luft eine große Fläche darbietet; man kann dieſe ſogar im Waſſer ſpielen laſſen und dadurch den Magnet ſehr bald zur Ruhe bringen. Dabei muß aber das ganze Blech bis auf den Draht, woran es hängt, im Waſſer ſtehen, damit nicht die Capillarität auf die Torſion des Fadens Einfluß gewinne. Stärkere Magnete brauchen dicke Aufhängungsdrähte, ſolche, deren Richtkraft nur gering iſt, müſſen an feine Drähte befeſtiget werden.

Die Empfindlichkeit ſolcher Drähte iſt dem Momente der Kraft proportionirt, mit der ſie ſich, wenn ſie eine beſtimmte Windung erlitten haben, in die natürliche Lage zu verſetzen ſuchen. Dieſes Moment iſt nach (S. 201)

$$\frac{\pi e r^4 \psi}{2x},$$

wo π das Kreisverhältniß, r den Halbmeſſer des Drahtes, x ſeine Länge, ψ den Drehungswinkel und e eine von der Elaſticität des Stoffes abhängige Größe bedeutet.

29. Der Magnetismus eines Körpers iſt bekanntlich im Stande, auch in anderen Subſtanzen, deren Coercitivkraft nicht zu groß iſt, magnetiſche Kräfte hervorzurufen, die ſich dann auch nach den hier dargeſtellten Geſetzen in denſelben anordnen. Aus dieſen geht dann eine Rückwirkung auf den erregenden Magnet hervor, die ſich durch eine Anziehung oder Abſtoßung äußert. Dasſelbe muß natürlich auch der Erdmagnetismus bewirken, und ſeine Wirkungen können den Wirkungen eines anderen Magnetes entgegenſtehen oder ſie unterſtützen. Es ſey A (Fig. 194) der Mittelpunct einer weichen Eiſenmaſſe, die durch den Einfluß des Erdmagnetismus in zwei magnetiſche Hälften getheilt iſt, deren Pole n und s ſind; ferner SN eine Magnetnadel, C ihr Mittelpunct, CA eine gerade Linie durch den Mittelpunct der Eiſenmaſſe, CD die Lage des magnetiſchen Äquators am Beobachtungsorte; man nenne $CA = a$, $As = An = f$, $DCA = \gamma$, und ſtelle ſich vor, die geſammte Kraft, womit die Magnetnadel auf das Eiſen wirkt, gehe von C aus. Iſt dieſe Wirkung $= P$, die auf jeden einzelnen Pol hingegen p, ſo hat man

$$p\left(\frac{1}{Cs^2} - \frac{1}{Cn^2}\right) = p\left(\frac{Cn^2 - Cs^2}{Cn^2 . Cs^2}\right) = P.$$

Man hat aber

$$CD = a \cos\gamma,\ DA = a \sin\gamma,$$

$$Ds = a \sin\gamma - f,\ Dn = a \sin\gamma + f,$$

und daher

$$Cn^2 = a^2 \cos^2\gamma + a^2 \sin^2\gamma + 2\,\alpha f \sin\gamma$$
$$Cs^2 = a^2 \cos^2\gamma + a^2 \sin^2\gamma - 2\,a f \sin\gamma,$$

und

$$Cn^2 - Cs^2 = 4\,af \sin\gamma.$$
$$Cs^2.Cn^2 = (a^2 - 2\,af\sin\gamma)(a^2 + 2\,af\sin\gamma) = a^4 + 4\,a^2 f^2 \sin^2\gamma.$$

Iſt aber f gegen a ſehr klein, ſo wird

$Cs^2.Cn^2 = a^4$, und daher durch Subſtitution in P

$$P = \frac{4pf\sin\gamma}{a^3}.$$

Demnach ſteht die Kraft einer Eiſenmaſſe bei übrigens gleichen Umſtänden im geraden Verhältniſſe der Abſtände ihrer magnetiſchen Pole vom Mittelpuncte des Magnetes, worauf ſie wirkt, und im verkehrten Verhältniſſe der dritten Potenz der Mittelpuncte beider auf einander wirkender Körper. Liegt die gerade Linie vom Mittelpuncte der Eiſenmaſſe zu dem der Nadel im magnetiſchen Äquator, ſo iſt $\gamma = 0$, mithin auch $P = 0$ und die Nadel wird von der Eiſenmaſſe gar nicht abgelenkt.

30. Um die Größe der Ablenkung einer Magnetnadel durch eine ſtörende Eiſenmaſſe zu finden, ſey SN (Fig. 195) die Richtung einer ruhenden Magnetnadel in der Lage, wohin ſie der Erdmagnetismus verſetzt, $S_1 N_1$ die Lage, in welche ſie durch die Einwirkung der Eiſenmaſſe A verſetzt wird, und man nenne die Kraft, womit die Nadel in SN erhalten wird, M, die, welche ſie in $S_1 N_1$ erhält, m, $ACN = \alpha$, $NCN_1 = \vartheta$, und man hat:

$$m \sin(\alpha - \vartheta) = M \sin\vartheta,$$

und durch nähere Entwicklung

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{m\sin\alpha}{M + m\cos\alpha}.$$

Die Kraft S, welche aus beiden magnetiſchen Einwirkungen hervorgeht, iſt offenbar

$$S = \sqrt{(M^2 + m^2 - 2\,Mm\cos\vartheta)}.$$

31. Auf ähnliche Weiſe beſtimmt man die Einwirkung eines Magnetes auf einen anderen, nur wird es nicht wie vorhin erlaubt ſeyn, die Geſammtwirkung im Mittelpuncte des Magnetes concentrirt anzunehmen, weil die Pole deſſelben Magnetes einander

nicht ſo nahe ſtehen, als bei einem durch den Erdmagnetismus durch Vertheilung magnetiſirten Körper. Man denke ſich zwei Magnete in einer horizontalen Ebene, die Pole des einen ſeyen N und S (Fig. 196), die des andern n und s und der magnetiſche Mittelpunct des letzteren ſey in c. Erſterer ſey unbeweglich und ſeine Axe NS mache mit dem magnetiſchen Meridian AB den Winkel $\alpha = SNB$, während der letztere beweglich iſt und durch die Wirkung des Erdmagnetismus und des Magnetes N die Lage ns annimmt, ſo daß ſeine Axe ns mit dem magnetiſchen Meridian ab den Winkel φ, mithin mit der Axe NS den Winkel $\varphi - \alpha$ einſchließt. Man denke ſich ferner zwei Coordinatenaxen, ihr Anfangspunct ſey N, die der y ſey mit NS parallel, die andere x darauf ſenkrecht, und man laſſe von n, c, s Senkrechte auf Nx herab, ziehe Nn, Ns und nenne $Nnq = k$, $Nsp = \lambda$, $Nn = \Delta$ und $Ns = \delta$, $nc = nf = a$, $NS = 2a_1$, $cr = y$, $Nr = x$, endlich die Kraft des Erdmagnetismus R, die Kraft, womit der Pol N auf n und s wirkt, F und f. Da iſt nun die Wirkung des Poles N auf n gleich $\frac{Ff}{\Delta^2}$, und die desſelben Poles auf s gleich $\frac{Ff}{\delta^2}$. Erſtere läßt ſich in die Kräfte $\frac{Ff}{\Delta^2}\sin(\varphi + k)$, $\frac{Ff}{\Delta^2}\cos(\varphi + k)$, letztere in die Kräfte $\frac{Ff}{\delta^2}\sin(\varphi + \lambda)$ und $\frac{Ff}{\delta^2}\cos(\varphi + \lambda)$ zerlegen. Die zwei erſteren Theile beider Kräfte wirken dem Erdmagnetismus entgegen, die algebraiſche Summe ihrer Momente wird

$$\left\{\frac{Ff}{\Delta^2} a \sin(\varphi + k) + \frac{Ff}{\Delta^2} a \sin(\varphi + \lambda)\right\},$$

wo das Vorzeichen auf die Richtung der Kräfte hindeutet. Man hat aber auch

$$\Delta^2 = (x + a\sin\varphi)^2 + (y - a\cos\varphi)^2$$

$$\delta^2 = (x - a\sin\varphi)^2 + (y + a\cos\varphi)^2$$

$$\sin k = \frac{x + a\sin\varphi}{\Delta}, \quad \cos k = \frac{y - a\cos\varphi}{\Delta}$$

$$\sin\lambda = \frac{x - a\sin\varphi}{\delta}, \quad \cos\lambda = \frac{y + a\cos\varphi}{\delta}$$

und mittelſt dieſer Werthe aus obigem Momente

$$-Ffa\left(\frac{1}{\Delta^3}+\frac{1}{\delta^3}\right)(x\cos\varphi+y\sin\varphi).$$

Auf demſelben Wege erhält man für die Summe der Momente der ähnlichen Kräfte, welche aus der Wirkung des Poles S auf S und n hervorgehen:

$$Ffa\left(\frac{1}{\Delta_1^3}+\frac{1}{\delta_1^3}\right)\{x\cos\varphi+(y+2a_1)\sin\varphi\},$$

wobei Δ_1 und δ_1 die Abſtände des Poles S von n und s bedeuten.

Außer den hier beobachteten Kräften wirkt auch der Erdmagnetismus auf ns und ſucht, wenn ns um den Winkel $(\varphi-\alpha)$ aus dem magnetiſchen Meridian gebracht iſt, jeden Pol mit dem Momente $R\sin(\varphi-\alpha)$ dahin zurückzuführen. Die Summe der Momente in Beziehung auf beide Pole wird offenbar $2R\sin(\varphi-\alpha)$, und man hat daher als Bedingung des Gleichgewichtes des Magnetes ns folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}2R\sin(\varphi-\alpha)-F\left(\frac{1}{\Delta^3}+\frac{1}{\delta^3}\right)(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\\+f\left(\frac{1}{\Delta_1^3}+\frac{1}{\delta_1^3}\right)(x\cos\varphi+(y+2a_1)\sin\varphi)\end{array}\right\}=0\,..(a)$$

und hieraus

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{2R\sin\alpha-Fx\left(\frac{1}{\Delta^3}+\frac{1}{\delta^3}\right)-fx\left(\frac{1}{\Delta_1^3}+\frac{1}{\delta_1^3}\right)}{2R\cos\alpha-Fy\left(\frac{1}{\Delta^3}+\frac{1}{\delta^3}\right)+f(y+2a_1)\left(\frac{1}{\Delta_1^3}+\frac{1}{\delta_1^3}\right)}.$$

Es iſt leicht, hiervon für einzelne Fälle die zweckdienlichſte Transformation vorzunehmen.

32. Geht eine Änderung in der Richtung des Magnetes NS vor, ſo ändert ſich auch ns. Um das Verhältniß dieſer Änderungen zu finden, differenziire man die vorletzte Gleichung in Bezug auf φ und α, und man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} 2R\cos(\varphi-\alpha)+3fa\left(\frac{1}{\Delta^5}+\frac{1}{\delta^5}\right)(x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2 \\ +f\left(\frac{1}{\Delta^3}+\frac{1}{\delta^3}\right)(x\sin\varphi-y\cos\varphi) \\ -3fa\left(\frac{1}{\Delta_1^{\,5}}-\frac{1}{\delta_1^{\,5}}\right)\left((x\cos\varphi+y+2a_1\sin\varphi\right)^2 \\ -f\left(\frac{1}{\Delta_1^{\,3}}+\frac{1}{\delta_1^{\,3}}\right)(x\sin\varphi-y+2a_1)\cos\varphi) \end{array}\right\}\frac{d\varphi}{d\alpha}=2R\cos(\varphi-\alpha).$$

Mittelſt dieſer Gleichung findet man leicht dz, wenn $d\alpha$, φ und α gegeben ſind.

Drittes Kapitel.

Erdmagnetismus.

33. So lange wir das Weſen des Magnetismus nicht näher kennen, als es gegenwärtig der Fall iſt, werden wir uns magnetiſche Erſcheinungen außerhalb eines Körpers, deſſen Inneres wir nicht nach Belieben durchforſchen können, immer am naturgemäßeſten dadurch erklären, daß wir uns im Innern dieſes Körpers einen oder mehrere Magnete vorhanden denken, welche den auf der Erde vorhandenen natürlichen und künſtlichen Magneten analog ſind, zwei Pole wie dieſe, einen magnetiſchen Indifferenzpunct und eine Axe haben. Dieſem gemäß werden wir auch den Erdmagnetismus aus einem oder mehreren im Innern der Erde vorhandenen Magneten ſolcher Art zu erklären ſuchen. Um die Lage und nähere Beſchaffenheit des Erdmagnetes beſſer kennen zu lernen, gibt es nur einen Weg, und dieſer beſteht darin, daß man für irgend eine hypothetiſch angenommene Lage dieſes Magnetes die Wirkung berechnet, welche daraus auf einen an einem Orte der Erdoberfläche vorhandenen beweglichen Magnet hervorgeht. Da wir die ſo berechnete Wirkung mit der beobachteten Richtung des Erdmagnetismus an dieſer Stelle vergleichen können, ſo wird ſich daraus die Lage des Erdmagnetismus beſtimmen laſſen.

Es ſey $ABDE$ (Fig. 197) ein größter Kreis der Erde, C ſein Mittelpunct, mn ein in der Ebene dieſes Kreiſes liegender linearer Magnet, deſſen Indifferenzpunct und Mittelpunct der Axe in dem Halbirungspuncte a von mn ſich befindet. Die Axe dieſes Mag-

netes bis zum Umfange des Kreiſes verlängert, trifft denſelben in M und N, ſo daß MN die magnetiſche Sehne des Kreiſes iſt, und M und N die Magnetpole, D den magnetiſchen Mittelpunct auf der Erde vorſtellen. Der Abſtand des Erdmittelpunctes C vom Magnetmittelpuncte a, nämlich Ca, heißt des Magnetes Excentricität. Behandelt man nun dieſe magnetiſche Axe der Erde wie die Axe eines ihrer größten Kreiſe, und nennt die Ebene des Schnittes AMN den erſten magnetiſchen Meridian, eine darauf ſenkrechte, durch C und a gehende Ebene AOD den magnetiſchen Äquator, und daher E und B die magnetiſchen Pole desſelben; ſo iſt für einen Ort F an der Erdoberfläche MFN der magnetiſche Meridian, Fa der Magnethalbmeſſer, FG die magnetiſche Breite, und AaG die magnetiſche Länge dieſes Ortes.

34. Iſt die Excentricität Ca des Magnetes gegeben, ſo findet man leicht den Abſtand eines magnetiſchen Poles N von dem magnetiſchen Mittelpuncte, nämlich Na. Heißt $Ca = k$, der Erdhalbmeſſer $CN = a$, $NCD = \varepsilon$, ſo iſt

$$\cos\varepsilon = \frac{k}{a}.$$

Kennt man $Ma = A$, die geographiſche Länge λ, die Breite β des Punctes D und zugleich den Winkel α, welchen der erſte magnetiſche Meridian BDE mit jenem geographiſchen macht, in welchem D liegt; ſo iſt die Lage der Magnetaxe vollkommen beſtimmt, und es läßt ſich daraus die Länge und Breite der zwei Pole M und N und des magnetiſchen Äquators finden. Es ſey zu dieſem Ende (Fig. 198) der ſtereographiſche Entwurf der Erdfläche auf die Ebene des Äquators, das Auge im Südpol geſetzt, P der Nordpol der Erde, BDE jener größte Kreis, welcher vorher mit denſelben Buchſtaben bezeichnet war, und in welchem die Magnetaxe liegt, D der Mittelpunct der Magnetaxe und M der Nordpol des Magnetes auf der Erde, PDH der durch D gehende Meridian, und daher $DH = \beta$, $EDH = \alpha$, $DM = \varepsilon$. Man ziehe durch M den Meridian PMK, nenne die Breite MK des Poles $M = b$, die Längendifferenz $HPK = \vartheta$, und man hat aus dem ſphäriſchen Dreyecke DPM, wo $PD = 90^\circ - \beta$, $PM = 90 - b$ iſt:

$$\sin b = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\cos\alpha$$

$$\cot\vartheta = \frac{\cos\beta\cos\varepsilon + \sin\beta\cos\alpha\sin\varepsilon}{\sin\alpha\sin\varepsilon}$$

Mittelſt der letzteren Gleichung iſt die Länge von $M=\lambda+\vartheta$ gegeben.

Zur Beſtimmung des magnetiſchen Äquators ADO braucht man die Lage ſeiner Knoten A und O und den Winkel HOD zu kennen. Es ſey $HOD=\gamma$, $HO=\varkappa$ und man hat aus dem rechtwinkeligen Dreiecke HDO

$$\cos\gamma=\cos\beta\cos\alpha,\quad \operatorname{tang}\varkappa=\sin\beta\cot\alpha,$$

und daher die Länge des Knotens O durch $\lambda+\varkappa$, die des Knotens A durch $\lambda-\varkappa$, durch γ hingegen der Abſtand eines Poles des magnetiſchen Äquators vom gleichnamigen des geographiſchen gegeben.

35. Sind die magnetiſchen Pole und der magnetiſche Äquator gegeben, ſo kennt man auch die Lage des erſten magnetiſchen Meridians, und daraus findet man die magnetiſche Länge und Breite eines Ortes und umgekehrt. Es ſey F ein Ort auf der Erdoberfläche, PL der durch F gehende Meridian, Q ein Pol des magnetiſchen Äquators und QFR der zu F gehörige magnetiſche Breitenkreis, mithin FR des Ortes magnetiſche Breite B, ſeine Länge $EQR=L$. Die geographiſche Breite FL ſey φ, ſeine Länge $\mathcal{E}$ und man ſetze $\mathcal{E}-\lambda=\psi$. Man bezeichne ferner mit ρ den Bogen KL, mit μ den Winkel PDF, mit $\mathcal{E}$ den Winkel QDF, und es iſt aus dem Dreyecke PDF

$$\cos\rho=\sin\beta\sin\varphi+\cos\beta\cos\varphi\cos\psi \;\ldots\ldots\; (a)$$

$$\cot\mu=\frac{\cos\beta\sin\varphi-\sin\beta\cos\varphi\cos\psi}{\cos\varphi\sin\psi}\;\ldots\; (b)$$

$$\sin\rho\sin\mu=\cos\varphi\sin\psi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (c)$$

Ferner aus dem Dreyecke DQF

$$\sin B=\sin\rho\cos(\mu-\alpha)=\sin\rho\sin\mu(\cot\mu\cos\alpha+\sin\alpha)$$

und hieraus mittelſt (b) und (c)

$$\sin B=\cos\beta\cos\alpha\sin\varphi-\sin\beta\cos\alpha\cos\varphi\cos\psi+\sin\alpha\cos\varphi\sin\psi.$$

Ferner iſt in demſelben Dreyecke

$$\operatorname{tang}L=\operatorname{tang}\rho\sin(\mu-\alpha)=\frac{\sin\rho\sin\mu}{\cos\rho}(\cos\alpha-\cot\mu\sin\alpha)\,..\,(d)$$

und mittelſt (a) (b) (c)

$$\operatorname{tang}L=\frac{\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi-\cos\beta\sin\alpha\sin\varphi+\sin\beta\sin\alpha\cos\varphi\cos\psi}{\cos\beta\sin\varphi+\cos\beta\cos\varphi\cos\psi}$$

Weiter iſt aus dem Dreyecke DQF

$$\cos\rho = \cos B \cos L \,\ldots\ldots\ldots\, (e)$$

$$\tan\varepsilon = \cot B \sin L \,\ldots\ldots\ldots\, (f)$$

$$\sin\rho \sin\varepsilon = \cos B \sin L \,\ldots\, (g)$$

Aus dem Dreyecke DPF folgt ferners

$$\sin\varphi = \sin\beta\cos\rho + \cos\beta\sin\rho\cos(\varepsilon+\alpha)$$

$$= \sin\beta\cos\rho + \frac{\cos\beta\cos\alpha\sin\rho\sin\varepsilon}{\tan\varepsilon} - \cos\beta\sin\alpha\sin\rho\sin\varepsilon.$$

Subſtituirt man die Werthe aus (e) (f) (g), ſo wird

$$\sin\varphi = \sin\beta\cos B\cos L + \cos\beta\cos\alpha\sin B - \cos\beta\sin\alpha\cos B\sin L.$$

Ferner hat man:

$$\cot\psi = \frac{\cos\beta\cos\rho - \sin\beta\sin\rho\cos(\varepsilon+\alpha)}{\sin\rho\sin(\varepsilon+\alpha)}$$

$$= \frac{\cos\beta\cos\rho - \sin\beta\cos\alpha\sin\rho\cos\varepsilon + \sin\beta\sin\alpha\sin\rho\sin\varepsilon}{\cos\alpha\sin\rho\sin\varepsilon + \sin\alpha\sin\rho\cos\varepsilon}$$

und mittelſt (e) (f) und (g)

$$\cot\psi = \frac{\cos\beta\cos B\cos L - \sin\beta\cos\alpha\sin B + \sin\beta\sin\alpha\cos B\sin L}{\cos\alpha\cos B\sin L + \sin\alpha\sin B}$$

Soll auch der Winkel $PFQ = \delta$ gefunden werden, den der magnetiſche Breitenkreis mit dem Meridian des Ortes einſchließt, ſo hat man im Dreiecke DPQ

$$\sin DPQ = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad \cot DPQ = -\sin\beta\cot\alpha = -\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

und daher

$$\cos DPQ = -\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\gamma},$$

woraus dann folgt:

$$\cot FPQ = \cot(DPQ - DPF) = \frac{\sin\alpha\sin\psi - \sin\beta\cos\alpha\cos\psi}{\sin\alpha\cos\psi + \cos\alpha\sin\beta\sin\psi}$$

ferner iſt

$$\sin FPQ = \sin(DPQ - DPF) = \frac{\sin\alpha\cos\psi + \cos\alpha\sin\beta\sin\psi}{\sin\gamma} \quad (k).$$

Endlich aus dem Dreiecke PFQ

$$\cot PFQ = \frac{\cos\gamma \cos\varphi - \sin\gamma \sin\varphi \cos FPQ}{\sin\gamma \sin FPQ}$$

$$= \frac{\cos\gamma \cos\varphi}{\sin\gamma \sin FPQ} - \sin\varphi \cot PFQ \quad . \quad . \quad (l).$$

Setzt man für $\cos\gamma$ den Werth $\cos\beta \cos\alpha$, ſo erhält man mittelſt (k) und (c)

$$\cot \vartheta = \frac{\cos\alpha \cos\beta \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi \sin\psi + \cos\alpha \sin\beta \sin\varphi \cos\psi}{\cos\alpha \cos\psi + \cos\alpha \sin\beta \sin\psi}$$

36. Da nun die magnetiſche Länge und Breite eines Ortes auf der Erdoberfläche bekannt ſind, ſo läßt ſich leicht der magnetiſche Halbmeſſer R für denſelben finden. Man hat nämlich in Fig. (197), wenn man vom betreffenden Orte F auf den magnetiſchen Breitenkreis MFN das Loth fällt und ſowohl aI als CI zieht:

$FG = B$, $GA = L$, $Ca = a \cos\varepsilon$, $FJ = a \sin B$, $CJ = a \cos B$,

ferner aus dem Dreiecke aCJ

$$aI^2 = CI^2 + Ca^2 - 2\,CI\,.\,Ca\,.\cos aCI = a^2 (\cos^2 B + \cos^2\varepsilon)$$
$$- 2a^2 \cos B \cos\varepsilon \cos L\, Fa^2 = R^2 = FI^2 + Ia^2 =$$
$$a^2 (1 + \cos^2\varepsilon - 2\cos\varepsilon \cos B \cos L.) = a^2 A.$$

Der Halbmeſſer R macht mit der magnetiſchen Axe den Winkel $FaM = x$, und man hat $FaM = aFI$ und

$$\sin x = \frac{aI}{Fa} = \frac{\sqrt{(A^2 - \sin^2 B)}}{A}; \quad \cos x = \frac{PI}{Fa} = \frac{\sin B}{A}$$

und hieraus

$$\tang x = \frac{\sqrt{(A^2 - \sin^2 B)}}{\sin B}.$$

37. Es ſei FS die Lage, welche eine frei im Schwerpuncte aufgehängte Magnetnadel im Orte F durch den Einfluß des Erdmagnetismus annimmt, und man nenne $Fma = \eta$, $mFa = m$, $nFa = n$. Die Entfernung der Pole m und n von F, nämlich $Fm = \Delta$, $Fn = \delta$, und nehme an, alle Puncte jeder Nadelhälfte werden von Kräften afficirt, die mit Fm, Fn parallel ſind. Die Anziehung oder Abſtoßung für die Entfernung $= 1$ werde als Einheit vorausgeſetzt. Da iſt nun die nach mF wirkende Kraft $\frac{1}{\Delta^2}$, die nach nF wirkende $\frac{1}{\delta^2}$, und wenn man jede in zwei

Kräfte zerlegt, deren eine mit FS parallel, die andere darauf ſenkrecht iſt, ſo findet man an letzterer jene, wodurch die Lage FS des beweglichen Magnetes beſtimmt wird. Dieſe ſind $\frac{1}{\varDelta^2}\sin(\eta-m)$ und $-\frac{1}{\delta^2}\sin(\eta+n)$, wo das negative Zeichen Abſtoßung bedeutet. Für das Gleichgewicht erhält man:

$$\frac{1}{\varDelta^2}\sin(\eta-m)=\frac{1}{\delta^2}\sin(\eta+n) \text{ und daraus}$$

$$\tang\eta=\frac{\delta^2\sin m+\varDelta^2\sin n}{\delta^2\cos m-\varDelta^2\cos n}.$$

38. Man kann die Winkel m und n ſelbſt als Functionen von $\varDelta$, δ und x und der halben Axenlänge $ma=f$ beſtimmen. Es iſt nämlich im Dreiecke mFa nach Einführung der bereits bekannten Bezeichnungen

$$\varDelta^2=R^2+f^2-2Rf\cos x \quad ; \sin m=\frac{f\sin x}{\varDelta}$$

$$\tang m=\frac{f\sin x}{R-f\cos x} \quad \text{oder} \quad \cos m=\frac{R-f\cos x}{\varDelta}$$

ferner aus dem Dreiecke nFa

$$\delta^2=R^2+f^2+2Rf\cos x; \ \sin n=\frac{f\sin x}{\delta}$$

$$\tang n=\frac{f\sin x}{R+f\cos x} \quad \text{oder} \quad \cos n=\frac{R+f\cos x}{\delta}$$

Setzt man dieſe Werthe in obigen Ausdruck von η, ſo wird

$$\tang\eta=\frac{(\delta^3+\varDelta^3)f\sin x}{(\delta^3-\varDelta^3)R-(\delta^3+\varDelta^3)f\cos x}$$

Weil aber

$$\delta^3-\varDelta^3=(\delta-\varDelta)(\delta^2+\varDelta\delta+\varDelta^2)=\frac{\delta^2-\varDelta^2}{\delta+\varDelta}(\delta^2+\varDelta\delta+\varDelta^2)$$

iſt, ſo wird

$$\tang\eta=\frac{(\varDelta+\delta)(\varDelta^3+\delta^3)}{4R^2(\delta^2+\varDelta\delta+\varDelta^2)-(\delta^3+\varDelta^3)(\delta+\varDelta)}\cdot\tang x$$

Fallen m und n ſehr nahe an a, ſo kann man $\varDelta=\delta=R$ ſetzen, und hat

$$\tang\eta=\tfrac{1}{2}\tang x$$

39. Der Winkel SFC iſt offenbar der Complementswinkel zur magnetiſchen Neigung i im Orte F. Für dieſen Winkel hat man

$$\cos SFC = \cos SFI \cos CFI + \sin SFI \sin CFI \cos aIC \quad (a)$$

Aber $AFI = \chi$ ferner $\tang SFa = \frac{1}{2} \tang \chi = \frac{\sqrt{(A^2 - \sin^2 B)}}{2 \sin B}$

und daraus

$$\cos SFa = \frac{2 \sin B}{\sqrt{(3 \sin^2 B + A^2)}}, \quad \sin SFa = \frac{\sqrt{(A^2 - \sin^2 B)}}{\sqrt{(3 \sin^2 B + A^2)}}$$

$$\cos SFI = \sin (SFa + \chi) = \frac{3 \sin B \sqrt{(A^2 - \sin^2 B)}}{A \sqrt{(3 \sin^2 B + A^2)}}$$

$$\cos SFI = \cos (SFa + \chi) = \frac{3 \sin^2 B - A^2}{A \sqrt{(3 \sin^2 B + A^2)}}$$

Endlich aus dem Dreiecke aCI

$$\cos aIC = \frac{aI^2 + CI^2 - aC^2}{2\, aC . CI} = \frac{\cos B - \cos \varepsilon \cos L}{\sqrt{(A^2 - \sin^2 B)}}$$

Dieſe Werthe in (a) geſetzt machen

$$\cos SFC = \frac{3 \sin^3 B - A^2 \sin B + 3 (\cos B - \cos \varepsilon \cos L)(\sin B \cos B)}{A \sqrt{(3 \sin^2 B + A^2)}}$$

oder reducirt und für SFB den Werth $90 - i$ geſetzt:

$$\sin i = \frac{(2 - \cos \varepsilon \cos B \cos L - \cos^2 \varepsilon) \sin B}{\sqrt{(3(1 + \cos^2 \varepsilon - 2 \cos \varepsilon \cos B \cos L) \sin^2 B + 1 + \cos^2 \varepsilon - 2 \cos \varepsilon \cos B \cos L)}}$$

Liegt F in einem magnetiſchen Pol, ſo iſt $L = 0$, $B = \pm \varepsilon$ mithin $\sin B = \cos \varepsilon$ und

$$\sin i = \frac{\pm (2 - \cos^2 \varepsilon) - \cos^2 \varepsilon) \sqrt{(1 - \cos^2 \varepsilon)}}{\sqrt{\{(1 - \cos^2 \varepsilon) . 3 (1 - \cos^2 \varepsilon) + 1 - \cos^2 \varepsilon\}}} = \pm \sin \varepsilon$$

Im magnetiſchen Äquator iſt $B = 0$ und daher auch $i = 0$.
In den Polen des magnetiſchen Äquators iſt $B = 90°$ und daher

$$\sin i = \frac{4 - \cos^2 \varepsilon}{\sqrt{((1 + \cos^2 \varepsilon)(4 + \cos^2 \varepsilon)}}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\tang i = \frac{2 - \cos^2 \varepsilon}{3 \cos \varepsilon}$$

40. Denkt man ſich zu F eine berührende Ebene, ſo iſt die Projection der Magnetnadel FS auf dieſer Ebene die Richtung der horizontal ſchwebenden Magnetnadel mF und der Winkel, welchen ſie mit dem geographiſchen Meridian des Ortes macht, die Abweichung der Magnetnadel daſelbſt. Um dieſe zu finden, iſt die

Kenntniß des Winkels nothwendig, welche die Ebene FSa mit der Ebene des Meridians BFE einſchließt. Er ſei Θ, und man hat ihn aus dem ſphäriſchen Dreiecke, welches entſteht, wenn man aus F mit einem beliebigen Halbmeſſer Kreisbögen beſchreibt, welche in den Ebenen SFC, CFI, SFI liegen, und in welchen die in FC zuſammenſtoßenden Seiten den Winkel $180 - \Theta$ einſchließen. Es ſei daher F (Fig. 199) der Mittelpunct des Kreiſes $afod$, welcher in der Ebene des Kreiſes BFO liegt, fed der Horizont des Ortes F, und daher fd die Tangente zu F in Fig. (197). bFo (die kleinen Buchſtaben beziehen ſich auf Fig. 197, die großen auf Fig. 199, nur F gilt für beide) iſt der verlängerte Radius F, agc die Ebene des magnetiſchen Meridians, Fg die Linie, wo er den Horizont ſchneidet, mithin die Tangente zu MF, ac die verlängerte Linie FI. Ferner ſei Fh die Richtung einer im Gleichgewichte befindlichen Magnetnadel, Fe ihre Projection auf beo, und daher ebd das ſphäriſche Dreieck, um das es ſich handelt, und dFe der Winkel $180° - \Theta$. Man hat daher aus dieſem

$$\cot(180° - \Theta) = \cot\Theta = \frac{\cos SFI \sin CFI - \sin SFI \cos CFI \cos CIa}{\sin SFI \sin CIa}$$

$$= \frac{A^2 \cos B - 3 \cos \varepsilon \sin^2 B \cos L}{3 \cos \varepsilon \sin B \sin L}$$

$$= \frac{(1 + \cos^2 \varepsilon) \cos B - (2 + \sin^2 B) \cos \varepsilon \cos L}{3 \cos \varepsilon \sin B \sin L}$$

Heißt nun K der Winkel, welchen der magnetiſche Breitenkreis mit dem geographiſchen Meridian von F einſchließt, und D die Abweichung, ſo iſt für eine öſtliche Abweichung

$$D = K - \Theta.$$

41. Denkt man ſich im Innern der Erde zwei Magnete, ſo geht aus ihrer vereinten Wirkung eine Richtung der Magnetnadel hervor, welche die Reſultirende jener zwei Richtungen iſt, die die Nadel annehmen würde, wenn jeder Erdmagnet für ſich allein auf ſie wirkte. Kennt man die Abweichung und Neigung einer Magnetnadel, welche aus den Wirkungen jedes einzelnen Erdmagnetes hervorgeht, ſo kann man daraus die aus der Wirkung beider Magnete hervorgehende Abweichung und Neigung berechnen. Es ſei F (Fig. 200) ein Ort auf der Erde, AcH ſein Horizont, NFZ ſeine Scheitellinie, $AZHN$ ſein geographiſcher Meridian und daher AH ſeine Mittagslinie. Geſetzt eine frei ſchwebende, in ihrem Schwerpuncte

aufgehängte Magnetnadel komme in BF ins Gleichgewicht, wenn nur ein Magnet darauf wirkt, hingegen in FC, wenn nur der andere ihre Lage beſtimmt, und aus der Wirkung beider gehe die Lage FE hervor. Die Projection von FB auf AcH ſei Fb, die von FC auf dieſelbe Ebene Fc, endlich die von FE ſei Fd. Man ſetze die Neigungen $BFb = i_{,}$, $CFc = \iota$, $EFd = I$, die Abweichungen $bFH = a$, $cFH = a_{,}$, $dFH = A$, und ſuche a und I aus a, a, ι, $\iota_{,}$.

Da E offenbar in der Ebene BFC liegt, ſo kann man ſich durch FB, NC größte Kreisbögen denken, und ſo die ſphäriſchen Dreiecke NBC, NBE, NEC erhalten.

Aus den Dreiecken NBE und NCE wird nun

$$\sin BEN = \frac{\sin NB \sin BNE}{\sin BE}\,;\ \sin BEN = \frac{\sin NC \sin CNE}{\sin CE}$$

und aus dieſen zwei Gleichungen mit Berückſichtigung, daß $CNE = CNB - BNE$ und $CE = BC - BE$ iſt,

$$\operatorname{tang} BNE = \frac{\sin BE \,.\, \sin NC \sin CNB}{\sin CE \sin NB + \sin BE \,.\, \sin NC \cos CNB}$$

oder wegen $NB = 90^\circ - i_{,}$, $NC = 90^\circ - \iota_{,}$, $CNB = bc = a - a_{,}$,

$$\operatorname{tang} BNE = \frac{\sin BE \cos i_{,} \sin (a - a_{,})}{\sin (BC - BE) \cos \iota + \sin BE \cos \iota \cos (a - a_{,})}$$

$$= \frac{\sin (a - a_{,})}{\dfrac{\sin (BC - BE) \cos i}{\sin BE \cos i_{,}} + (\cos a - a_{,})}$$

$$\cot BNE = \frac{\sin (BC - BE) \cos i}{\sin BE \cos i_{,} (\sin a - a_{,})} + \cot (a - a_{,})$$

Heißt die Kraft, womit der eine Erdmagnet und die Magnetnadel auf einander wirken, Y, die für den andern Magnet $Y_{,}$, ſo iſt

$$\frac{\sin (BC - BE)}{\sin BE} = \frac{Y}{Y_{,}}$$ und mittelſt dieſes Werthes

$$\cot BNE = \frac{Y \cos i}{Y_{,} \cos \iota_{,} \sin (a - a_{,})} + \cot (a - a_{,})$$

Es iſt aber $A = a - BNE$ und $\cot A = \dfrac{\cot a \cot BNE + 1}{\cot a - \cot BNE}$

und daher durch Subſtitution

$$\cot A = \frac{Y \cos \iota \cos a + Y_{,} \cos \iota_{,} \cos a_{,}}{Y \cos \iota \cos a + Y_{,} \cos \iota_{,} \cos a_{,}}$$

Zur Beſtimmung der Neigung I hat man aus denſelben Dreiecken NBE und NCE

$$\cos BEN = \frac{\cos NB - \cos BE \cos NE}{\sin BE \sin NE},$$

$$\cos BEN = \frac{\cos CE \cos NE - \cos NC}{\sin CE \sin NE},$$

und daraus

$$\cos NE = \frac{\sin CE \cos NB + \sin BE \cos NC}{\sin CE \cos BE + \sin BE \cos CE}$$

$$= \frac{\sin CE \cos NB + \sin BE \cos CN}{\sin BC}$$

und weil $NE = 90^\circ - I$ iſt

$$\sin I = \frac{\sin CE \sin i + \sin BE \sin i_1}{\sin BC}.$$

42. Kennt man die Lage und Größe der Erdmagnete und die Abweichung der Magnetnadel an einem beſtimmten Orte, ſo läßt ſich daraus das Verhältniß der Kräfte der Erdmagnete finden. Dieſes Verhältniß iſt nämlich $\frac{Y}{Y_1}$, und man hat aus (41)

$$\cot BNE = \frac{Y \cos i}{Y_1 \cos i_1 \sin (a - a_1)} + \cot (\alpha - a_1)$$

und weil $BNE = bH - DH = a - A$ iſt, ſo wird

$$\frac{Y}{Y_1} = \frac{\cos i_1 \sin (A - a_1)}{\cos i \sin (a - A)}.$$

43. Die vorausgeſchickten Berechnungen, welche aus Mollweide's und Hanſteens Arbeiten entlehnt ſind, ſetzen den Phyſiker in den Stand, jede Hypotheſe über die Anzahl der Erdmagnete und ihre Lage zu prüfen, indem für jede Annahme dieſer Art die magnetiſche Abweichung und Neigung an jedem Orte der Erde ſo ausfallen muß, wie ſie ſich aus Beobachtungen ergibt. Mangel an Übereinſtimmung zwiſchen der Rechnung und den Ergebniſſen der Erfahrung zeigt eine Unrichtigkeit der Hypotheſe an, und die Beſchaffenheit der Differenz deutet oft zugleich darauf hin, wie die Hypotheſe umgeſtaltet werden muß, um naturgemäße Reſultate zu gewähren. Die vorhergehenden Formeln, verglichen mit einer großen Anzahl genauer magnetiſcher Beobachtungen, waren es zugleich,

die Hanſteen zur Annahme zweier Erdmagnete leiteten. Durch ſie gelangte er zur Kenntniß der Lage, relativen Stärke und Bewegung ihrer Pole. Sollte auch die Folgezeit lehren, daß man mit dieſen Annahmen nicht ausreicht, um alle Phänomene des Erdmagnetismus zu erklären, ſollte es ſich zeigen, daß der Erdmagnetismus ſelbſt nicht den in der Erde befindlichen Magneten zugeſchrieben werden kann, ſondern das Reſultat einer beſondern die ganze Erde betreffenden Modification ſey, ſo würden ſich doch noch ohne Änderung des Erfolges ein oder mehrere Magnete ſubſtituiren laſſen, und die entwickelten Formeln würden die Relationen zwiſchen den einzelnen magnetiſchen Größen richtig angeben.

Viertes Kapitel.

Theorie des Magnetismus.

44. Die Phänomene des Magnetismus werden faſt allgemein als das Reſultat der Zerſetzung eines ätheriſchen Fluidums angeſehen. So wie nämlich eine magnetiſirende Kraft auf einen des Magnetismus fähigen Körper wirkt, tritt durch ihren Einfluß in gewiſſen, ſehr kleinen Theilchen (magnetiſchen Elementen) des afficirten Körpers die genannte Zerſetzung ein, der Südmagnetismus trennt ſich vom Nordmagnetismus in jedem ſolchen Theilchen, kann aber nicht von einem Theilchen in das daran grenzende übergehen, und dieſe Zerſetzung dauert ſo lange, bis der erregte Magnetismus mit der äußeren Kraft ins Gleichgewicht getreten iſt. Doch wird dieſes Gleichgewicht nur möglich ſeyn, wenn die einwirkende Kraft eine conſtante Richtung und Größe hat, und in dieſem Falle wird das magnetiſche Fluidum an der Oberfläche jedes Elementes eine zwar allenthalben ſehr dünne, aber doch nicht an allen Stellen gleich dicke Schichte bilden. Iſt die Richtung und Größe der erregenden Kraft ſtets veränderlich, wie dieſes der Fall iſt, wenn der äußere Magnet beſtändig ſeinen Ort gegen die ſeinem Einfluſſe ausgeſetzten Elemente ändert, ſo kommen auch die zerſetzten Fluida in keinen Zuſtand des Gleichgewichtes, ſondern bewegen ſich in jedem Elemente mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit, die bei übrigens gleichen Umſtänden auch von der Natur der Elemente abhängt.

45. Man unterſuche nun die Wirknng eines magnetiſchen Elementes, in welchem das magnetiſche Fluidum durch den Einfluß ei-

ner äußeren Kraft bereits zerſetzt und auf irgend eine Weiſe auf deſſen Oberfläche oder in ſeinem Innern vertheilt iſt, auf einen der Lage nach gegebenen Punct. Es ſey M dieſer Punct, x, y, z ſeine rechtwinkeligen Coordinaten, A ein Punct des betreffenden magnetiſchen Elementes und $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ ſeine auf denſelben Anfangspunct bezogenen rechtwinkeligen Coordinaten, die Entfernung beider Puncte von einander heiße ρ, und man hat daher

$$\rho^2 = (x - x_{,})^2 + (y - y_{,})^2 + (z - z_{,})^2$$

Iſt nun B ein zweiter Punct desſelben magnetiſchen Elementes, und bezeichnet $\varkappa$ die Seite des Elementes als Würfel betrachtet, μ, ν, ξ die Coordinaten von B, welche zwar mit den vorhergehenden parallel ſind, aber auf den Anfangspunct A bezogen werden, ferner $\rho_{,}$ die Entfernung der zwei Puncte von einander; ſo iſt

$$\rho_{,}^2 = \{x - (x_{,} + \varkappa\mu)\}^2 + \{y - (y_{,} + \varkappa\nu)\}^2 + \{z - (z_{,} + \varkappa\xi)\}^2.$$

Verwandelt man $\rho_{,}$ in eine nach den Potenzen von $\varkappa$ wachſende Reihe und vernachläſſiget alle Glieder, welche Potenzen von $\varkappa$ enthalten, von der zweiten angefangen, welches angeht, ſobald $\rho_{,}$ gegen $\varkappa$ ſehr groß iſt, ſo wird:

$$\frac{1}{\rho_{,}} = \frac{1}{[(x-x_{,})^2 + (y-y_{,})^2 + (z-z_{,})^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{(x-x_{,})\mu + (y-y_{,})\nu + (z-z_{,})\xi}{[(x-x_{,})^2 + (y-y_{,})^2 + (z-z_{,})^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

das iſt

$$\frac{1}{\rho_{,}} = \frac{1}{\rho} + \frac{d.\frac{1}{\rho}}{d x_{,}} \varkappa\mu + \frac{d.\frac{1}{\rho}}{d y_{,}} \varkappa\nu + \frac{d.\frac{1}{\rho}}{d z_{,}} \varkappa\xi.$$

Es ſey nun $\varkappa^3 d\mu d\nu d\xi = A$ das Differenzial des Elementes und σA die Menge des freien nördlichen oder ſüdlichen Magnetismus an dieſer Stelle des Elementes, wo σ poſitiv oder negativ iſt, je nachdem nördlicher oder ſüdlicher Magnetismus gemeint wird, und für das geſammte magnetiſche Fluidum dieſes Elementes iſt

$$\int \sigma A = 0.$$

Die Wirkung des Fluidums σA auf B iſt $\frac{\sigma A}{\rho_{,}^2}$, und daraus wird die mit x, y, z parallele Wirkung η, $\eta_{,}$, η_2 gefunden, wenn man jene mit $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho}{dz}$ multiplicirt. Man erhält die Werthe

$$\eta = -\frac{\sigma A d\frac{1}{\rho_1}}{dx},\quad \eta_1 = -\frac{\sigma A d\frac{1}{\rho_1}}{dy},\quad \eta_2 = -\frac{\sigma A d\frac{1}{\rho_1}}{dz}.$$

Setzt man hier für $\frac{1}{\rho_1}$ den vorher gefundenen Werth und der Kürze halber

$$\int \sigma \mu A = \alpha_1;\ \int \sigma \nu A = \beta_1;\ \int \sigma \xi A = \gamma_1$$

$$\alpha_1 \cdot \frac{d.\frac{1}{\rho}}{dx_1} + \beta_1 \cdot \frac{d.\frac{1}{\rho}}{dy_1} + \gamma_1 \frac{d.\frac{1}{\rho}}{dz_1} = p,$$

ſo wird:

$$\eta = -\frac{\varkappa^3 dp}{dx},\quad \eta_1 = -\frac{\varkappa^3 dp}{dy},\quad \eta_2 = -\frac{\varkappa^3 dp}{dz} \quad \ldots\ (A).$$

Man ſieht hieraus, daß die Wirkung des magnetiſchen Elementes auf einen nicht ſehr nahen Punct von der Geſtalt des Elementes unabhängig ſey, von der Vertheilung des Magnetismus in demſelben aber nur in ſo weit abhänge, als dieſe auf die Größen α_1, β_1, γ_1 Einfluß hat. Es iſt klar, daß dieſe Formeln ſich nicht anwenden laſſen, wenn *M* zum magnetiſchen Elemente ſelbſt gehört.

46. Von der Wirkung eines magnetiſchen Elementes auf einen Punct *M* läßt ſich die Wirkung eines Körpers *C*, wovon jenes Element einen Theil ausmacht, auf denſelben Punct erſchließen; man muß aber dabei wohl unterſcheiden, ob *M* außerhalb oder in dieſem Körper liegt. Iſt erſteres der Fall, ſo denke man ſich *C* in Theile zerlegt, deren jedes zwar unendlich klein iſt gegen die Größe des ganzen Körpers, aber doch unendlich groß gegen ein magnetiſches Element. Die Summe *s* der in einem ſolchen Theilchen *v* enthaltenen magnetiſchen Elemente iſt offenbar kleiner, als die Zahl der Einheiten, welche *v* enthält, mithin $\frac{s}{v} < 1$. Man ſetze $\frac{s}{v} = k_1$, und man wird die Wirkung der in *s* enthaltenen Elemente auf *M* finden, wenn man in den Werthen (*A*) ſtatt der Größe $\varkappa^3$ ſetzt $k_1 v$ und α_1, β_1, γ_1 ſo nimmt, wie es das Mittel aus allen, den verſchiedenen Elementen zukommenden Werthen dieſer Größen verlangt. Es wird daher ſtatt η, η_1, η_2 zu ſetzen ſeyn:

$$\frac{dp}{dx} k_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1;\ \frac{dp}{dy} k_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1;\ \frac{dp}{dz} k_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

Die Summe der mit x_1 parallelen Wirkungen aller einzelnen Theile v gibt offenbar die Geſammtwirkung X des Körpers C nach x, und eben ſo geben die Summen der mit y und z parallelen Wirkungen dieſer Theile die Geſammtwirkung Y und Z nach y und z; man kann aber, wenn v unendlich klein iſt, ohne merklichen Fehler ſetzen:

$$X = -\iiint \frac{dp}{dx} k_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$

$$Y = -\iiint \frac{dp}{dy} k_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$

$$Z = -\iiint \frac{dp}{dz} k_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$

Wird aber ſtatt p obiger Werth, und der Kürze halber

$$P = \iiint \left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx_1} \alpha_1 + \frac{d.\frac{1}{\rho}}{dy_1} \beta_1 + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dz_1} \gamma_1 \right) k_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$

geſetzt, ſo wird endlich

$$X = -\frac{dP}{dx},\ Y = -\frac{dP}{dy},\ Z = -\frac{dQ}{dz} \ldots. (C).$$

47. Gehört M zum Körper C, ſo iſt die Wirkung, welche M erleidet, von dreifacher Art. Es wirken darauf jene Theile von C, deren Entfernung von M hinreichend groß iſt, um die Anwendung der vorhergehenden Formeln zu geſtatten. Dieſe kann man nach jenen Formeln berechnen, darf aber natürlich die Integration im Werthe von P auch nur auf dieſe Theile ausdehnen; man ſetze darum für dieſe Fälle P_1 ſtatt P. Ferner wirken auf M jene Theile von C, welche zu nahe an M liegen, als daß die Anwendung jener Formeln zuläſſig wäre. Ihre Wirkung nach x, y, z mag $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ſeyn. Endlich wirken ſelbſt die Theile des Elementes, wozu M gehört, auf M; dieſe Wirkung heiße nach den drei Coordinaten ε_1'', ε_2', ε_2''. Da aber M zum Körper C gehört und dieſer durch eine äußere Kraft im Zuſtande der magnetiſchen Vertheilung erhalten wird, ſo wird auch M von dieſer Kraft afficirt. Bezeichnet V die Menge der magnetiſchen Flüſſigkeit im erregenden Magnet, getheilt durch ihre Entfernung von M; ſo iſt die Wirkung dieſer Flüſſigkeit auf M nach x, y, z gleich $-\frac{dV}{dx}, -\frac{dV}{dy}, -\frac{dV}{dz}$, und daher die Reſultirenden aller auf M wirkenden Kräfte in dieſem Falle:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{nach } x & X_1 = -\frac{dV}{dx} - \frac{dP_1}{dx} + \varepsilon + \varepsilon' \\ \text{nach } y & Y_1 = -\frac{dV}{dy} - \frac{dP_1}{dy} + \varepsilon_1 + \varepsilon_1' \\ \text{nach } z & Z_1 = -\frac{dV}{dz} - \frac{dP_1}{dz} + \varepsilon + \varepsilon''\end{array}\right\} \dots (D).$$

48. Es ſeyen für einen Theil des Körpers C, deſſen Elemente ſehr weit von M abſtehen, $E\, E_1\, E_2\, P_2$ das, was vorhin $XYZP$ waren und man hat:

$$E = -\frac{dP_2}{dx},\; E_1 = -\frac{dP_2}{dy},\; E_2 = -\frac{dP_2}{dz}.$$

Setzt man für P_2 den Werth aus (46) und differenziirt die erſte Gleichung nach x, ſo erhält man:

$$E = \iiint \left(\frac{d.\frac{(x-x_1)}{\rho^3}}{dx_1} . \alpha_1 + \frac{d.\frac{(x-x_1)}{\rho^3}}{dy_1} . \beta_1 \right.$$

$$\left. + \frac{d.\frac{(x-x_1)}{\rho^3}}{dz_1} . \gamma_1 \right) k_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

und $k_1\, \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$ haben für dieſen Theil des Körpers nahe denſelben Werth wie für M. Bezeichnet man für dieſen Punct dieſe Größen mit k, α, β, γ, gleichwie ſeine Coordinaten $x\,y\,z$ waren, ſo wird

$$E = k\alpha \iiint \frac{d.\frac{(x-x_1)}{\rho^3}}{dx_1} dx_1\, dy_1\, dz_1$$

$$+ k\beta \iiint \frac{d.\frac{(x-x_1)}{\rho^3}}{dy_1} dx_1\, dy_1\, dz_1$$

$$+ k\gamma \iiint \frac{d.\frac{(x-x_1)}{\rho^3}}{dz_1} dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

Liegen die Axen von y_1 und z_1 in einer horizontalen Ebene und unter dem Stücke des Körpers C, welches hier betrachtet wird, iſt demnach x_1 vertical und die Geſtalt dieſes Körpers ſo beſchaffen, daß nur zwei Werthe von x_1 demſelben Werthe von y_1 und z_1 ent=

ſprechen; ſo muß die Integration innerhalb der Grenzen dieſer zwei Werthe vollzogen werden. Man erhält:

$$\iiint \frac{d.\frac{x-x_1}{\rho^3}}{dx_1} dy_1\, dz_1 = \iint \left(\frac{x-x_1}{\rho^3}\right) dy_1\, dz_1$$
$$- \iint \left[\frac{x-x_1}{\rho^3}\right] dy_1\, dz_1$$

wo die Verſchiedenheit der Klammern die zwei Grenzen bezeichnen ſoll. Man ziehe nun durch je zwei Puncte, für welche y_1 und z_1 einerlei Werth haben, eine Verticale und zugleich eine zur Oberfläche des betrachteten Stückes Normale, und nenne den Winkel, welchen die Verticale mit der Normalen macht, ε. Dieſer Winkel iſt, nach derſelben Richtung genommen, für den oberen Punct ſpitzig, für den unteren ſtumpf, und kann daher für jenen mit $+$, für dieſen mit $-$ bezeichnet werden. Da nun an beiden Puncten, um die es ſich hier handelt, das Differenzial der Oberfläche $d\omega$ einerlei Projection auf y_1 z_1 hat; ſo wird $dy_1\, dz_1 = \pm\, d\omega \cos\varepsilon$, wo das obere Zeichen für das obere, das untere für das untere Element des Körpers gilt. Man kann demnach das zweite Glied der vorhergehenden Gleichung durch $\iint \left(\frac{x-x_1}{\rho^3}\right) \cos\varepsilon\, d\omega$ bezeichnen und ſetzen:

$$\iiint \frac{d.\left(\frac{x-x_1}{\rho^3}\right)}{dx_1} dx_1\, dy_1\, dz_1 = \iint \left(\frac{x-x_1}{\rho^3}\right) \cos\varepsilon\, d\omega. \, (E)$$

Der Weg, auf welchem dieſe Formel gefunden wurde, führt auch zur Kenntniß der folgenden:

$$\iiint \frac{d\left(\frac{x-x_1}{\rho^3}\right)}{dy} dx_1\, dy_1\, dz_1 = \iint \left(\frac{x-x_1}{\rho^3}\right) \cos\varepsilon_1\, d\omega$$

$$\iiint \frac{d\left(\frac{x-x_1}{\rho^3}\right)}{dz} dx_1\, dy_1\, dz_1 = \iint \left(\frac{x-x_1}{\rho^3}\right) \cos\varepsilon_2\, d\omega$$

wo ε_1 und ε_2 die Winkel bezeichnen, welche die Normalen der betreffenden Puncte mit den Verticalen machen, wenn hinter einander y_1 und z_1 eine verticale Lage haben. Alle drei gefundenen Werthe geben nun, wenn man der Kürze halber

$$\alpha \cos \varepsilon + \beta \cos \varepsilon_1 + \gamma \cos \varepsilon_2 = F$$

ſetzt:

$$E = \iint \frac{x - x_1}{\rho^3} F d\omega,\ E_1 = \iint \frac{y - y_1}{\rho^3} F d\omega,$$

$$E_2 = \iint \frac{z - z_1}{\rho^3} F d\omega.$$

49. In (46) hatten wir

$$P = \iiint \left(\frac{d.\frac{1}{\rho}}{dx_1}\alpha_1 + \frac{d.\frac{1}{\rho}}{dy_1}\beta_1 + \frac{d.\frac{1}{\rho}}{dz_1}\gamma_1 \right) k_1 dx_1 dy_1 dz_1$$

Dieſe Gleichung läßt ſich auch ſo ſchreiben:

$$P = \begin{cases} \iiint \left(\frac{d.\frac{\alpha_1 k_1}{\rho}}{dx_1} + \frac{d.\frac{\beta_1 k_1}{\rho}}{dy_1} + \frac{d.\frac{\gamma_1 k_1}{\rho}}{dz_1} \right) dx_1 dy_1 dz_1 \\ - \iiint \left(\frac{d.\alpha_1 k_1}{dx_1} + \frac{d.\beta_1 k_1}{dy_1} + \frac{d.\gamma_1 k_1}{dz_1} \right) \frac{dx_1 dy_1 dz_1}{\rho} \end{cases}$$

oder wenn man ſtatt des zweiten rechts ſtehenden Theils Q ſetzt:

$$P = \iiint \left(\frac{d.\frac{\alpha_1 k_1}{\rho}}{dx_1} + \frac{d.\frac{\beta_1 k_1}{\rho}}{dy_1} + \frac{d.\frac{\gamma_1 k_1}{\rho}}{dz_1} \right) dx_1 dy_1 dz_1 - Q \,..(F)$$

Setzt man in den in 48 enthaltenen Gleichungen

$$\frac{x - x_1}{\rho^3} = \frac{k_1 \alpha_1}{\rho},\ \frac{y - y_1}{\rho^3} = \frac{k_1 \beta_1}{\rho},\ \frac{z - z_1}{\rho^3} = \frac{k_1 \gamma_1}{\rho},$$

ſo erhält man:

$$\iiint \frac{d.\frac{\alpha_1 k_1}{\rho}}{dx} dx_1 dy_1 dz_1 = \iint \frac{\alpha_1 k_1 \cos \varepsilon}{\rho} d\omega$$

$$\iiint \frac{d.\frac{\beta_1 k_1}{\rho}}{dy} dx_1 dy_1 dz_1 = \iint \frac{\beta_1 k_1 \cos \varepsilon_1}{\rho} d\omega$$

$$\iiint \frac{d.\frac{\gamma_1 k_1}{\rho}}{dx} dx_1 dy_1 dz_1 = \iint \frac{\gamma_1 k_1 \cos \varepsilon_2}{\rho} d\omega$$

und daher

$$P = \iiint \left(\alpha_1 \cos \varepsilon + \beta_1 \cos \varepsilon_1 + \gamma_1 \cos \varepsilon_2 \right) \frac{k_1\, d\omega}{\rho} - Q \,..\, (G).$$

50. Um das Integrale, welches P_1 (47) ausdrückt, zu finden, laſſe man die Integration ſich auf das ganze Volumen von C erſtrecken, und ziehe nach der Hand das Integral in Bezug auf jene Theile ab, auf welche ſich P_1 nicht bezieht. Man erhält ſo

$$\frac{dP_1}{dx} = \frac{dP}{dx} - E\,;\; \frac{dP_1}{dy} = \frac{dP}{dy} - E_1\,;\; \frac{dP_1}{dz} = \frac{dP}{dz} - E_2.$$

Der Theil, worauf ſich E, E_1 E_2 bezieht, iſt offenbar von einer Kugelfläche begrenzt, in deren Mittelpunct M liegt. Iſt nun λ der Winkel, welchen die von M nach einem Puncte der Kugeloberfläche gezogenen Gerade mit der Axe der x macht, μ hingegen jener, welchen die Ebene dieſes Winkels mit xz einſchließt; ſo iſt

$$x_1 - x = \rho \cos \lambda;\; y_1 - y = \rho \sin \lambda \sin \mu;\; z_1 - z = \rho \sin \lambda \cos \mu$$

$$\cos \varepsilon = \cos \lambda;\; \cos \varepsilon_1 = \sin \lambda \sin \mu;\; \cos \varepsilon_2 = \sin \lambda \cos \mu;$$

ferner $d\omega = \varphi^2 \sin \lambda\, d\lambda\, d\mu$, und daher nach der Integration die Ausdrücke E, E_1 E_2 von $\lambda = o$ bis $\lambda = \pi$ und von $\varepsilon = o$ bis $\varepsilon = 2\pi$

$$E - \tfrac{4}{3} \pi k \alpha;\; E_1 = \tfrac{4}{3} \pi k \beta;\; E_2 = \tfrac{4}{3} \pi k \beta;$$

mithin

$$\frac{dP_1}{dx} = \frac{dP}{dx} - \frac{4}{3} \pi k \alpha;\, \frac{dP_1}{dy} = \frac{dP}{dy} - \frac{4}{3} \pi k \beta;\, \frac{dP_1}{dz} = \frac{dP}{dz} - \frac{4}{3} \pi k \gamma.$$

Hiernach kann man nun die Größen X_1, Y_1, Z_1 näher beſtimmen. Vernachläſſigt man in den Gleichungen (D) die Größen ε', ε'_1, ε'_2, und bringt ε ε_1 ε_2 dadurch in Rechnung, daß man die Größen α, β, γ als abhängig anſieht von der Geſtalt des Theiles, worauf ſich ε ε_1 ε_2 beziehen, und von den partiellen Differenzialquotienten von V und P; ſo wird aus den genannten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{dV}{dx} - \frac{dP}{dx} + \frac{4}{3} \pi k \alpha \\ Y_1 &= -\frac{dV}{dy} - \frac{dP}{dy} + \frac{3}{4} \pi k \beta \\ Z_1 &= -\frac{dV}{dz} - \frac{dP}{dz} + \frac{4}{3} \pi k \gamma \end{aligned}\right\} \ldots . (H).$$

Vermöge der Natur der Größe V hat man

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

und eben ſo, falls der betreffende Punct nicht in der Oberfläche des Körpers liegt:

$$\frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dx^2} + \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dy^2} + \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dz^2} = 0.$$

Sucht man aus der Gleichung (G) die Werthe $\frac{d^2 P}{dx}$, $\frac{d^2 P}{dy}$, $\frac{d^2 P}{dz}$, und addirt ſie, ſo erhält man:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 P}{dy^2} + \frac{d^2 P}{dz^2} =$$

$$= \begin{cases} \int (a_1 \cos\xi + \beta_1 \cos\xi_1 + \gamma_1 \cos\xi_2) \left(\frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dx^2} + \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dy^2} + \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dz^2} \right) k_1 \frac{d\omega}{\rho} \\ - \iiint \left(\frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dx^2} + \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dy^2} + \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dz^2} \right) \omega_1 \, dx_1, \; dy_1, \; dz_1, \end{cases}$$

wobei ω_1 ſtatt $\frac{d . \alpha_1 k_1}{dx_1} + \frac{d . \beta_1 k_1}{dy_1} + \frac{d . \gamma_1 k_1}{dz_1}$ geſchrieben iſt. In dieſem letzteren Ausdrucke kann man aber, wie in (48), α, β, γ, k ſtatt a_1, β_1, γ_1, k_1 ſetzen; ferner hat man:

$$\frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dx^2} = \frac{d . \frac{x - x_1}{\rho_3}}{dx_1}; \; \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dy^2} = \frac{d . \frac{y - y_1}{\rho^3}}{dy_1}; \; \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dz^2} = \frac{d . \frac{z - z_1}{\rho^3}}{dz},$$

und daher:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 P}{dy^2} + \frac{d P^2}{dz^2} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{d . k\alpha}{dx} + \frac{d . k\beta}{dy} + \frac{d . k\gamma}{dz} \right) \left\{ \iiint \frac{\frac{x - x_1}{\rho^3}}{dx_1} dx_1 dy_1 dz_1 \right. \\ \left. + \iiint \frac{\frac{y - y_1}{\rho^3}}{dy_1} dx_1 dy_1 dz_1 + \iiint \frac{\frac{z - z_1}{\rho^3}}{dx_1} dx_1 dy_1 dz_1 \right\} \end{cases}$$

Vollzieht man endlich die Integration für eine Kugel, ſo erhält man:

$$\frac{d^2 P}{dx^2}+\frac{d^2 P}{dy^2}+\frac{d^2 P}{dz^2}=4\pi\left(\frac{d.k\alpha}{dx}+\frac{d.k\beta}{dy}+\frac{d.k\gamma}{dz}\right) \quad (K)$$

Iſt der Körper, um den es ſich handelt, homogen und allenthalben gleich warm, ſo iſt k conſtant, und

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0.$$

Aber aus (H) findet man

$$\frac{d\alpha}{dy}=\frac{d\beta}{dx},\ \frac{d\alpha}{dz}=\frac{d\gamma}{dx},\ \frac{d\beta}{dz}=\frac{d\gamma}{dy};$$

es ſind daher $\alpha\ \beta\ \gamma$ partielle Differenzialien irgend einer Function φ von $x\ y\ z$, ſo daß man hat:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\alpha\ \frac{d\varphi}{dy}=\beta\ \frac{d\varphi}{dz}=\gamma\ \ldots.\ (L)$$

und aus (K)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0.\ \ldots.\ (M)$$

51. Jede der drei Gleichungen (H) iſt ein partieller Differenzialquotient der Gleichung

$$V+P+\frac{4}{3}\pi k\varphi=0,$$

oder wenn man ſtatt $\frac{4}{3}\pi k\varphi$ ſchreibt φ,

$$V+P+\varphi=0.$$

Geht φ in φ_1 über, wenn man ſtatt x, y, z, ſetzt x_1, y_1, z_1

$$\text{ſo iſt auch } \alpha_1=\frac{d\varphi_1}{dx_1},\ \beta_1=\frac{d\varphi_1}{dy_1},\ \gamma_1=\frac{d\varphi_1}{dz_1},$$

ferner wegen

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0 \text{ auch } Q=0, \text{deßhalb aus } (C)$$

$$P=k\iiint\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\cos\varepsilon+\frac{d\varphi_1}{dy_1}\cos\varepsilon_1+\frac{d\varphi_1}{dz_1}\cos\varepsilon_2\frac{d\omega}{\rho}\right).$$

Die partiellen Differenzialquotienten dieſes Ausdruckes geben nach (C) die nach $x\,y\,z$ zerlegten reſultirenden Kräfte für einen Punct

M, und es iſt daher für den Fall des Gleichgewichtes alles ſo beſchaffen, als befände ſich an der Oberfläche von C eine flüſſige Schichte von der normalen Dicke

$$k\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\cos\xi + \frac{d\varphi_1}{dy_1}\cos\xi_1 + \frac{d\varphi_1}{dz_1}\cos\xi_2\right).$$

Iſt der Körper hohl, ſo kann man ihn als Differenz zweier Körper von derſelben Natur betrachten, wovon einer der Körper C ſelbſt aber ohne Höhlung, der andere hingegen die mit Maſſe erfüllte Höhlung vorſtellt. Da kann man nun auch die Rechnung für jeden dieſer zwei Körper beſonders vornehmen, und ihre Reſultate mit gehörigen Zeichen genommen, von einander abziehen.

52. Sobald eine äußere Kraft auf den Körper C wirkt, deſſen Coercitivkraft $= 0$ angenommen wird, muß eine Zerlegung des magnetiſchen Fluidums in demſelben Statt finden, bis zwiſchen der äußeren Kraft und dem freien Magnetismus Gleichgewicht herrſcht. Der Zuſtand der Vertheilung des Magnetismus hängt demnach von der äußeren Kraft X, Y, Z und von der Dauer ihrer Einwirkung ab. Von dieſen Größen müſſen demnach auch α, β, γ abhängen, da dieſe den magnetiſchen Zuſtand beſtimmen. Man ſuche nun einen Ausdruck für α, β, γ in Bezug auf den Punct M und ſetze zu dieſem Ende

$$\alpha = X_0 ft,\ \beta = Y_0 ft,\ \gamma = Z_0 ft$$

wo ft eine Function der Zeit t bezeichnet, die für $t = 0$ auch Null iſt, $X_0\, Y_0\, Z_0$ hingegen die Anfangs nach $x\ y\ z$ wirkenden Kräfte. Beginnt nach Verlauf der Zeit $t_1 < t$ eine neue äußere Kraft X_1, nach der mit x parallelen Richtung, und nach der Zeit t_2 wieder eine neue Kraft X_2 u. ſ. f., ſo erhält man:

$$\alpha = X_0 ft + X_1 f(t - t_1)$$
$$\alpha = X_0 ft + X_1 f(t - t_1) + X_2 (t - t_2).$$

Ändert ſich aber die urſprünglich wirkſame Kraft mit der Zeit continuirlich, ſo iſt $t_1 = dt$, $t_2 = 2\,dt$ ꝛc. und $X_1 = dX_0$, $X_2 = dX_1$ mithin

$$\alpha = X_0 ft + f(t - dt)\, dX_0 + f(t - 2\,dt)\, dX_1 + \ldots + f(dt)\, dX$$

ſtatt deſſen man auch ſchreiben kann:

$$\alpha = X_0 ft + \int_0^t f(t - \tau)\, dT,$$

wobei T der Werth von X für $t = \tau$ iſt. Auf ähnliche Weiſe findet man:

$$\beta = Y_0 f t + \int_0^t f(t-\tau)\, d T_1$$
$$\gamma = Z_0 f t + \int_0^t f(t-\tau)\, d T_2$$

Weil aber für $t = \tau\ f(t-\tau) = 0$ iſt, ſo wird durch partielles Integriren

$$\alpha = \int_0^t f_1(t-\tau)\, T d\tau;\ \beta = \int_0^t f_1(t-\tau)\, T_1 d\tau;\ \gamma = \int_0^t f_1(t-\tau)\, T_2 d\tau,$$

wo $\frac{d f t}{d t} = f_1 t$ iſt.

53. Sind die äußeren, auf C wirkenden Kräfte der Richtung und Größe nach conſtant, und die Zeit ihrer Wirkſamkeit, innerhalb welcher das magnetiſche Gleichgewicht nicht hergeſtellt iſt, ſehr kurz, ſo hat nach Verlauf dieſer Zeit $f t$ einen conſtanten Werth. Es ſei $f t = c$ und $f_1 t = 0$. Da iſt aber auch $\int_0^t f_1^t (t-\tau)\, d\tau = c$ und daher

$$\alpha = T c,\ \beta = T_1 c,\ \gamma = T_2 c \text{ oder } \alpha = X c,\ \beta = Y c,\ \gamma = Z c$$

Dieſe drei Ausdrücke geben mittelſt *(H)* folgende Ausdrücke:

$$\alpha + \frac{c}{1 - \frac{4\pi c}{3}} \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dP}{dx} \right) = 0.$$

$$\beta + \frac{c}{1 - \frac{4\pi c}{3}} \left(\frac{dV}{dy} + \frac{dP}{dy} \right) = 0.$$

$$\gamma = \frac{c}{1 - \frac{4\pi c}{3}} \left(\frac{dV}{dz} + \frac{dP}{dz} \right) = 0.$$

54. Sind die äußeren Kräfte nicht, wie bisher angenommen wurde, beſtändig, ſondern der Richtung und Größe nach veränderlich, ſo ſetze man:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = F t \text{ und eben ſo } \frac{d\alpha_1}{dx_1} + \frac{d\beta_1}{dy^1} + \frac{d\gamma_1}{dz_1} = F_1 t$$

und man erhält aus *(F)*

$$P = k \iint \alpha_1 \cos\varepsilon + \beta_1 \cos\varepsilon_1 + \gamma_1 \cos\varepsilon_2 \frac{d\omega}{\rho} - k \iiint \frac{F_1 t}{\rho} dx_1 dy_1 dz_1$$

und hieraus wieder

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 P}{dy^2} + \frac{d^2 P}{dz^2} = 4\pi k F t$$

und aus (H)

$$\frac{dX_1}{dx}+\frac{dY_1}{dy}+\frac{dZ_1}{dz}=-\frac{8\pi kFt}{3}$$

endlich mittelſt dieſer Ausdrücke aus den in 53 gefundenen Werthen von $\alpha\,\beta\,\gamma$

$$Ft=-\frac{8\pi k}{3}\int_0^t F\tau f_1(t-\tau)\,d\tau$$

Man ſieht leicht, daß man dieſer Gleichung durch $Ft=0$ entſpricht. Sie geſtattet aber auch nur dieſe einzige Auflöſung; man hat nämlich offenbar $Ft=0$ für $t=0$ und auch $F\tau=0$. Die Function Ft iſt aber von der Art, daß, wenn ſie für $t=0$ bis zu irgend einem Werth von t z. B. für $t=a$ Null wird, ſie auch für jeden größeren Werth von t, z. B. für $t=a+\lambda$, Null ſeyn muß. Es iſt nämlich nahe

$$F(a+\lambda)=-\frac{8\pi k}{3}\left(\int_0^a F\tau f_1(a+\lambda-\tau)\,d\tau+Faf_1(\lambda)\,\tau\right)$$

Iſt $Fa=0$ und $F\tau=0$, ſo iſt auch $F(a+\lambda)=0$.

Der Werth $Ft=0$ bringt aber mit ſich, daß auch

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0$$

iſt, und daß man bekommt

$$P=k\iint(\alpha_1\cos\varepsilon+\beta_1\cos\varepsilon_1+\gamma_1\cos\varepsilon_2)\,\frac{d\omega}{\rho}$$

55. Es ſey

$$\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}=\psi t$$

mithin aus den zwei erſten Gleichungen in (H)

$$\frac{dX_1}{dy}-\frac{dY_1}{dx}=\frac{4\pi k}{3}\psi t$$

und aus den Werthen von α, β, γ in 52

$$\psi t=\frac{4\pi k}{3}\iint_0^\tau \psi\tau f_1(t-\tau)\,d\tau,$$

und dieſe Gleichung hat wieder nur die Auflöſung $\psi t=0$. Dieſer gemäß wird

$$\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\beta}{dy}=0 \text{ und eben ſo } \frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}=0,\ \frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=0.$$

mithin werden $\alpha\beta\gamma$ partielle Differenzialquotienten einer Function φ von der Art, daß man hat

$$\frac{d\varphi}{dx}=\alpha,\ \frac{d\varphi}{dy}=\beta,\ \frac{d\varphi}{dz}=\gamma,$$

und daher wie in 50

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$$

$$P=k\iint\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\cos\varepsilon+\frac{d\varphi_1}{dy_1}\cos\varepsilon+\frac{d\varphi_1}{dz_1}\cos\varepsilon_2\right)\frac{d\omega}{\rho}$$

Die Gleichungen für $\alpha\ \beta\ \gamma$ in 52 laſſen ſich mittelſt *(H)* wieder in eine einzige umſtalten, nämlich in

$$\varphi+\int_0^t\left(V_1+P_1-\frac{4\pi k}{3}\varphi_1\right)(t-\tau)\,d\tau=0\ \ldots.(M)$$

wo $V_1\ P_1\ \varphi_1$ die Werthe ſind, welche für $t=\tau$ in $V\ P\ \varphi$ übergehen. Dieſe Gleichung läßt wieder nur eine Auflöſung zu.

55. Es ſei nun der Körper C eine hohle Kugel, welche ſich mit einer conſtanten Geſchwindigkeit v um eine horizontale Axe dreht. Der Anfangspunct ihrer Ordinaten ſey in ihrem Mittelpuncte, die Coordinaten x und y liegen in der horizontalen Richtung, z vertical, nach aufwärts gerichtet, x werde von Süd gegen Nord, y nach der Richtung der Rotation gezählt. Dem Puncte M entſpreche der Radiusvector r, und dieſer mache beim Anfange der Bewegung mit x den Winkel u, und die Ebene der $x\,r$ ſchließe mit der Ebene der $x\,z$ den Winkel λ ein. Nach Verlauf der Zeit t iſt λ in $\lambda+vt$ übergegangen, und für dieſen Augenblick iſt

$$x=r\cos u,\ y=r\sin u\sin(\lambda+vt),\ z=r\sin u\cos(\lambda+vt).$$

Gehen die Größen $r\ u\ \lambda$ für einen Punct M, deſſen Coordinaten $x_1\ y_1\ z_1$ ſind, in $r_1\ u_1\ \lambda_1$ über und bilden r und r_1 den Winkel δ, ſo iſt

$$\cos\delta=\cos u\cos u_1+\sin u\sin u_1\cos(\lambda-\lambda_1)$$

$$\rho^2=r^2+r^2_1-2rr_1\cos\delta.$$

Bezeichnet a den äußeren, b den inneren Halbmeſſer der Hohlkugel, ſo erhält man für die äußere Fläche:

$$\cos\varepsilon=\frac{x_1}{r_1},\ \cos\varepsilon_1=\frac{y_1}{r_1},\ \cos\varepsilon_2=\frac{z_1}{r_1},\ r_1=a$$

$$d\omega=a^2\sin u_1\,du_1\,d\lambda_1.$$

Für die innere Fläche

$$\cos\varepsilon=-\frac{x_1}{r_1},\ \cos\varepsilon_1=-\frac{y_1}{r_1},\ \cos\varepsilon_2=-\frac{z_1}{r^1};\ r_1=b$$

$$d\omega=b^2\sin u_1\,du_1\,d\lambda_1,$$

und daher

$$P = ka^2 \iint \frac{\alpha_1 \sin u_1 \, du_1 \, d\lambda_1}{\rho_1} - kb^2 \iint \frac{\beta_1 \sin u_1 du_1 d\lambda_1}{\rho_2} \qquad (N)$$

wo ρ_1 und ρ_2 die Werthe von ρ, $r = a$ und $r_1 = b$, α_1 und β_1 die von $\frac{d\varphi_1}{dr_1}$ ſind. Die Integration geht von $u_1 = 0$ bis $u_1 = \pi$ und von $\lambda_1 = 0$ bis $\lambda_1 = 2\pi$. Alles läuft nun darauf hinaus, dieſe Integration zu bewerkſtelligen. Man entwickle $\frac{1}{\rho_1}$ und $\frac{1}{\rho_2}$ in eine convergirende Reihe: erſtere Reihe wird offenbar nach den wachſenden Potenzen von $\frac{r}{a}$, letztere nach denen von $\frac{b}{r}$ geordnet werden müſſen. Man erhält:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{a} + \frac{r}{a^2} R_1 + \frac{r^2}{a^3} R_2 + \ldots \frac{r^n}{a^{n+1}} R^n + \ldots$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{r} + \frac{b}{r^2} R_1 + \frac{b^2}{r_2} R_2 + \ldots \frac{b^n}{r^{n+1}} R_n + \ldots$$

Iſt P_n das Glied von P, welches R_n entſpricht, ſo iſt

$$P_n = \frac{kr^n}{a^{u-1}} \iint \alpha_1 R_n \sin u_1 \, du_1 \, d\lambda_1 - \frac{kb^{n+2}}{r^{n+1}} \iint \beta_1 R^n \sin u_1 du_1 d\lambda_1$$

Dieſer Ausdruck iſt das allgemeine Glied jener Reihe, welche von $x = 0$ bis $n = \infty$ in (M) ſubſtituirt werden muß, um den Werth dieſer Größe zu geben.

56. Es werde die betreffende Kugel blos vom Erdmagnetismus afficirt und die daraus und aus der Lage der Rotationsaxe nach $x\,y\,z$ hervorvorgehende Kraft geſucht. Kennt man nun für dieſen Fall φ, P und V, ſo kann man ſie in M ſubſtituiren, und dadurch einen großen Schritt zur Beſtimmung des Magnetismus der Kugel thun. V iſt hier offenbar eine lineare Function von xyz, wie z. B.

$$V = -sx - s_1 y - s_2 z,$$

oder wenn man für xyz die von t unabhängigen Werthe ſetzt

$$V = -s r \cos u - s_1 r \sin u \sin \lambda = s_2 r \sin u \cos \lambda.$$

Denkt man ſich ſowohl dieſen Werth als den von P in das nach r genommene Differenzial der Gleichung (M) geſetzt, und bedenket,

daß P von der Form des Gliedes P_n abhängt, ſo wird man einſehen, daß $\frac{d\varphi}{dr}$ folgende Form annehmen müſſe:

$$\frac{d\varphi}{dr} = U\cos u + U_1 \sin u \sin(\nu t + \lambda) + U_2 \sin u \cos(\nu t + \lambda)$$

wo U, U_1 U_2 unbekannte Functionen von r und t ſind.

Für $r=a$ wird bekanntlich $\frac{d\varphi}{dr}=\alpha_1$, für $r=b$ hingegen $\frac{d\varphi}{dr}=\beta_1$

Gehen für $r=a$ die Größen U, U_1, U_2 in A, A_1, A_2, für $r=b$ aber in B, B_1, B_2 über, ſo hat man:

$$\alpha_1 = A\cos u_1 + A_1 \sin u_1 \sin(\nu t + \lambda_1) + A_2 \sin u_1 \cos(\nu t + \lambda_1)$$
$$\beta_1 = B\cos u_1 + B_1 \sin u_1 \sin(\nu t + \lambda_1) + B_2 \sin u_1 \cos(\nu t + \lambda_1)$$

Aber vermöge der bekannten Eigenſchaften der Größe R_n wird für $n=1$

$$\int\int \alpha_1 R_1 \sin u_1\, du_1\, d\lambda_1 = \frac{4\pi}{3}\left(A\cos u + A_1 \sin u \sin(n\nu + \lambda) + A_2 \sin u \cos(n\nu + \lambda)\right)$$

$$\int\int \beta_1 R_1 \sin u_1\, du_1\, d\lambda_1 = \frac{4\pi}{3}\left(B\cos u + B_1 \sin u \sin(n\nu + \lambda) + B_2 \sin u \cos(n\nu + \lambda)\right)$$

für jeden andern Werth von n hingegen

$$\int\int \alpha_1 R_n \sin u_1\, du_1\, d\lambda_1 = 0; \quad \int\int \beta' R_n \sin u_1\, du_1\, d\lambda_1 = 0.$$

Dieſe erſteren Werthe in (N) geſetzt und nach r differenziirt geben:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{4\pi k}{3}\left\{\left(A + \frac{2Bb^3}{r^3}\right)\cos u + \left(A_1 + \frac{2B_1b^3}{r^3}\right)\sin u \sin(n\nu + \lambda) + \left(A_2 + \frac{2B_2b^3}{r^2}\right)\sin u \cos(n\nu + \lambda)\right\}$$

Werden die Werthe von $\frac{dV}{dr}$, $\frac{d\varphi}{dr}$ und $\frac{dP}{dr}$ in (M) geſetzt, nachdem man dieſe Gleichung blos auf den maſſiven Theil der Kegel bezogen und nach r differenziirt hat, und die Coefficienten von $\cos u$, $\sin u \sin(\nu t + \lambda)$, $\sin u \cos(\nu t + \lambda)$ gleich Null geſetzt; ſo erhält man, wenn man der Kürze halber $\int_0^t f_1(t-\tau)\,dt = M$, $\int_0^t \sin u\,(t-\tau) f_1(t-\tau)\,d\tau = N$, $\int_0^t (\cos u\,(t-\tau) - 1) f_1(t-\tau)\,d\tau = O$ ſetzt, folgende Gleichungen:

$$U + \left\{ \frac{4\pi k}{3} \left(A + \frac{2 B b^3}{r^3} - U \right) - m \right\} M = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} U_1 + \left\{ \frac{4\pi k}{3} \left(A_1 + \frac{2 B_1 b^3}{r^3} - U_1 \right) - m_1 \right) (O + M) \\ \quad + \left\{ \frac{4\pi k}{3} \left(A_2 + \frac{2 B_2 b^3}{r^3} - U_2 \right) - m_2 \right\} N \end{array} \right\} = 0 . (O)$$

$$\left. \begin{array}{l} U_2 - \left[\frac{4\pi k}{3} \left(A_1 + \frac{2 B_1 b^3}{r^3} - U_2 \right) - m_1 \right) N \\ \quad + \left[\frac{4\pi k}{3} \left(A_2 + \frac{2 B_2 b^3}{r^3} - U_2 \right) - m_2 \right) (O + M) \end{array} \right\} = 0.$$

Aus den erſten dieſer Gleichungen folgen für $r = a$ und $r = b$ zwei Gleichungen, aus denen man, wenn man für $\frac{4\pi k M}{3} = K$ ſchreibt, folgende erhält:

$$\frac{4\pi k}{3} A = \frac{m K (1 + K) a^3 - 2 K b^3}{(1 + K) a^3 - 2 K^2 b^3}$$

$$\frac{4\pi k}{3} B = \frac{m K (1 - K) a^3}{(1 + K) a^3 - 2 K^2 b^3}$$

Durch dieſelben Vorausſetzungen erhält man aus der zweiten und dritten der Gleichungen (O) folgende:

$$A_1 + \frac{8\pi k b^3}{3 a^3} [B_1 (O + M) + B_2 N] = m (O + M) + m_2 N$$

$$A_2 + \frac{8\pi k b^3}{3 a^3} [B_2 (O + M) - B_2 N] = m_2 (O + M) - m_1 N$$

$$B_1 + \frac{4\pi k}{3} [A_1 + B_1)(O + M) + (A_2 + B_2) N] = m_1 (O + M) + m_2 N.$$

$$B_2 + \frac{4\pi k}{3} [A_2 + B_2)(O + M) - (A_1 + B_1) N] = m_2 (O + M) - m_1 N.$$

Hieraus kann man $A_1\ B_1\ A_2\ B_2$ beſtimmen. Kennt man einmal dieſe, ſo ſind auch α_1 und β_1 und durch Subſtitution ihrer Werthe in (N) und die Reihen für $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$, auch P beſtimmt, in ſo ferne ſich P nicht auf einen Punct in der Mitte der hohlen Kugel bezieht. Für einen in der Höhlung der Kugel und einen außerhalb der Kugel befindlichen Punct findet kein anderer Unterſchied Statt, als

daß man $\frac{1}{\rho_1}$ und $\frac{1}{\rho_2}$ für den erſten Fall nach den Potenzen von $\frac{r}{a}$ und $\frac{r}{b}$, für den zweiten nach den Potenzen von $\frac{a}{r}$ und $\frac{b}{r}$ entwickeln muß. Man erhält, wenn man die Coordinaten x, y, z wieder einführt, für einen innern Punct:

$$P = \frac{4\pi k}{3}\left\{(A-B)x-(A_1-B_1)y+(A_2-B_2)z\right\}$$

für einen äußeren:

$$P = \frac{4\pi k}{3r^3}\left\{(Aa^3-Bb^3)x+(A_1a^3-B_1b^3)y+(A_2a^3-B_2b^3)z\right\}$$

Endlich iſt für den erſten Fall:

$$\left.\begin{aligned}
X &= -\frac{dP}{dx} = -\frac{4\pi k}{3r^3}\left\{(Aa^3-Bb^3)\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right)-3(A_1a^3-B_1b^3)\frac{xy}{r^2}\right. \\
&\qquad\left.-3(A_2a^3-B_2b^3)\frac{xz}{r^2}\right\} \\
Y &= -\frac{dP}{dy} = -\frac{4\pi k}{3r^3}\left\{(A_1a^3-B_1b^3)\left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right)-3(Aa^3-Bb^3)\frac{xy}{r^2}\right. \\
&\qquad\left.-3(A_2a^3-B_2b^3)\frac{yz}{r^2}\right\} \\
Z &= -\frac{dP}{dz} = -\frac{4\pi k}{3r^3}\left\{(A_2a^3-B_2b^3)\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)-3(Aa^3-Bb^3)\frac{xz}{r^2}\right. \\
&\qquad\left.-3(A_1a^3-B_1c^3)\frac{yz}{r^2}\right\}
\end{aligned}\right\}(P)$$

Aus dieſen Gleichungen erſieht man Folgendes: Da P die Größe t nicht enthält, ſo iſt ſchon nach den erſten Momenten, die hier außer Betrachtung gelaſſen ſind, der Magnetismus der rotirenden Kugel conſtant geworden. Weil für einen inneren Punct P in Bezug auf x, y, z linear iſt, ſo iſt die Wirkung der Kugel auf alle ſolche Puncte dieſelbe. Die Kraft in Bezug auf einen äußeren Punct ändert ſich hingegen mit der Lage derſelben.

16. Für eine ruhende maſſive Kugel iſt $b=0$, $v=0$ und daher auch $N=0$ und $O=0$, mithin

$$X = -\frac{a^3 K}{r^3}\left(m\left(1 - \frac{3x^2}{r^2}\right) - \frac{3mxy}{r^2} - \frac{3m_2 xz}{r^2}\right)$$

$$Y = -\frac{a^3 K}{r^3}\left(m_1\left(1 - \frac{3y^2}{r^2}\right) - \frac{3mxy}{r^2} - \frac{3m_2 yz}{r^2}\right)$$

$$Z = -\frac{a^3 K}{r^3}\left(m_2\left(1 - \frac{3z^2}{r^1}\right) - \frac{3mxz}{r^2} - \frac{3m_1 yz}{r^2}\right)$$

Befindet ſich in M der Aufhängungspunct einer horizontalen Magnetnadel von ſo geringer Länge, daß man annehmen kann, die Kugel wirke auf alle Stellen derſelben gleich ſtark, und heißt der Winkel, welchen eine von M mit der Coordinate x parallele mit der Axe der Magnetnadel macht, ε, ſo hat man

$$\tan \varepsilon = \frac{Y + m_1}{X + m}.$$

Iſt hingegen die Nadel eine Neigungsnadel derſelben Art, die ſich in einer durch den Mittelpunct der Kugel gehenden Ebene bewegen kann, ſo wird ſie von den horizontal wirkenden Kräften $\sqrt{(X^2 + Y^2)}$ und $\sqrt{(m^2 + m_1^2)}$, und von den Verticalen Z und m_2 dieſer Ebene gerichtet. Es mache die Axe der Nadel mit der Verticalen den Winkel ψ, ſo hat man

$$\tan \psi = \frac{Z + m_2}{\sqrt{(X+m)^2 + (Y+m_1)^2}}.$$

Setzt man für $X\,Y\,Z$ die durch obige Gleichungen gegebenen Werthe, ſo läßt ſich ε und ψ berechnen.

57. Denkt man ſich bei einer ruhenden Hohlkugel die Kräfte m_1 und m_2 durch m' und m'' erſetzt, ſo ändern ſich dadurch A und B nicht; A_1, B_1, A_2, B_2 hingegen gehen in $A\frac{m'}{m}$, $B\frac{m'}{m}$, $A\frac{m''}{m}$, $B\frac{m''}{m}$ über, und man hat daher:

$$X = -\frac{4\pi k(Aa^3 - Bb^3)}{3mr^3}\left\{m\left(1 - \frac{3m}{r^2}\right) - \frac{3mxy}{r^2} - \frac{3m''xz}{r^2}\right\}$$

$$Y = -\frac{4\pi k(Aa^3 - Bb^2)}{3mr^3}\left\{m'\left(1 - \frac{3y}{r^2}\right) - \frac{3mxy}{r^2} - \frac{3''m''yz}{r^2}\right\}$$

$$Z = -\frac{4\pi k(Aa^2 - Bb^2)}{3mr^3}\left\{m^2\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) - \frac{3mxz}{r^2} - \frac{3m'yz}{r^2}\right\}$$

und für eine hohle Kugel dieſelben Formeln, nur mit dem Unterſchiede, daß man ſtatt k ſetzt:

$$\frac{k(1+k)(a^3-b^3)}{(1+k)a^3-2k^2b^3}.$$

Sollen dieſe Formeln mit denen in (*P*) zuſammenfallen, ſo muß ſeyn:

$$(Aa^3-Bb^3)\frac{m'}{m}=A_1a^3-B_1b^3;\ (Aa^3-Bb^3)\frac{m''}{m}=A_2a^3-B_2b^3$$

oder:

$$\frac{(1+k)(a^3-b^3)a^3m'}{(1+k)(a^3-2k^3b^3}=\frac{4\pi}{3}(A_1a^3-B_1b^3)$$

$$\frac{(1+k)(a^3-b^3a^3m''}{(1+k)(a^3-2k^2b^3}=\frac{4\pi}{3}(A_2a^3-B_2b^3)$$

Die weiteren Deductionen aus dieſen Formeln führen zu Reſultaten, welche, wie die bereits ſchon angeführten, von der Erfahrung vollkommen beſtätiget werden. Man kann die Fundamentalformeln, welche hier blos auf einen ſphäriſchen Körper angewendet worden ſind, auch auf Platten anwenden, und ſich dadurch von der Wirkung derſelben auf eine Magnetnadel 'im Zuſtande der Bewegung und Ruhe überzeugen. Die weitere Unterſuchung dieſes Gegenſtandes, die ganz von Poiſſon herrührt, wollen wir aber nicht weiter verfolgen, ſondern uns damit begnügen, den Weg gezeigt zu haben, auf welchem ſie gemacht werden kann.

Quellen über dieſen Abſchnitt ſind folgende Werke:

Traité de Physique etc. par Biot. Paris 1816, t. 2.

Hanſteen's Unterſuchungen über den Magnetismus der Erde. Chriſtiana 1819.

Theorie der Abweichung und Neigung der Magnetnadel, von Dr. Mollweide, in Gilb. Annalen 29. 1 und 251.

Tob. Mayer de usu accuratiori acus inclinatoriae magneticae, in den Com. sc. Goetting. Tom. III. p. 3.

Sur la théorie du Magnétisme par Poisson, in den Mém. de l'Acad. des sc. de l'Instit. de France, tom. V, p. 247 und 448.

Sur la théorie du magnétisme en mouvement, par Poisson, ebendaſelbſt t. VI, p. 439.

Siebenter Abſchnitt.

Electricität.

Erſtes Kapitel.

Apparate zur Erregung und Anhäufung der Electricität.

1. Die wichtigſten Apparate zur Erregung der Electricität ſind die Electriſirmaſchine und die Volta'ſche Säule; die vorzüglichſte zur Anhäufung der Leidnerflaſche. Von dieſen ſoll hier ausführlich die Rede ſeyn.

2. Die Electriſirmaſchine beſteht bekanntlich im Weſentlichen aus dem zu reibenden Körper, aus dem Reibzeuge und dem Conductor. Der zu reibende Körper beſteht bei den heut zu Tage einzurichtenden Maſchinen faſt ohne Ausnahme aus Glas und hat in der Regel die Geſtalt einer flachen Scheibe. Cylinder und Kugeln ſo wie Glocken ſah ich nie ſo kräftig wie Scheiben wirken, und darum ziehe ich letztere allen anderen Formen weit vor. Doch iſt die Geſtalt des zu reibenden Körpers nicht das einzige, worauf es bei ihm ankommt. Das Glas muß möglichſt hart ſeyn, nicht viel Feuchtigkeit anziehen und keine zu große Dicke haben. Dicke Scheiben ſind in der Regel auch ungleich dick und werden, wenn auch die Reibzeuge an ſie durch Federn angepreßt werden, beim Umdrehen ungleich gedrückt, welches immer einen Nachtheil hervorbringt. Die Scheibe wird mit einer durch ihren Mittelpunct gehenden Axe verſehen, die in eigenen Pfannen liegt und an einem Ende eine Kurbel zum Behufe der Umdrehung hat. Daß dieſe Axe auf der Ebene der Scheibe ſenkrecht ſtehen muß, verſteht ſich von ſelbſt. Bei Scheiben, deren Durchmeſſer etwa $2\frac{1}{2}$ — 3 Fuß überſteigt, macht man ſie meiſtens aus Eiſen, bei kleineren aus Holz; aber ſelbſt im erſteren Falle muß jener Theil, welcher durch das in der Scheibe angebrachte Loch geht, mit Holz überkleidet ſeyn, um das Glas nicht zu beſchädigen, und hölzerne Backen haben, welche mit Leder belegt ſind und an das Glas mit einem mit Ziegelmehl verſetzten Leim oder mit ſtark geleimtem Schuſterkleiſter angemacht werden. Eine hölzerne Axe darf nicht aus einem Stück Holz herausge-

ſchnitten werden, ſondern man muß ſie heraus ſpalten und dann abdrehen, damit ſie nicht krumm werde und die Scheibe nicht in Gefahr bringe.

3. Die Reibzeuge beſtehen aus hölzernen Tafeln, welche mit einer zur Erzeugung einer hinreichenden Reibung beſtimmten Decke verſehen ſind. Ihre Länge darf nicht größer ſeyn als der halbe Radius der Scheibe, ihre Breite iſt hinreichend, wenn ſie 2 Zoll beträgt. Sie müſſen mittelſt einer beſonderen, leicht auszudenkenden Vorrichtung ſtark an die Scheibe angedrückt werden, und dabei doch den etwaigen Ungleichheiten der Dicke oder gar einer geringen Abweichung von der auf die Axe ſenkrechten Stellung der Scheibe nachgeben können. Alle Einrichtungen des Reibzeuges zielen dahin, eine ſtarke und gleichförmige Reibung des Glaſes hervorzubringen und dadurch Electricität zu erregen, die poſitive Electricität des Glaſes zu hindern, der anziehenden Kraft ihrer eigenen negativen Electricität zu folgen, und dieſer negativen Electricität den Abfluß in die Erde zu gewähren. Zum Behufe der Electricitätserregung iſt die Holzplatte, als das eigentliche Skelett des Reibzeuges, mit weichem Leder überzogen, und in dieſes das fein verkleinerte Amalgam mit etwas Öhl ſo eingerieben, daß es das Leder möglichſt gleichförmig überzieht. Um die Electricität des Reibzeuges in das Geſtell und dadurch in die Erde abzuleiten, wird an jener Seite des Reibzeuges, wo die Glasſcheibe beim Rotiren zwiſchen dieſelben tritt, aber ja nicht auf der entgegengeſetzten Seite, ein ſchmaler Streifen Zinnfolio mittelſt aufgelöſetem Schellack ſo befeſtiget, daß das Amalgam mit dem Geſtell in leitende Verbindung kommt. Die meiſte Vorſicht iſt nothwendig, die im Glaſe erregte Electricität gegen die entgegengeſetzte des Reibzeuges zu ſchützen und ſie bis zum Conductor zu führen. Man hat da vorzüglich dafür zu ſorgen, daß jeder Punct der amalgamirten Fläche des Reibzeuges reibend auf das Glas einwirke, denn nur wo Reibung, alſo Electricitätserregung Statt findet, dort können beide Electricitäten neben einander beſtehen, ohne ſich zu neutraliſiren; jede nicht reibende Stelle des Reibzeuges verhält ſich nicht blos negativ, indem dort keine Electricität erregt wird, ſondern an ihr erfolgt eine Verbindung der beiden Electricitäten und daher eine Schwächung der Wirkung. Aus dieſem Grunde darf das Reibzeug die oben angegebene Breite nicht überſchreiten, indem bei großer Breite ſolche Stellen faſt unvermeidlich ſind; aus dieſem Grunde muß auch das Amalgam äußerſt fein gerieben und ſehr gleichförmig auf-

getragen werden. Die gefährlichſte Stelle am ganzen Reibzeug iſt jene, wo das Glas dasſelbe verläßt, denn da fließt die Electricität am leichteſten in das Reibzeug über. Um dieſes zu verhindern, verſieht man das Reibzeug an dieſer Stelle mit Flügeln von gut gefirnißtem, nicht klebenden und daher ſchwer zu beſtaubenden Taffet, welcher bis zu der Stelle reicht, wo der Conductor die Electricität aufnimmt; allein ein einzelnes Taffetblatt iſt beſonders am Rande des Reibzeuges nicht hinreichend, ſondern es müſſen deren wenigſtens zwei oder drei ſeyn, ja ſelbſt unter dem reibenden Leder ſollen ſich einige Blätter ſolchen Taffets und etwa noch eine Glimmerplatte befinden, um jedes Einſaugen der Electricität möglichſt zu verhindern. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß die Stelle, wo der Taffet an das Leder gefügt iſt, keinen Abſatz oder Vorſprung bilden darf, ſondern eine flache Fortſetzung der Lederfläche ſeyn muß. Daß alle Reibzeuge mit einander durch hinreichend ſtarke und ſehr gute Leiter mit einander und mit der Erde in Verbindung ſtehen müſſen, iſt für ſich klar.

4. Von großem Belange iſt die Beſchaffenheit und der rechte Gebrauch des Amalgams. Man ſchätzt in der Regel jenes am meiſten, welches aus Zinn, Zink und Queckſilber beſteht, und ſo verfertiget wird: Man ſchmilzt in einem Tiegel die abgewogene Zinkmaſſe und gibt in dieſelbe nach dem Schmelzen die gleiche Quantität Zinn. Iſt auch dieſes geſchmolzen, ſo wird die ganze Maſſe in einen hölzernen Tiegel gegoſſen, das Queckſilber zugeſetzt und der Tiegel ſchnell geſchloſſen, um ſich gegen die ſchädlichen Queckſilberdämpfe zu ſchützen. Hierauf ſchüttelt man alles ſo lange unter einander, bis man vorausſetzen kann, es ſey feſt geworden. Das Amalgam bildet nun eine bleigraue Maſſe, die in der Luft zu einem ſchwarzen Pulver zerfällt, das man nach der Hand fein pulvert und aufbewahrt.

Beim Auftragen dieſes Amalgams wird das Leder des Reibzeuges zuerſt mit einem Tropfen Baumöhl benetzt, der ſich über die ganze Lederfläche ausdehnen läßt und ſie ſchwach fett macht, dann mittelſt eines anderen, ebenfalls befetteten Lederſtückes, das man in das gepulverte Amalgam getaucht hat, dasſelbe eingerieben, bis die ganze Lederfläche gleichförmig glänzt und nirgends Vertiefungen vorkommen, wie ſie durch ein zu reichliches Auftragen des Amalgams an einzelnen Stellen gar leicht entſtehen. Bei einer neuen Amalgamirung eines ſchon gebrauchten Reibzeuges ſoll man die Le-

derfläche zweier Reibzeuge vorläufig auf einander reiben, um ſo das alte Amalgam, deſſen gleichförmige Vertheilung durch den Gebrauch in der Regel ſtark leidet, vorläufig ins Gleiche zu bringen.

5. Das Geſtell, welches den Reibzeugen zur Stütze und der Scheibe zur Unterlage dient, ſoll hinreichend weit ſeyn, um dem Glaſe keine Electricität zu entreißen, und wegen derſelben Urſache aus möglichſt ſchmalen Stücken beſtehen, gut gefirnißt und feſt genug ſeyn, um kein Verrücken der Axe befürchten zu laſſen. Wo man auch die Electricität der Reibzeuge in den Conductor leiten will, um auch mit negativer Electricität Verſuche machen zu können, wird das Geſtell zum Iſoliren eingerichtet und darum auf Glasſtützen geſtellt, die man zur Abhaltung aller Feuchtigkeit mit einer Schellacklöſung überzieht. Doch iſt es klar, daß von dem Geſtelle ein Leiter bis zum Fußboden hinabreichen muß, ſobald man nicht die Electricität der Reibzeuge, ſondern die der Scheibe zu ſammeln beabſichtiget, und daß dieſer Leiter beſonders, wenn der Fußboden ſehr trocken iſt, längs desſelben bis zu einer Mauer oder einem anderen gut leitenden Körper fortgeführt werden muß.

6. Der Conductor wird faſt ausſchließlich aus Meſſingblech verfertiget und ſcharf zuſammengelöthet, ſo daß nirgends eine Kante oder ein Eck zum Vorſchein kommt. Die einfachſte Geſtalt desſelben iſt die beſte und als ſolche eine bloße mit zwei Armen verſehene, mittelſt überfirnißtem Glaſe iſolirte Kugel anzuſehen, wie ſie Fig. 201 vorſtellt. Die Oberfläche der Kugel mit Inbegriff der Arme, ſoll die Hälfte der Oberfläche der Scheibe nicht übertreffen. Wo ſich nun eine mehr gekrümmte Wölbung zeigt, wie z. B. in *a* oder *b*, da ſoll dem Ausſtrömen der Electricität vorgebeugt werden, und darum muß man an ſolchen Stellen Kugeln aus dichtem Holze oder noch beſſer aus Glas anbringen; nur der Scheibe gegenüber kann man eine ſcharfe Kante zulaſſen. Alles Metallzeug ſoll ſtets in glänzendem, wohl polirtem Zuſtande erhalten ſeyn und darum nie mit der bloßen Hand berührt werden. Jede ſolche Berührung läßt einen matten Fleck zurück und aus dieſem ſieht man eine dunkle Electricität ausſtrömen. Staub wirkt ungemein ſchwächend auf den Conductor ein, weil jedes Staubkörnchen einen ſpitzigen Körper abgibt, welcher der Electricität das Ausſtrömen erleichtert.

7. Vor dem jedesmaligen Gebrauche einer Electriſirmaſchine ſoll man alle Theile, beſonders die Scheibe mit einem trockenen Tuche gut abwiſchen, die Reibzeuge ſo ſtark ſpannen, daß man ge-

rade noch die Umdrehung der Scheibe bewerkſtelligen kann und ſich dabei mit dem Körper weder der Scheibe noch dem Conductor zu ſehr nähern. Bei trockener, mäßig warmer Witterung gibt jede Maſchine die größte Wirkung. Vermuthet man irgend wo einen Fehler, wodurch das Ausſtrömen der Electricität erleichtert oder verurſacht wird, ſo brauche man die Maſchine im Finſtern und ſuche die Stelle, wo ein Ausſtrömen zu bemerken iſt. Man beurtheile aber die Güte einer Maſchine nicht allein aus der Länge der Funken, denn dieſe hängt von nicht immer weſentlichen Umſtänden, wie z. B. vom Abſtande der Reibzeuge vom Conductor ab, ſondern auch aus der Intenſität derſelben, insbeſondere aus ihrer Wirkung auf Körper, die ihnen im Wege ſtehen. Man kann mit einer guten Maſchine, deren Scheibe kaum 24 Z. im Durchmeſſer hat, eine 1 L. dicke Glasplatte mittelſt eines einfachen Funkens durchbohren, Holz zerſplittern, ein feines Goldplättchen oxydiren, Waſſer zerſetzen ꝛc. Den ſicherſten Maßſtab liefert die Anzahl der Umdrehungen, welche man braucht, um eine Leidnerflaſche von angemeſſener Größe zum Selbſtentladen zu bringen. Ein auffallendes Beiſpiel von der Kraft zweckmäßig gebauter Maſchinen liefert die Zeitſch. B. 3, S. 439.

8. Die Wirkungen der durch Reiben erregten Electricität verſtärkt man bekanntlich auf das Auffallendſte, wenn man ſie in eine Leidnerflaſche übergehen läßt. Solche Flaſchen werden meiſtens aus gemeinen Glasbechern (Zuckergläſern) oder aus enghalſigen Flaſchen verfertiget. Doch haben dieſe eine viel zu große Glasdicke, als daß ſie eine namhafte Ladung annehmen könnten, letztere überdieß auch noch das Gebrechen, daß man die innere Glasfläche nicht ordentlich armiren kann und ſich oft mit einem bloßen Überzug aus feinen Meſſingſpänen begnügen muß. Am zweckmäßigſten ſind jene Glasſtürze, die man ſonſt zu Deckeln für allerlei Geräthſchaften braucht. Dieſe Stürze beſtehen aus ſehr dünnem Glaſe, laſſen ſich in- und auswendig vollſtändig mit Zinnfolio überziehen und nehmen darum eine ungemein ſtarke Ladung an. Man verſieht ſie in der Regel mit einem Deckel aus Pappe, durch deſſen Mitte der Stab geht, welcher mit der inneren Belegung communicirt, und ſetzt dieſen nicht auf den Rand des Gefäßes, ſondern in dieſes hinein, ſo daß noch über dem Deckel ein Rand von $1\frac{1}{2}$ Zoll emporragt. Den hervorſtehenden Rand überzieht man mit feinem in Weingeiſt aufgelöſten Sigellack oder Schellack und ſorgt dafür, daß dieſe Stelle

möglichſt glatt werde und leicht vom Staub gereiniget werden könne, der gar leicht zur langſamen Selbſtentladung führt und darum die Größe der Ladung, welche die Flaſche annimmt, vermindert. Es iſt von Nutzen, beim Gebrauche einer ſolchen Flaſche, auf den Deckel einen ſchwach befeuchteten Schwamm zu legen, wiewohl man ſich über den Einfluß desſelben auf theoretiſchem Wege keine Rechenſchaft zu geben vermag.

9. Die Volta'ſchen Säulen werden bekanntlich auf ſehr verſchiedene Arten gebaut und eingerichtet, doch iſt nicht jede Einrichtung für jeden Zweck gleich gut geeignet, ja es thut ſogar Noth, für verſchiedene Abſichten auch verſchieden eingerichtete Säulen zu brauchen.

Ein Volta'ſcher Apparat, der blos zum Behufe der phyſiologiſchen Wirkungen gebraucht wird, bekommt am beſten die Geſtalt einer gemeinen ſtehenden Säule, bei welcher die Tuchlappen mit einer wäſſerigen Salmiaklöſung oder mit einer Löſung von Kochſalz in Eſſig getränkt und hierauf ſo weit ausgedrückt werden, daß ſie bei dem Druck, dem ſie unterliegen, keine Flüſſigkeit mehr fahren laſſen. Die Anzahl der Platten richtet ſich natürlich nach dem jedesmaligen Bedürfniſſe. Bei Einwirkungen auf empfindliche Organe, wie z. B. auf das Ohr oder das Auge, ſoll man mit nicht viel mehr als mit 4—6 Plattenpaaren den Anfang machen. Dieſe ſind hinreichend groß, wenn ſie 1 Z. im Durchmeſſer haben. Die Zinkplatten ſollen wenigſtens ½—1 L. dick ſeyn, weil ſie ſchnell conſumirt werden; die Kupferplatten können aus gemeinem Deckblech geſchnitten werden; erſtere müſſen ſtets blank geſcheuert ſeyn, letztere müſſen nur da, wo ſie vom Zink berührt werden, metalliſch rein ſeyn, an den übrigen Stellen iſt ein ſchwacher Oxydüberzug nicht ſchädlich, ja in manchem Falle ſogar nützlich. Es iſt gut, wenn jedes Plattenpaar zuſammengelöthet iſt. Man ſtellt ſie in ein eigens eingerichtetes Poſtament aus einer Baſis und drei verticalen Glasſtäben, das am beſten ſo eingerichtet iſt, wie Fig. 202 zeigt und aus zwei Metallringen *a* und *b* beſteht, die durch Metallſtängelchen, über welche Glasröhren geſteckt ſind, mit einander verbunden werden. Dieſes Geſtell kann man in eine Blechbüchſe *A* (Fig. 203) ſtellen, ſo daß der Ring *a* auf deren Boden feſt aufſteht und daher auch die unterſte Platte der Säule mit demſelben communicirt, während durch den Deckel *B* ein Glasrohr *C* geht, in welches eine metallene Schraubenmutter eingekittet iſt. In dieſe Mutter paßt die Schraubenſpin-

del, die nach oben in einen runden Kopf, nach unten in eine flache Metallſcheibe E ausgeht. Wird der Deckel aufgeſetzt und durch eine Verreibung feſt gemacht, ſo kann man mittelſt des Knopfes D die Schraube umdrehen, bis die Scheibe E die oberſte Platte der in der Büchſe befindlichen Säule berührt, und daher der Knopf D einen Pol derſelben vorſtellt, während der Untertheil der Büchſe ihr zweiter Pol iſt. Eine ſolche Säule kann leicht im thätigen Zuſtande von einem Orte in den anderen übertragen und ſelbſt von ſolchen gebraucht werden, die mit ihrer inneren Einrichtung nicht genug vertraut ſind. Sie bleibt mehrere Tage thätig.

10. Zu chemiſchen Wirkungen thut eine liegende Säule gute Dienſte, deren Platten etwa 16—30 Quadratzoll Berührungsfläche und eine der vorher genannten gleiche Dicke haben. Man gibt ihnen am zweckmäßigſten eine viereckige Geſtalt, wenigſtens geſchieht dieſes mit der meiſten Erſparniß am Material, wenn die Platten aus größeren Stücken geſchnitten werden, wie dieſes mit den kupfernen immer geſchieht. Dieſe Platten werden auf ein Poſtament geſtellt, das aus Fig. 204 zu erſehen iſt und aus zwei Bretchen beſteht, die durch zwei Holzſtäbe mit einander verbunden ſind, an deren einwärts gekehrten Seite ſich eine Vertiefung befindet, die einen Glasſtab aufnimmt. An jedem Bretchen befindet ſich eine Schraubenſpindel. Die Platten werden ſo gelegt, daß eine ihrer Diagonalen vertical ſteht und mittelſt der genannten Schrauben ſanft zuſammengedrückt. Eine ſo eingerichtete Säule läßt ſich mit 100 und mehr Plattenpaaren bauen und gibt eine ſtarke und viele Tage anhaltende Wirkung.

11. Zu electriſchen Wärme- und Lichtverſuchen, ſo wie zu den magnetiſchen Experimenten braucht man oft Säulen mit beſonders großen Platten. Kaum dürfte eine Säule bei gleichem Umfange und mit denſelben Mitteln mehr leiſten, als die, deren Elemente in Fig. 205 abgebildet ſind. Das Kupfer bildet ein ſchmales, 1 F. hohes, eben ſo breites Gefäß A, an deſſen Seite ein kleineres a angelöthet iſt. In dieſes Gefäß wird eine paſſende Zinkplatte B eingeſenkt, an deren oberen Theile ein kupferner Haken angelöthet worden, der doppelt gebogen iſt und zuletzt in das Gefäßchen a hinreicht, welches Queckſilber enthält. Damit das Zink das Kupfergefäß nicht berühren kann, iſt es an beiden verticalen ſchmalen Seitenflächen in eine gefirnißte Holzleiſte b, b eingelaſſen, welche ſo dick iſt, daß ſie gerade in das Kupfergefäß geſchoben werden kann und unten etwas vor-

ſteht. Wegen dieſer Dicke macht es jede Seitenberührung unmöglich, und das unten hervorſtehende Stück hindert die Berührung am Boden. Man kann recht wohl etwa 10 Stücke Kupfergefäße zuſammen in ein beſonderes Poſtament einſetzen, und die 10 dazu gehörigen Zinkplatten an eine gefirnißte Holzleiſte befeſtigen, damit ſie wie bei Wollaſtons Zellenapparat auf einmal eingeſenkt und aus der Flüſſigkeit gehoben werden können, doch gewährt es auch manchen Vortheil, dieſe Verbindung ganz wegzulaſſen und jede Platte für ſich in das Kupfergefäß zu ſenken. Mit einem ſolchen Einſatz von 10 Stücken kann man ſehr namhafte Wirkungen hervorbringen. 5 derlei Einſätze, welche zuſammen 50 Elemente mit einer Oberfläche von 50 Q. F. enthalten, leiſten alles, was in Betreff des electriſchen Stromes zu wünſchen iſt.

Zinkplatten von der Größe, wie man ſie zu einem ſolchen Apparate braucht, kann man durch Walzen erhalten, aber das gewalzte Zink enthält meiſtens einen Zuſatz von einem anderen Metalle, z. B. Blei, wodurch die Maſſe ſtreckbarer, aber zugleich minder electromotoriſch wird. Darum ſollen derlei Platten immer gegoſſen werden. Es hält aber ziemlich ſchwer, ſo große Platten von etwa $1\frac{1}{2}$ L. Dicke ohne Gußlöcher zu erhalten, beſonders entſtehen dieſe gar leicht in der Mitte der Platte, wegen der ſtarken Contraction, welche das Zink beim Abkühlen erleidet. Man vermeidet dieſe, wenn man beim Eingießen des flüſſigen Zinkes die Maſſe in die durchwärmte Form anfangs langſam, dann immer ſchneller, wenn der Guß etwa die Mitte der Form erreicht hat, am ſchnellſten, und endlich wieder mit abnehmender Geſchwindigkeit eingießt.

12. Beim Gebrauche einer Volta'ſchen Säule hat man vor allem auf hinreichende Reinheit der Platten, beſonders da, wo ſie ſich berühren, auf die innige Verbindung der einzelnen Theile und auf die Wahl des flüſſigen Leiters Rückſicht zu nehmen. Beabſichtigt man eine anhaltende und möglichſt gleichförmige Wirkung, ſo muß man eine Salzlöſung anwenden; ſoll aber ein ſehr ſtarker, wenn auch ſchnell vorübergehender Effect hervorgebracht werden, ſo bedient man ſich einer verdünnten Säure. Die Stärke derſelben prüft man vorläufig mit einem Zinkſtückchen, das man hineintaucht. Entwickelt es häufige Luftblaſen, ſo iſt die Säure zu ſtark und man muß mehr Waſſer zugießen; iſt gar keine Gasentwicklung bemerklich, ſo iſt die Verdünnung zu ſtark; das rechte Maß hat man getroffen, wenn ſich ganz feine, kaum ſichtbare Bläschen entwickeln,

welche die Flüſſigkeit ſelbſt faſt ganz abſorbirt. Eine Miſchung aus 100 Raumtheilen Waſſer, 2 Theilen ſtarker Schwefelſäure und 1 Theil Salpeterſäure thut in den meiſten Fällen gute Dienſte; nur wenn die flüſſige Schicht gar hoch iſt, läßt man die Schwefelſäure ganz weg und nimmt dafür 1 Th. Salpeterſäure, weil ſonſt die Waſſerſtoffgasblaſen, welche ſich während des Ganges des electriſchen Stromes immer reichlich entwickeln, leicht ein zu ſtarkes Aufſchäumen der Flüſſigkeit bewirken und ein Überlaufen derſelben verurſachen. Auf ein geringes Aufbrauſen der Flüſſigkeit muß man aber unter allen Umſtänden rechnen, und darf deßhalb nicht die Zellen bis auf den Rand anfüllen.

Wird die Säule aus mehreren Parthien zuſammengeſetzt, ſo müſſen ſie leitend mit einander verbunden werden. Als Verbindungsmittel braucht man am beſten ſtarken (1 — 2 L. dicken) Kupferdraht, der mit den Endplatten der Theile, welche an einander grenzen, innigſt in Berührung gebracht wird. Selten iſt es hinreichend, den Draht nur an die Platten anzudrücken; beſſer thut man, wenn man die Communication mittelſt Queckſilber herſtellt. Daß man bei der Stellung der einzelnen Theile die rechte Ordnung treffen und jede Berührung zwiſchen Platten verſchiedener Elemente vermeiden müſſe, iſt für ſich klar. Die Stellung der einzelnen Tröge oder Kapſeln muß ſo beſchaffen ſeyn, daß die beiden Pole einander gegenüber und etwa 1 — 2 F. von einander entfernt ſind.

Wenn eine Volta'ſche Säule zum Verſuch vorbereitet iſt, ſo muß man vor allem anderen unterſuchen, ob die Kette nirgends unterbrochen ſey. Zu dieſem Ende wird ein hinreichend dicker Kupfer- oder Platindraht mit dem poſitiven Pole der Säule in leitende Verbindung gebracht, und jede der Kupferplatten nach der Ordnung, wie ſie vom Zinkpol aus auf einander folgen, mit dem Ende desſelben berührt; da muß ſich ein Funke zeigen und immer ſtärker werden, je weiter die betreffende Kupferplatte vom Zinkpol abſteht.

13. Wenn der electriſche Strom durch eine Flüſſigkeit geleitet wird, die er zerſetzen ſoll, ſo müſſen von beiden Polen hinreichend dicke, nicht zu lange Metalldrähte ausgehen, und da, wo ſie in die Flüſſigkeit eintreten, in Platinſtücke übergehen, und beide Drähte ſollen in der Flüſſigkeit nicht 1 Z. von einander abſtehen. Ein größerer Abſtand ſchwächt wegen der verhältnißmäßig geringen Leitungsfähigkeit der Flüſſigkeit die chemiſche Wirkung des Stroms ungemein und kann ſie ganz aufheben. Einzelne Tropfen einer zu

zerlegenden Flüſſigkeit oder auch kleine Stücke feſter Körper legt man auf ein Platinblech, welches mit einem Pole der Säule communicirt, und berührt ſie mit dem Draht, welcher vom zweiten Pole kommt. Sind die Producte der Zerſetzung gasförmig, ſo bedient man ſich zum Behälter der zu zerſetzenden Subſtanz und der daraus entſtehenden Gaſe eigener Vorrichtungen, wie z. B. der in Fig. 206 abgebildeten, wo *a* die Polardrähte ſind und die Gaſe ſich in *b* und *c* ſammeln. Will man aus den entwickelten Gaſen auf die chemiſche Zuſammenſetzung der Flüſſigkeit, welche ſie liefert, einen Schluß machen, ſo muß man dieſelbe vor dem Verſuche, am beſten durch anhaltendes Kochen von allem eingeſaugten Gas befreien und auch auf die Gasmenge, welche während der Zerſetzung eingeſaugt wird, gehörige Rückſicht nehmen. Waſſer muß man vor der Zerſetzung zwei Stunden lang im Kochen erhalten, ſonſt enthält es ein Gemenge von Sauerſtoffgas und Stickgas, wobei letzteres Gas vorwaltet und bei der Zerſetzung frei wird. Bei Verſuchen über Wärme- und Lichtphänomene bedient man ſich am beſten einer Kohle, die eigens zu dieſem Zwecke zubereitet wird. Man erzeugt ſie aus Buxholz, das man in kleinen, zollangen und 2 L. dicken Stücken in einen Schmelztiegel gibt, mit Sand überſchüttet ins Feuer ſtellt und ſo lange darin läßt, als noch ein Flämmchen aus dem Holze hervorkommt. Dieſe Kohlen müſſen in gut verſchloſſenen Gefäßen aufbewahrt werden. Wird eine ſolche Kohle an einem Ende fein zugeſpitzt, am anderen mit einem Polardraht umwunden und mit der Spitze der zweite Pol der Säule berührt, ſo erhält man das lebhafteſte Licht, welches man erzeugen kann. Man muß aber den Verſuch mit mehreren Kohlenſtücken machen, denn nicht alle leiten gut genug, um dieſe Wirkung recht auffallend hervorzubringen. Man kann auch ihre Leitungsfähigkeit, von welcher daher ihr Gebrauch allein abhängt, vorläufig mittelſt eines Multiplicators unterſuchen. Wenn eine Säule längere Zeit thätig geweſen, müſſen die Platten aus einander genommen und die Zinktheile mit Sand und Eſſig, die Kupfertheile mit ſehr verdünnter Salzſäure abgerieben und hierauf im Waſſer abgewaſchen werden. Bei einer nicht im Gebrauche ſtehenden Säule ſollen nie die Elemente ſo liegen, daß ſie electromotoriſch auf einander wirken. Darum legt man bei einer aus einander genommenen Säule die Kupfer- und die Zinkplatten eigens zuſammen, und trennt jeden der beiden Theile durch die Schichte der gut getrockneten Tuchſcheiben, welche zur Säule gehören.

Zweites Kapitel.

Gleichgewicht der Electricität (electriſche Spannung).

A. Maß der Electricität im Gleichgewichte.

14. Die Electricität ſetzt ſich nach eigenen Geſetzen ins Gleichgewicht, welche von der Wirkung des electriſchen Princips auf ſich ſelbſt abhängen. Dieſes Princip kennen wir nicht und ſind daher auch nicht im Stande, ſeine abſolute Größe zu meſſen, ſondern müſſen, um auf ſeine Intenſität, wo es ſich darum handelt, ſchließen zu können, von einer Wirkung derſelben ausgehen, welche jener Intenſität proportionirt iſt. Der Erfahrung gemäß iſt dieſes die Größe der electriſchen Abſtoßung oder Anziehung. Daher iſt in unſeren Augen das Verhältniß der abſtoßenden Kräfte der Electricität mit dem der freien im Gleichgewichte befindlichen Electricität einerlei. Es handelt ſich daher vor allem darum, jenes Verhältniß der Abſtoßungskräfte beſtimmen zu können, und dahin gelangt man mittelſt der Coulomb'ſchen Wage oder dem Electrometer mit einem oder zwei verticalen Pendeln.

15. Um den Gebrauch des electriſchen Pendels zum electrometriſchen Behufe kennen zu lernen, ſei Fig. (207) das um A bewegliche Pendel von ſolcher Einrichtung, wie das bekannte Quadrantenelectrometer, C eine kleine Kugel, in deren Mittelpunct man das Centrum der Kraft verſetzen kann, wodurch es von der verticalen Stütze AB abgeſtoßen wird. Es heiße nun die Intenſität der Schwere des Pendels p, der Winkel BAC, um den es abgeſtoßen worden, φ. Wäre das Pendel frei, ſo würde es mit der Kraft $p \sin \varphi$ gegen AB her zu fallen anfangen und dieſe Bewegung nach der Richtung der Tangente CE beginnen; aber die abſtoßende Kraft der Electricität verhindert dieſes. Wird die abſolute Stärke dieſer Kraft in der Entfernung $= 1$ durch e ausgedrückt, ſo iſt ſie in der Entfernung $CB = f$ gleich $\frac{e}{f^n}$, wenn die abſtoßende Kraft verkehrt wie die n^{te} Potenz der Entfernung abnimmt. Da dieſe Kraft nur die Bewegung nach CE zu verhindern hat, ſo darf nur der nach CE gerichtete Theil derſelben wirken, deſſen Größe gleich $\frac{e}{f^n} . \cos BCE$ iſt. Man erhält daher für den Fall des Gleich-

gewichtes $p \sin \varphi = \frac{e}{f^n} \cos BCE$. Man kann aber CB ſowohl als BCE als Function von φ betrachten. Zieht man AD ſenkrecht auf BC, ſo wird $BAD = \frac{1}{2}\varphi$, $BD = DC = \sin \frac{1}{2}\varphi$, mithin $BC = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi$. Eben ſo wird $\cos BCE = \sin ACB = \cos \frac{1}{2}\varphi$. Dieſe Werthe in die vorhergehende Gleichung geſetzt geben:

$$p \sin \varphi = \frac{e}{2^n \sin^n \frac{1}{2}\varphi} \cdot \cos \frac{1}{2}\varphi.$$

Endlich wenn man ſtatt ſeinem Werth $2 \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi$ ſetzt und daraus e ſucht, ſo wird

$$e = 2^{n+1} p \sin^{n+1} \frac{1}{2}\varphi.$$

Für $n = 2$ erhält man:

$$e = 8 p \sin^3 \frac{1}{2}\varphi. \qquad (A)$$

In dieſem Falle verhalten ſich daher die Intenſitäten der Electricität wie die Würfel des halben Elongationswinkels des Pendels. Um aus dieſem Winkel ohne Rechnung die electriſche Spannung zu erkennen, ſchlägt Schmidt vor, eine Chorde am Bogen des Pendels als Einheit anzunehmen, dieſe ſo oft in den Bogen zu übertragen, als es angeht, und zum 1ten, 2ten, 3ten Endpunct dieſer Theilung 1, 8, 27 zu ſetzen.

Dasſelbe Geſetz findet man auch mittelſt eines Electrometers aus zwei Pendeln. Allein die Rechnung beruht ſowohl in dieſem als in dem vorher betrachteten Falle auf der Vorausſetzung, daß der Mittelpunct der Abſtoßung mit dem der Kugel zuſammenfalle, eine Vorausſetzung, die nur zuläſſig iſt, wenn beide Körper eine ziemlich große Entfernung von einander haben. Darum geben ſolche Electrometer in Rückſicht der numeriſchen Werthe der electriſchen Spannung nur dann richtige Reſultate, wenn die Pendel ziemlich lang und die Abſtoßungswinkel ziemlich groß ſind.

16. Denkt man ſich den Bogen CB in einer horizontalen Ebene und ſtatt der Schwere die Torſion eines elaſtiſchen Fadens in Thätigkeit, ſo erhält man durch ein völlig gleiches Verfahren die Formel, welche dem electrometriſchen Gebrauche der Coulomb'ſchen Wage zum Grunde liegt. Es iſt nämlich hier wieder die Kraft, welche der Torſion des Fadens das Gleichgewicht hält,

$$\frac{e}{f^n} \cos \frac{1}{2}\varphi$$

oder wenn man die Diſtanz der ſich abſtoßenden Körper *C* und *B* als Function des Winkels φ und des Halbmeſſers des Hebels $= 1$ betrachtet:

$$\frac{e}{(2\sin\frac{1}{2}\varphi)^n}\cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

Heißt ψ der Bogen, welcher dem Winkel φ entſpricht, ſo iſt $c\psi$ der Ausdruck für die Torſion des Fadens, welche der abſtoßenden Kraft das Gleichgewicht hält. c iſt ein für denſelben Apparat conſtanter Coefficient, deſſen Werth ſich aus (S. 203) ergibt. Man hat daher

$$\frac{e}{(2\sin\frac{1}{2}\varphi)^n}\cos\tfrac{1}{2}\varphi = c\psi \text{ und } e = \frac{c\psi(2\sin\frac{1}{2}\varphi)^n}{\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

Für $n=2$ hat man

$$e = \frac{4c\psi\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = 4c\psi\tang\tfrac{1}{2}\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

Bekanntlich ſind kleine Bögen ihren Sinuſſen und Tangenten proportionirt. Dieſe Proportionalität wird hier um ſo leichter angenommen werden können, als die Natur der Verſuche ſolcher Art ſelten erlaubt, Bruchtheile eines Grades zu ſchätzen, und daher immer Fehler begangen werden, welche oft viel größer ſind als jene, die aus der Verwechslung der Bogen mit ihren Sinuſſen hervorgehen. Man gehe z. B. von $\sin 1''$ und $\tang 1''$ aus, und ſetze

$\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sin 1''}{1''}\frac{1}{2}\varphi$, $\tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{\tang 1''}{1''}\frac{1}{2}\varphi$ und daher

$\sin\frac{1}{2}\varphi.\ \tang\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sin 1''\tang 1''}{4}\left(\frac{\varphi}{1''}\right)^2$. Iſt nun $\varphi = 36°$, ſo wird nach der gemachten Vorausſetzung $\sin\frac{1}{2}\varphi\ \tang\frac{1}{2}\varphi = 0.098696$, der genaue Werth hingegen iſt 0.100405, mithin nur um 0.00171 größer. Man fehlt daher, wenn man bei $\varphi = 36°$ ſtatt des Bogens die Sehne gebraucht, nur um ſo viel, als hätte man ψ um 0.00171, d. h. um etwa 37′ zu klein genommen. Demnach kann man für Werthe von φ, die nicht größer als 36° ſind, noch recht wohl ſtatt des obigen Ausdruckes den genäherten:

$$e = c\psi\sin 1''\tang 1''.\frac{\varphi^2}{1''} = A\psi\varphi^2 \quad \ldots. (B)$$

brauchen, wenn man $\frac{c\sin 1''\tang 1''}{1''} = A$ ſetzt.

17. Die abſtoßenden Kräfte der Electricität richten ſich nur bei gleichen Entfernungen nach der Intenſität derſelben, in größern Entfernungen wirket aber dieſelbe Electricitätsmenge ſchwächer als in kleineren, und man muß daher, wenn die Electricität gemeſſen werden ſoll, ſtets das Geſetz kennen, nach welchem ihre abſtoßende Kraft bei wachſender Entfernung der auf einander wirkenden Körper abnimmt. Verſchiedene Experimentatoren haben zwar über dieſes Geſetz verſchiedene Ausſprüche gethan, indeß kann man doch mit hinreichender Sicherheit annehmen, daß ſich die Größe der electriſchen Abſtoßung verkehrt wie das Quadrat der Entfernung verhalte, weil ſich gegen die Verſuche, woraus dieſes Reſultat fließt, nichts Erhebliches einwenden läßt und ſich für die Fälle, wo man auf ein anderes Geſetz ſchließen zu müſſen glaubte, ſtets die Urſachen der Abweichung vom vorigen Geſetze nachweiſen laſſen, wie beſonders Egen (Pogg. Ann. 5. 199) gründlich nachgewieſen hat.

18. Außer dem Verſuche, welchen Coulomb mit ſeiner Drehwage zur Ausmittlung des genannten Geſetzes angeſtellt hat, und der in der Naturlehre (IV. Ab. 4. K.) enthalten iſt, mithin als bekannt vorausgeſetzt wird, ſind noch andere Verſuche bekannt, die einer beſonderen Betrachtung werth ſind. So z. B. hat ſelbſt Coulomb unabhängig vom directen Gebrauche der Drehwage einen dieſes Geſetz betreffenden Verſuch angeſtellt, welcher auf der Schwingungsdauer eines Pendels beruht, das unter dem Einfluſſe eines electriſchen Körpers oſcillirte. Das Detail dieſes Verſuches beſteht in Folgendem: Ein horizontaler an einem einfachen Coconfaden von 7—8 Z. Länge hängender Hebel aus Schellack, 15—16 L. lang, trug an einem Ende ein Scheibchen von Goldpapier. Nachdem der Hebel einige Tage ruhig in dem Kaſten der Drehwage gehangen hatte und man gewiß ſeyn konnte, daß ſich der Faden ganz aufgedreht habe und auf die zu erregenden Schwingungen keinen Einfluß nehme, wurde dem Goldſcheibchen eine hölzerne mit Zinnfolio belegte Kugel von 1 F. Durchmeſſer genähert; dieſe ruhte auf drei dünnen Säulen von Schellack und ließ ſich in einer Nuth bewegen. Nachdem der Kugel poſitive und dem Scheibchen negative Electricitäten mitgetheilt worden waren, wurde die Anzahl der Oſcillationen beſtimmt, welche der Schellackhebel bei verſchiedenen, genau bekannten Entfernungen der beiden auf einander wirkenden Körper innerhalb einer beſtimmten Zeit vollbrachte. Coulomb fand Folgendes:

Abſtand der beiden Körper von einander.	Dauer von 15 Oscillationen.
9 Z.	20″
18	41
24	60

Hier wachſen die Abſtände, wie die Zahlen 3:6:8, die Dauer der Oscillationen wie 20:41:60. Wären letztere Zahlen 20:40:54, mithin ihre Quadrate 400:1600:2916, ſo ginge daraus genau das obengenannte Geſetz hervor. Die Abweichung der letzteren Zahl von dieſer Regel kommt aber offenbar auf Rechnung des Electricitätsverluſtes, welcher während des Verſuches Statt fand. Es verminderte ſich nämlich die electriſche Spannung in einer Minute um $\frac{1}{40}$, und daraus findet man, daß die letzte Größe ohne dieſen Verluſt 57 betragen hätte, eine Zahl, die von der dem genannten Geſetze entſprechenden nicht ſtark abweicht.

19. In der neueren Zeit hat dieſes Geſetz Egen mit beſonderem Fleiße auszumitteln geſucht. Er ging zuerſt darauf aus, die von Simon angeſtellten Verſuche näher zu prüfen und zu wiederhohlen. Er verfertigte ſich eine ſehr feine Wage, ähnlich der, welche Simon zu ſeinen Verſuchen gebraucht hatte, und die in Fig. 208 dargeſtellt iſt. *cab* iſt ein feiner, 7 rheinl. Decimalzoll langer Wagebalken, deſſen eine Hälfte *ab* aus Schellack, die andere *ac* hingegen aus Glas beſteht. Dieſe trug auf der Seite *b* eine Kugel aus Korkholz von 0.335 Decimalzoll Durchmeſſer, auf der Seite *c* ein kleines Querſtück von Draht zum Aufhängen kleiner Gewichte. Der Balken bewegte ſich um zwei feine Nadelſpitzen, die ihm als Axen dienten und in Agatpfannen lagen. Der ganze Balken wog 1.552 Gran. Um den Ausſchlag der Wage zu meſſen, war am Träger derſelben die Scale *de* angebracht, die unmittelbar in 0.05 Z. getheilt war und mittelſt Augenmaß noch in 4mal kleinere Theile leicht getheilt werden konnte. Neben der Wage befand ſich eine verticale Säule *fg*, längs welcher ſich ein Schieber ſanft auf und ab bewegen ließ, an welchen ein 4 Z. langes, horizontales Stängelchen von Schellack befeſtiget war, das wieder eine Korkkugel von 0.535 Z. Durchmeſſer trug. Die Zuleggewichte waren Drahtſtücke von einer überſponnenen Saite, 0.034 Z. lang. Beim Gebrauche ſtand dieſe Wage in einem Glaskaſten. War der Balken in Ruhe gekommen, ſo wurde die Kugel am Schieber in einerlei Höhe mit der am Wagebalken gebracht, ihr Stand an der Scale

bemerkt, dann erſtere um eine beſtimmte Größe in die Höhe geſchoben, beiden Kugeln gleichnamige Electricität mitgetheilt, um eine Abſtoßung derſelben zu erzielen. Wenn dieſe erfolgt war, ſo wurden auf den Arm des Balkens Gewichte gelegt, bis die vorige Entfernung der zwei Kugeln von einander wieder hergeſtellt war. Man kannte demnach die Entfernung der ſich abſtoßenden Körper von einander und die Gewichte, wodurch dieſe Entfernung gehandhabt wurde. Betrug nun der Abſtoßungswinkel anfangs a°, nach Zulegung der Gewichte p hingegen b°, ſo muß die Abſtoßungskraft bei der jedesmaligen Diſtanz der Mittelpuncte beider Kugeln durch die Größen a und $p+b$ im Gleichgewichte erhalten werden. Setzt man den noch unbekannten Exponenten des Verhältniſſes, um deſſen Beſtimmung es ſich hier handelt $= n$, ſo iſt $a : b+p = (b+s)^n : (a+s)^n$, wobei s die Summe der Halbmeſſer der zwei Korkkugeln vorſtellt. Hieraus wird

$$n = \frac{\log(b+p) - \log a}{\log(a+s) - \log(b+s)}$$

Wird die Rechnung nach dieſer Formel geführt, ſo ergibt ſich als Mittelwerth von 20 Verſuchen $n = 1.97$., welches von 2 ſo wenig abweicht, daß bei ſo delicaten Verſuchen kaum je eine größere Übereinſtimmung zu erwarten ſeyn dürfte.

Merkwürdig iſt es, daß Simon mit demſelben Apparate Reſultate erhielt, die ſehr nahe $n = 1$ gaben. Allein er beging den Fehler, daß er die Mittelpuncte der electriſchen Wirkung der Kugeln auf einander in ihre Oberfläche verſetzte. Egen hat gezeigt, daß, wenn man dieſen Fehler vermeidet, auch aus Simon's Verſuchen ein Werth für n folgt, welcher der Größe 2 näher liegt als der Größe 1. Ebenſo hat Egen die von Mayer in Göttingen auf eine ſehr ſinnreiche Weiſe angeſtellten Verſuche, die für $n = 1$ zu ſprechen ſchienen, gründlich beurtheilt und ihre Unzulänglichkeit gezeigt. Demnach darf man ohne Scheu das obige Geſetz der electriſchen Wirkung als das wahre Naturgeſetz anſehen.

20. Heißt E die Größe der anziehenden oder abſtoßenden Kraft der Electricität in der Entfernung $= 1$, ſo wirkt dieſe Kraft in die Entfernung a mit der Stärke $\frac{E}{a^2}$. Die Meßinſtrumente für Electricität geben dieſen Werth zwar an, allein er iſt immer das Reſultat der gegenſeitigen Wirkung zweier Körper auf einander, und es bleibt

noch die Frage zu beantworten übrig, wie viel jeder dieſer zwei Körper zur Erzeugung der Totalwirkung beiträgt. Dieſe Frage beantwortet man wieder nach Coulomb's Verſuchen. Er berührte die beiden Kugeln ſeiner Drehwage, welche aus Hollundermark beſtanden, gleichzeitig mit einem iſolirten Nadelkopfe; der Hebel wurde um 48° abgeſtoßen und es war eine fernere Torſion des Fadens von 120° nothwendig, um dieſe Diſtanz auf 28° zu reduciren. Als der Hebel in dieſer Lage ſtabil geworden war, nahm er eine dritte Kugel, welche mit der am Kaſten der Wage befeſtigten der Materie und Größe nach vollkommen gleich und mit derſelben Sorgfalt iſolirt war, und berührte jene mit dieſer. Dadurch verminderte ſich die electriſche Spannung der electriſirten Kugel offenbar um die Hälfte; ihre abſtoßende Kraft vermochte nun den Hebel nur mehr um 28° abzuſtoßen, wenn man dem Faden eine beſondere Torſion von 44° ertheilte. Vor der Berührung war daher die Größe der abſtoßenden Kraft $120° + 28° = 148°$, nach der Berührung $44° + 28° = 72°$. Allein Coulomb hatte ſich vorläufig überzeugt, daß an dem Tage des Verſuches durch unvollkommene Iſolirung die Abſtoßung in 1 M. um $\frac{1}{50}$ vermindert wurde. Die Abſtoßung von 72° würde daher ohne dieſen Verluſt vor einer Minnte $72° + \frac{72}{50} = 73° \frac{1}{2}$ betragen haben. Dieſe Zahl iſt aber nahe die Hälfte von 148, und man kann daher annehmen, daß auch die abſtoßende Kraft der Kugel durch Berührung mit der anderen, vollkommen gleichen auf die Hälfte herabgeſetzt worden und daher die Abſtoßung zweier Körper auf einander das Product der Abſtoßung jedes dieſer Körper für ſich ſey. Heißt die Wirkung des einen Körpers ε, die des anderen e, ſo iſt

$$E = e\varepsilon \ldots\ldots\ldots (C).$$

21. Man ſieht ſchon aus dem Vorhergehenden, wie nothwendig zu genauen Verſuchen über die Geſetze des Gleichgewichtes der Electricität die Kenntniß des Verluſtes iſt, den ein electriſirter Körper unter gegebenen Umſtänden in einer gewiſſen Zeit erleidet. Nur mittelſt dieſer Kenntniß kann man die Erfahrungsreſultate von jedem, während des Verſuches vorgefallenen Verluſte unabhängig machen und daher auf jenen Normalzuſtand zurückführen, der vorhanden wäre, wenn eine vollkommene Iſolirung erreicht werden könnte.

Zur Ausmittlung dieſes Verluſtes, dient die von Coulomb gemachte Erfahrung, daß die Verminderung der abſtoßenden Kraft, welche ein Körper durch unvollkommene Iſolirung innerhalb einer

gewiſſen Zeit erfährt, der mittleren Größe dieſer Kräfte innerhalb zweier Zeiträume, zwiſchen welche obige Zeit fällt, gerade proportionirt ſey. Iſt z. B. die abſtoßende Kraft eines Körpers am Anfange eines Verſuches der Zahl 160, nach Verlauf von 3 M. der Zahl 130 proportionirt, mithin der Verluſt $= 30$; ſo iſt die mittlere abſtoßende Kraft $\frac{160+130}{2} = 145$, und der Verluſt innerhalb $3\,\text{M.} = \frac{30}{145} = \frac{3}{14.5}$ oder in $1\,\text{M.} = \frac{1}{14.5}$.

22. Es werde nun die Größe der abſtoßenden Kraft der Electricität in einer gewiſſen Entfernung vom abgeſtoßenen Körper durch r ausgedrückt und man nehme, dem vorhergehenden Geſetze gemäß, an, ſie ändere ſich in der Zeit dt um die Größe dr; ſo iſt

$$\alpha\, dt = -\frac{dr}{r},$$

wo α den Exponenten des Verhältniſſes zwiſchen der abſtoßenden Kraft und dem in einer Zeiteinheit erfolgenden Verluſt (nach obigem Beiſpiele $\frac{1}{14.5}$) bedeutet. Das Zeichen — zeigt an, daß r mit wachſendem t abnimmt. Integrirt man die vorhergehende Gleichung, ſo erhält man:

$$\alpha t = -\log r + \log R = \log \frac{R}{r},$$

wo R die Conſtante der Integration bezeichnet. Zur Beſtimmung derſelben hat man für $t = 0$, $\log R = \log r$, mithin R der Ausdruck der abſtoßenden Kraft im Anfange des Verſuches. Multiplicirt man beide Glieder mit dem Modulus der gewöhnlichen Logarithmen $\mu = 0.4343 \ldots$ ſo erhält man

$$\mu\, \alpha\, t = \mu \log \frac{R}{r}.$$

Da es ſich nun am öfteſten darum handelt, den Werth von r zu beſtimmen, ſo gibt man dieſem Ausdruck die Form

$$\log r = \log R - \mu\alpha t \ldots\ldots (D).$$

Bei einem Verſuche, wo $t = 45$, $\alpha = \frac{1}{41}$, $R = 150$ war, fand Coulomb $r = 50^{\circ}$. Berechnet man r nach der Formel, ſo hat man: $\log r = 2.1760913 - 0.4766625 = 1.6994288$ und daher

$r = 50° \; 3' \; 10''$, alſo ein mit der Erfahrung ſattſam übereinſtimmendes Reſultat.

23. Es ſey nun E die Intenſität der Electricität, welche der Kraft R entſpricht, E_1 diejenige, welche r entſpricht, ferner a die Entfernung der einander abſtoßenden Körper, ſo iſt

$$\frac{E}{a^2} = \rho R, \; \frac{E_1}{a^2} = \rho r,$$

wenn man den Exponenten des Verhältniſſes zwiſchen dem Werthe von E und R ꝛc. durch ρ ausdrückt. Daraus wird

$$E_1 = \frac{Er}{R} \text{ und } \log E_1 = \log E + \log \frac{r}{R},$$

oder wenn man ſtatt $\frac{r}{R}$ den Werth aus der Gleichung (D) ſetzt:

$$\log E_1 = \log E - \mu a t.$$

Dieſe Formel lehrt aus E und $\frac{r}{R}$ die Größe E_1 finden. E iſt aber das Product der Kräfte beider auf einander wirkender Körper. Hat daran einer anfänglich den Antheil e, der andere den Antheil ε, nach Verlauf der Zeit t aber e_1 und ε_1, ſo hat man:

$$E = e\varepsilon, \; E_1 = e_1 \varepsilon_1$$

und

$$\log e_1 = \log e - \mu a t, \; \log \varepsilon_1 = \log \varepsilon - \mu a t.$$

24. Wenn nur einer der zwei Körper vollkommen iſolirt iſt, nimmt ihre gegenſeitige Einwirkung ſchneller ab, als wenn dieſes mit beiden der Fall iſt. Die Erfahrung lehrt die Größe der electriſchen Kraft $E = e\varepsilon$ im Anfange der Beobachtung und die nach Verlauf der Zeit t, nämlich $E_1 = e_1 \varepsilon_1$. Man iſt ferner im Stande die Größe der Kraft ε_1 anzugeben. Es iſt nämlich

$$\frac{E_1}{E} = \frac{e_1}{e} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \text{ und } \log \frac{E_1}{E} = \log \frac{e_1}{e} + \log \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$$

Für einen iſolirten Körper hat man aber

$$\log \frac{e_1}{e} = -\mu a t,$$

mithin

$$\log \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \log \frac{E_1}{E} + \mu a t \; .... \; (E).$$

B. Anordnung der freien Electricität in guten Leitern.

25. Unzweideutige Verſuche haben gelehrt, daß ſich die Electricität, welche man einem iſolirten Leiter mittheilt, ganz auf der Oberfläche desſelben vertheile, ohne in ſein Inneres einzudringen und ohne von deſſen natürlichen Electricität etwas frei zu machen. Denkt man ſich das electriſche Princip als feines expanſibles Fluidum, das aus zwei Theilen beſteht, die ſich gegenſeitig anziehen, während die Mollecule desſelben Theiles ſich nach dem verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe ihrer Entfernung abſtoßen; ſo muß die einem Körper mitgetheilte Electricität auf ſeiner Oberfläche eine Schichte bilden, von ſolcher Anordnung, daß die Wirkung jedes Theilchens auf irgend einen Punct im Innern des Körpers durch eine gleiche Gegenwirkung eines anderen Theilchens aufgehoben wird. Nach dieſer Vorausſetzung hat Poiſſon die Geſtalt und Dichte dieſer Schichte durch Rechnung auszumitteln geſucht. Folgendes enthält das wichtigſte dieſer Unterſuchung.

26. Man denke ſich ein Sphäroid, das mit einer ſehr dünnen Schichte Electricität bedeckt iſt, nenne die Dicke dieſer Schichte y und gebe den Buchſtaben V, ρ, δ, x dieſelben Bedeutungen, welche ſie im zweiten Abſchnitte, Kap. I. hatten, und man hat wie auf S. 165

$$V = -\int \frac{dm}{\sqrt{(\rho^2 - 2\rho x \cos\delta + x^2)}}$$

oder wenn man für dm den Werth $y\rho^2 \sin\delta\, d\delta\, d\omega$ ſetzt, und für $(\rho^2 - 2\rho x \cos\delta + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ den Buchſtaben R ſchreibt,

$$V = \int\int R y \rho^2\, d\mu\, d\omega.$$

Denkt man ſich die Wirkung V nach x, μ, ω zerlegt, ſo iſt $-\frac{dV}{dx}$ die Größe der Reſultirenden, welche aus allen anziehenden oder abſtoßenden Kräften hervorgeht, und um die Beſtimmung dieſer Größe handelt es ſich.

Löſet man R in eine Reihe auf, deren Glieder nach den Potenzen von $\frac{x}{\rho}$ geordnet ſind, wie z. B. in folgende:

$$R = \frac{1}{\rho} U_0 + \frac{x}{\rho^2} U_1 + \frac{x^2}{\rho^3} U_2 + \ldots + \frac{x^n}{\rho^{n+1}} U_n,$$

ſo iſt

$$V = \iint \gamma \rho U_0 \, d\mu \, d\omega + x \iint \gamma U_1 \, d\mu \, d\omega + x^2 \iint \frac{\gamma}{\rho} U_2 \, d\mu \, d\omega$$

$$\ldots\ldots + x^n \iint \frac{\gamma}{\rho^{n-1}} U_n \, d\mu \, d\omega.$$

Löſet man R in eine Reihe auf, deren Glieder nach $\frac{\rho}{x}$ wachſen, wie folgende:

$$R = \frac{1}{x} U_0 + \frac{\rho}{x^2} U_1 + \frac{\rho^2}{x^3} U_2 + \ldots + \frac{\rho^n}{x^{n+1}} U_n$$

ſo erhält man auf gleiche Weiſe:

$$V = \frac{1}{x} \iint \gamma \rho^2 U_0 \, d\mu d\omega + \frac{1}{x_2} \iint \gamma \rho^3 U_1 \, d\mu d\omega + \frac{1}{x^3} \iint \gamma \rho^4 U_2 \, d\mu \, d\omega$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{x^{n+1}} \iint \gamma \rho_n{}^{+2} U_n \, d\mu \, d\omega \ldots. (a).$$

Soll die Electricität an der Oberfläche des Sphäroides im Gleichgewichte ſtehen und dabei auf jeden Punct im Innern des Sphäroides mit gleichen und entgegengeſetzten Kräften wirken, ſo hat man:

$$\iint \gamma U_0 \, d\mu \, d\omega = 0, \int \frac{\gamma}{\rho} U_1 d\mu \, d\omega = 0,$$

oder allgemein:

$$\iint \frac{\gamma}{\rho^{n-1}} U_n \, d\mu \, d\omega = 0.$$

Entwickelt man $\frac{\gamma}{\rho^{n-1}}$ in eine Reihe von der Form

$$\frac{\gamma}{\rho^{n-1}} = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_m,$$

ſo wird für alle Werthe von m, die von n verſchieden ſind (S. 167)

$$\iint Q_m \, U_n \, d\mu \, d\omega = 0$$

und für $m = n$

$$\iint Q_n \, U_n \, d\mu \, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} Q'_n$$

wo π das bekannte Kreisverhältniß, Q'_n aber das bezeichnet, was

aus Q_n wird, wenn μ und ω in μ_1 und ω_1 übergehen. Es iſt daher auch

$$\iint \frac{y}{\rho^{n-1}} U_n\, d\mu\, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} Q'_n.$$

Soll dieſer Ausdruck $= 0$ ſeyn, ſo muß $Q'_n = 0$ ſeyn.

27. Iſt der electriſche Körper ein Ellipſoid, welches von einer Kugel ſo wenig abweicht, daß man das Quadrat ſeiner Excentricität vernachläſſigen kann, und deſſen conſtanter Radius $= a$ iſt, ſo wird der veränderliche Radius desſelben ausgedrückt durch

$$\rho = a(1+\alpha u) \text{ und } \rho^{n-1} = a^{n-1}(1+(n-1)\alpha u \ldots)$$

wo α eine ſehr kleine conſtante Größe, u aber eine Function von μ und ω iſt. Bezeichnet b die Dicke der Electricitätsſchichte an der Oberfläche der Kugel, deren Radius a iſt, ſo kann man ſetzen

$$y = b(1+\alpha v),$$

wo v wieder eine Function von μ und ω bedeutet. Hieraus wird

$$\frac{y}{\rho^{n-1}} = \frac{b}{a^{n-1}}\left(\frac{1+\alpha v}{1+(n-1)\alpha u}\right) = \frac{b}{a^{n-1}}\Big(1+\alpha(v+(n-1)u)\Big)$$

Löſet man $v+(n-1)u$ in eine Reihe auf, ſo darf in derſelben das Glied, deſſen Index n iſt, nicht vorkommen (S. 167). Setzt man daher

$$u = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n \ldots (b),$$

ſo hat man

$$v = S_2 + 2S_3 + 3S_4 + \ldots (n-1)S_n \ldots (c).$$

Iſt nun die ganze das Ellipſoid bedeckende Menge Electricität $= A$, ſo hat man

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\mu}^{\mu} y\,\rho^2\, d\mu\, d\omega = A.$$

Setzt man für y, ρ die vorher erörterten Werthe und vernachläſſigt dabei alle Potenzen von α, welche die erſte überſteigen, ſo erhält man

$$\begin{aligned} A &= \iint a^2 b(1+\alpha v)(1+2\alpha u)\, d\mu\, d\omega \\ &= \iint a^2 b(1+\alpha(v+2u))\, d\mu\, d\omega. \end{aligned}$$

oder mittelſt der vorigen Werthe von u und v

$$A = \iint a^2 b\, d\mu\, d\omega + \iint a^2 b\alpha(S_1 + 2S_2 + 3S_3 \ldots + nS_n)\, d\mu\, d\omega.$$

Allein $\iint S_n d\mu d\omega$ iſt für alle Werthe von n gleich Null, mit Ausnahme des Werthes $n=0$; daher iſt

$$A = a^2 b \iint d\mu d\omega = 4 a^2 b \pi \text{ oder } b = \frac{A}{4 a^2 \pi}.$$

Befindet ſich der Anfangspunct der Coordinaten im Mittelpuncte des Ellipſoides, ſo iſt $u = S_2$, $v = S_2$, mithin $y = b(1 + \alpha S_2)$ und daher

$$\rho = a(1 + \alpha S_2),\ \rho - y = (a - b)(1 + \alpha S_2).$$

Die Electricitätsſchichte iſt daher von zwei ähnlichen und concentriſchen Ellipſoiden begrenzt.

28. Um V für einen äußeren Punct zu beſtimmen, bezeichne man mit u_1 und v_1 das, was aus u und v wird, wenn μ und ω in μ_1 und ω_1 übergehen, daher wird

$y = b(1 + \alpha v_1)$, $\rho = a(1 + \alpha u_1)$, $\rho^{n+2} = a^{n+2}(1 + (n+2)\alpha u_1)$
$y \rho^{n+2} = b a^{n+2}(1 + \alpha(v_1 + (n+2)u_1) = b a^{n+2}(1 + \alpha(n+2) S_1' + (n+3) S_2' + (n+4) S_3' + \ldots)$. Weil aber

$$\iint S_m' U_n d\mu d\omega = 0$$

iſt, ſobald m von n verſchieden iſt, und man für $m=n$ hat

$$\iint S_n' U_n d\mu d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} S_n,$$

ſo erhält man

$$\iint y \rho^{n+2} U_n d\mu d\omega = 4\pi \alpha b a^{n+2} S_n.$$

Setzt man in dieſem Ausdrucke ſucceſſive $n = 1, 2, 3 \ldots.$ ſo erhält man die Werthe der einzelnen Glieder der in 26 (a) aufgeſtellten Reihe, nämlich:

$$\frac{1}{x} \iint y' \rho^2 U_0 d\mu d\omega = \frac{4 a^2 b \pi}{x}$$

$$\frac{1}{x^2} \iint y \rho^3 U_1 d\mu d\omega = \frac{4 a^3 b \pi}{x^2} \alpha S_1$$

. . . .

mithin wird

$$V = \frac{4 a^2 b \pi}{x}\left(1 + \alpha\left(\frac{a}{x} S_1 + \frac{a^2}{x^2} S_2 + \ldots\right)\right)$$

Aus dieſem Ausdrucke findet man leicht die Anziehung, welche auf irgend einen außerhalb des Sphäroides liegenden Punct ausgeübt wird, wenn man V nach x, μ, ω differenziirt. Es iſt nämlich:

$$-\frac{dV}{dx}=\frac{4a^2b\pi}{x}\left(1+\alpha\left(\frac{2a}{x}S_1+\frac{3a^2}{x^2}S_2+\ldots\right)\right)$$

Liegt der Punct, auf welchen die Reſultirende aus allen abſtoßenden Kräften wirkt, an der Oberfläche des Sphäroides, ſo iſt $x=\rho$, mithin

$$-\frac{dV}{dx}=\frac{4a^2b\pi}{\rho^2}\left(1+\alpha\left(\frac{2a}{\rho}S_1+\frac{3a^2}{\rho^2}S_2+\ldots\right)\right)$$

oder wenn man ſtatt ρ den für das Ellipſoid gefundenen Werth $a(1+\alpha u)$ ſetzt und dabei alle die erſte überſteigenden Potenzen von α vernachläſſiget, ſo erhält man:

$$-\frac{dV}{dx}=\frac{4b\pi}{1+2\alpha u}\left(1+\alpha\left(2S_1+3S_2+4S_3+\ldots\right)\right)$$

Es iſt aber aus dem Vorhergehenden (*b*) und (*c*)

$$2S_1+3S_2+4S_3\ldots\ldots=2u+v,$$

mithin

$$-\frac{dV}{dx}=\frac{4b\pi}{1+2\alpha u}\left(1+\alpha(2u+v)\right)$$

oder ... (*F*)

$$-\frac{dV}{dx}=4b\pi(1+\alpha v)$$

Hieraus ſieht man, daß an einem von einer Kugel abweichenden Sphäroide die electriſche Abſtoßung nach der Richtung des Radius zerlegt, der Dicke der electriſchen Schichte, mithin der an dieſer Stelle angehäuften Electricität proportional ſey.

29. Man denke ſich eine unendlich dünne, feſte oder flüſſige Schichte von beliebiger Geſtalt, etwa wie ſie Fig. 209 vorſtellt, nehme an ihrer äußeren Fläche einen Punct A an, errichte daſelbſt die Normale Aa, welche die innere Oberfläche dieſer Schichte in a ſchneidet und nenne die Dicke Aa an dieſer Stelle y, ferner denke man ſich eine auf Aa ſenkrechte Ebene Mm, welche die Schichte in zwei Segmente MAm und MBm ſchneidet, wovon erſteres gegen letzteres verſchwindend klein iſt. Iſt P die Anziehung, welche das größere Segment auf a nach der Richtung der Normalen ausübt, p dieſelbe Größe in Bezug auf das kleinere Segment, nimmt man ferner an, die Wirkung beider ſey anziehend, ſo wird a mit der Kraft $P-p=q$ einwärts gezogen. Beide Segmente ziehen den

Punct A beinahe eben ſo ſtark an, wie den Punct a, ihre vereinte Wirkung auf A wird daher $P + p = Q$ ſeyn, und man hat $Q - q = 2p$.

Wird Aa bis C verlängert und werden vom Mittelpuncte C aus mit den Halbmeſſern Ca und CA ſphäriſche Flächen beſchrieben, ſo erhält man eine ſphäriſche Schichte von der Dicke y, die auf a gar nicht, auf A hingegen ſo wirkt, als wäre ihre ganze Macht in C vereinigt. Letztere Wirkung iſt daher $4\pi y$ und wenn man mit p_1 das bezeichnet, was aus p wird, wenn das zuerſt betrachtete Segment in ein ſphäriſches übergeht, ſo erhält man

$$4\pi y = 2p_1$$

Legt man durch AC zwei Ebenen, welche mit einander den Winkel α einſchließen, und nennt die Anziehung eines zwiſchen ihnen enthaltenen Sectors p_2, ſo hat man

$$p_2 : p_1 = \alpha : 2\pi \text{ oder } p_2 = \frac{p_1 \alpha}{2\pi} = \alpha y.$$

Da nun die Anziehung des Kugelſegmentes vom Radius unabhängig iſt, ſo kann man jedem derſelben eine Größe ertheilen, welche dem Krümmungshalbmeſſer des Segmentes an der betreffenden Stelle gleich iſt, ohne dadurch die Größe ſeiner Anziehung zu ändern, und es muß die Anziehung der Summe aller ſolcher Sectoren der Anziehung des ganzen Segmentes gleich ſeyn. Da die Anzahl der Sectoren offenbar $\frac{2\pi}{\alpha}$ iſt, ſo wird die Anziehung aller zuſammen nach der Richtung der Normalen $2\pi y = p_1 = p$ und man erhält:

$$Q - q = 4\pi y.$$

Iſt T die Anziehung der ganzen flüſſigen Schichte auf A nach der normalen Richtung, t die auf den Punct a ausgeübte nach derſelben Richtung, ſo iſt offenbar $T = t$. Heißt R die Wirkung der Schichte auf A nach einer Richtung, die mit AC den Winkel φ einſchließt, r dieſelbe Kraft, welche auf a nach derſelben Richtung wirkt, ſo erhält man:

$$R = Q\cos\varphi + T\sin\varphi,\quad r = q\cos\varphi + t\sin\varphi,$$

oder wenn man für t und q obige Werthe ſetzt:

$$r = (Q - 4\pi y)\cos\varphi + T\sin\varphi = R - 4\pi y\cos\varphi.$$

Was von a gilt, läßt ſich auch auf jeden innern Punct anwenden,

deſſen Abſtand von der Oberfläche $= y$ iſt. Da die Wirkung auf einen ſolchen $=$ o ſeyn muß, ſo hat man $T = 0$, $Q = 0$, und daher auch $q = 0$ und $r = 4\pi y$. Mithin iſt für eine auf einem Sphäroid befindliche Electricitätsſchichte die Tangentalkraft $= 0$, die normale Kraft hingegen der Dicke der Schichte proportionirt.

Bei einem Ellipſoid iſt y dem Halbmeſſer des Sphäroides proportional, welches das Ellipſoid berührt, und daher iſt auch die electriſche Anziehung und Abſtoßung dieſem Halbmeſſer proportional. Darum verhält ſich die Kraft am Ende der großen Axe zu der am Ende der kleinen, wie die große Axe zur kleinen. An der großen Axe wird daher die Electricität am leichteſten den Widerſtand der Luft überwältigen können und daher auch am leichteſten abfließen.

Spitzen kann man als Stücke elliptiſcher Körper von unendlich großer Axe betrachten. Da bei einer ſolchen die Anhäufung der Electricität unendlich größer ſeyn muß, als an flachen Stellen, ſo muß dort auch ein beſtändiger Abfluß der Electricität eintreten können.

30. Im Vorhergehenden iſt für einen innerhalb des Sphäroides gelegenen Punct der Ausdruck

$$\iint \frac{y}{\rho^{n-1}} U_n \, d\mu \, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \frac{y_n}{\rho^{n-1}}$$

und für einen außerhalb des Sphäroides liegenden

$$\iint y \rho^{n+2} U_n \, d\mu \, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} \rho^{n+2} y_n$$

gefunden worden. Iſt der electriſirte Körper eine Kugel, ſo muß man nach der Integration für ρ den Halbmeſſer a derſelben ſetzen, wofür man erhält:

$$\iint \frac{y}{\rho^{n-1}} U_n \, d\mu \, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \frac{y_n}{a^{n-1}}.$$

$$\iint y \rho^{n+2} U_n \, d\mu \, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot a^{n+2} y_n$$

Setzt man ſucceſſiv $n = 0, 1, 2, y$, ſo erhält man die Glieder, deren Summe die Größe V gibt. Es iſt daher für einen inneren Punct

$$V = 4\pi a \left(y_0 + \frac{x}{3a} y_1 + \frac{x^2}{5a^2} \cdot y_2 + \cdot \cdot + \frac{x^n}{(2n+1)a^n} \cdot y_n \right)$$

Für einen äußeren Punct

$$V=\frac{4\pi a^2}{x}\left(y_0+\frac{a}{3x}y_1+\frac{a^2}{5x^2}y_2+\ldots+\frac{a^n}{(2n+1)x^n}\cdot y_n\right)$$

Die Glieder innerhalb den Klammern ſind die Entwicklungsglieder $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ von y, ſo daß man hat

$$y=y_0+y_1+y_2\ldots+y_n.$$

Für einen an der Oberfläche der Kugel liegenden Punct iſt $x=a$ mithin

$$V=4\pi a\left(y_0+\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{5}y_2\ldots+\frac{1}{2n+1}y_n\right)$$

V iſt im Allgemeinen eine Function von x, μ, ω; allein in dem Falle, wo die Electricität um eine durch den Mittelpunct der Kugel gehende gerade Linie ſymmetriſch angeordnet iſt, kann man dieſe als Axe von x annehmen und durch μ den Coſinus jenes Winkels ausdrücken, den der Radius Vector mit ihr macht. In dieſem Falle wird V von ω unabhängig und man kann ſetzen:

$$y_0+\frac{x}{3}y_1+\frac{x^2}{5}y_2+\ldots\frac{x_n}{2n+1}y_n=F(\mu, x)$$

wo F eine unbeſtimmte Function bedeutet. Da wird nun für einen inneren Punct

$$V=4\pi a\ F\left(\mu,\frac{x}{a}\right)$$

Für einen äußeren Punct

$$V=\frac{4\pi a^2}{x}F\left(\mu,\frac{a}{x}\right)$$

Für einen Punct in x iſt $\mu=1$, und daher V gar nur eine Function (f) von x, für welche man daher hat:

$$f(x)=y+\frac{y_1}{3}+\frac{y_2}{5}\ldots\frac{y_n}{2n-1}.$$

Ferner iſt

$$\frac{dF(\mu,x)}{dx}=\frac{y_1}{3}+\frac{2x}{5}y_2+\ldots\frac{nx^{n-1}}{n1+}\cdot y_n$$

mithin

$$\frac{2x\,dF(\mu,x)}{dx}+F(\mu,x)=xy_0+x^2y_1+\ldots+\frac{2nx^n}{2n+1}\cdot y_{n}$$

und für $x = 1$

$$\frac{2x\,dF(x,\mu)}{dx} + F(\mu, x) = y, \text{ und eben ſo}$$

$$\frac{2x\,df(x)}{dx} + f(x) = y.$$

31. Man denke ſich zwei electriſche Kugeln, die auf einander einwirken, und nehme die Axe der x ſo, daß ſie den Mittelpunct beider mit einander verbindet. Da iſt nun offenbar die Electricität rings um dieſe Linie ſymmetriſch angeordnet. Man bezeichne nun mit $V_1\, x_1\, \mu_1\, F_1\, f_1$ ꝛc. für die zweite Kugel das, was bei der erſten mit $V\, x\, \mu\, F\, f$ ꝛc. angedeutet wurde, und man hat für einen Punct außerhalb beider Kugeln:

$$V + V_1 = W = \frac{4\pi a^2}{x} F\left(\mu, \frac{a}{x}\right) + \frac{4\pi a_1^2}{x_1} F_1\left(\mu_1, \frac{a_1}{x_1}\right)$$

Für einen Punct innerhalb der erſten Kugel

$$V + V_1 = W = 4\pi a\, F\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + \frac{4\pi a_1^2}{x_1} F_1\left(\mu_1, \frac{a_1}{x_1}\right)$$

Für einen Punct innerhalb der zweiten Kugel

$$V + V_1 = W = \frac{4\pi a^2}{x} F\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + 4\pi a_1\, F_1\left(\mu_1, \frac{x_1}{a_1}\right)$$

und überdieß

$$\frac{2x_1\, df_1(\mu_1 x_1)}{dx_1} + f_1(\mu_1, x_1) = y$$

$$\frac{2x_1\, dF(x_1)}{dx} + F(x_1) = y_1.$$

Durch Differenziiren von $V\ V_1\ W$ erhält man die Wirkung beider Kugeln nach der beſtimmten Richtung. Die Kraft, womit beide Kugeln auf einen außerhalb beiden liegenden Punct wirken, liegt offenbar in einer durch die Mittelpuncte beider und dem afficirten Puncte gelegten Ebene. Denkt man ſich dieſelbe in zwei andere zerlegt, deren eine mit dem Radius Vector x parallel iſt und A heißt, während die andere darauf ſenkrechte mit B bezeichnet wird, ſo hat man:

$$A = -\frac{dW}{dx},\ B = -\frac{dW}{x\,d\delta} = \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{x} \cdot \frac{dW}{d\mu}.$$

Ferner iſt wegen $W = V + V_1$

$$A = -\frac{dV}{dx} - \frac{dV_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} - \frac{dV_1}{d\mu'} \cdot \frac{d\mu_1}{dx}$$

$$B = \frac{\sqrt{(1-\mu^2)}}{x}\left(\frac{dV}{d\mu} + \frac{dV_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\mu} + \frac{dV_1}{dx_1} \cdot \frac{d\mu_1}{d\mu}\right)$$

Soll die Wirkung auf jeden Punct im Innern der beiden Kugeln = o ſeyn, ſo muß dieſe Wirkung von μ und ω unabhängig gemacht werden. Dieſes iſt der Fall, wenn man hat

$$\left.\begin{array}{l} aF\left(\mu, \frac{x}{a}\right) + \frac{a_1^2}{x_1} F_1\left(\mu_1, \frac{a_1}{x_1}\right) = h \\ \frac{a^2}{x} F\left(\mu, \frac{a}{x}\right) + a F_1\left(\mu_1, \frac{x_1}{a_1}\right) = g \end{array}\right\}$$

wo h und g conſtante Größen ſind. Dieſe werden für Puncte, welche in der die Mittelpuncte verbindenden geraden Linie liegen:

$$\left.\begin{array}{l} af\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a_1^2}{x} f_1\left(\frac{a_1}{x_1}\right) = h \\ \frac{a^2}{x} f\left(\frac{a}{x}\right) + a_1 f_1\left(\frac{x_1}{a_1}\right) = g \end{array}\right\} \ldots (G).$$

Iſt die Entfernung beider Mittelpuncte $= c$, ſo hat man

$$c = x + x_1$$

$$\left.\begin{array}{l} af\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a_1^2}{c-x} f_1\left(\frac{a_1}{c-x}\right) = h \\ \frac{a^2}{c-x} f_1\left(\frac{a}{x_1}\right) = a_1 F_1\left(\frac{x_1}{a_1}\right) = g \end{array}\right\} \ldots (H).$$

Um F zu eliminiren ſetze man $\frac{x_1}{a_1} = \frac{a_1}{c-z}$, wo daher z eine neue Veränderliche iſt, und man erhält aus der letzteren Gleichung

$$\frac{a^2(c-z)}{c^2 - a_1^2 - cz} f\left(\frac{a(c-z)}{c(c-z) - a_1^2}\right) + a_1 f_1\left(\frac{a_1}{e-z}\right) = g.$$

Die Größe x kann alle Werthe von $x = -a$ bis $x = +a$ annehmen, ebenſo x_1 alle Werthe zwiſchen $-a_1$ und $+a_1$; darum kann x_1 mit x verwechſelt werden. Thut man dieſes und combinirt das Reſultat dieſer Verwechslung mit H, ſo erhält man:

$$af\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a^2 a_1}{c(c-x) - a^2_1} f\left(\frac{a(c-x)}{c(c-x) + a^2_1}\right) = h - \frac{g a_1}{c-x}.$$

30. Berühren ſich die beiden bis jetzt betrachteten Kugeln, ſo iſt $c = a + a_1$. Setzt man überdieß $a = 1$, ſo wird die vorhergehende Gleichung

$$f(x) - \frac{a_1}{(1+a_1)(1-x)-a_1} f\left(\frac{1+a_1-x}{(1+a_1)(1-x)+a_1}\right) = h - \frac{g a_1}{1+a_1-x} \quad (d)$$

Um dieſe Gleichung zu integriren ſey

$$f(x) = \frac{P}{1-x}$$

wo P eine Function von x, die unverändert bleibt, wenn man ſtatt x ſetzt

$$\frac{1+a_1-x}{(1+a_1)(1-x)+a_1}.$$

Durch dieſe Subſtitution wird

$$f\frac{1+a_1-x}{(1+a_1)(1-x)+a_1} = \frac{(1+a_1)(1-x)+a_1}{a_1(1-x)} P,$$

mithin

$$fx - \frac{a_1}{(1+a_1)(1-x)+a_1} . f\frac{1+a_1-x}{(1+a_1)(1-x)+a_1} = 0.$$

Behält man von (d) im zweiten Gliede nur den erſten Theil bei, ſo wird

$$f(x) - \frac{a_1}{(1+a_1)(1-x)+a_1} f\frac{1+a_1-x}{(1+a_1)(1-x)+a_1} = h \quad (e)$$

welcher Gleichung das Integral

$$f(x) = \frac{h_1}{1-x}\int \frac{t^{\frac{m}{1-x}+n} - 1}{1-t} . dt$$

entſpricht, wo h_1, m, n conſtante Größen ſind, die erſt beſtimmt werden ſollen, und die Integration von $t=0$ bis $t=1$ auszudehnen iſt. Setzt man in (d) ſtatt $f(x)$ den eben gefundenen Werth, ſo wird

$$\frac{a_1}{(1+a_1)(1-x)+a_1} . f\left(\frac{1+a_1-x}{(1+a_1)(1-x)+a_1}\right)$$

$$= \frac{h_1}{1-x}\int \frac{t^{\frac{m}{1-x}+\frac{m(1+a_1)}{a_1}+n} - 1}{1-t} . dt$$

Man ſetze $\frac{m(1+a_1)}{a_1}=1$, ziehe dieſe Gleichung von der vorhergehenden ab, ſo iſt

$$f(x)-\frac{a_1}{(1+a_1)(1-x)+a_1}.f\left(\frac{1+a_1-x}{(1+a_1)(1-x)+a_1}\right)$$
$$=\frac{h_1}{1-x}\int t^{\frac{m}{1-x}+n}dt.$$

Nimmt man nun $n=-1$, $h_1=mh$, und verrichtet die Integration, ſo wird

$$\frac{h_1}{1-x}\int t^{\frac{m}{1-x}+n}dt=h,$$

$$\text{mithin } f(x)=\frac{a_1 h}{(1+a_1)(1-x)}\int\frac{t^{\frac{a_1}{(1+a_1)(1-x)}-1}-1}{1-t}dt.$$

Nimmt man nun den zweiten Theil des zweiten Gliedes der Gleichung (d), ſo findet man

$$f(x)=-\frac{a_1 g}{(1+a_1)(1-x)}\int\frac{t^{\frac{a_1}{(1+a_1)(-x)}-\frac{a_1}{1+a_1}}-1}{1-t}dt.$$

Daher iſt das vollſtändige Integral der Gleichung (d) folgendes:

$$f(x)=\frac{P}{1-x}+\frac{a_1}{(1+a_1)(1-x)}\left(h\int\frac{t^{\frac{a_1}{(1+a)(1-x)}-1}-1}{1-t}dt-g\int\frac{t^{\frac{a_1}{(1+a_1)(1-x)}-\frac{a_1}{1+a_1}}-1}{1-t}.dt\right)$$

31. Für die Stelle, wo die Kugeln ſich berühren, hat man aus (H)

$$f(x)+\frac{a^2_1}{1+a_1-x}.f_1\frac{a_1}{1+a_1-x}=h$$

$$\frac{1}{1+a_1-x}f\left(\frac{1}{1+a_1-x}\right)+a_1 f_1\left(\frac{x_1}{a_1}\right)=g$$

Setzt man $x=a=1$, $x_1=a_1$, ſo wird

$$f(1)+a_1 f_1(1)=h;\ f(1)+a_1 f_1(1)=g,\ \text{mithin } g=h,$$

und wenn man in $f(x)=\frac{P}{1-x}$ für x dieſen angenommenen Werth ſetzt: $P=0$, deßhalb wird:

$$f(x)=\frac{a_1 h}{(1+a_1)(1-x)}\int\frac{\left(t^{-\frac{1}{1+a_1}}-1\right)t^{\frac{a_1 x}{(1+a_1)(1-x)}}}{1-t}.dt\,..(I)$$

Setzt man $t=\vartheta^{1-x}$, ſo wird

$$f(x)=\frac{a_1 h}{1+a_1}\int\frac{1-\vartheta^{\frac{1-x}{1+a_1}}}{1-\vartheta^{1-x}}\vartheta^{-\frac{1}{1+a_1}}.d\vartheta$$

aber $\frac{1-\vartheta^{\frac{1-x}{1+a_1}}}{1-\vartheta^{1-x}}=\frac{1}{1+a_1}\left(1-\frac{a_1\log\vartheta}{2(1+a_1)}(1-x)+\ldots\right)$

mithin wird

$$f(x)=\frac{a_1 h_1}{(1+a_1)^2}\left(\int\vartheta^{-\frac{1}{1+a_1}}d\vartheta-\frac{a_1(1-x)}{2(1+a_1)}\int\vartheta^{-\frac{1}{1-a_1}}\log\vartheta d\vartheta\right)$$

oder nach Entwickelung der Integrale der einzelnen Theile

$$f(x)=\frac{a_1.h}{(1+a_1)^2}\left(\frac{1+a_1}{a_1}+\frac{a_1(1-x)}{2(1+a_1)}:\frac{(1+a_1)^2}{a_1^2}\ldots\right)$$

$$=\frac{h}{1+a_1}\left(1+\frac{1-x}{2}+\ldots\right)$$

und daher

$$\frac{df(x)}{dx}=-\frac{h}{2(1+a_1)}+\ldots$$

oder wenn $x=1$ iſt:

$$f(x)=\frac{h}{1+a_1};\ \frac{d(fx)}{dx}=-\frac{h}{2(1+a_1)}$$

mithin

$$y=\frac{2x\,d(fx)}{dx}+f(x)=0.$$

Die Electricität der Berührungsſtelle iſt daher $=0$.

32. Eine Kugel vom Halbmeſſer a enthält die Electricitäts-menge $\int\int y\,a^2\,d\mu\,d\omega$, wo die Integration von $\omega=0$ bis $\omega=2\pi$ und von $\mu=+1$ bis $\mu=-1$ ausgedehnt werden muß. Setzt man für y die Reihe, in welche es vorhin (30) aufgelöſet wurde, ſo erhält man

$$\int\int y\,a^2\,d\mu\,d\omega=\int\int a^2\,d\mu\,d\omega\,(y_0+y_1+y_2+\ldots.y_n).$$

Weil aber, der bekannten Natur der Functionen wie y_n gemäß, alle Glieder $=o$ werden, nur für $n=o$ ausgenommen (S. 167), ſo muß $\int\int a^2 y_o \, d\mu \, d\omega = e$ die ganze Electricitätsmenge ausdrücken. y_o findet man daher, wenn man in der Entwickelung von fx die Größe $x=o$ ſetzt. Eben ſo findet man für die Electricität E der zweiten größeren Kugel y_o, wenn man in $f_1(x)$ die Größe $x=o$ ſetzt, und man hat daher

für die erſte Kugel $e = 4\pi a^2 f(x)$
für die zweite $E = 4\pi a_1^2 f_1(x)$
} wobei $x=o$ zu ſetzen iſt.

Die Differenz der Electricität der zwei Kugeln iſt offenbar

$$E - e = 4\pi(a_1^2 f_1(x) - a^2 f(x)) = n,$$

wobei $x=o$ zu ſetzen iſt. Nimmt man in (I) $x = 1 - z$, ſo wird für $z=1$, wenn man $\frac{1}{1+a_1} = m$ ſetzt:

$$a_1^2 f_1(1-z) - a^2 f(1-z) = (1-m) h a_1 \int \frac{t^{-m}-1}{1-t} dt - m h a \int \frac{t^{m-1}-1}{1-t} dt$$

$$= m h a \int \frac{t^{-m} - t^{m-1}}{1-t} . dt = \pi \cot(1-m)\pi,$$

und daher

$$E - e = 4\pi^2 m h a \cot(1-m)\pi.$$

Da nun $a_1 > a$, $m > \frac{1}{2}$ und $\cot(1-m)\pi$ poſitiv iſt, ſo iſt auch h poſitiv, wenn E und e poſitiv ſind; demnach iſt $E - e$ poſitiv, und $E > e$. Daher hat von zwei Kugeln, die einander berührt haben und dann von einander getrennt wurden, die größere mehr Electricität als die kleinere.

33. Man kann auch das numeriſche Verhältniß der Electricitäten beider Kugeln beſtimmen. Nennt man die Dicke der Electricitätsſchichte auf der erſten β, auf der zweiten γ, ſo ſind beide conſtante Größen, und man hat $e = 4\pi a^2 \beta$, $E = 4\pi a_1^2 \gamma$, und daher

$$\frac{E}{e} = \frac{a^2}{a_1^2}\left(1 + \frac{E-e}{e}\right)$$

Setzt man aber ſtatt $E-e$ und e den vorhin gefundenen Werth, ſo wird

$$\frac{E}{e} = \frac{a^2}{a_1^2}\left(1 + \frac{\pi\cot(1-m)\pi}{\int \frac{t^{m-1}-1}{1-t} . dt}\right).$$

Sobald nun a und a_1 gegeben ſind, iſt es auch m, und daher auch $\frac{E}{e}$. Sucht man den Exponenten $\frac{E}{e}$ für Kugeln, deren Halbmeſſer ſich zu einander verhalten wie 2:1, oder wie 4:1, oder endlich wie 8:1, ſo hat man die Integrale

$$\int \frac{t^{-\frac{2}{3}}-1}{1-t}\,dt,\ \int \frac{t^{-\frac{4}{5}}-1}{1-t}\,dt,\ \int \frac{t^{-\frac{8}{9}}-1}{1-t}\,dt$$

zu beſtimmen. Man kann dieſe Beſtimmung erreichen, wenn man für das erſte Integral $t=\vartheta^3$, für das zweite $t=\vartheta^5$, für das dritte $t=\vartheta^5$ ſetzt, wodurch man erhält:

$$3\int \frac{1-\vartheta^2}{1-\vartheta^3}\,d\vartheta,\ 5\int \frac{1-\vartheta^4}{1-\vartheta^5}\,d\vartheta,\ 9\int \frac{1-\vartheta^8}{1-\vartheta^9}\,d\vartheta.$$

Für dieſe drei Fälle hat nun Coulomb das Verhältniß der Electricitäten der zwei Kugeln beſtimmt. Die folgende Tabelle enthält ſeine Reſultate nebſt den Ergebniſſen der Rechnung:

$a:a_1$	$\frac{E}{e}$		Differenz
	berechnet	beobachtet	
2:1	1.1601	1.08	+ 0.07
4:1	1.3168	1.30	+ 0.01
8:1	1.4443	1.65	— 0.15

Auf ähnliche Weiſe kann man auch die Geſetze des Gleichgewichts der Electricität an zwei ſich nicht berührenden Kugeln finden.

C. Gleichgewicht der Electricität in Leidnerflaſchen und Condenſatoren.

34. Wenn jener Seite A einer Leidnerflaſche, welche beim Laden mit dem Conductor der Maſchine in Verbindung ſtand, die Electricitätsmenge E mitgetheilt wird, ſo erregt dieſe an der andern Seite B die Electricitätsmenge e, und es iſt e um ſo kleiner als E, je dicker das Glas iſt, durch welches E wirken muß, um e zu erregen. Man ſetze $\frac{e}{E}=m$. Berührt man nun A mit einem guten Leiter, ſo verliert es einen Theil ſeiner Electricität, und dadurch wird

ein Theil der Electricität e frei, ſo daß ſich das vorige Verhältniß umkehrt. Auf gleiche Weiſe geht es bei den folgenden Berührungen her. Bezeichnet man daher die Electricität der Fläche A nach der erſten Berührung mit E_1, nach der zweiten mit E_2 u. ſ. f., und eben ſo die der Fläche B mit e_1 e_2 e_3, ſo erhält man:

$$E : e = 1 : m \quad \text{oder} \quad mE = e$$
$$e : E_1 = 1 : m \quad \text{oder} \quad E_1 = me$$
$$E_1 : e_1 = 1 : m \quad \text{oder} \quad mE_1 = e_1$$
$$e_1 : E_2 = 1 : m \quad \text{oder} \quad E_2 = me_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

mithin

$$E_1 = m^2E,\ e_1 = m^2e = m^3E$$
$$E_2 = m^4E,\ e_2 = m^2e_1 = m^5e$$

und die Electricitätsverluſte nach einer, zwei, drei Berührungen

$$E - E_1 = (1-m^2)E \quad ,\ e - e_1 = (1-m^2)\ e$$
$$E_1 - E_2 = (1-m^2)\ m^2E,\ e_1 - e_2 = (1-m^2)\ m^2\ e \ \text{ꝛc.}$$

Es bilden daher dieſe Verluſte eine geometriſche Reihe, deren erſtes Glied gleich $(1-m^2)\ E$, deren Exponent $= m^2$ iſt.

35. Stellt man mehrere Leidnerflaſchen neben einander und ſetzt die innere Belegung der einen mit der äußern Belegung der zunächſt folgenden in leitende Verbindung, ſo wird das ganze Syſtem der Flaſchen geladen, wenn man auch nur der inneren Belegung der erſteren Electricität mitgetheilt hat. Heißt man

die Flaſchen nach der Ordnung *I. II. III.* ꝛc.
ihre inneren Belegungen . . . A B C,
ihre äußeren Belegungen . . . a b c,

ſo iſt klar, daß, wenn man der Fläche A Electricität mittheilt, dadurch auch Electricität in a abgeſtoßen wird, welche nach B überfließt und dieſes electriſirt u. ſ. w.

Setzt man an allen Flaſchen gleiche Abmeſſungen, gleiche Glasdicken ꝛc. voraus, und denkt ſich A mit dem Conductor einer Electriſirmaſchine, c hingegen mit dem Boden in leitender Verbindung; ſo erhalten die Flächen A, B, C, die Electricitäten E, E_1, E_2, die Flächen a, b, c, die Electricitäten e, e_1, e_2, ſo daß man hat:

$$mE = e,\ mE_1 = e_1,\ mE_2 = e_2$$
$$E_1 = e,\quad E_2 = e_1,\quad E_3 = e_2$$

und daher

$$E_1 = mE,\ E_2 = m^2E,\ E_3 = m^3E \ \text{u. ſ. f.}$$

Es bilden daher die Ladungen der einzelnen Armaturen von *I.* angefangen, eine abnehmende geometriſche Reihe, deren erſtes Glied E, deren Exponent m iſt.

36. Faſt auf gleiche Weiſe wie in einer Leidnerflaſche verhält ſich die Electricität im electriſchen Condenſator. Geſetzt es brauche der Deckel des Condenſators die Electricitätsmenge E, um die Menge e in der Baſis zu binden, und es binde dieſe wieder die Electricitätsmenge η des Deckels durch ihre Rückwirkung; ſo befindet ſich der Deckel gerade in einem ſolchen Zuſtande, als wenn er die Electricität $E - \eta$ beſäße und er ſich nicht auf der Baſis des Condenſators befände. Weil ſowohl das Verhältniß $E:e$ als auch das $e:\eta$ von der Entfernung des Deckels von der Baſis, d. h. bei den gebräuchlichſten Condenſatoren von der Dicke der Firnißſchichte zwiſchen Deckel und Baſis abhängt, ſo iſt $E:e = e:\eta$, und wenn man $E:e = \frac{1}{m}$ ſetzt $e = Em$, $\eta = em = Em^2$. Hätte daher unter den obwaltenden Umſtänden der Deckel ohne Einfluß der Baſis auf ihn die Electricitätsmenge A aufgenommen, ſo hätte man $A = E - Em^2 = E(1 - m^2)$ und daher

$$\frac{E}{A} = \frac{1}{1 - m^2}.$$

Dieſe Größe $\frac{1}{1 - m^2}$ drückt die condenſirende Kraft des Inſtrumentes aus. Sie iſt gegeben, wenn m bekannt iſt. Um dieſes zu finden, ſetzt man den Deckel des Condenſators auf die Baſis, verbindet letztere mit der Erde leitend, theilt dem Deckel ſchwache Electricität mit, hebt hierauf die Communication mit der Erde auf, entfernt den Deckel mittelſt eines iſolirenden Handgriffes von der Baſis und unterſucht die Intenſität ſowohl des Deckels als die der Baſis an ähnlich liegenden Stellen mittelſt der Drehwage. Dadurch findet man E und e, und daher auch $\frac{e}{E} = m$.

D. Gleichgewicht der Electricität in der Volta'ſchen Säule.

37. In der Volta'ſchen Säule geht aus der Berührung der heterogenen Körper, aus denen ſie beſteht, eine beſtimmte Differenz

des electriſchen Zuſtandes der einzelnen ſich berührenden Theile hervor, welche man die electriſche Spannung der Säule nennt. Kennt man die Spannung der einzelnen ſich berührenden Theile der Säule, ſo kann man daraus die Spannung ſowohl der äußerſten Platten, als auch die der übrigen Stücke der Säule nach denſelben Regeln finden, nach welchen man aus der bekannten Differenz einer Reihe unmittelbar auf einander folgender Zahlen die Differenz jeder zwei Zahlen dieſer Reihe findet. Geſetzt, die Säule beſtehe aus Zink, Kupfer und einem dritten Körper als Leiter und das Zink erhalte in Berührung mit Kupfer die Electricität $+\frac{1}{2}a$, das Kupfer in Berührung mit Zink $-\frac{1}{2}a$, ſo iſt ihre electriſche Differenz a. Wird durch Berührung des Kupfers mit dem Leiter die electriſche Differenz b, und durch Berührung des Zinks mit demſelben Leiter die Differenz c hervorgebracht, ſo erhält man für eine Säule von n Elementen die electriſche Spannung zwiſchen der erſten und letzten Platte

$$na + (n-1)(b-c)$$

nach folgendem Schema, wo Z das Zink, K das Kupfer, L den Leiter bezeichnet:

Platten:	Differenz:
Z	
	a
K	
	b
L	
	$-c$
Z	
	a
K	
	b
L	
	$-c$
Z	
	a
K	

Iſt der Leiter kein Electromotor, ſo iſt $b = c = 0$ und daher die Spannung $= na$, alſo der Anzahl der Elemente proportional. So betrachtet man gewöhnlich die Volta'ſche Säule. Wirken b und c dem a entgegen, ſo iſt die Spannung $na - (n-1)(b-c)$ viel kleiner als vorher; ja wenn $na < (n-1)(b-c)$ iſt, ſo tritt ſogar eine Umkehrung der Pole ein. Iſt $b = -a$, $c = +a$, ſo wird die Spannung $= a$, oder es iſt gerade ſo, als wenn nur ein Element vorhanden wäre. Von der Art ſind alle ohne flüſſigen Leiter aufgebauten Säulen.

38. Nennt man die Spannung des Zinkpoles $x_{,}$, ſo iſt die

der ihn berührenden Kupferplatte $x - a$ und man erhält für die Zinkplatten nach der Ordnung ihrer Aufeinanderfolge vom Zinkpol angefangen

$$x,\ x-a,\ x-2a,\ x-3a,\ x-4a \ldots\ x-(n-1)a;$$

für die Kupferplatten von demſelben Ende angefangen:

$$x-a,\ x-2a,\ x-3a,\ x-4a \ldots\ x-na.$$

Iſt die Säule iſolirt, ſo heben ſich die Spannungen der beiden Pole auf und man erhält:

$$x + x - na = 0 \text{ oder } x = \tfrac{1}{2}\, na.$$

Steht ein Pol, z. B. der negative, mit der Erde in leitender Verbindung, ſo iſt ſeine Spannung $= 0$, d. h.

$$x - na = 0 \text{ oder } x = na$$

alſo in dieſem Falle die Spannung doppelt ſo groß wie im vorhergehenden.

Drittes Capitel.

Electricität in Bewegung.

A. Mittel, die Stärke des electriſchen Stromes zu meſſen.

39. Alle Mittel, welche man je zur Beſtimmung der Stärke des electriſchen Stromes angewendet hat, beruhen auf der Größe der Wirkung, die ein ſolcher Strom hervorbringt. Dahin gehören die Wärme erregende oder zerſetzende Kraft des Stromes, oder ſeine Wirkung auf eine Magnetnadel. Unter allen dieſen ſcheint letztere am beſten geeignet zu ſeyn, um einen Schluß auf die relative Stärke des Stromes zu geſtatten. Die Wärmeerregung mittelſt des electriſchen Stromes iſt nicht leicht meßbar, fordert einen ſtarken Strom und läßt ſich auf ſchwache Kräfte gar nicht anwenden; die zerſetzende Kraft eines Stromes gäbe zwar ein recht einfaches Mittel, ſeine Stärke zu beſtimmen, weil man nur das Zerſetzungsproduct der Menge nach zu beſtimmen braucht, allein es enthält wieder eine andere Schwierigkeit. Iſt nämlich dieſes Product tropfbar, ſo wird eine durch längere Zeit anhaltende Wirkung des Stromes erfordert und man iſt nicht im Stande, die innerhalb dieſer Zeit vorfallenden Ände-

rungen des electriſchen Stromes zu gewahren. Iſt das Product gasförmig, und ſolche Producte hat man bisher immer als Maßſtab für den electriſchen Strom gebraucht, ſo findet man in der Abſorption deſſelben durch die Flüſſigkeit, welche ſie liefert, ein neues Hinderniß einer genauen Beſtimmung. Die Ablenkung einer Magnetnadel durch den electriſchen Strom iſt von allen dieſen Schwierigkeiten frei und gewährt demnach das beſte Mittel zur Beſtimmung der Stromſtärke, um ſo mehr, als ſie ſich nach den allgemeinen Geſetzen der Mechanik beurtheilen läßt.

40. Die Beſtimmung des electriſchen Stromes durch die Bewegung einer Magnetnadel kann auf dreifache Weiſe geſchehen. Man kann auf die ablenkende Kraft entweder aus dem Ablenkungswinkel ſchließen, oder aus der Torſion eines elaſtiſchen Fadens, woran die Magnetnadel hängt, durch welche die Nadel in ihre natürliche Lage ſelbſt während der Einwirkung des electriſchen Stromes zurückgeführt wird, und endlich aus der Anzahl von Schwingungen, die eine Magnetnadel unter dem Einfluſſe des electriſchen Stromes und des Erdmagnetismus in einer beſtimmten Zeit vollbringt.

41. Die Gleichung, welche die Relation zwiſchen der Ablenkung einer Magnetnadel durch den electriſchen Strom und der Stärke des electriſchen Stromes ausdrückt, wird auf folgende Weiſe gefunden. Es ſey Mm (Fig. 210) die Richtung des electriſchen Stromes und P ſeine Intenſität, nach der Kraft geſchätzt, mit welcher er auf die Magnetnadel wirkt, und zugleich die des magnetiſchen Meridians; sn ſey eine Magnetnadel in der Lage, in welche ſie durch den Strom verſetzt wird, und $mcn = \vartheta$; ferner ſey r der Abſtand des Nordpols n der Magnetnadel vom Polardraht und M die Kraft des Erdmagnetismus, wodurch die Nadel nach Mm gezogen wird. Steht dieſelbe in ns im Gleichgewichte, ſo hat jeder Pol der Nadel den Abſtand $\sqrt{(r^2+\sin^2\vartheta)}$ vom Polardrahte, und die Kraft des Polardrahtes, die Nadel in eine auf Mm ſenkrechte Lage zu bringen, iſt $\frac{P\cos\vartheta}{\sqrt{(r^2+\sin^2\delta)}}$ in der Vorausſetzung, daß $cn=1$ iſt und die Wirkung des Stromes auf die Nadel ihrer Entfernung vom Polardrahte verkehrt proportionirt iſt, welches in der Folge näher bewieſen werden ſoll. Die Kraft des Erdmagnetismus, die Nadel nach Mm hinzuführen, iſt hingegen $M \sin\vartheta$, und da zwiſchen beiden Gleichgewicht herrſcht, ſo erhält man:

$$\frac{P \cos \vartheta}{\sqrt{(r^2 + \sin^2 \vartheta)}} = M \sin \vartheta, \text{ oder } P = M \tang \vartheta . \sqrt{(r^2 + \sin^2 \vartheta)}$$

Iſt der Polardraht breit, oder die Magnetnadel kurz, ſo daß ihre Länge gegen die Breite des Polardrahtes ſtark vorwaltet, und ſelbſt bei der größten Ablenkung ihre Pole noch hinreichend weit von ihren Rändern abſtehen, ſo wird

$$P = M \tang \vartheta .$$

Da wo r in Rechnung gebracht werden muß, iſt es räthlich, den Werth desſelben nicht durch unmittelbare Meſſung, ſondern durch zwei Verſuche zu finden, wobei Ströme herrſchen, deren numeriſches Verhältniß zu einander bereits bekannt iſt.

42. Dieſe Methode erlaubt den Gebrauch des Multiplicators nicht, weil man die Entfernung der einzelnen Windungen desſelben nie ſo genau kennt, als es zu ſo delicaten Verſuchen nothwendig iſt. Darum muß man oft, wo man ſchwache electriſche Ströme anwendet, welche die Anwendung des Multiplicators fordern, zu einem Mittel ſeine Zuflucht nehmen, das auf dieſes Inſtrument ſich ausdehnen läßt. Von der Art iſt die Torſion eines Fadens, die der ablenkenden Kraft der Magnetnadel das Gleichgewicht hält. Um dieſe in Anwendung zu bringen, braucht man eine Art Drehwage, wie jene iſt, deren man ſich zu electroſtatiſchen Verſuchen bedient, nur mit dem Unterſchiede, daß ſie viel kleiner ſeyn darf, indem die Magnetnadel mit 2 Z. Länge genug hat und ein elaſtiſcher Faden mit einer Länge von 3—6 Z. ausreicht; die Magnetnadel ſteht innerhalb den Windungen eines Multiplicators oder über oder unter einem einfachen Polardrahte, und dieſer ſo wie die Drahte des Multiplicators befinden ſich im magnetiſchen Meridian. So wie durch den electriſchen Strom eine Ablenkung erfolgt, dreht man den Zeiger an der oberen Theilung der Wage ſo weit zurück, bis die Magnetnadel wieder in den magnetiſchen Meridian zurückgekehrt iſt. Die zu dieſem Ende nöthige Torſion des Fadens iſt der Stärke der Kraft des Stromes proportionirt. Es iſt klar, daß ſich hierzu jeder Multiplicator, ſelbſt der nach Nobili eingerichtete, brauchen läßt. Dieſes Mittel hat zuerſt Ohm angewendet.

43. Endlich das dritte Mittel, den electriſchen Strom aus der Einwirkung desſelben auf eine Magnetnadel zu meſſen, beſteht darin, daß man die Magnetnadel zuerſt unter dem Einfluſſe des Erdmagnetismus in kleinen Bogen ſchwingen läßt und die Anzahl der

Schwingungen beſtimmt, die ſie in einer beſtimmten Zeit macht, hierauf aber den Polardraht oder den Multiplicator, deſſen Wirkung auf die Nadel erforſcht werden ſoll, ſo wendet, daß keine Ablenkung der Nadel erfolgt und man daher gewiß ſeyn kann, der electriſche Strom erfolge ſenkrecht auf den magnetiſchen Meridian, und dann die Anzahl der Schwingungen abermals beſtimmt, welche die Magnetnadel unter dem gemeinſchaftlichen Einfluſſe des electriſchen Stromes und des Erdmagnetismus in derſelben Zeit vollbringt. Iſt die erſtere Anzahl der Schwingungen N, die letztere N_1, die Kraft des Erdmagnetismus, wovon erſtere abhängen M, und die Einwirkung des electriſchen Stromes P, ſo hat man:

$$\frac{M+P}{M} = \frac{N_1^2}{N^2} \text{ und hieraus } P = M\left(\frac{N_1^2 - N^2}{N^2}\right).$$

Setzt man endlich der Stärke des Erdmagnetismus $= 1$, ſo wird

$$P = \frac{N_1^2 - N^2}{N^2}.$$

Bei dieſen Oſcillationsverſuchen hat man alle jene Vorſichten anzuwenden, welche früher für ähnliche Verſuche (S. 726) angerathen wurden und vor allem, ſo oft man einen neuen Verſuch macht, vorläufig die Schwingungsanzahl der Nadel durch bloßen Einfluß des Erdmagnetismus kennen zu lernen und nicht etwa dieſelbe aus frühern Verſuchen zu entnehmen. Dieſes iſt ſelbſt nothwendig, wenn mehrere Ströme bald hinter einander nach dieſer Methode geprüft werden, weil oft die Magnetnadel ſelbſt durch die Einwirkung des electriſchen Stromes eine Änderung erleidet, oder der Polardraht ſelbſt nach Öffnung der Kette noch eine Wirkung auf die Nadel auszuüben fortfährt.

B. Geſetze des electriſchen Stromes.

44. Der electriſche Strom beſteht in einem Fortrücken des electriſchen Zuſtandes von einem Theile eines Körpers in einen andern. Dieſes Fortrücken iſt der allgemein angenommenen Vorſtellungsweiſe gemäß, das Reſultat der Zerſetzung und Zuſammenſetzung der Electricitäten in jedem einzelnen Elemente des Stoffes, worin ſich der Strom befindet. Denkt man ſich einen ſolchen Körper unendlich dünn und ſtellt ſich durch M ein mit poſitiver Electricität geladenes Element desſelben, durch m ein anderes in der Richtung

des Stromes daran grenzendes vor, ſo erfolgt der Übergang der Electricität von M in m dadurch, daß durch den Einfluß des $+E$ des M auf das $\pm E$ des m dieſes eine Zerſetzung erleidet, $-E$ von m vereinigt ſich mit $+E$ von M, und ſo bleibt in m eben ſo viel $+E$ zurück, als $-E$ gebunden worden iſt. Es hängt demnach die Fortpflanzung der Electricität von der Wechſelwirkung der benachbarten Elemente ab und kann als das Reſultat einer Bewegung angeſehen werden, wobei die bewegte Maſſe die Lage ihres Gleichgewichtes nur wenig verläßt. Denkt man ſich die Electricität als ausdehnſames Fluidum und nimmt an, einem Elemente, das ſich an der Stelle eines Leiters befindet, welche durch die in der Richtung der Länge desſelben befindlichen Ordinate x bezeichnet wird, werde die Geſchwindigkeit u in der Richtung von x, als der im III. Abſ. 5. Kap. betrachteten mitgetheilt, und es iſt $u\,dx = a\varphi$, ſo erhält man für die Zeit t, nach (G) (S. 335) die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

wo a eine conſtante Größe und φ die electroſcopiſche Kraft des Leiters an der betreffenden Stelle bezeichnet. In einer galvaniſchen Kette ſind alle Wirkungen gleich nach ihrer Entſtehung unveränderlich und daher von t unabhängig. Deßhalb erhält man für ſie

$$\frac{a^2\,d^2\varphi}{dx^2} = 0,$$

woraus man durch Integriren findet

$$\varphi = fx + c,$$

wo f und c noch zu beſtimmende Conſtanten bezeichnen. Dieſelbe Gleichung findet Ohm auf einem andern Wege und leitet daraus die Geſetze ab, die hier folgen. Zur Beſtimmung der Größe f dient die Kenntniß des electriſchen Zuſtandes eines Leiters an ſeinen beiden Enden. Dieſer Zuſtand kann für ein Volta'ſches Element als völlig bekannt angeſehen werden. Iſt derſelbe für das Ende, welchem die Ordinate x entſpricht, $= e$, für dasjenige hingegen, welches der Ordinate x_1 entſpricht, $= e_1$, ſo hat man

$$e = fx + c \quad \text{und} \quad e_1 = fx_1 + c$$

und hieraus

$$e - e_1 = f(x - x_1)$$

Iſt die Länge des Leiters gleich a und $e-e_1=\eta$, ſo wird

$$\eta = f\,a \text{ oder } \frac{\eta}{a} = f.$$

Dadurch wird

$$\varphi = \frac{\eta}{a}\,x + c.$$

Dieſe Gleichung gilt für einen linearen Leiter, der an irgend einer Stelle durch electromotoriſche Kraft electriſch wird, kann aber auch auf einen Körper von angebbarer Dicke und Breite ausgedehnt werden, ſobald ſein electriſcher Zuſtand in allen Theilen eines Querſchnittes derſelbe iſt.

Es ſey nun der bisher betrachtete Leiter in einen Kreis zuſammengebogen und da wo ſich ſeine Enden berühren, der Sitz einer continuirlichen Electricitätserregung. Da wird nun ein ununterbrochner electriſcher Strom beginnen. Die Electricitätsmenge, welche durch ein Stück eines ſolchen Leiters vom Querſchnitt $=1$ und der Länge $=1$ in einer Zeiteinheit ſtrömt, mißt das Leitungsvermögen dieſes Körpers. Man nenne es k. Da nun $\frac{d\varphi}{dx}$ die Geſchwindigkeit bezeichnet, womit die Electricität an der Stelle x fortrückt, ſo iſt $\frac{k\,d\varphi}{dx}$ die in der Zeiteinheit durch einen Querſchnitt $=1$ gehende Electricitätsmenge und $\omega\,k\,\frac{d\varphi}{dx}$ die durch den Querſchnitt ω in derſelben Zeit ſtrömende Menge, mithin die Stärke des electriſchen Stromes. Heißt man ſie P, ſo iſt

$$P = k\omega\,\frac{d\varphi}{dx}.$$

45. Man ſtelle ſich nun einen Leiter vor, der aus zwei heterogenen Stücken A und B beſteht, welche ſich an zwei Stellen berühren und eine Kette bilden, und laſſe für den zweiten $\varphi_1, f_1, \eta_1, a_1, c_1, k_1$ das gelten, was bei den erſten $\varphi, f, \eta, a, c, k$ bedeuten. Da hat man nun

$$\varphi = fx + c,\quad \varphi_1 = f_1\,x + c_1 \ldots\ldots (a)$$

Es liege der Anfangspunct von x in jenem Berührungspuncte, wo die ſtärkere electromotoriſche Kraft thätig iſt, und man laſſe x nach der Richtung wachſen, in welcher von dieſem Berüh-

rungspuncte aus A liegt, ſo hat man für die Stelle, wo $x = o$ iſt:

$$\varphi = c, \; \varphi_1 = f_1 a + c_1$$

für jenen, wo $x = a$ iſt:

$$\varphi = f(a + a_1) + c_1, \; \varphi_1 = f_1 a + c$$

mithin

$$\eta = f_1 (a + a_1) + c_1 - c$$
$$\eta_1 = f a - f_1 a + c - c_1$$

und hieraus

$$\eta + \eta_1 = f a + f_1 a_1 \ldots . (b).$$

Die Natur der Sache bringt es mit ſich, daß man hat

$$k\omega . \frac{d\varphi}{dx} = k_1 \omega_1 . \frac{d\varphi_1}{dx}$$

oder wegen

$$\frac{d\varphi}{dx} = f, \; \frac{d\varphi_1}{dx} = f_1$$

$$k\omega f = k_1 \omega_1 f_1 .$$

Aus dieſer Gleichung findet man mittelſt (b)

$$f = \frac{(\eta + \eta_1) k_1 \omega_1}{k_1 \omega_1 a + k \omega a_1}; \; f_1 = \frac{(\eta + \eta_1) k\omega}{k_1 \omega_1 a + k \omega a_1}.$$

und daraus

$$c_1 = c - \eta_1 + \frac{(\eta + \eta_1)(k_1 \omega_1 a - k \omega a_1)}{k_1 \omega_1 a + k \omega a_1}$$

Subſtituirt man für $c_1 f$ und f_1 die hier gefundenen Werthe in (a) ſo wird

$$\varphi = \frac{(\eta + \eta_1) k_1 \omega_1}{k_1 \omega_1 a + k \omega a_1} x + c$$

$$\varphi_1 = \frac{(\eta + \eta_1)(k\omega x - k\omega a + k_1 \omega_1 a)}{k_1 \omega_1 a + k \omega a_1} - \eta_1 + c$$

Dieſe Gleichungen werden einfacher, wenn man ſetzt:

$$\frac{a}{k\omega} = \rho \qquad \frac{a_1}{k_1 \omega_1} = \rho_1$$

und zwar gehen ſie in folgende über:

$$\varphi = \frac{\eta + \eta_1}{\rho + \rho_1} . \frac{x}{k\omega} + c$$

$$\varphi_1 = \frac{\eta + \eta_1}{\rho + \rho_1} \left(\frac{x - a}{k_1 \omega_1} + \frac{a}{k_1 \omega} \right) - \eta_1 + c.$$

Auf gleiche Weiſe erhält man für eine Kette aus drei Theilen

$$\varphi = \frac{\eta + \eta_1 + \eta_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{x}{k\omega} + c$$

$$\varphi_1 = \frac{\eta + \eta_1 + \eta_2}{\rho + \rho_1 + \rho_2} \left(\frac{x - a}{k_1 \omega_1} + \frac{a}{k\omega} \right) - \eta_1 + c$$

$$\varphi_2 = \frac{\eta + \eta_1 + \eta_2}{\rho + \rho_1 \rho_2} \left(\frac{x - \eta + \eta_1}{k_1 \omega_1} + \frac{\eta}{k_1 \omega_1} + \frac{\eta_1}{k\omega} \right) - (\eta_1 + \eta_1) + c.$$

Die Bedeutungen von φ_2, η_2 ρ_2 ſind aus der Analogie klar. Aus dieſer Gleichung iſt das Geſetz des Fortſchreitens für jede Anzahl der Theile einer Kette klar. Hat man eine ſolche Kette aus n Gliedern, und man ſetzt:

$$\eta + \eta_1 + \eta_2 + \ldots \eta_{n-1} = E; \ \rho + \rho_1 + \rho_2 + \ldots \rho_{n-1} = R$$

ferner den Theil innerhalb der Klammer z und $\eta_1 + \eta_2 + \ldots \eta_{n-2} = S$, ſo wird allgemein

$$\varphi = \frac{E}{R} z + S + c \ldots (K).$$

Die Größe ρ nennt Ohm die reducirte Länge des Leiters und daher R die ganze reducirte Länge der Kette.

46. In der vorhergehenden Gleichung hängt φ von z ab und es iſt $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$. Wird die Stärke des Stromes wie vorhin bei einem einzelnen Leiter auch hier bei der Kette aus n Gliedern P genannt, ſo iſt

$$P = k\omega \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

oder für $\frac{d\varphi}{dz}$ den aus der Gleichung e folgenden Werth $\frac{E}{R}$ und für $\frac{dz}{dx}$ den Werth $\frac{1}{k\omega}$ geſetzt gibt:

$$P = \frac{E}{R}.$$

Dieſe Gleichung lehrt, daß der electriſche Strom von der Summe der Spannungen der einzelnen Theile der Kette und von der reducirten Länge der Kette abhängt, aber in der ganzen Ausdehnung der Kette einerlei Größe hat. Man kann das, was an der

Spannung fehlt, durch größere Leitungsfähigkeit erſetzen und umgekehrt.

47. Eine nähere Analyſe der Gleichung $P = \frac{E}{R}$ führt zu Reſultaten, welche in vieler Beziehung merkwürdig ſind und durch die Erfahrung ihre Beſtätigung erhalten.

Es ſey E die Spannung, welche einem electromotoriſchen Elemente entſpricht, und R die reducirte Länge des Elementes. Werden n ſolche Elemente ohne Zwiſchenleiter zu einer Kette vereinigt, ſo erhält man als Maß für die Stärke des electriſchen Stromes:

$$\frac{nE}{nR} = \frac{E}{R}$$

alſo gerade ſo, als wenn nur ein einziges Element vorhanden wäre. Bekanntlich ſtimmt dieſes mit der Erfahrung vollkommen überein. Wird in die einfache Kette ein neuer flüſſiger Leiter eingeführt, der nicht electromotoriſch wirkt und deſſen reducirte Länge b iſt, ſo wird

$$P = \frac{E}{R + b}.$$

Wenn n ſolche Elemente vorhanden ſind, deren jedes die electromotoriſche Kraft E beſitzt, und wo R ſich auf ein einzelnes Element bezieht, während b auf alle flüſſige Leiter Bezug hat, ſo wird

$$P = \frac{nE}{nR + b} = \frac{E}{R + \frac{b}{n}}$$

mithin der Strom in dieſem Falle größer als in einer einfachen Kette.

Iſt A der Leitungswiderſtand für ein Element der Säule, den flüſſigen Leiter miteingerechnet, d der Widerſtand des Schließungsdrahtes, ſo hat man wieder für eine Säule von n Elementen

$$P = \frac{nE}{nA + d} = \frac{n}{\frac{nA}{E} + \frac{d}{E}}$$

Dieſe Formel hat Fechner durch Verſuche geprüft. Gewöhnliche Säulen aus 6 Paar neuen Zink- und Kupferplatten von 2 Z. 4 L. Breite und eben ſo großer Länge wurden mittelſt genetzter und durch einen gleichen Druck mäßig ausgepreßter neuer Tuchſcheiben aufgebaut und mit den ungleichnamigen Polen verbunden. Die Schließung der Kette geſchah mittelſt eines Multiplicators und einer

in einer Glasröhre enthaltenen Säule von ſchwacher Salmiakauf-löſung. Die Stärke des Stromes ward aus der Dauer von 20 Schwingungen einer Magnetnadel entnommen. Dieſe Magnetnadel brauchte unter dem bloßen Einfluß des Erdmagnetismus zu 20 Oſcillationen 170 Zeitth. Dieſe Zeit betrug bei 5 Säulen 105.5, bei 4 S. 108, bei 3 S. 113.5, bei 2 S. 123.5 und bei einer Säule 140 Th. Sucht man aus den zwei erſten Werthen P, ſo erhält man es für 5 Säulen = 1.597, für 4 Säulen 1.480 und

$$1.597 = \frac{5}{\frac{5A}{E} + \frac{d}{E}}, \quad 1.480 = \frac{4}{\frac{4A}{E} + \frac{d}{E}}$$

woraus man findet: $\frac{A}{E} = 0.3100$, $\frac{d}{E} = 1.5847$. Benützt man dieſe Werthe zur Berechnung von P für die übrigen Verſuche, ſo findet man folgende Werthe, zu deren beſſeren Würdigung die aus den Oſcillationen der Nadel abgeleiteten beigeſetzt ſind:

Zahl der Säulen	Berechnete Stärke des Stromes	
	aus den Schwingungen	aus der Formel
5	1.597	1.595
4	1.480	1.416
3	1.243	1.195
2	0.894	0.907
1	0.477	0.501

Heißt B der Leitungswiderſtand aller Theile einer Kette mit Ausnahme des flüſſigen Leiters, e der Leitungswiderſtand der Flüſſigkeit, der als Leiter dient, ſo iſt

$$P = \frac{E}{B+e} = \frac{1}{\frac{B}{E} + \frac{e}{E}}.$$

Dieſe Formel läßt ſich wieder durch Verſuche prüfen, und eine ſolche Prüfung gibt Gelegenheit zur Ausmittlung des Einfluſſes flüſſiger Leiter von gleicher materieller Beſchaffenheit und ungleicher Dicke auf die Stärke des electriſchen Stromes. Fechner hat dieſe Unterſuchung vorgenommen. Ein Zink-Kupfer Element von 8.21 Q. Zoll erregender Oberfläche wurde in eine aus Waſſer mit $\frac{1}{316}$

Rth. rauchender Salzſäure beſtehende Flüſſigkeit getaucht, die von einander abgewendeten Flächen der Platten waren geſirnißt, die Entfernung der Platten von einander betrug zuerſt 14.3 P. L. und wurde nach und nach durch Verrückung der Zinkplatte auf den 3, 5, 7, 9fachen Abſtand gebracht und jedesmal die Stärke des Stromes aus der Zeit entnommen, welche eine Magnetnadel unter ſeinem und des Erdmagnetismus Einfluſſe zu 20 Oſcillationen benöthigte. Die Stärke des Erdmagnetismus entſprach einer Zeit von 175.5. Die beobachtete Zeit von 20 Oſc. unter beiden Einflüſſen war bei einfachem Abſtande der Platten = 51, bei dreifachem 57, bei fünffachem 62, bei ſiebenfachem 65 und bei neunfachem = 68 Zth. Berechnet man den Strom nach der Schwingungsdauer und ſucht damit den mittleren Werth von $\frac{B}{E}$ und $\frac{e}{E}$, ſo findet man $\frac{B}{E} = 0.0868$, $\frac{e}{E} = 0.0107$ und hieraus ergeben ſich folgende Werthe für den Strom:

Abſtand der Platten 14.3 P. L. = 1	Stärke des Stromes	
	nach der Schwingungsdauer	nach der Formel
1	10.841	10.25
3	8.480	8.41
5	7.013	7.12
7	6.290	6.18
9	5.445	5.61

Daraus ſchließt Fechner, daß die Stärke des Stromes im verkehrten Verhältniſſe mit der Dicke des flüſſigen Leiters abnimmt. Bei dieſen ſowohl, als bei den vorhergehenden Verſuchen hat man wohl zu berückſichtigen, daß die Stärke des Stromes gleich nach Schließung der Kette ſtark abnimmt und erſt nach einiger Zeit eine conſtante Größe erhält.

48. Die vorhin entwickelte Hauptformel $P = \frac{E}{R}$ gibt auch ein Mittel an die Hand, die Leitungsfähigkeit der Schließungsdrähte zu berechnen. Nennt man nämlich in einem electromotoriſchen Apparate, deſſen Spannung E iſt, den Leitungswiderſtand aller Theile B, den des Schließungsdrahtes g, ſo erhält man

52 *

$$P = \frac{E}{P + g}.$$

Der Werth von g hängt offenbar von der materiellen Beſchaffenheit und den Dimenſionen des Leitungsdrahtes ab. Die einfachſte Hypotheſe, welche man in Bezug auf die Dimenſionen nehmen kann, iſt die, daß b mit der Länge des Leiters im geraden, mit dem Querſchnitte und der Leitungsfähigkeit im verkehrten Verhältniſſe ſtehe. Heißt die Leitungsfähigkeit k, der Querſchnitt ω, die Länge λ, ſo iſt dieſem nach $g = \frac{\lambda}{k\omega}$ und daher

$$P = \frac{E}{B + \frac{\lambda}{k\omega}}$$

woraus man dann findet

$$k = \frac{\lambda}{\omega\left(\frac{E}{P} - B\right)}$$

Zur Prüfung dieſer Formel dient eine Reihe von Verſuchen, welche Ohm mit einer thermoelectriſchen Kette aus Wismuth und Kupfer und einem ſchließenden Multiplicator, bei einer Temperaturdifferenz von 80° R. angeſtellt hat. Die Kraft des Stromes wurde mittelſt der Drehwage gemeſſen. Der Draht des Multiplicators beſtand aus plattirtem Kupfer, war bei den verſchiedenen Verſuchen 2, 4, 6, 10, 18, 34, 66, 130 Z. lang und $\frac{7}{8}$ L. dick, und die dabei beobachtete Kraft war in der Ordnung den Zahlen proportionirt, welche die folgende Tabelle enthält. Berechnet man nach dieſen die Werthe von E und B, ſo findet man $E = 7285$, $B = 20.25$. Mittelſt dieſer Werthe werden folgende Ausdrücke für k erhalten:

Länge des Drahtes	Beobachtete Kraft des Stromes	Werth von k für $\omega = 1$
2	326.75	1.02
4	300.75	1.00
6	277.75	1.01
10	238.25	0.97
18	190.75	1.00
34	134.50	1.00
66	83.25	0.98
130	48.50	1.00

Man kann daher obige Vorausſetzung als der Natur angemeſſen anſehen.

49. Auf demſelben Principe beruht auch die Theorie des Multiplicators. Iſt die Spannung eines Electromotors E, die reducirte Länge des flüſſigen Leiters und der feſten Elemente C, ſo iſt die Wirkung dieſes Stromes $= \frac{E}{C}$. Braucht man einen Multiplicator von n Windungen von ſolcher Beſchaffenheit, daß die reducirte Länge jeder einzelnen Windung $= \mu$ iſt, ſo hat man für die Wirkung des Stromes $\frac{nE}{C+n\mu}$. Der Unterſchied beider Wirkungen iſt demnach

$$\frac{nE}{C+n\mu} - \frac{E}{C} = \frac{[nC-(C+n\mu)]}{C+n\mu} \cdot \frac{E}{C}.$$

So lange dieſe Differenz poſitiv iſt, wirkt der Multiplicator verſtärkend, wird ſie aber negativ, ſchwächend. Erſteres iſt demnach der Fall, wenn $nC < C+n\mu$, letzteres, wenn das Gegentheil Statt findet. Je kleiner der Nenner des Ausdruckes

$$\frac{nE}{C+n\mu} = \frac{E}{\frac{C}{n}+\mu}$$

iſt, deſto größer fällt die Wirkung des Multiplicators aus, am größten wird ſie, wenn C gegen n unendlich klein iſt; denn in dieſem Falle iſt $\frac{C}{n}$ unendlich klein und verſchwindet gegen μ. Die größte Wirkung, welche demnach ein Multiplicator hervorbringen kann, iſt im Allgemeinen

$$\frac{E}{\mu}.$$

Dieſe Wirkung verhält ſich zu jener der einfachen Kette ohne Multiplicator, wie $\frac{E}{\mu} : \frac{E}{C} = C : \mu$. Heißt der Querſchnitt des Multiplicatordrahtes ω, ſeine Länge g, ſein Leitvermögen k, ſo iſt $\mu = \frac{g}{k\,\omega}$ und daher die größte Wirkung des Multiplicators $= k\,\omega : \frac{E}{g}$. Auf dieſe hat daher weder die Anzahl n der Windun-

gen noch die Größe C einen Einfluß. Man ſieht leicht ein, daß dieſe Grenzwirkung für ſchwache electriſche Ströme leicht erreicht wird, indem da C ſehr klein iſt und daher bald gegen n verſchwindet. Es iſt alſo die von Schweigger auf anderem Wege ausgemittelte Erfahrung, daß ſchwache electriſche Ströme den Leitungswiderſtand langer Drähte leichter überwältigen als ſtärkere, auch theoretiſch wohl begründet. Für ſtarke electriſche Ströme iſt leicht C ſehr groß gegen $n\,\mu$ und daher die Wirkung des Multiplicators $= \frac{nE}{C}$, alſo von μ als der reducirten Länge des Leitungsdrahtes unabhängig. Es hat daher in dieſem Falle die Leitungsfähigkeit und Dicke des Drahtes keinen Einfluß auf das Reſultat.

E. Geſetze der Wirkung des electriſchen Stromes in die Ferne.

50. Die Wirkung eines electriſchen Stromes in die Ferne iſt von zweifacher Art. Sie erfolgt ſowohl auf einen Magnet, als auf einen anderen electriſchen Strom. Hier ſoll zuerſt von der letzteren Wirkung die Rede ſeyn. Dieſe iſt offenbar die Folge der Wirkung der einzelnen Elemente zweier Polardrähte auf einander. Dieſe Wirkung erfolgt, der Erfahrung gemäß, anziehend oder abſtoßend, und die Stärke der hierbei wirkſamen Kraft richtet ſich nach der Intenſität der electriſchen Ströme, nach der Größe der auf einander wirkenden Elemente und nach der Entfernung, auf welche ſich die Wirkung erſtrecket. Sie wächſt im geraden einfachen Verhältniſſe mit der Intenſität des Stromes und der Größe der Elemente und im verkehrten, quadratiſchen Verhältniſſe der Entfernung. Der letztere Punct iſt am ſchwerſten zu erweiſen und doch ſehr wichtig für die Theorie dieſer Wirkungen. Den Beweis dafür leitet man aus unbeſtreitbaren Thatſachen ab und zwar 1) daraus, daß die abſoluten Werthe der anziehenden und abſtoßenden Kräfte zweier gleicher nach entgegengeſetzten Richtungen gehender electriſcher Ströme einander vollkommen gleich ſind. Die Wahrheit dieſes Satzes erkennt man daraus, daß ein Polardraht, der mit Seide überſponnen, in der Mitte abgebogen iſt, ſo daß er zwei parallele an einander anliegende nach entgegengeſetzten Richtungen zielende Arme bildet, wenn ein electriſcher Strom durch ihn geht, weder auf einen anderen Polardraht noch auf eine Magnetnadel wirkt. 2) Daraus, daß ein gerad=

liniger Leiter auf einen anderen gerade ſo wirkt, wie ein beliebig gewundener. Die Wahrheit dieſes Satzes erkennt man daraus, daß, wenn im vorigen Verſuche ein Arm des Drahtes um den anderen ſchraubenförmig herumläuft oder buchicht um ihn gebogen iſt, beide Drähte auf einen dritten eben ſo wenig wirken, als wenn ſie gerade auslaufen. 3) Daraus, daß die Wirkung der Elemente eines geſchloſſenen Polardrahtes von was immer für einer Natur nach der Richtung dieſer Elemente gleich Null iſt. Die Richtigkeit dieſes Satzes beweiſet der Umſtand, daß ein von der Electricität durchſtrömter geſchloßner Ring weder auf einen Polardraht noch auf eine Magnetnadel wirkt.

Nach dieſen Grundſätzen laſſen ſich für die Wirkung electriſcher Ströme auf einander in den verſchiedenartigſten Leitern, ohne weitere Hypotheſe, Formeln ableiten.

51. Es ſeyen ds und ds_1 Elemente zweier Leitungsdrähte, welche von electriſchen Strömen durchfloſſen werden, deren Intenſitäten a und a_1 ſind. Setzt man die Entfernung dieſer zwei Elemente von einander $= 1$ und nimmt die Richtungen der Ströme als parallel an, ſo iſt ihre gegenſeitige Einwirkung offenbar $= a a_1 ds\, ds_1$. Dieſer Ausdruck iſt poſitiv (+), wenn beide Ströme dieſelbe Richtung haben, hingegen negativ (—), wenn ihre Richtungen einander entgegengeſetzt ſind. Bleiben die Leitungsdrähte einander parallel, werden aber ſo weit von einander entfernt, daß die gerade Linie, welche die Halbirungspuncte der Elemente ds und ds_1 mit einander verbindet, $= r$ iſt, ſo wird obige Wirkung durch $\frac{a a_1 ds\, ds_1}{r^n}$ ausgedrückt, wo n eine erſt zu beſtimmende Größe iſt.

Sind aber die zwei Elemente einander nicht parallel und liegen ſie auch nicht in derſelben Ebene, wie z. B. die Elemente Mm und $M_1 m_1$ in Fig. 211, ſo ziehe man durch ihre Halbirungspuncte A und A_1 die gerade Linie $AA_1 = r$ und denke ſich die Wirkung jedes Elementes in zwei zerlegt, wovon eine in der Geraden AA_1, die andere in einer darauf ſenkrechten Ebene liegt. Heißen δ, δ_1 die Winkel, die Mm und $M_1 m_1$ mit AA_1 machen, ſo erhält man $a ds \cos\delta$, $a ds \sin\delta$ und $a_1 ds_1 \cos\delta_1$, $a_1 ds_1 \sin\delta_1$. Letztere läßt ſich wieder in zwei zerlegen, deren eine in der Ebene mAA_1, die andere in einer darauf Senkrechten liegt. Heißt der Winkel, welchen $M_1 m_1$ mit der Ebene mAA_1 macht, ω, ſo wird erhalten: $a_1 ds_1 \sin\delta_1 \sin\omega$, $a_1 ds_1 \sin\delta_1 \cos\omega$ und man hat demnach im

Ganzen die Wirkung der zwei Elemente auf einander in fünf einzelne zerlegt, deren Werthe ſind:

1) $a\,ds\cos\delta$, 2) $a\,ds\sin\delta$, 3) $a_1\,ds_1\cos\delta_1$,

4) $a_1\,ds_1\cos\omega\sin\delta_1$, 5) $a_1\,ds_1\sin\delta_1\sin\omega$.

Vergleicht man die Partialkräfte des einen Elementes mit denen des anderen, ſo findet man, daß einige darunter ſich aufheben, weil ſie Bewegungen hervorzubringen ſuchen, die in gleicher Geſchwindigkeit nach entgegengeſetzten Richtungen zielen. Von der Art ſind die Kräfte 1) und 5), 2) und 5), 1) und 4) und 2) und 3). Die Größe der Reſultirenden von (2) und (4) iſt

$$\frac{aa_1\,ds\,ds_1\sin\delta\sin\delta_1\cos\omega}{r^n}$$

die von (1) und (3) hingegen

$$\frac{kaa_1\,ds\,ds_1\cos\delta\cos\delta_1}{r^n}$$

wenn man die Conſtante für die Wirkung des electriſchen Stromes auf die Theile desſelben Leiters $= k$ ſetzt. Demnach iſt die ganze Wirkung beider Elemente auf einander

$$aa_1\,ds\,ds_1(\sin\delta\sin\delta_1\cos\omega + k\cos\delta\cos\delta_1).$$

52. Es ſeyen nun x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten des Punctes A; x_1, y_1, z_1 dieſelben für den Punct A_1. Da erhält man:

$$\cos\delta = \frac{x-x_1}{r}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{y-y_1}{r}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{z-z_1}{r}\cdot\frac{dz}{ds}$$

$$\cos\delta_1 = \frac{x-x_1}{r}\cdot\frac{dx_1}{ds_1} + \frac{y-y_1}{r}\cdot\frac{dy_1}{ds_1} + \frac{z-z_1}{r}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}$$

$$r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2.$$

Differenziirt man die letztere Gleichung und vergleicht die gefundenen Werthe von $\frac{dr}{ds}$, $\frac{dr}{ds_1}$ mit denen von $\cos\delta$ und $\cos\delta_1$, ſo erhält man:

$$\cos\delta = \frac{dr}{ds},\ \cos\delta_1 = -\frac{dr}{ds_1} \text{ und } \cos\delta\cos\delta_1 = -\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds_1}.$$

Denkt man ſich ein ſphäriſches Dreieck abc (Fig. 112), deſſen Seiten ab, bc den Winkeln δ und δ_1 entſprechen und den Winkel ω

einſchließen, ſo findet man aus dieſen drei Größen die Seite $ac = \varepsilon$ mittelſt folgender Gleichungen:

$$\cos\varepsilon = \cos\delta\cos\delta_1 + \sin\delta\sin\delta_1\cos\omega \text{ oder}$$
$$\cos\varepsilon - \cos\delta\cos\delta_1 = \sin\delta\sin\delta_1\cos\omega.$$

Aber

$$\cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz_1}{ds_1}$$
$$= -r\cdot\frac{d^2 r}{ds\,ds_1} - \frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds_1}$$

mithin

$$\sin\delta\sin\delta_1\cos\omega = -r\frac{d^2 r}{ds\,ds_1}$$

und daher die geſammte Wirkung der Elemente auf einander

$$-\frac{aa_1\,ds\,ds_1}{r^n}\left(r\cdot\frac{d^2 r}{ds\,ds_1} + k\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds_1}\right).$$

Dieſer Ausdruck läßt ſich auch in die Form

$$-\frac{aa_1\,ds\,ds_1}{r^n}\cdot\frac{1}{r^{k-1}}\cdot\frac{d\left(r^k\frac{dr}{ds}\right)}{ds_1}$$

oder in folgende

$$-aa_1\,r^{1-n-k}\cdot\frac{d\left(r^k\frac{dr}{ds}\right)}{ds_1}ds\,ds_1$$

oder endlich in

$$-aa_1\,r^{1-n-k}\frac{d^2(r^{1+k})}{ds\,ds_1}ds\,ds_1$$

bringen.

53. Um zwiſchen den Conſtanten n und k eine Relation zu finden, dient die Erfahrung, welche in (50) unter Nro. 3 angeführt wurde. Iſt nun ds ein Element eines geſchloſſenen Leiters, welches auf ds_1 wirkt, ſo hat man

$$-aa_1\,ds_1\cdot r^{1-n-k}\frac{d\left(r^k\frac{ds}{ds}\right)ds}{ds_1}$$

oder wenn man ſtatt $\frac{dr}{ds_1}$ ſeinen Werth $-\cos\delta_1$ ſetzt:

$$aa_1\,ds_1\,r^{1-n-k}\frac{d(r^k\cos\delta_1)}{ds}ds \;\ldots\; (c).$$

Hieraus findet man die Wirkung dieſes Elementes nach der Richtung von ds_1, wenn man dieſen Ausdruck mit $\cos\delta_1$ multiplicirt. Sie iſt daher

$$aa_1\, ds_1\, r^{1-n-k} \cos\delta_1 \frac{d(r^k \cos\delta_1)}{ds}\, ds$$

oder

$$aa_1\, ds_1\, r^{1-n-2k}\, r^k \cos\delta_1 \frac{d(r^k \cos\delta_1)}{ds}\, ds$$

ein Ausdruck, deſſen Integrale nach der ganzen Ausdehnung des Leiters s die Wirkung dieſes geſchloſſenen Leiters auf ds_1 angibt.

Man erhält durch theilweiſes Integriren

$$\tfrac{1}{2}\, aa_1\, ds_1\, (r^{1-n} \cos^2\delta_1 - (1-n-2k)\int r^{-n} \cos^2\delta_1\, dr))$$

und dieſer Ausdruck muß $= 0$ ſeyn.

Der erſte Theil innerhalb der Klammern hebt ſich auf, wenn das Integral auf den ganzen Umfang von s ausgedehnt wird; es muß daher der zweite Theil für ſich $= 0$ ſeyn. Allein es iſt leicht ein geſchloſſener electriſcher Strom denkbar, für welchen $\int r^{-n} \cos^2\delta_1\, dr$ nicht $= 0$ iſt. Denn denkt man ſich aus dem Halbirungspuncte von ds, als dem Mittelpuncte, concentriſche Kugelflächen beſchrieben, die um die Größe ds von einander abſtehen und dieſen Leitungsdraht an zwei Stellen ſchneiden; ſo hat man für dieſe zwei Stellen wohl offenbar dieſelben Werthe von r und dr, aber die Summe von $\cos^2\delta_1$ kann auf einer Seite größer ſeyn als auf der anderen, ſo daß $\int r^{-n} \cos^2\delta_1\, dr$ nicht $= 0$ iſt. Deßhalb muß $1 - n - 2k = 0$ oder $n = 1 - 2k$ ſeyn. Da man nun aus beſtimmten Verſuchen weiß, daß k eine negative Größe iſt, weil die Theile desſelben Leiters auf einander abſtoßend wirken, ſo hat man auch $n > 1$.

54. Um die Größe der Wirkung eines geſchloſſenen electriſchen Stromes oder eines Syſtemes ſolcher Ströme auf ein Element eines anderen Stromes zu finden, ſey $MN = ds$ (Fig. 213) ein Element eines geſchloſſenen Stromes, das auf das Element $M_1 N_1 = ds_1$ wirkt. Man nehme die Halbirungspuncte O und O_1 der beiden Elemente an, nenne ihre Entfernung von einander $OO_1 = r$ und heiße δ_1 den Winkel MOO_1, welchen $M_1 N_1$ mit OO_1 macht, laſſe ferner O als den Anfangspunct eines rechtwinkeligen Coordinatenſyſtemes gelten und nenne λ, μ, ν die Winkel, welche $M_1 N_1$ mit jeder der drei Axen Ox, Oy, Oz macht. Die Wirkung der zwei electriſchen Elemente auf einander iſt bekanntlich

$$a a_1 ds_1 r^{1-n-2k} \frac{d(r^k \cos \delta_1)\, ds}{ds}$$

oder wenn man ſtatt $1 - n$ ſeinen Werth $2k$ ſetzt:

$$a a_1 ds_1 r^k \frac{d(r^k \cos \delta_1)\, ds}{ds}$$

Aber

$\cos \delta_1 = \cos \lambda \cos O O_1 x + \cos \mu \cos O_1 O y + \cos \nu \cos O_1 O z$

oder

$$\cos \delta_1 = \frac{x}{r} \cos \lambda + \frac{y}{r} \cos \mu + \frac{z}{r} \cos \nu$$

daher der vorhergehende Ausdruck

$$a a_1 d s_1 r^k d(r^{k-1} x \cos \lambda + r^{k-1} y \cos \mu + r^{k-1} z \cos \nu)$$

Hieraus erhält man die geſuchte Wirkung nach der Richtung von Ox durch Multiplication mit $\cos O_1 O x = \frac{x}{r}$. Dieſe Wirkung iſt demnach folgende:

$$a a_1 ds_1 r^{k-1} x\, d(r^{k-1} x \cos \lambda + r^{k-1} y \cos \mu + r^{k-1} z \cos \nu)$$

wo im zweiten Factor nur s als veränderlich anzuſehen iſt. Dieſer Ausdruck läßt ſich auch ſo darſtellen:

$$a a_1 ds_1 \Big(\cos \lambda\, r^{k-1} x\, d(r^{k-1} x) + \frac{x \cos \mu}{y} r^{k-1} y\, d(r^{k-1} y) + \frac{x \cos \nu}{z} r^{k-1} z\, d(r^{k-1} z) \Big)$$

oder

$$\tfrac{1}{2} a a_1 ds_1 \Big(\cos \lambda\, d(r^{2k-2} x^2) + \frac{x}{y} \cos \mu\, d(r^{2k-2} y^2) + \frac{x}{z} \cos \nu\, d(r^{2k-2} z^2) \Big)$$

Setzt man wieder für $2k$ den Werth $1 - n$, ſo erhält man

$$\tfrac{1}{2} a a_1 ds_1 \Big(d \,.\, \frac{x^2 \cos \lambda + x y \cos \mu + x z \cos \nu}{r^{n+1}} - \frac{y^2 \cos \mu}{r^{n+1}}\, d \frac{x}{y} - \frac{z^2 \cos \nu}{r^{n+1}}\, d \frac{x}{z} \Big)$$

oder

$$\tfrac{1}{2} a a_1\, ds_1 \left(d\frac{x \cos \delta_1}{r^n} + \frac{x\,dy - y\,dx}{r^{n+1}} \cos \mu - \frac{z\,dx - x\,dz}{r^{n+1}} \cos \nu \right).$$

Integrirt man dieſen Ausdruck nach der ganzen Ausdehnung von s, ſo erhält man die reſultirende Wirkung nach Ox. Bezeichnet man ſie mit X, ſo hat man:

$$X = \tfrac{1}{2} a a_1\, ds_1 \left(\frac{x \cos \delta_1}{r^n} + \cos \mu \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^{n+1}} - \cos \nu \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^{n+1}} \right).$$

Iſt der electriſche Strom geſchloſſen, ſo hebt ſich der erſte Theil innerhalb der Klammern auf und man erhält:

$$X = \tfrac{1}{2} a a_1\, ds_1 \left(\cos \mu \int \frac{x dy - y dx}{r^{n+1}} - \cos \nu \int \frac{z dx - x dz}{r^{n+1}} \right).$$

Auf demſelben Wege findet man für die Reſultirende Y und Z nach Oy und Oz folgende Ausdrücke:

$$Y = \tfrac{1}{2} a a_1\, ds_1 \left(\cos \nu \int \frac{y dz - z dy}{r^{n+1}} - \cos \lambda \int \frac{x dy - y dx}{r^{n+1}} \right)$$

$$Z = \tfrac{1}{2} a a_1\, ds_1 \left(\cos \lambda \int \frac{z dx - x dz}{r^{n+1}} - \cos \mu \int \frac{y dz - z dy}{r^{n+1}} \right)$$

oder wenn man

$$\int \frac{y dz - z dy}{r^{n+1}} = A, \int \frac{z dx - x dz}{r^{n+1}} = B, \int \frac{x dy - y dx}{r^{n+1}} = C$$

ſetzt:

$$X = \tfrac{1}{2} a a_1\, ds_1\, (C \cos \mu - B \cos \nu)$$
$$Y = \tfrac{1}{2} a a_1\, ds_1\, (A \cos \nu - C \cos \lambda)$$
$$Z = \tfrac{1}{2} a a_1\, ds_1\, (B \cos \lambda - A \cos \mu)$$

Multiplicirt man die erſte dieſer Gleichungen mit A, die zweite mit B, die dritte mit C und addirt die Producte, ſo erhält man

$$AX + BY + CZ = 0.$$

Für die ganze Wirkung R des geſchloſſenen Stromes iſt demnach

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$$

oder

$$R = \tfrac{1}{2} a a_1 ds_1 \sqrt{[(C \cos \mu - B \cos \nu)^2 + (A \cos \nu - C \cos \lambda)^2 + (B \cos \lambda - A \cos \mu)^2]}$$

Denkt man ſich eine gerade Linie OA, die mit den drei Coordinatenaxen die Winkel ρ, σ, τ einſchließt, ſo daß $\cos\rho = \frac{A}{D}$, $\cos\sigma = \frac{B}{D}\cos\tau = \frac{C}{D}$ iſt, wenn $D = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$ geſetzt wird, ſo kann man ſtatt obiger Gleichung ſetzen

$$R = \tfrac{1}{2} aa_1 D^2 ds_1 \sqrt{\left(\frac{(C\cos\mu - B\cos\nu)^2}{D^2} + \frac{(A\cos\nu - C\cos\lambda)^2}{D^2} + \frac{(B\cos\lambda - A\cos\mu)^2}{D^2}\right)}$$

oder

$$R = \tfrac{1}{2} aa_1 D ds_1 \sqrt{[(\cos\tau\cos\mu - \cos\sigma\cos\nu)^2 + (\cos\rho\cos\nu - \cos\tau\cos\lambda)^2 + (\cos\sigma\cos\lambda - \cos\rho\cos\mu)^2]}$$

endlich, wenn ε den Winkel bezeichnet, welchen OA mit dem Elemente ds macht:

$$R = \tfrac{1}{2} aa_1 D ds_1 \sin\varepsilon.$$

Die gerade Linie OA iſt auf R ſenkrecht und heißt nach Ampère, dem wir dieſe Theorie verdanken, die Directrix.

55. Man denke ſich einen in einer Ebene liegenden geſchloſſenen electriſchen Strom ABC (Fig. 214), der die Fläche ω einſchließt und auf ein Element des Stromes O wirkt, deſſen Mittelpunct ſich im Anfangspuncte der rechtwinkeligen Coordinaten befindet, ziehe eine durch Oz gehende Ebene, welche den Strom in BC und ſeine Projection auf der Ebene xOy in bc ſchneidet. Es drehe ſich dieſe Ebene um Oz um den Winkel $d\varphi$, ſo daß ſie in der neuen Lage den Strom in D und E und ſeine Projection in d und e ſchneidet. Nun hat man den Werth der drei Integrale A, B und C zu beſtimmen, um die Wirkung des Stromes ABC auf O zu finden. Dieſe findet man auf folgende Art: Man nenne $Ob = u$, $Oc = u + du$, mithin $bc = du$, ferner wie vorhin die Entfernung der auf einander wirkenden Elemente r, ſo iſt

$$x = u\cos\varphi,\ y = u\sin\varphi$$

$$x\,dy - y\,dx = u^2 d\varphi,\ C = \int \frac{u^2 d\varphi}{r^{n+1}}.$$

Allein $d\varphi$ liegt zwiſchen zwei Bögen, in welchen der electriſche Strom entgegengeſetzte Richtungen hat. Es iſt daher

$$C = \int \frac{u^2\, d\varphi}{r^{n+1}} - \int \frac{(u + du)^2\, d\varphi}{(r + dr)^{n+1}}$$
$$= \int \left(\frac{(n+1)\, u^2\, dr}{r^{n+2}} - \frac{2\, u\, du}{r^{n+1}} \right) d\varphi.$$

Denkt man ſich die Sehne BC über Oz hinaus verlängert, und darauf von O die Senkrechte $OF = q$ errichtet und heißt man $FOz = \rho$, ſo hat man $OG = \frac{q}{\cos \rho}$. Zieht man $G\gamma$ mit Oc parallel, ſo erhält man von $B\beta : C\gamma - B\beta = G\beta : G\gamma - G\beta$ oder

$$z - \frac{q}{\cos \rho} : dz = u : du \text{ mithin } dz = \frac{z \cos \rho - q}{u \cos r}\, du.$$

Ferner iſt $r^2 = u^2 + z^2$, $dr = \frac{u\,du + r\,dr}{r}$, mithin, wenn man obige Werthe für dr ſubſtituirt

$$dr = \frac{u\,du}{r} + \left(\frac{z^2 \cos \rho - qz}{u \cos \rho} \right) \frac{du}{r} = \frac{(u^2 + z^2) \cos \rho - qz}{r\, u \cos \rho} . du$$
$$= \frac{r^2 \cos \rho - q\,z}{r\, u \cos \rho}\, du.$$

Setzt man dieſen Werth in den Ausdruck für C, ſo wird

$$C = \int \left(\frac{(n+1)\,(r^2 \cos \rho - q\,z)}{r^{n+1} \cos \rho} - \frac{2}{r^{n+1}} \right) u\, du\, d\varphi$$
$$= \int \left(\frac{n-1}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)\, q\, z}{r^{n+3} \cos \rho} \right) u\, d\, u\, d\, \varphi.$$

Iſt der electriſche Kreis ſehr klein, ſo daß man ſtatt des für die verſchiedenen Elemente veränderlichen Werthes von r und z denjenigen ſetzen kann, welche dem Schwerpuncte der Fläche ω entſprechen und durch r_1 und z_1 bezeichnet werden mögen; ſo erhält man:

$$C = \left(\frac{n-1}{r_1^{\,n+1}} - \frac{(n+1)\, q\, z_1}{r_1^{\,n+3} \cos \rho} \right) \int u\, d\, u\, d\, \varphi.$$

Aber $u\, d\varphi$ iſt der mit dem Halbmeſſer Ob beſchriebene Bogen innerhalb der Schenkel des Winkels $d\varphi$ und $u\, d\varphi\, du$ die Fläche, welche durch die Schenkel dieſes Winkels innerhalb des Kreiſes abc beſchrieben wird, daher iſt $\int u\, du\, d\varphi = \omega \cos \rho$ und

$$C = \left(\frac{(n-1 \cos \rho}{r_1^{\,n+1}} - \frac{(n+1)\, q\, z_1}{r_1^{\,n+3}} \right) \omega.$$

Durch ein gleiches Verfahren findet man:

$$B = \left(\frac{(n-1)\cos\sigma}{r_1^{\,n+1}} - \frac{(n+1)\,q\,y_1}{r_1^{\,n+3}}\right)\omega$$

$$A = \left(\frac{(n-1)\cos\tau}{r_1^{\,n+1}} - \frac{(n+1)\,q\,x_1}{r_1^{\,n+3}}\right)\omega.$$

Da nun A, B, C und daher auch D bekannt ſind, ſo kennt man auch $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, d. h. die Coſinuſſe der Winkel, welche die Directrix mit den drei Coordinatenaxen macht.

Liegt der electriſche Kreis in der Ebene der xy, ſo iſt $q=0$, $\cos p = 1$ $\cos\sigma = 0$, $\cos\tau = 0$ und daher auch $A = 0$, $B = 0$, $C = \frac{n-1}{r_1^{\,n+1}}\,\omega$, $D = C$, $e = 90°$ und $R = \frac{n-1}{2r_1^{\,n+1}} . a a_1 \, ds_1 \, \omega$.

56. Wenn die gegenſeitige Wirkung zweier geſchloſſener electriſcher Ströme O_1 und O auf einander unterſucht werden ſoll, ſo denke man ſich ein Element AB (Fig. 215) des Kreiſes O, welches zwiſchen den Schenkeln des Winkels $AOB = d\varphi$ liegt und unterſuche die Wirkung von O auf dieſes Element. Zu dieſem Ende ſubſtituire man dem Elemente AB zwei andere AC und CB, wovon erſteres in der Verlängerung von $OA = r$ liegt, während das letztere darauf ſenkrecht ſteht. Nach dem Vorhergehenden iſt die Wirkung von O auf CB gleich $\frac{n-1}{2} . \frac{a a_1 \omega \, d\varphi}{r^n}$

wo $CB = r\,d\varphi$ und a, a_1, n, ω die vorher angenommenen Bedeutungen haben. Ferner iſt die Wirkung von O auf AC gleich

$$\frac{n-1}{2} . \frac{a a_1 \omega}{r^{n+1}}\, d\, r.$$

Das Integrale des letzteren Ausdruckes, auf den ganzen Kreis bezogen, wird $= 0$ und es bleibt daher das Integrale vom erſteren Ausdrucke. Hier iſt aber wieder zu bemerken, daß zwiſchen den Schenkeln von $d\varphi$ zwei Elemente, eines von O gegen AB, das andere von O gegen $A_1 B_1$ liegen, deren eines von O um die Größe dr weiter entfernt iſt und daher weniger wirkt als das andere. Es iſt daher wieder wie vorhin die reſultirende Wirkung der einzelnen Elemente

$$d\left(\frac{n-1}{2} . \frac{a a_1 \omega \, d\varphi}{r_1^{\,n}}\right) = \frac{n(n-1)\, a a_1 \omega \, d\varphi \, dr}{2 r^{n+1}}$$

ſtatt deſſen man auch ſetzen kann:

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{a a_1 \omega r d\varphi dr}{r^{n+2}}.$$

Hier iſt $r d\varphi = AB$ und $r d\varphi dr = A\,B\,A_1\,B_1$ und die Summe aller Elemente $(\int r d\varphi\, dr)$ gleich dem ganzen Kreiſe $= \omega_1$. Daher die geſammte Wirkung der zwei geſchloſſenen Ströme unter der Vorausſetzung, daß ω und ω_1 ſehr klein ſind, auf einander

$$\int \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{a a_1 \omega r d\varphi dr}{r^{n+2}} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{a a_1 \omega \omega_1}{r^{n+2}}.$$

Es ändert ſich daher die Wirkung zweier ſolcher Ströme auf einander nur mit ihrer Entfernung vòn einander und ſie können daher keine continuirliche Rotation hervorbringen.

57. Geſetzt, es wirken zwei Syſteme electriſcher Ströme auf einander, wovon die zu demſelben Syſteme gehörigen in derſelben Ebene liegen; die Fläche der Ströme eines Syſtemes ſeyen ω und ω_1, ihre gegenſeitige Entfernung r, die Flächen des zweiten Syſtemes ſeyen $m^2\omega$ und $m^2\omega_1$, ihre Entfernung mr. Unter dieſen Vorausſetzungen hat man

$$R = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{a a_1 \omega \omega_1}{r^{n+2}},\quad R_1 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{a a_1 m^4 \omega \omega_1}{m^{n+2} r^{n+2}}$$

und daher

$$\frac{R_1}{R} = m^{n-2}.$$

Der Erfahrung gemäß wirken dieſe zwei Syſteme gleich ſtark auf einander ein, und daher iſt $m^{n-2} = 1$ oder $n = 2$. Daraus folgt, daß zwei Elemente electriſcher Ströme nach dem verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe ihrer Entfernung auf einander wirken.

Mittelſt dieſes Werthes von n erhält man aus der Gleichung $1 - n - 2k = 0$, $k = -\frac{1}{2}$.

58. Nun hält es nicht ſchwer, die Wirkung zweier geradliniger electriſcher Ströme, die in verſchiedenen Ebenen liegen, zu finden. Es ſeyen AB und A_1B_1 (Fig. 216) ſolche Ströme, ihre gemeinſchaftliche Senkrechte $AA_1 = b$ und $A_1\beta$ mit AB parallel gezogen, ferner $MM_1 = r$, $B_1A_1\beta = \varepsilon$. Die Wirkung zweier Elemente auf einander iſt nach (51 und 52)

$$\frac{a a_1\, ds\, ds_1}{r^n} (\cos\varepsilon + (k-1)\cos\delta \cos\delta_1),$$

oder wenn man für die Conſtanten n und k ihre numeriſchen Werthe und für $\cos\delta$, $\cos\delta_1$ die Werthe $\frac{dr}{ds}$, $-\frac{dr}{ds_1}$ ſetzt:

$$\frac{\frac{1}{2}aa_1\,ds\,ds_1}{r^2}\left(2\cos\varepsilon + 3\,\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds_1}\right).$$

Wenn man endlich $AM = s_1$, $A_1M_1 = s$ macht, ſo iſt

$$r^2 = b^2 + s^2 + s_1^2 - 2ss_1\cos\varepsilon.$$

Sucht man daraus die Werthe von $\frac{dr}{ds}$, $\frac{dr}{ds_1}$ und ſetzt ſie in die obige Gleichung, ſo bekommt man für die Wirkung der zwei Elemente der electriſchen Ströme auf einander den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}aa_1\,ds\,ds_1\left(\frac{\cos\varepsilon}{r^2} + r\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds_1}\right)$$

Die Wirkung nach AA_1 iſt demnach, wegen $\cos M_1Mm = \frac{b}{r}$

$$\tfrac{1}{2}baa_1\,ds\,ds_1\left(\frac{\cos\varepsilon}{r^3} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds_1}\right)$$

oder, wenn man nach der ganzen Ausdehnung der beiden Ströme integrirt, die Geſammtwirkung

$$\tfrac{1}{2}baa_1\,ds\,ds_1\left(\frac{1}{r} + \cos\varepsilon\int\frac{ds\,ds_1}{r^3}\right)$$

Vermöge dieſer Kraft ſuchen ſich die Ströme einander zu nähern, oder ſich von einander zu entfernen, aber nicht ſich zu drehen.

Sind die Ströme mit einander parallel, ſo iſt $\varepsilon = o$, $\cos\varepsilon = 1$ und daher

$$r^2 = b^2 + (s-s_1)^2 \text{ und } \int\frac{ds\,ds_1}{r^3} = \int ds_1\int\frac{ds}{[b^2+(s-s_1)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int ds_1 \cdot \frac{s-s_1}{b^2\sqrt{[b^2+(s-s_1)^2]}}$$

$$= -\frac{\sqrt{[b^2-(s-s_1)^2]}}{b^2} = -\frac{r}{b^2}.$$

Wird dieſer Werth auf die ganze Länge der Ströme ausgedehnt, ſo erhält man vier Grenzwerthe, nämlich die Linien, welche von A_1 und B_1 nach A und B gezogen werden. Bezeichnet man ſie mit den Buchſtaben r_2 r_1, R_2 R_1, ſo wird aus obigem Integrale

$$\frac{r_1 + R_2 - (r_2 + R_1)}{b^2}$$

und daher als Wirkung beider Elemente auf einander

$$\tfrac{1}{2}\,aa_1\left(\frac{b}{r_2}-\frac{b}{r_1}-\frac{b}{R_2}+\frac{b}{R_1}+\frac{R_2+r_1-(r_2+R_1)}{b^2}\right)$$

Sind beide Ströme gleich lang und auf der Linie, welche ihre Endpuncte nach derſelben Seite hin verbindet, ſenkrecht, ſo wird

$$R_1 = r_2 = b \text{ und } R_2 = r_1 = c,$$

wo c die Diagonale eines mit der Größe der Leiter beſchriebenen Rechteckes iſt, und die Wirkung der Ströme auf einander

$$aa_1\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right)$$

Erſtreckt ſich einer der zwei Ströme nach beiden Seiten ins Unendliche, während der andere die Länge l hat, ſo wird $r_1 + R_2 - (r_2 + R_1) = 2\,l$ und ihre Geſammtwirkung

$$\frac{aa_1 l}{b}.$$

Stehen die Ströme auf einander ſenkrecht, ſo iſt $\cos\varepsilon = 0$ und darum ihre Wirkung auf einander

$$\tfrac{1}{2}\,aa_1\left(\frac{b}{r_2}-\frac{b}{r_1}-\frac{b}{R_2}+\frac{b}{R_1}\right)$$

ein Ausdruck, welcher dem kleinſten Abſtande der zwei Ströme proportionirt iſt und $= 0$ wird, wenn beide in derſelben Ebene liegen. Nun erübrigt noch das Drehungsmoment um die Axe AA_1 zu finden. Dazu braucht man die nach $M_1 m$ wirkende Kraft, denn das Product aus dieſer Kraft in das Loth AO gibt das geſuchte Moment. Es iſt aber jene Kraft

$$\tfrac{1}{2}\,aa_1\,ds\,ds_1\left(\frac{\cos\varepsilon}{r^2}+r\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds_1}\right)\frac{b}{r}$$

und daher das Moment

$$\tfrac{1}{2}\,aa_1\sin\varepsilon\left(ss_1\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds_1}\,ds\,ds_1+ss_1\,\frac{\cos\varepsilon\,ds\,ds_1}{r^3}\right).$$

Setzt man $\frac{ss_1}{r} = p$, ſo wird

$$\frac{dp}{ds}=\frac{s_1}{r}+\frac{ss_1\,d\frac{1}{r}}{ds};$$

$$\frac{d^2 p}{ds\,ds_1} = \frac{1}{r} - \frac{s_1}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds_1} - \frac{s}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds} + ss_1 \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds\,ds_1} =$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{s_1(s_1 - s\cos\varepsilon) + s(s - s_1\cos\varepsilon)}{r^3} +$$

$$+ ss_1 \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds\,ds_1} = \frac{a^2}{r^3} + \frac{ss_1 d^2 \frac{1}{r}}{ds\,ds_1}.$$

Es iſt aber auch

$$r \frac{d^2 r}{ds\,ds_1} + \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds_1} = -\cos\varepsilon,$$

oder

$$r \frac{d^2 r}{ds\,ds_1} + \frac{(s - s_1\cos\varepsilon)(s_1 - s\cos\varepsilon)}{r^2} = -\cos\varepsilon,$$

oder wegen $s^2 + s_1^2 = r^2 - a^2 + 2ss_1\cos\varepsilon$

$$\frac{d^2 r}{ds\,ds_1} + \frac{ss_1\sin^2\varepsilon + b^2\cos\varepsilon}{r^3} = 0$$

oder

$$\frac{ss_1}{r^3} = -\frac{1}{\sin^2\varepsilon}\left(\frac{d^2 r}{ds\,ds_1} + \frac{b^2\cos\varepsilon}{r^3}\right).$$

Dieſer Werth in den Ausdruck für das Drehungsmoment geſetzt, gibt

$$\tfrac{1}{2} aa_1 \sin\varepsilon\, ds\,ds_1 \left(\frac{d^2 p}{ds\,ds_1} - \frac{b^2}{r^3} - \frac{\cos\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}\left(\frac{d^2 r}{ds\,ds_1} - \frac{b^2\cos\varepsilon}{r^3}\right)\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} aa_1\, ds\,ds_1 \left(\sin\varepsilon \frac{d^2 p}{ds\,ds_1} - \cot\varepsilon \frac{d^2 r}{ds\,ds_1} - \frac{b^2}{r^3\sin\varepsilon}\right).$$

Integrirt man noch s und s_1, ſo erhält man für das geſuchte Moment den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2} aa_1 \left(p\sin\varepsilon - r\cot\varepsilon - \frac{b^2}{\sin\varepsilon}\iint \frac{ds\,ds_1}{r^3}\right).$$

59. Nun ſoll die Wirkung krummliniger electriſcher Ströme auf einander betrachtet werden, die nicht in derſelben Ebene liegen. Um die Rechnung zu vereinfachen, nehme man ein Syſtem geſchloſſener in derſelben Ebene liegender, unendlich kleiner Ketten an, die einen hohlen electriſchen Cylinder bilden, den Ampère ein electrodynamiſches Solenoid nennt. Die Wirkung ſolcher Ströme hängt von dem Werthe der Integrale A, B, C (55) ab, die, wenn man $n = 2$ ſetzt und bei x_1, y_1, z_1 die Accente wegläßt, folgende Form annehmen:

$$A = \left(\frac{\cos\tau}{r_1^3} - \frac{3qx}{r_1^5}\right)\omega$$

$$B = \left(\frac{\cos\sigma}{r_1^3} - \frac{3qy}{r_1^5}\right)\omega$$

$$C = \left(\frac{\cos\rho}{r_1^3} - \frac{3qz}{r_1^5}\right)\omega$$

Erfolgen dieſe Ströme um AB (Fig. 217), wie um eine Axe und liegen in auf AB ſenkrechten Ebenen, deren jede von der zunächſt darauf folgenden den Abſtand g hat, ſchließt ferner jeder die Fläche ω ein; ſo kommen auf ein Element ds der Curve AB ſo viele ſolche Ströme, als $\frac{ds}{g}$ Einheiten enthält. Multiplicirt man die obigen Werthe von A, B, C mit $\frac{ds}{g}$ und integrirt ſie von A bis B; ſo erhält man die Werthe, welche der Geſammtwirkung aller Ströme auf das Element Mm zum Grunde liegen, nämlich:

$$A = \int\left(\frac{\cos\tau\, ds}{r_1^3} - \frac{3qx\,ds}{r_1^5}\right)\frac{\omega}{g}$$

$$B = \int\left(\frac{\cos\sigma\, ds}{r_1^3} - \frac{3qy\,ds}{r_1^5}\right)\frac{\omega}{g}$$

$$C = \int\left(\frac{\cos\rho\, ds}{r_1^3} - \frac{3qz\,ds}{r_1^5}\right)\frac{\omega}{g}$$

Da nun g auf ω ſenkrecht ſteht, ſo iſt $\cos\rho = \frac{dz}{ds}$ und weil $\frac{dr_1}{ds}$ der Coſinus des Winkels iſt, den q mit r_1 macht, auch $q = r_1 \frac{dr_1}{ds}$. Setzt man dieſe Werthe in C, ſo erhält man:

$$C = \frac{\omega}{g}\int\left(\frac{dz}{r_1^3} - \frac{3z dr_1}{r_1^4}\right) = \frac{\omega}{g}\cdot\frac{z}{r_1^3}.$$

Sind nun $x_1, y_1, z_1\, l,\ x_2, y_2, z_2,\ l_1$ die Werthe von x, y, z, r, welche den beiden Endpuncten der Curve AB entſprechen, ſo erhält man das Integral innerhalb der genannten Grenze

$$C = \frac{\omega}{g}\left(\frac{z_2}{l_1^3} - \frac{z_1}{l^3}\right).$$

Verfährt man eben ſo mit B und A, ſo erhält man:

$$B = \frac{\omega}{g}\left(\frac{y_2}{l_1^3} - \frac{y_1}{l^3}\right);\ A = \frac{\omega}{g}\left(\frac{x_2}{l_1^3} - \frac{x_1}{l^3}\right).$$

Kehrt das Solenoid in ſich ſelbſt zurück, ſo iſt $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; erſtreckt es ſich zu beiden Seiten ins Unendliche, ſo iſt jedes der Glieder von A, B, C für ſich $= 0$.

Hat es nach der Seite, welcher die Coordinaten $x_1 y_1 z_1$ entſprechen, eine endliche, aber nach der anderen eine unendliche Länge, ſo wird

$$A = -\frac{\omega}{g}.\frac{x_1}{l^3},\ B = -\frac{\omega}{g}.\frac{y_1}{l^3},\ C = -\frac{\omega}{g}.\frac{z_1}{l^3}$$

und daher

$$A : B : C = x_1 : y_1 : z_1.$$

Da nun die auf der Ebene der Directrix Senkrechte, welche zugleich durch den Anfangspunct der Coordinaten O geht, mit den Coordinatenaxen Winkel einſchließt, deren Coſinuſſe $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ ſind; ſo muß ſie auch durch den Endpunct des Solenoides gehen, und daher die Wirkung des Solenoides auf ein Element ſenkrecht ſtehen auf der Ebene, welche durch das Element und den Endpunct des Solenoides geht. Die Größe dieſer Wirkung iſt

$$\tfrac{1}{2} a a_1 D ds_1 \sin \varepsilon,$$

weil aber $D = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)} = -\frac{\omega}{g l^3}$ iſt, ſo wird dieſe Wirkung

$$\frac{\omega a a_1 ds_1 \sin \varepsilon}{2 g l^2}.$$

60. Es ſey OL (Fig. 218) ein Solenoid, welches mit dem einen Endpuncte im Anfangspuncte O der Coordinaten liegt, von der anderen Seite aber unbegrenzt fortläuft, und man unterſuche die Wirkung des Stromes AB auf dasſelbe. Es ſey Mm ein Element ds_1 dieſes Stromes und $MOm = dv$. Dem Vorhergehenden gemäß, iſt die Wirkung dieſes Elementes auf das Solenoid

$$\frac{\omega}{2g}.\frac{a a_1 ds_1 \sin \varepsilon}{l^2}$$

oder weil $\frac{r\,ds \sin \varepsilon}{2} = dv$ iſt:

$$\frac{\omega aa_1}{g l^3}\, dv.$$

Um den nach Ox wirkenden Theil dieſer Kraft zu finden, muß man dieſen Ausdruck mit dem Coſinus des Winkels μ multipliciren, den die Geſammtkraft mit Ox macht. Weil aber die Richtung dieſer Kraft in einer auf Mm ſenkrechten durch O gehenden Ebene liegt, ſo iſt μ zugleich jener Winkel, welchen die Ebenen MOm und zOy einſchließen, und $dv.\cos\mu$ iſt die Projection von dv auf zOy, welche gleich iſt $\frac{ydz-zdy}{2}$; daher hat man als geſuchte Partialkraft

$$\frac{\omega aa_1}{2g}\int\left(\frac{ydz-ydz}{l^3}\right) = \frac{\omega aa_1}{2g}\,A$$

und auf ähnliche Weiſe die Wirkung nach Oy und Oz

$$\frac{\omega aa_1}{2g}\,B \text{ und } \frac{\omega aa_1}{2g}\,C$$

woraus als Reſultirende folgt

$$\frac{\omega aa_1}{2g}\sqrt{(A^2+B^2+C^2)} = \frac{\omega aa_1}{2g}.D.$$

Die Coſinuſſe der Winkel, welche dieſe Reſultirende mit Ox, Oy, Oz macht, ſind wieder $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$. Dieſelben Winkel gelten für die Reſultirende und die Coordinatenaxen, wenn es ſich um die Anziehung des Elementes allein gehandelt hätte. Iſt daher AB ſelbſt ein Solenoid und A ſein Endpunct, ſo erfolgt die Wirkung desſelben nach der geraden Linie, die den Punct A mit dem anderen Ende des Solenoides verbindet, oder die Wirkung zweier Solenoide auf einander erfolgt nach der Richtung der Geraden, welche man vom Ende eines zum Ende des anderen zieht. Iſt ω_1 und g_1 das für das zweite Solenoid, was ω und g für das erſte bezeichnen, und l noch immer die Entfernung ihrer zwei endlichen Endpuncte, ſo iſt

$$D = -\frac{\omega_1}{g_1 l^2} \text{ und } \frac{\omega aa_1 D}{2g} = -\frac{\omega\omega_1 aa_1}{2gg_1 l^2}.$$

Ihre anziehenden und abſtoßenden Kräfte wirken demnach nach dem verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe ihrer Entfernung.

61. Um aus der Wirkung eines Solenoides, das einerſeits ins Unendliche fortläuft, die eines ſolchen *AB* zu finden, welches beiderſeits begrenzt iſt, denke man ſich, es beginne von *B* bis ins Unendliche ein neues Solenoid *Bx*, deſſen Wirkung die des erſteren nach der ganzen Ausdehnung von *Bx* aufhebt und es bleibt als Geſammtwirkung die des endlichen Stückes *AB* übrig. Demnach beſteht die Wirkung eines endlichen Solenoides aus zwei Theilen, einem anziehenden und einem abſtoßenden, und beide erfolgen nach Linien, welche die zwei begrenzten Extreme mit einander verbinden. Hat man zwei endliche Solenoide wie *AB*, *CD* (Fig. 219), ſo erfolgen die Wirkungen nach *AD* und *CB*, und ſo wie ſich z. B. *A* und *C* anziehen, ſtoßen ſich *A* und *D* ab.

62. Vorhin wurde für die Wirkung des electriſchen Stromes *AB* (Fig. 218) auf das Solenoid *OL* der Ausdruck

$$\frac{\omega a a_{,} dv}{g r_{,}^{3}}$$

gefunden. Handelt es ſich nun um das Moment dieſer Kraft in Beziehung auf die Axe *PQ*, ſo muß man zuerſt den Theil jener Kraft ſuchen, welcher in einer auf *PO* ſenkrechten Ebene liegt und von dieſer die auf *PQ* Senkrechte *pq* ziehen, welche zugleich das Element *Mm* halbirt. Die geſuchte Partialkraft iſt

$$\frac{\omega a a_{,} du}{g r_{,}^{3}}$$

wenn du die Projection der Fläche auf der Ebene *Pqp* vorſtellt. Aber $du = \frac{r_{,}^{2} d\delta}{2}$, mithin obige Kraft

$$\frac{\omega a a_{,} d\delta}{2 g r_{,}}$$

und weil $pq = r_{,} \sin\delta$ iſt, das geſuchte Moment

$$\frac{\omega a a_{,}}{2g} \sin\delta\, d\delta.$$

Das Integral dieſes Ausdruckes auf die ganze Länge der Curve *AB* bezogen, gibt das Moment, womit der Strom das Solenoid um *PQ* zu drehen ſucht. Iſt dieſer Strom geſchloſſen, ſo wird dieſes Integrale

$$C = \frac{\omega a a_1 \cos \delta}{2g},$$

welches auf die gehörigen Grenzen ausgedehnt = o iſt. Demnach iſt die Wirkung eines Stromes oder eines Syſtemes von Strömen auf ein Solenoid gleich groß, es mögen alle Kräfte an den Endpuncten oder an jedem einzelnen Elemente angebracht ſeyn. Iſt der Strom nicht geſchloſſen, und ſind δ_1 und δ_2 die Werthe von δ für die beiden Endpuncte des Stromes; ſo iſt obiges Integral, welches das Drehungsmoment vorſtellt:

$$\frac{\omega a a_1}{2g} (\cos \delta_1 - \cos \delta_2).$$

Handelt es ſich um ein endliches Solenoid, ſo betrachtet man dasſelbe als Summe zweier einerſeits ins Unendliche fortlaufender Solenoide, die Summe beider Wirkungen gibt die geſuchte Wirkung. Sind δ_1' und δ_2' die Werthe eines zweiten Solenoides, welchen Werthen δ_1 und δ_2 des erſten entſprechen; ſo iſt die Wirkung

$$-\frac{\omega a a_1}{2g} (\cos \delta_1' - \cos \delta_2')$$

und demnach die Wirkung des endlichen Solenoides

$$\frac{\omega a a_1}{2g} (\cos \delta_1 - \cos \delta_2 - \cos \delta_1' + \cos \delta_2').$$

Daraus folgt, daß die geſuchte Kraft von der Geſtalt der Größe und Entfernung des Stromes unabhängig iſt und blos von den verſchiedenen Werthen von δ abhängt.

63. Ein electriſcher Strom wirkt nicht blos auf einen anderen Strom dieſer Art, ſondern auch auf eine Magnetnadel. Die Wirkung eines Magnetes auf einen Polardraht erfolgt immer ſo, als wenn ſie nur von dem Pole des Magnetes ausgegangen wäre, und hat eine auf der Ebene, worin ſich der Mittelpunct des Magnetes und der electriſche Strom befindet, ſenkrechte Richtung. Zur näheren Erörterung dieſer Wirkung ſey NS (Fig. 220) ein horizontal ſchwebender Magnet, deſſen Pole N und S ſind, HB ein Strom, welcher ſich in der durch C gehenden Verticalebene befindet, Bb ein Element desſelben, auf welches die Pole des Magnetes wirken, welche Wirkung hier mehr unterſucht werden ſoll. Um einen Ausdruck für dieſe Wirkung auf den Pol S zu erhalten, ziehe man von S eine auf das genannte Element Bb Senkrechte SE, welche

mit Sb den Winkel $ESb = \delta$ einſchließt und bezeichne SE mit ρ und Sb mit r. Heißt nun a die Kraft eines magnetiſchen Elementes, ds die Größe des Elementes bB, ſo iſt die auf den Halbirungspunct d des Elementes wirkende Kraft des Magnetes gleich $\frac{a\,ds \sin SbE}{r^2}$, welche wegen $\sin SbE = \frac{ds}{r\,d\delta}$ übergeht in $\frac{a\,d\delta}{r}$.

Setzt man für r ſeinen Werth aus dem rechtwinkeligen Dreiecke SEb, nämlich $\frac{\rho}{\cos\delta}$, ſo wird dieſe Kraft endlich

$$\frac{a\,d\delta \cos\delta}{\rho}$$

Integrirt man dieſen Ausdruck innerhalb der Grenzen $\delta = e$ und $\delta = f$, ſo erhält man als Werth der Reſultirenden für die parallelen Wirkungen auf die einzelnen Elemente des Stromes

$$\frac{a\,(\sin f - \sin e)}{\rho}.$$

Iſt der Strom beiderſeits unbegrenzt, ſo wird $f = \frac{\pi}{2}$, $e = -\frac{\pi}{2}$ und daher die geſuchte Reſultirende

$$\frac{2a}{\rho}.$$

Eine gleiche Kraft findet man für den Pol N des Magnetes.

64. Der vorhergehenden Entwicklung liegt die Hypotheſe zum Grunde, daß die Kraft, welche ein Polardraht auf einen Magnet ausübt, oder umgekehrt, in der Ebene liegt, welche ſenkrecht auf der Ebene des electriſchen Stromes und dem Befeſtigungspunct des Magnetes liegt und daß dieſe Kraft im verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe der Entfernung des Stromelementes vom wirkenden Pole des Magnetes wächſt. Die Richtigkeit der erſten Vorausſetzung beweiſet die Richtung, welche eine aſtatiſche Magnetnadel durch den Einfluß eines electriſchen Stromes annimmt und die bekanntlich immer auf dieſem Strome ſenkrecht iſt, die Richtigkeit der zweiten Vorausſetzung läßt ſich aus der Vergleichung directer Verſuchsergebniſſe mit den Folgerungen aus der Vorausſetzung prüfen. Die Prüfung läßt ſich mittelſt Biot's, Savary's und Schmidt's Verſuchen anſtellen. Die erſteren Gelehrten ließen eine kurze Magnetnadel in verſchiedenen Entfernungen von einem ſehr langen Po-

lardrahte oſcilliren und beſtimmten die Dauer von einer großen Anzahl Schwingungen, nachdem ſie vorläufig durch einen ſtarken unveränderlichen Magnet den Einfluß des Erdmagnetismus auf die oſcillirende Nadel völlig aufgehoben hatten. Sie bewirken dieſes dadurch, daß ſie die Nadel zuerſt unter dem Einfluß des Erdmagnetismus ſchwingen ließen, hierauf in einerlei Höhe mit derſelben einen anderen ſtarken Magnet anbrachten und denſelben der Nadel in horizontaler Richtung ſo weit näherten, bis die Schwingungen der erſteren ſehr langſam wurden, und man die beſchleunigende Kraft derſelben = 0 ſetzen konnte. Das Reſultat einer Reihe ſolcher Verſuche enthält folgende Tafel:

Abſtand des Polardrahtes vom Magnete in Millimetern.	Dauer von 10 Oſcillationen	Verhältniß der beobachteten Kräfte mit der bei 30 ^{mm} Statt findenden
30	42.″15	
40	48.85	$\frac{3}{4}$ (1 — 0.008508)
30	42.00	
20	33.50	$\frac{3}{2}$ (1 + 0.023090)
30	41.00	
50	54.75	$\frac{3}{5}$ (1 — 0.036673)
30	42.25	
60	56.75	$\frac{1}{2}$ (1 + 0.095460)
30	41.75	
120	89.00	$\frac{3}{12}$ (1 — 0.103892)
30	42.50	
15	30.00	2 (1 + 0.067010)
30	43.15	

Hieraus ſieht man, daß die Kräfte ſich faſt ganz genau verkehrt wie die Abſtände vom Leitungsdraht verhalten. Da nun dieſes gerade das Reſultat iſt, welches ſich aus der Vorausſetzung ergibt, daß die Wirkung der einzelnen Elemente auf einander nach dem verkehrten quadratiſchen Verhältniſſe der Entfernung erfolge, ſo bleibt wohl über die Richtigkeit dieſes Geſetzes kein Zweifel mehr.

Daſſelbe Geſetz hat Schmidt aus der Größe der Ablenkungen einer Magnetnadel durch einen electriſchen Strom ausgemittelt, wie folgt: Stellt p die magnetiſche Kraft der Erde und α den Inclinationswinkel einer Magnetnadel vor, ſo iſt der horizontal wirkende Theil des Erdmagnetismus $p \cos \alpha$ und der vertical wirkende

$p \sin \alpha$. Wirkt nun ein electriſcher Strom von der Stärke P, der von N nach S fließt, einmal in einer horizontalen Ebene auf eine Abweichungsnadel, und hierauf in der Richtung von unten nach oben auf eine Magnetnadel, die ſich in einer auf dem magnetiſchen Meridian ſenkrechten Verticalebene drehen kann, heißt ferner der Ablenkungswinkel in der horizontalen Richtung φ, in der verticalen ψ und iſt die Entfernung der zwei Pole der Magnetnadel von einander $= 1$, die Entfernung der Nadel vom Polardraht $= r$; ſo hat man für die in horizontaler Richtung abgelenkte Nadel

$$\frac{P \cos \varphi}{(\sin \varphi)^n} = p \cos \alpha \sin \varphi \text{ oder } \frac{P}{p} = \cos \alpha \operatorname{tang} \varphi \, (\sin \varphi)^n$$

Eben ſo wird für die in verticaler Richtung abgelenkte Nadel

$$\frac{P}{p} \sin \alpha \operatorname{tang} \psi \, (\sin \psi)^n$$

und aus beiden Ausdrücken

$$\frac{\operatorname{tang} \varphi \, \sin^n \varphi}{\operatorname{tang} \psi \, \sin^n \psi} = \operatorname{tang} \alpha.$$

So lange φ oder $\psi < 30°$, kann man die Tangente dem Bogen proportionirt ſetzen und annehmen:

$$\operatorname{tang} \alpha = \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \psi}\right)^n \text{ oder } \sin \psi = \sin \varphi \sqrt[n+1]{\operatorname{tang} \alpha}.$$

Folgende Tafel enthält Schmidts Verſuche:

Beobachtete Winkel		Berechneter Winkel ψ
φ	ψ	für n = 1
28°	17°	17° 9'
20	13	12° 24'
18.5	11.5	11° 29'
11	8.5	6° 53'
5.5	3.5	3° 18'

Demnach ſtimmt ψ für $n = 1$ berechnet wieder gut mit den beobachteten Werthen deſſelben Winkels überein.

65. Iſt M (Fig. 221) ein Magnet, N und S ſeine Pole, $AB = ds$ ein Element eines electriſchen Stromes, O deſſen Halbirungspunct $AN = r$, $AS = r_1$ und ω, ω_1 die Winkel, welche das Element mit AN, AS einſchließt, mithin die Senkrechten von N

und S auf das verlängerte Element $r \sin \omega$, $r_1 \sin \omega_1$; ſo ſind die Kräfte, mit welchen N auf ds wirkt: $\frac{a ds \sin \omega}{r^2}$ und $-\frac{a ds \sin \omega_1}{r_1^2}$. Der Sector BNA hat die Fläche $\frac{1}{2} ds . r \sin \omega$. Setzt man ſeinen doppelten Werth $= dv$ und ſubſtituirt den daraus ſich für $\sin \omega$ ergebenden Werth in $\frac{a ds \sin \omega}{r^2}$, ſo erhält man dafür $\frac{a dv}{r^3}$. Die Kräfte, mit welchen der Pol N auf O wirkt, ſtehen auf der Ebene von ANB ſenkrecht und haben die Richtung OD und OE. Jener Theil von OD, welcher nach OC gerichtet iſt und mit OD den Winkel E einſchließt, iſt demnach $\frac{a dv \cos E}{r^3}$, oder wenn man die doppelte Größe der Projection von der Fläche BNA in die auf OC ſenkrechte Ebene $= du$ ſetzt: $\frac{a du}{r^3}$. Bedeutet ebenſo dw die doppelte Projection der Fläche ASB in der auf OC ſenkrechten Ebene, ſo wird auf gleiche Weiſe die nach OC wirkende Kraft des Poles S gleich $-\frac{a dw}{r_1^3}$ und daher die ganze nach OC gerichtete Kraft

$$\frac{a du}{r^3} - \frac{a dw}{r_1^3}.$$

66. Es ſey der Magnet M um eine durch ſeine Pole gehende Axe ab beweglich und man ſuche das Moment der Kraft des Elementes AB, welche eine Rotation um ab zu erzeugen ſucht. Zu dieſem Ende denke man durch ab und O eine Ebene, nenne du die doppelte Größe der Projection $\alpha N \beta$ der Fläche BNA in dieſer Ebene; ferner den Winkel $\alpha N \beta = \delta$, mithin $\beta N \alpha = d\delta$, $N\beta = r$, ſo iſt $du = r^2 d\delta$ und daher

$$\frac{a du}{r^3} = \frac{a d\delta}{r}.$$

Um daraus das Moment zu finden, muß man dieſen Ausdruck mit $r \sin \delta$ multipliciren, daher dieſes Moment $= a d\delta \sin \delta$ iſt. Auf ähnliche Weiſe findet man für $\frac{a dw}{r_1^3} = \frac{a d\delta_1}{r}$ das Moment dieſer Kraft $a d\delta_1 \sin \delta_1$ und daher als vollſtändiges Moment

$$a (d\delta \sin \delta - d\delta_1 \sin \delta_1).$$

Mit dieſem Momente ſucht aber der Magnet das Element ds

zu drehen. Dasjenige, womit das Element den Magnet ab zu drehen ſucht, wird demnach auch ſeyn

$$-a(d\delta \sin\delta - d\delta_1 \sin\delta_1).$$

Haben δ und δ_1 für die Endpuncte des Elementes die Werthe h, h_1 und g, g_1, ſo hat man durch Integriren als vollſtändiges Moment für den ganzen Strom innerhalb der Grenzen h und g

$$a(\cos g - \cos g_1 - \cos h + \cos h_1).$$

Für den Magnet M (Fig. 222) und den Strom AB iſt $g = aNB$, $g_1 = aNA$, $h = aSB$, $h_1 = aSA$.

Es hängt daher dieſes Moment nicht von der Geſtalt und Größe des Bogens AB, ſondern blos von der Lage ſeiner Endpuncte gegen die Pole des Magnetes ab. Man könnte daher ohne Änderung des Erfolges ſtatt AB den Bogen ACB ſetzen, wenn nur in demſelben der Strom dieſelbe Richtung hat, wie in AB. Liegt einer der Endpuncte des Leitungsdrahtes, z. B. A, in der Verlängerung der Axe des Magnetes, ſo iſt $g_1 = 0$, $h_1 = 0$ und daher das Moment

$$-a(\cos g - \cos h).$$

Fallen beide Puncte A und B in die Axe, ſo wird $g = \pi$, $h = \pi$, $g_1 = 0$, $h_1 = 0$ und daher das Moment $= -1 - 1 + 1 + 1 = 0$.

67. Zu Verſuchen über die hier auf magnetiſchem Wege behandelten, aus electriſchen Strömen hervorgehenden Wirkungen bedient man ſich beſonderer Apparate. Ein ſehr einfacher Apparat, der zu allen wichtigen Verſuchen über dieſe Gegenſtände genügt und ſich ſehr leicht behandeln läßt, den ich auch ſtets bei ſolchen Verſuchen in Anwendung bringe, iſt folgender: AB (Fig. 223) iſt ein viereckiges, mit Stellſchrauben verſehenes, 24 Z. langes und 10 Z. breites Brett, das an den Rändern mit einer hervorſtehenden Leiſte verſehen iſt und mittelſt ihrer gleichſam eine ſehr flache viereckige Schale vorſtellt. Dieſes iſt die Baſis aller einzelnen electrodynamiſchen Apparate. In a und b ſind zwei kleine runde Vertiefungen, welche zur Aufnahme der von den Polen des Electromotors kommenden Drähte beſtimmt und c und d ſind die Stellen, wohin die Electricität der beiden Pole zur Bewerkſtelligung des Stromes geleitet werden muß; e iſt ein mit doppelter Bohrung verſehener Hahn, welcher dazu dient, die Richtung des electriſchen Stromes im Polardrahte umzukehren. Von a und b gehen verdeckte Leitungen aus, die in der Zeichnung durch punctirte Linien angedeutet ſind. Bei der Stellung des Hahnes, welche

in der Baſis *AB* verzeichnet iſt, geht der Strom von *b* durch eine Bohrung des Hahnes nach *c*, und von *a* durch eine andere nach *d*. Hat der Hahn die Stellung, welche in der Seitenzeichnung *C* enthalten iſt, ſo geht der Strom von *b* nach *d* und von *a* nach *c*, hat daher eine der vorigen entgegengeſetzte Richtung. In *f* iſt eine andere runde, mit einem hohen Rande verſehene Vertiefung, in welche ſich eine Seitenleitung von *g* einmündet. Zur Fortleitung der Electricität aus *c* und *d* dienen zwei verticale Säulen, deren jede entweder ganz aus Metall gearbeitet iſt, oder aus Holz beſteht und im Innern längs ihrer ganzen Höhe einen ſtarken Kupferdraht enthält, der oben und unten vorſteht, unten in die Vertiefung *d* oder *c* hineinreicht, oben aber in eine federnde Hülſe ausgeht, wie dieſes in *E* vorgeſtellt iſt. Die Säulen werden in *c* und *d*, wo paſſende Schraubenmütter eingeſchnitten ſind, eingeſchraubt, jedoch ſind die Schrauben *c* und *d* tiefer, als die Säulen geſchraubt werden können, in die übrig bleibende Vertiefung ragt das aus dem unteren Ende der Säule hervorſtehende Drahtende hinein.

68. Die bisher beſchriebenen Theile machen dasjenige aus, das bei allen Verſuchen gebraucht wird. Zu jedem einzelnen Verſuche braucht man aber wieder beſondere Stücke. Um die Ablenkung einer Magnetnadel durch den electriſchen Strom zu erfahren, dient ein gerader Polardraht, welcher durch die Hülſen der beiden Säulen geſteckt wird und ſo den Strom herſtellt. Zu Verſuchen über die Einwirkung des Erdmagnetismus auf einen electriſchen Strom braucht man zwei Metallſtängelchen *g*, deren jedes mit einem fein durchbohrten Löffelchen verſehen iſt und den beweglichen Leiter aufnimmt. Dieſer Leiter ſelbſt beſteht aus einem einfachen Drahte von der Form *h*, oder aus einem Pappring *i*, der mit zwei Spitzen verſehen und mit einem Multiplicatordraht umwunden iſt, deſſen Enden mit den zwei Spitzen communiciren, endlich einem dritten Polardraht *k*, der ſich um zwei feine horizontale Spitzen dreht und dabei vollkommen äquilibrirt iſt. Will man die Wirkung des Erdmagnetismus auf einen um eine verticale Axe beweglichen Polardraht erfahren, ſo nehme man den Leiter *h* oder *i*, bringe ihn mit einer Spitze in die viereckige, mit Queckſilber gefüllte Vertiefung *f*, mit der anderen in das Loch des Löffelchens des Drahtes *g* und laſſe den Strom eintreten. Bei Verſuchen über die Einwirkung des Polardrahtes auf einen um eine horizontale Axe beweglichen Leiter werden beide Drähte

g gebraucht, in die an denſelben befeſtigten Löffelchen die Axen des Leiters *k* geſtellt und der Strom bewerkſtelliget. Wählt man ſtatt der Leiter *h* oder *i* einen in feine Spitzen ausgehenden Magnet *l*, ſetzt ihn mit einer Spitze in das Loch am Löffel des Drahtes *g*, mit der anderen in die Vertiefung des mit Queckſilber gefüllten Baſſins *f*, ſtellt den Strom her, ſo erfolgt bald die Rotation des Magnetes um ſeine Axe. Wird ſtatt *g* der Draht *m* gebraucht, in deſſen unteren gabelförmigen Theil das Barlow'ſche Rad ſo liegt, daß deſſen Spitzen in das Queckſilber in *f* reichen und ſeitwärts am Rädchen ein Magnet angebracht; ſo erfolgt die Rotation desſelben um ſeine eigene Axe. Wird ein Platindraht, der mit einer Öhſe verſehen iſt, in dem Löffelchen des Drahtes *g* aufgehängt, und in dieſe Öhſe ein anderes, gegen das untere Ende mit einem Glasknöpfchen verſehene Polardrähtchen eingehängt, wie *n* zeigt, ſo daß die Drahtſpitze in das Queckſilber in *f* reicht, in dasſelbe Queckſilber zugleich einen verticalen Magnet befeſtiget, ſo kann man eine Rotation des Polardrahtes um den Magnet bewerkſtelligen. Geht von dem Löffelchen in *g* ein ſteifer dicker Polardraht in das Queckſilber in *f*, und ſchwimmt auf demſelben ein feiner unten mit Platin beſchwerter Magnet, ſo kann man ein Rotiren des Magnetes um den Polardraht hervorbringen.

Zum Behufe der Wirkung zweier Polardrähte auf einander dient nebſt dem Drahte *k* noch ein anderer, dieſem ähnlicher, welcher nicht äquibrirt zu ſeyn braucht, und ſich auch nicht um Spitzen dreht, ſondern nur die Drähte *g* umfaßt. Wird dieſer zugleich mit *k* angebracht, ſo kann man ſich von der Anziehung zweier electriſcher, nach derſelben Gegend gerichteter Ströme überzeugen. Um auch die Abſtoßung zweier Ströme, die eine entgegengeſetzte Richtung haben, unterſuchen zu können, wird der Leiter *k* zugleich mit dem Leiter o angewendet, deſſen obere zwei Theile zuerſt mit Seide überwunden und dann zuſammengebunden ſind. Um durch Einwirkung zweier electriſcher Ströme auf einander ein Rotiren hervorzubringen, wird ein Leiter *p* ſtatt des Drahtes *g* gebraucht und mit dem oberen horizontalen Theile in die Hülſe der bei *f* aufgeſtellten Säule geſteckt. Am oberen Theile des aufwärts gebogenen Armes dieſes Leiters iſt eine kleine Vertiefung, die der Spitze des Leiters *q* als Pfanne dient. Dieſer Leiter *q* beſteht aus einem ſchmalen Kupferringe, über dem ſich ein Biegel vertical erhebt; der Biegel iſt

aber nur auf einer Seite mit dem Ringe in leitender Verbindung, auf der anderen iſt er mit demſelben durch ein Harzſtängelchen verbunden. Der dritte Theil endlich, welcher zu dieſem Verſuche gehört, iſt ein rundes, am Boden durchbohrtes und daſelbſt mit einer Glasröhre verſehenes Glasgefäß *r*, welches von Außen mit einem Multiplicatordraht umwunden iſt, deſſen ein Ende mit dem Innern des Gefäßes communicirt. Füllt man dieſes Gefäß mit ſäuerlichem Waſſer, ſtellt es ſo an, daß der vertical *r* kürzere Schenkel des Leiters *q* durch den verticalen Boden von *r* geht, ſetzt den Ring *q* mit der Spitze am Biegel an das Pfännchen des Leiters *p*, und verbindet das freie Ende des Multiplicators mit dem Queckſilber im Baſſin *f*, ſo wird der electriſche Strom bald die beabſichtigte Wirkung hervorbringen.

Man darf nicht vergeſſen, daß beim Gebrauche dieſes Apparates die Leitungen an der Baſis *AB* vollkommen ſeyn und wenn auch die meiſten derſelben durch Drähte hergeſtellt ſind, doch die Verbindung zweier ſolcher Drahtleitungen durch Queckſilber hergeſtellt werden muß. Daher müſſen vor dem Gebrauche des Apparates die Vertiefungen *a*, *b*, *c*, *d* mit Queckſilber gefüllt werden, es muß in der Fläche des Hahnes *e* die Leitung mit Queckſilber hergeſtellt werden, ſo daß die Bohrungen des Hahnes damit gefüllt ſeyen.

69. Zu den electro-dynamiſchen Verſuchen wird ſtets ein von großplattigen Apparaten gelieferter Strom gefordert. Zu allen vorher beſchriebenen Verſuchen reicht ein Element von 1 Q. F. Fläche aus, nur, wenn man die Anziehung der Eiſenfeile durch einen Polardraht kennen lernen will, muß man einen größeren Apparat, etwa aus 2 Q. F. Fläche brauchen, der im Stande iſt, einen hinreichend dicken Draht ſtark zu erhitzen.

Alle Theile, durch welche der electriſche Strom gehen muß, ſollen in genauer metalliſcher Berührung mit einander ſtehen und dem Durchgange der Electricität möglichſt wenige Hinderniſſe in den Weg ſetzen, damit es ja dem Strome nicht an Stärke und Continuität fehle. Darum ſollen die beiden Beſtandtheile des Electromotors mit kleinen Schälchen verſehen ſeyn, die beim Gebrauche mit Queckſilber gefüllt werden können und die beiden Drähte aufnehmen, welche zum electro-dynamiſchen Apparate gehen.

Die Leitungsdrähte müſſen rein, ohne Unterbrechung und

hinreichend dick ſeyn, und aus einem gut leitenden Materiale beſtehen. Jene Stellen ſolcher Drähte, welche zur Vermeidung einer Unterbrechung des Stromes in Queckſilber getaucht werden, oder wo zwei Drähte ſich berühren, wie es z. B. bei Faraday's Drehverſuch der Fall iſt, müſſen vor jedem Verſuche blank geſcheuert oder vorläufig in ſchwaches Scheidewaſſer getaucht und dann amalgamirt werden. Die geringſte Unreinigkeit an ſolchen Stellen ſchadet der Wirkung ungemein und iſt oft Urſache des Mißlingens eines Verſuches. Dieſe Drähte ſollen ſtets aus Kupfer oder Silber beſtehen, doch wählt man aus bekannten Gründen faſt immer das erſtere Material, um ſo mehr, da man von dieſem leicht ſehr dicke Drähte anwenden kann. Solche ſind auch in den meiſten Fällen unerläßlich, und man ſoll ſie überall brauchen, wo nicht etwa der Polardraht ſelbſt durch die Kraft des electriſchen Stromes bewegt werden muß. Es iſt ſehr auffallend, aber aus theoretiſchen Gründen leicht begreiflich, wie ſehr die electro-dynamiſche Wirkung eines Electromotors durch Anwendung dicker Drähte geſteigert wird, ja nur mittelſt dieſer kann ein ſolcher Apparat die ganze Kraft entwickeln, deren er fähig iſt. In der Vernachläſſigung dieſer Regel liegt wahrſcheinlich der Grund, warum Einigen die hier beſprochenen Verſuche nur mit ſehr bedeutenden electriſchen Apparaten gelingen, während ſie Andere mit kleinen Electromotoren mit gutem Glück anſtellen.

Das Queckſilber, worin ſich ein Körper, wie z. B. Barlow's Rad, Faraday's beweglicher Polardraht, der rotirende Magnet bewegen ſoll, muß möglichſt rein ſeyn und ſich an die Körper nur wenig anhängen. Im verunreinigten Queckſilber gelingen daher ſolche Verſuche nicht leicht.

Eine beſondere Rückſicht verdienen noch die bei dieſen Verſuchen angewendeten Magnete. Es iſt unerläßlich, daß ſie eine bedeutende Kraft beſitzen, wenn ſie bei ſchwachen Electromotoren wirkſam ſeyn ſollen, und darum muß man ſie faſt vor jedem Verſuche von Neuem ſtreichen und ihre Kräfte auf das Maximum bringen.

Will man bei electro-magnetiſchen Verſuchen einen Multiplicator anwenden, ſo muß man auch dieſen recht zu wählen wiſſen. Kupfer- und Silberdrähte thun bei ſolchen immer beſſer Dienſte, als Drähte von Meſſing; ſolche, welche mit Seide überſponnen und überdieß noch gefirnißt ſind, entſprechen beſonders. Dieſe Drähte ſollen möglichſt eng in einander liegen und eine hinreichend (wenig-

ſtens 3 Z.) lange Magnetnadel aufnehmen können. Bei kürzeren Nadeln iſt das Moment der Kraft zu gering. Nobili's Multiplicator iſt unter allen der empfindlichſte, der gemeine, nach ſeiner urſprünglichen Form gebaute, der bequemſte. Wird der electriſche Strom nicht durch bloße Berührung, ſondern durch Temperaturdifferenz erregt (thermo-magnetiſcher Strom), ſo muß man denſelben auf dem kürzeſten Wege zum Ziele führen und darf daher einen Multiplicator nicht anwenden. Man braucht da am zweckmäßigſten ſtatt eines Polardrahtes ein dickes Blech, welches an Breite der Länge der Magnetnadel gleich kommt.

Wenn man alle dieſe Rückſichten genau beobachtet, wird man nicht leicht einen electro-dynamiſchen Verſuch ohne guten Erfolg anſtellen.

Quellen über dieſen Abſchnitt:

Ampère in Mém. de l'Acad. tom. V.

Derſelbe in Annales de Chem. et de Phys. tom. 37.

Die galvaniſche Kette, mathematiſch bearbeitet von Ohm. Berlin 1827.

Lehrbuch des Galvanismus und der Electrochemie von Fechner. Leipzig 1829. (Als dritter Band der Überſetzung von Biots Lehrbuch der Experimental-Phyſik.)

Tafeln.

I. Tafel.

Vergleichung und Reduction
der in verſchiedenen Ländern üblichen Maße.

a. Allgemeines Längenmaß.

Name der Örter und Maße	Enthält	
	Meter	Wien. Fuß
Aarau: Fuß = 12 Zoll	0.300025	0.949140
Aleſſandria: Ordinärer Fuß = 8 Zoll	0.342435	1.083304
„ „ Limprandiſcher F. = 12 Z.	0.513670	1.625013
Altona: Fuß	0.286490	0.906321
Ancona: Fuß	0.390710	1.236023
Appenzell: Fuß	0.314688	0.995526
Barcellona: Canna	1.5813300	5.002589
Baſel: Fuß	0.298200	0.943365
Berlin: Fuß preußiſcher oder rheinl.	0.313853	0.992886
Bern: Fuß	0.293325	0.927943
Botzen: Fuß	0.334120	1.0570
Braunſchweig: Fuß	0.285360	0.902746
Bremen: Fuß	0.289200	0.914894
Cadix: Pies	0.282635	0.894188
Cagliari: Palmo	0.235311	0.744415
Carlsruhe: Fuß badenſcher	0.300025	0.949140
Caſſel: Fuß heſſiſcher	0.287699	0.910145
Copenhagen: Fuß däniſcher	0.313842	0.992850
Cracau: Stopa (Fuß)	0.356421	1.127550
Darmſtadt: Fuß	0.2500	0.790883
Dresden: Fuß ſächſiſcher	0.282655	0.894190
Ferrara: Fuß	0.401312	1.269564
Frankfurt a. M.: Fuß	0.284600	0.900341
Freiburg: Fuß	0.293258	0.927731
Fulda: Werkfuß	0.282880	0.894900
Genf: Fuß	0.487936	1.543601
Genua: Canna	2.498300	7.903454
Glarus: Fuß	0.300025	0.949140
Gotha: Fuß	0.287618	0.909889
Gröningen: niederl. Palme	0.100000	0.316353
Hamburg: Fuß	0.286490	0.906321
Hanau: Fuß	0.285200	0.902239
Hannover: Fuß	0.291990	0.923720

Name der Örter und Maße	Enthält	
	Meter	Wien. Fuß
Hildesheim: Fuß	0.280173	0.886336
Lauſanne: Fuß	0.293258	0.927731
Lemberg: Fuß	0.296965	0.939459
Lemgo: Fuß	0.287593	0.909811
Liſſabon: Palmo (Fuß) . . .	0.218588	0.691510
London: Fuß engliſcher . . .	0.304794	0.964227
Lübeck: Fuß	0.291002	0.920594
Lucca: Fuß	0.589908	1.866193
Lucern: Fuß	0.314688	0.995526
Madrid: Pies	0.282655	0.894188
Mahon: Palma	0.214473	0.678492
Meſſina: Fuß ſiciliſcher . . .	0.242050	0.765733
Modena: Fuß	0.517712	1.637799
München: Fuß bairiſcher . . .	0.291859	0.923306
Neapel: Palmo	0.263630	0.834002
Neufchatel: Fuß	0 300020	0.949123
Nizza: Palmo	0.2650	0.838336
Oldenburg: Fuß	0.296415	0.937718
Osnabrück: Fuß	0.279272	0.883485
Paris: Fuß franzöſiſcher . . .	0.324839	1.027640
Petersburg: Saſchén (Klafter) . .	2.134466	6.752452
Piſa: Paſſeto	1.167252	3.692640
Prag: Fuß böhmiſcher	0.296398	0.937667
Rom: Bau-Cama	2.233271	7.065026
St. Gallen: Fuß	0.314688	0.995526
Stockholm: Fuß ſchwediſcher . .	0.296838	0.939056
Stuttgard: Fuß = dem Hamburger Fuß		
Venedig: Fuß	0.347735	1.100070
Warſchau: Stopa	0.2880	0.911097
Weimar: Fuß	0.281979	0.892049
Wien: Fuß	0.316102	1.000000
Wiesbaden: Fuß	0.287844	0.910603
Zürch: Fuß	0.300025	0.949139

b. Schnittwaarenmaß.

Name der Örter und Maße	Enthält	
	Wien. Ellen	franzöſiſche Aune
Aarau: Elle	0.770084	0.500042
Aleſſandria: Raſo	0.774137	0.502674
Alicante: Vara	0.977572	0.634771
Altenburg: Elle	0.725500	0.471092
Altona: Elle	0.735343	0.477484
Ancona: Braccio	0.824511	0.535383
Appenzell: Leinwandelle . . .	1.028901	0.668101
» » Wollenelle	0.790638	0.513389
Barcellona: Vara	1.014711	0.658887
Baſel: große Elle (Reve) . . .	1.512954	0.982414
detto kleine Elle (Braccio) . .	0.698286	0.453422
Berlin: Elle preußiſche . . .	0.855925	0.555782
Bern: Elle	0.696260	0.452106
Bilbao: Vara	1.092002	0.709075
Bologna: Braccio	0.827975	0.537633
Botzen: Elle	1.014426	0.658702
Brabanter: Elle	0.891553	0.576917
Braunſchweig: Elle	0.732442	0.475602
Bukareſt: Walachiſche Elle zu Tuch und Seide	0.9000	0.584401
» » » » zu Leinwand	0.8500	0.551935
Cadix: Vara caſtilianiſche . . .	1.088242	0.706633
Cagliari: Raſo	0.704939	0.457742
Canea: Pick	0.817852	0.531060
Carlsruhe: Elle	0.770084	0.500042
Caſſel: Elle	0.732035	0.475336
Clauſenburg: Elle ſiebenbürgiſche .	0.80000	0.519468
Coburg: Elle	0.752422	0.488574
Conſtantinopel: kleine Pick . . .	0.831453	0.539892
» » große Pick . . .	0.858661	0.557558
Copenhagen: Elle	0.800555	0.523070
Corunna: Vara	1.086214	0.705317
Cöthen: Elle	0.816115	0.529932
Darmſtadt: Elle	0.770019	0.5000
Dresden: Elle	0.727052	0.472100
Ferrara: Seiden-Braccio . . .	0.818720	0.531624
Florenz: Braccio	0.762549	0.495150
Frankfurt a. M.: Elle	0.702360	0.456067

Name der Örter und Maße	Enthält	
	Wien. Ellen	franzöſiſche Aune
Freiburg: Stab	1.372689	0.891334
Fulda: Elle	0.726076	0.471467
Genf: Aune zu Leinwand im Kleinen	1.467784	0.953083
„ Aune im Großhandel	1.525210	0.990372
Genua: Palmo	0.320623	0.208192
Gera: Elle	0.716815	0.465453
Glarus: Elle	0.770084	0.500042
Gröningen: Elle niederländiſche	1.283364	0.8333
Hamburg: Elle	0.735343	0.477484
Hanau: Elle	0.697894	0.453167
Hannover: Elle	0.749459	0.486650
Hildesheim: Elle	0.719120	0.466950
Lauſanne: Elle	1.380939	0.896692
La Valetta: Canna = 8 Palme	2.669961	1.733699
Leipzig: Elle	0.725500	0.471092
Lemberg: Elle	0.762229	0.494942
Lemgo: Elle	0.738177	0.479324
Liſſabon: Vara	1.402640	0.910783
London: Imp. Standard Yard	1.173487	0.761986
Lübeck: Elle	0.740553	0.480867
Lucca: Braccio	0.763713	0.495906
Luzern: Elle	0.807719	0.524480
Madrid: Vara	1.088242	0.706633
Mahon: Canna	2.201976	1.429820
Mailand: Metro	1.283364	0.8333
Meſſina: Canna	2.712134	1.761083
Modena: Braccio	0.831736	0.540750
München: Elle baieriſche	1.069056	0.694175
Neapel: Canna	2.707078	1.757800
Neufchatel: Aune	1.446352	0.939167
Nizza: Raſo	0.703284	0.4566
Oldenburg: Elle	0.745476	0.484063
Osnabrück: Elle zu Leinwand	0.772110	0.501358
Oviedo: Vara	1.121831	0.728444
Palma: Canna	2.201108	1.429256
Paris: Aune	1.540037	1.000000
Parma: Seidenbraccio	0.762845	0.495342
„ Wollenbraccio	0.826243	0.536508
Patraſſo: Wollenpik	0.879798	0.571283

Name der Örter und Maße	Enthält	
	Wien. Ellen	franzöſiſche Aune
Patraſſo: Seidenpick	0.815244	0.529367
Petersburg: Arſchin	0.913099	0.592907
Piſa: Braccio di Panno (Braſſe) .	0.749005	0.486355
Prag: Elle böhmiſche	0.762272	0.494970
Raguſa: Elle	0.658624	0.427667
Rom: Canna	2.568718	1.667958
St. Gallen: Wollelle	0.784533	0.509425
„ „ große Leinwandelle . .	0.943273	0.612500
„ „ Pariſer Stab . . .	1.513127	0.982526
Schafhauſen: Elle	0.764372	0.496333
Solothurn: Elle	0.699155	0.539857
Stockholm: Elle	0.761977	0.494778
Stuttgard: Elle würtembergiſche . .	0.788288	0.511863
Trieſt: Wollenelle	0.868515	0.563957
„ Seidenelle	0.823932	0.535007
Valencia: Vara	1.178864	0.765477
Venedig: Seiden-Braccio . . .	0.819299	0.532000
Warſchau; Elle (Lokiec) . . .	0.739218	0.4800
Weimar: Elle	0.723763	0.469964
Wien: Elle	1.000000	0.649335
Wiesbaden: Elle	0.712906	0.462915
Zürch: Elle	0.770083	0.500042

Das Schnittwaarenmaß eines Landes iſt in der Regel mit dem der Hauptſtadt desſelben einerlei.

c. Weg- oder Meilenmaß.

Name der Meilen	Enthält	
	Meter	Wiener Klafter
Arabiſche Meile	1961	1062
Armeniſche Farſang	4444	2346
Perſiſche „	4938	2607
Böhmiſche Meile	6893	3639
Burgundiſche Meile	5640	2978
Chineſiſche Li	575	303
Däniſche und Hamburger Meile . .	7506	3963

Name der Meilen	Enthält	
	Metre	Wiener Klafter
Germaniſche Raſta	4444	2346
Deutſche, geographiſche Meile	7407	3911
Egyptiſcher Schönus	5932	3104
Galliſche Leuka	2205	1164
Franzöſiſche Lieue	4444	2346
„ Seemeile	5556	2933
Alt=Brittiſche Meile	2334	1232
Neu=Engliſche Meile	1608	849
Engliſche Seemeile	1852	978
„ Leagues	5556	2933
Holländiſche Meile	5848	3087
Indoſtaniſche Koß	2602	1374
Irländiſche Meile	2046	1080
Italieniſche Meile	1852	978
Jüdiſche alte Meile (Sabatherweg)	1102	582
Lithauiſche Meile	8932	4716
Londoner Meile	1522	804
Niederländiſche Seemeile	5556	2933
Öſterreichiſche Poſtmeile	7586	4000
Polniſche Meile	5556	2933
Portugieſiſche Meile	6173	3260
Preußiſche Meile	7732	4090
Römiſche Meile von 8 olymp. Stadien	1472	777
Werſt, neu ruſſiſche Meile von 1500 Arſchin	1065	563
Sächſiſche Polizey=Meile	9041	4773
Schleſiſche Meile	6467	3414
Schottländiſche Meile	2229	1177
Schwediſche Meile	10673	5635
Schweizer Meile	8353	4411
Siamiſche Meile	3900	2023
Spaniſche oder Caſtiliſche Meile	4172	2203
Stadium (griechiſch olympiſche)	185	98
See=Stadium	148	78
Stadium (egyptiſches)	99	52
Türkiſche Seemeile	1296	679
„ Berri	1677	800
Ungariſche Meile	8335	4400

d. Allgemeines Flächenmaß.

Name des Ortes und des Maßes	Enthält	
	Quadrat Centimeter	Vergleich. Logarithm. *)
Bairiſche Quadrat-Klafter . .	30665.1	4.4866493
» » Fuß	851.818	2.9303468
» » Zoll	5.91540	0.7719843
» » Linien . . .	0.004108	0.6136218—2
Däniſche Quadrat-Klafter . . .	35499.4	4.5498529
» » Fuß . . .	984.816	2.9935504
» » Zoll . . .	6.84208	0.8351879
» » Linien . . .	0.047514	0.6768254—2
Engliſche Quadrat-Yard . . .	8360.97	3.9222567
» » Fuß . . .	928.997	2.9680142
» » Zoll . . .	6.45136	0.8096517
» » Linien . . .	0.044801	0.6512892
Franzöſiſche Quadrat-Toiſe . . .	37987.4	4.5796399
» » Fuß . . .	1055.20	3.0233374
» » Zoll . . .	7.32748	0.8649549
» » Linien . .	0.050885	0.7065924—2
Öſterreichiſche Quadrat-Klafter . .	35971.4	4.5559579
» » Fuß . .	999.207	2.9996554
» » Zoll . .	6.93894	0.8412929
» » Linien . .	0.04819	0.6829304—2
Preußiſche oder rheinl. Quadrat-Klafter	35469.5	4.5498565
» » » Fuß .	985.267	2.9996554
» » » Zoll .	6.84213	0.8351915
» » » Linien	0.047515	0.6768290—2
Ruſſiſcher Quadrat-Faden . . .	455591	4.6585784
Sächſiſche Quadrat-Klafter . . .	28761.9	4.4588171
» » Fuß . . .	798.940	2.9025146
» » Zoll . . .	5.54820	0.7441521
» » Linien . . .	0.038529	0.5857896—2
Schwediſche Quadrat-Klafter . .	31720.5	4.5013401
» » Fuß . . .	881.125	2.9450378
» » Zoll . . .	6.11893	0.7866753
» » Linien . .	0.042492	0.6283129—2

*) Dieſer wird zum Logarithmus des Maßes in der erſten Spalte addirt, um den Logarithmus der Quadrat-Centimeter, oder vom Logarithmus der Quadrat-Centimeter ſubtrahirt, um den Logarithmus des Maßes aus der erſten Spalte zu erhalten.

e. Allgemeines Körpermaß.

Name des Ortes und des Maßes.	Enthält	
	Kubik Centimeter	Vergleich. Logarithm. *)
Baieriſche Kubik-Klafter . . .	5369962	6.7299740
» » Fuß	24861.7	4.3955202
» » Zoll	14.3872	1.1579765
» » Linien . . .	0.008326	0.9204328—3
Däniſche Kubik-Klafter . . .	6677739	6.8246294
» » Fuß	30915.6	4.4901756
» » Zoll	17.8909	1.2526319
» » Linien . . .	0.010401	0.0170882—2
Engliſche Kubik-Yard	764513	5.8833851
» » Fuß	28315.3	4.4520213
» » Zoll	16.3862	1.2144776
» » Linien	0.009482	0.9769339—3
Franzöſiſche Kubik-Toiſen . . .	7403890	6.8694599
» » Fuß . . .	34278.3	4.5350061
» » Zoll . . .	19.8364	1.2974624
» » Linien . . .	0.0111479	0.0599187—2
Öſterreichiſche Kubik-Klafter . . .	6822394	6.8339370
» » Fuß . . .	31585.2	4.4994832
» » Zoll . . .	18.2784	1.2619395
» » Linien . . .	0.010578	0.0243958—2
Preußiſche oder rheinl. Kubik-Klafter	6677821	6.8246348
» » » Fuß .	30915.9	4.4901810
» » » Zoll .	17.8911	1.2526373
» » » Linien	0.010354	0.0150936—2
Ruſſiſcher Kubik-Faden . . .	9589300	6.9878676
Sächſiſche Kubik-Klafter . . .	4877819	6.6882257
» » Fuß	22582.5	4.3537719
» » Zoll	13.0684	2.1162282
» » Linien . . .	0.007563	0.8786845—3
Schwediſche Kubik-Klafter . . .	5649506	6.7520105
» » Fuß . . .	26155.1	4.4175567
» » Zoll . . .	15.1361	1.1800130
» » Linien . . .	0.008735	0.9424639—3

*) Dieſer wird zum Logarithmus des Maßes in der erſten Spalte addirt, um den Logarithmus der Kubik-Centimeter, oder vom Logarithmus des Kubik-Centimer abgezogen, um den Logarithmns des Maßes in der erſten Spalte zu erhalten.

f. Fruchtmaß.

Name der Örter und der Maße	Enthält	
	Wiener Metzen	Kiloliter
Aarau: Viertel = 4 Vierling = 16 Mäßli	0.363509	0.022355
Alicante: Cahiz = 12 Barsellas . .	4.006045	0.246369
Altenburg: Malter = 2 Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen = 64 Mäßchen.	.	.
Altona: Tonne = 8 Scheffel = 32 Viertel	2.286528	0.140620
Scheffel:	2.262014	0.139112
Ancona: Rubbio = 8 Coppe = 32 Provende	4.439562	0.273030
Appenzell: Mütt = 4 Viertel . .	1.485646	0.091366
Barcellona: Salma = 1³/₅ Carga = 4 Quartera = 48 Cortanes . .	4.421448	0.271916
Basel: Sack = 8 Müdde = 32 Küpfli = 64 Becher	2.102999	0.129333
Berlin: Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen = 64 Mäßel = 48 Quart . .	0.893691	0.054961
Bern: Mütt = 12 Maß = 24 Mäßli = 48 Immi = 96 Achterli = 192 Sechzehnleri	2.733884	0.168132
Bilbao: Fanega = 12 Celemines . .	0.978278	0.060164
Bologna: Corba = 2 Stari = 8 Quarteroni = 32 Quarticeni . . .	1.199883	0.073792
Botzen: Kornstar	0.497200	0.030577
Braunschweig: Wispel = 4 Scheffel = 40 Himten = 160 Vierfaß = 640 Becher	5.047861	0.310440
Bremen: Last = 4 Quart = 40 Scheffel = 160 Viertel = 640 Spint Scheffel:	1.156533	0.071126
Bukarest: Kile = 2 Mirze = 16 Demerli = 256 Occa Demerli:	0.400001	0.024798
Cadix: Cahiz = 12 Fanegas = 144 Almudes = 576 Quartillos . . .	0.929262	0.057149
Cagliari: Restiere = 3 Starelli = 48 Imbuti	2.391051	0.147048
Canea: Carga	2.477152	0.152343
Carlsruhe: Malter = 10 Sester = 100 Meßlen = 1000 Becher . . .	2.439052	0.150000
Cassel: Viertel = 16 Metzen = 64 Mäßchen	2.607783	0.160377
Clausenburg: Kübel = 4 Viertel . .	1.60000	0.098399

Name der Örter und der Maße	Enthält	
	Wiener Metzen	Kiloliter
Conſtantinopel: Fortin = 4 Kisloz .	2.283642	0.140442
Copenhagen: Tonne = 4 Viertel = 8 Scheffel = 32 Fierdigkar . . .	2.262014	0.139112
Corunna: Fanega = 4 Ferrados . .	1.033437	0.063556
Cöthen: Scheffel	0.861197	0.052963
Crakau: Korzec = 32 Garnitzen . .	1.952854	0.120099
Darmſtadt: Malter = 4 Simmer = 16 Kumpf = 64 Geſcheid = 256 Mäßchen	2.081324	0.128000
Dresden: Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen = 64 Mäßchen . . .	1.746908	0.107434
Ferrara: Moggio = 20 Staje . .	9.831199	0.604612
Ferrol: Fanega	1.157297	0.071173
Florenz: Sacco = 3 Staje = 12 Quarti = 48 Metadelli = 96 Mezzete . .	1.155359	0.071054
Frankfurt a. M.: Malter = 4 Simmer = 8 Meſten = 16 Sechter = 64 Geſcheid = 256 Mäßchen = 1024 Schrott	1.865582	0.114732
Freiburg: Sack = 8 Mäß = 16 Quarterons	0.259649	0.015968
Fulda: Malter = 8 Maß = 32 Metzen = 128 Köpfchen	2.856053	0.175645
Genf: Sack	1.262778	0.077660
Genua: Mina = 8 Quarti = 96 Cambette	1.898070	0.116730
Glarus: Mütt = 4 Viertel = 16 Vierling = 64 Mäßli = 144 Immi glatte Maß	1.335340	0.082122
Gotha: Malter	2.849370	0.175234
Gröningen: Mudde	1.626034	0.100000
Hamburg: Scheffel	1.713364	0.105371
Hanau: Malter = 4 Simmer = 8 Metzen = 16 Sechter = 64 Geſcheid .	1.987372	0.122222
Hannover: Malter = 6 Himten . .	3.003451	0.186620
Hildesheim: Scheffel = 2 Himten .	0.843135	0.051852
Lauſanne: Viertel	0.223202	0.013727
La Valetta: Salma	4.331469	0.266382
Lemberg: Korzec	2.000000	0.122999

Name der Örter und der Maße	Enthält Wiener Metzen	Enthält Kiloliter
Lemgo: Scheffel = $^1/_{24}$ Malter . .	0.589506	0.036254
Liſſabon: Fanega = 4 Alqueiras = 2 Meyos = 2 Quartos = 2 Selemis = 2 Mequias	0.878611	0.054034
London: Imperial-Quarter . .	4.726706	0.290689
Lübeck: Weitzen- oder Roggen-Scheffel	0.543167	0.033404
Lucca: Stajo	0.398655	0.024517
Luzern: Mütt = 4 Viertel = 10 Immi	2.260040	0.139013
Madrid: Cahiz = 12 Fanegas = 144 Almudes = 576 Quartillos . .	0.929262	0.057149
Mahon: Quartera = 6 Barcellas = 36 Al-Mudas	1.173099	0.072145
Mailand: Some = 10 Mine = 100 Pinten = 1000 Koppi	1.723678	0.100000
Malaga: Fanega	0.985700	0.060620
Meſſina: Salma = 16 Tomoli = 6 Modilli	4 500847	0.276799
Modena: Stajo	1.142135	0.070240
München: Scheffel = 6 Metzen = 96 Mäßlein = 208 Schänkmaß . .	3.615605	0.222357
Neapel: Tomolo	0.898124	0.055234
Neuſtrelitz: Scheffel	0.839912	0.051654
Nizza: Sacco = 3 Staji = 48 Menſinali	1.879045	0.115560
Oldenburg: Tonne = 8 Scheffel . .	2.898075	0.178230
Osnabrück: Scheffel = $^1/_{100}$ Laſt . .	0.466721	0.028703
Oviedo: Fanega	1.238908	0.076192
Palma: Quatera = 6 Barcellas = 36 Almudas	1.173099	0.072145
Paris: Kiloliter	16.260344	1.000000
Parma: Stajo = 16 Quarterole .	0.836042	0.051416
Patraſſo: Staro	1.335348	0.082123
Petersburg: Tſchetwert = 4 Osmin = 4 Pajok = 8 Tſchetwerik = 64 Garnez	3.163548	0.194556
Piſa: Stajo = 2 Mine = 4 Quarti = 16 Mezzete = 32 Quartucci . . .	0.396148	0.024363
Prag: Strich = 4 Viertel = 16 Maßel = 192 Seitel	1.522000	0.093602
Preßburg: Metzen	0.867386	0.053344

Name der Örter und der Maße	Enthält	
	Wiener Metzen	Kiloliter
Rom: Rubbio = 2 Rubbiatelas = 4 Quarts = 8 Quartarellas = 12 Staros = 14²/₃ Scorzi = 64 Decines .	4.345382	0.267238
Roſtock: Scheffel	0.632365	0.038890
St. Gallen: Mütt = 4 Viertel . .	1.237412	0.076100
Schafhauſen: Malter = 2 Mütt = 8 Viertel = 32 Vierling = 128 Mäßli .	2.939928	0.180803
Solothurn: Doppelmaß = 2 Mäßl .	0.430695	0.026487
Stockholm: Tonne = 2 Span = 32 Kappan = 56 Kannen = 112 Stopp = 448 Quartier = 1792 Ort . .	2.382336	0.146520
Stuttgard: Scheffel = 8 Simri = 32 Vierling = 256 Ecklein = 1024 Viertlein	2.881758	0.177226
Trieſt: Staro = 3 Poloniki . .	1.204709	0.074089
Valencia: Cahiz = 12 Barcellas = 48 Celemines = 192 Quaterones .	3.250313	0.199892
Venedig: Stajo	1.379856	0.084860
Warſchau: Korzec = 32 Garcy = 128 Kwarti = 512 Kwaterki . . .	2.081324	0.128000
Weimar: Scheffel = 16 Metzen = 84 Schenkmaß	1.251478	0.076965
Wien: Metzen = 128 Becher . .	1.000000	0.061499
Wiesbaden: Malter = 4 Viernſel = 16 Kümpfe = 64 Geſcheid . . .	1.778686	0.109388
Zug: Mütt = 16 Vierling = 64 Mäßli	1.460016	0.089790
Zürch: Mütt = 16 Vierling = 64 Mäßli 144 Immi	1.334998	0.082122

g. Getränkmaß.

Name des Ortes und Maßes	Enthält Wiener Eimer	Enthält Kiloliter
Aarau: Saum = 100 Maß . .	2.482301	0.144012
» » = 108 Maß . .	2.680885	0.155533
Alicante: Tomelada = 2 Pipen = 80 Arrobas = 100 Cantaros . . .	18.600208	1.079100
Altenburg: Eimer = 40 Kannen = 80 Maß = 160 Nößel	1.169343	0.067840
Altona: Ahm = 4 Anker = 5 Eimer = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quartier = 320 Öſſel	2.495996	0.144806
Ancona: Soma = 48 Boccali . .	1.1814778	0.068544
Appenzell: Eimer = 32 Maß . .	0.722124	0.041894
Barcellona: Carga = 16 Cortanes = 32 Quarteras = 128 Quartos . .	1.882254	0.109200
Baſel: Saum = 3 Ohm = 96 oder 120 Maß	2.531537	0.146868
Berlin: Oxhoft = 1½ Ohm = 3 Eimer = 6 Anker = 180 Quart .	3.552591	0.206106
Bern: Saum = 4 Eimer = 100 Maß	17.271253	1.002000
Bilbao: Cantara = 8 Acumbres = 32 Quartillos	0.271480	0.015750
Bologna: Corba = 2 Mezze Corbe = 4 Quarterolle = 60 Boccali = 240 Foglietti	1.271929	0.073792
Bordeaux: Oxhoft	3.931021	0.228060
Botzen: Yhren	0.765889	0.044433
Braunſchweig: Oxhoft = ¼ Fuder .	0.380191	0.022057
Bremen: Ahm = 45 Stübchen = 180 Quart = 720 Mengeln . . .	2.461153	0.142785
Bukareſt: Eimer (Viadra) = 10 Occa	0.243905	0.014150
Canea: Öhltonne = 8 Miſtati . .	1.539984	0.089342
Carlsruhe: Ohm = 10 Stützen = 100 Maß = 1000 Gläſer . . .	2.585517	0.150000
Caſſel: Ohm = 80 Maß . . .	2.746807	0.159357
Clauſenburg: Ur (Eimer) . . .	0.195122	0.011320
Conſtantinopel: Alma	0.090266	0.005237
Copenhagen: Ahm = ¹⁄₃₀ Faß . .	2.580944	0.149735
Corunna: Moyo = 4 Canados = 16 Ollas = 68 Acumbres = 272 Quartillos	2.307583	0.133875

Name des Ortes und Maßes	Enthält Wiener Eimer	Enthält Kiloliter
Cracau: Beczka = 34 Garniec = 144 Kwart	2.353468	0.136537
Darmſtadt: Ohm = 20 Viertel = 80 Maß = 320 Schoppen . . .	2.757885	0.160000
Dresden: Eimer = 63 Kannen = 126 Nöſſel = 504 Quartier . . .	1.016722	0.058986
Florenz: Barillo = 20 Fiaschi = 40 Boccali = 80 Mezette = 160 Quartucci	0.718015	0.041656
Franfurt a. M.: Ohm = 80 alte Maß = 320 Schoppen	2.472057	0.143418
„ Stück zu 8 Ohm 1 Viertel	19.900063	1.154512
Freiburg: Faß = 16 Brente = 400 Maß = 1600 Schoppen . . .	0.673572	0.039078
Fulda: Ohm = 2 Eimer = 80 Maß = 320 Schoppen	2.518997	0.146141
Genf: Char = Fuder = 12 Setiers = 288 Quarterons = 576 Pots .	9.453312	0.548438
Genua: (Weinmaß) Mezzarola = 2 Barilli = 200 Pinte	2.558903	0.148456
„ (Öhlmaß) Barillo = 4 Quarti = 128 Quateroni	1.114651	0.064667
Glarus: Eimer = 30 Kopf = 60 Maß = 240 Schoppen	1.840185	0.106759
Gotha: Eimer = 40 Kannen = 80 Maß = 160 Nöſſel	1.169343	0.067840
Grätz: Startin	9.756098	0.566005
Gröningen: Vat	1.723678	0.100000
Hamburg: Ahm = 1/6 Fuder = 1/24 Anker	2.495996	0.144806
Hanau: Ohm = 20 Viertel = 80 Maß = 320 Schoppen	2.571989	0.149215
Hannover: Ahm = 2½ Eimer = 4 Anker = 40 Stübchen = 80 Maß .	2.646420	0.155517
Lauſanne: Char = 400 Pots . .	8.015850	0.650434
Leipzig: Eimer = 63 Kannen = 126 Nöſſel = 504 Quartier . . .	1.307516	0.075856
Lemgo: Ohm = 108 Kannen . .	2.684578	0.155747
Liſſabon: Tonnelada = 2 Pipas = 52 Almudas = 104 Algueiras = 624 Canhados = 2496 Quardilhos . .	15.005992	0.870580

Name des Ortes und Maßes	Enthält	
	Wiener Eimer	Kiloliter
London: Imperial Standard Gallon .	0.078290	0.004542
Lübeck: Ahm = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quartier = 360 Planken = 640 Ort . .	2.495978	0.144805
Lucern: Saum = 3⅓ Ohm = 100 Maß = 400 Schoppen = 4000 Primen	2.978762	0.172814
Madrid: Cantaro = 8 Acumbres = 32 Quartillos	0.271480	0.015750
» Aroba menor (zu Öhl) . .	0.211978	0.012298
Mahon: Carga = 26 Quarteras .	1.742398	0.101086
Mailand: Brente = 96 Boccali .	1.302314	0.075554
Malaga: Pipe Pedro — Ximenes .	6.107966	0.354356
Marseille: Öhl- und Wein-Millerole	1.029163	0.059707
» Millerolle Fabriks-Öhl .	1.103154	0.064000
» Öhl-Escandeau . .	0.257291	0.014927
Messina: Salma = 8 Quartari = 12 Quartucci	0.509907	0.087598
München: Schenk-Eimer = 60 Maß .	1.105593	0.064141
» Visir- oder Bier-Eimer = 64 Schenkmaß	1.179299	0.068418
Neapel: Barile	0.751896	0.043622
Neufchatel: Muid = 5 Gerle = 12 Setiers = 192 Pots	4.461154	0.258816
Oldenburg: Anker = 26 Kannen = 40 Quartier	0.657844	0.038165
Osnabrück: Ahm (für Wein) . .	2.355040	0.136629
» Tonne (für Bier) = 27 Viertel = 108 Kannen	2.270932	0.131749
Oviedo: Cantaro.	0.316605	0.018368
Palma: Carga = 26 Quarteras .	1.742398	0.101086
Paris: Kiloliter	17.236779	1.000000
Petersburg: Wedro	0.218825	0.012695
Pisa: Barile da Vino = 20 Fiaschi = 40 Mezette = 80 Quartucci .	0.785722	0.045584
» Barile da Olio = 16 Fiaschi = 64 Mezette = 128 Quartucci . .	0.576207	0.033429
Preßburg: Eimer	0.919473	0.053344
Rom: Wein-Barilo = 4½ Rubbi = 32 Boccali = 128 Fogliette = 512 Cartocci	0.784497	0.045513

Name des Ortes und Maßes	Enthält	
	Wiener Eimer	Kiloliter
Rom: Öhl-Barilo = 28 Boccali .	0.915452	0.053110
Rostock: Ahm = 4 Anker = 5 Eimer = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Pot	2.495978	0.144805
St. Gallen: Eimer = 32 Maß = 128 Schoppen	0.880780	0.051099
Schafhausen: Eimer trüben Maßes .	0.770395	0.044695
„ Eimer hellen Maßes .	0.725078	0.042066
Solothurn: Saum = 100 Maß .	2.746715	0.159352
Stockholm: Ahm (Weinmaß) = 2 Eimer = 4 Anker = 60 Kannen = 120 Stoop	2.707988	0.157105
„ Tonne (Öhl- Wein- Fischmaß) = 48 Kannen = 96 Stoop = 384 Quartier = 1536 Jungfern	2.166387	0.125684
Stuttgard: Eimer Helleichmaß = 160 Maß	5.066352	0.293927
Temeswar: Eimer Debreziner oder Eseber = 100 ungarische Halbe . .	1.436676	0.083349
Tokay: Weinfaß = 176 ungarische Halbe	2.528550	0.146695
Triest: Orne = 36 Boccali . . .	1.131738	0.065658
Valencia: Weincarga = 15 Arrobas = 60 Accumbres	2.938698	0.170490
Venedig: Biconzia = ¼ Amphora = 2 Conzi = 128 Boccali . . .	2.733908	0.158609
Warschau: Beczka = 25 Garniec = 100 Kwarty	1.723678	0.100000
Weimar: Eimer = 80 Schenkmaß .	1.263456	0.073300
Wien: Eimer	1.000000	0.058015
Wiesbaden: Ohm = 20 Viertel = 80 kleine Maß	2.336855	0.135574
Zürch: Eimer lauteres Maß = 60 Maß = 120 Quartli = 240 Stozen .	1.887427	0.109500

h. Beſondere Maße.

Eine Berglachter:	Freiberger	. .	1	Wiener	Klafter	$1\frac{3}{4}$	Zoll.
» »	Idrianer	. .	1	»	»	$\frac{5}{6}$	»
» »	Klausthaler	. .	1	»	»	1	»
» »	Oberharzer	. .	1	»	»	$1\frac{1}{6}$	»
» »	Pfalzer	. . .	1	»	»	9	»
» »	Preußiſche	. .	1	»	»	5	»
» »	Schemnitzer	. .	1	»	»	$4\frac{5}{6}$	»
» »	Schwediſche	. .	1	»	»	$7\frac{2}{3}$	»

Eine Fauſt des Pferdmaßes	= . . .	4	W. Zoll.
Eine Ruthe des Ingenieurmaßes	= . . .	10	W. Fuß.
Ein Strich des Rekrutenmaßes	= . . .	$\frac{1}{4}$	W. Zoll.

Ein Joch Feldmaß	=	1600	Quadrat-Klafter.
Ein Metzen „	= $\frac{1}{3}$ Joch =	$533\frac{1}{3}$	» »
Ein Tagwerk, Wieſenmaß	= $\frac{3}{4}$ » =	1200	» »
Ein $\frac{1}{4}$ Weingarten	= $\frac{1}{2}$ » =	800	» »
Ein Pfund Weingarten	= $\frac{1}{20}$ » =	80	» »

i. Reduction der allgemeinen Längenmaße mittelſt Logarithmen.

Zu dem Logarithmus der	addire	um zu erhalten den Logarithmus der
Baieriſchen Klafter	0.2433247	
„ Fuß	0.4651734—1	
„ Zoll	0.3859922—2	
„ Linien	0.3068110—3	
Däniſchen Klafter	0.2748765	
„ Fuß	0.4967252—1	
„ Zoll	0.4175440—2	
„ Linien	0.3383628—3	
Engliſchen Yard	0.9611284	
„ Fuß	0.4840071—1	
„ Zoll	0.4048259—2	
„ Linien	0.3256447—3	
Franzöſiſchen Toiſen	0.2898200	
„ Fuß	0.5116687—1	
„ Zoll	0.4324875—2	
„ Linien	0.3533063—3	
Niederländiſchen Palm . . .	0.0000000—1	Meter
Öſterreichiſchen Klafter . . .	0.2779790	
„ Fuß	0.4998277—1	
„ Zoll	0.4206465—2	
„ Linien	0.3414653—3	
Preußiſchen Klafter	0.2748783	
„ Fuß	0.4967270—1	
„ Zoll	0.4175458—2	
„ Linien	0.3383646—3	
Ruſſiſchen Faden	0.3292890—1	
Sächſiſchen Klafter	0.2294086	
„ Fuß	0.4512573—1	
„ Zoll	0.3720761—2	
„ Linien	0.2929949—3	
Schwediſchen Klafter	0.2506702	
„ Fuß	0.4725189—1	
„ Zoll	0.3933377—2	
„ Linien	0.3141565—3	

Um zu erhalten den Logarithmus der	ſubtrahire	von dem Logarithm. der

k. Verwandlung des Duodecimal-Längenmaßes in Decimaltheile.

Fuß	enthält Klafter	Zoll	enthält Klafter	Linie	enthält Klafter	Punct	enthält Klafter
1	0.1666667	1	0.0138889	1	0.0011574	1	0.0000965
2	0.333333	2	0.0277778	2	0.0023148	2	0.0001926
3	0.500000	3	0.0416667	3	0.0034722	3	0.0002894
4	0.666667	4	0.0555556	4	0.0046296	4	0.0003858
5	0.833333	5	0.0694444	5	0.0057870	5	0.0004823
6	1.0000000	6	0.0833333	6	0.0069444	6	0.0005787
7	1.1666667	7	0.0972222	7	0.0081019	7	0.0006752
8	1.3333333	8	0.1111111	8	0.0092593	8	0.0007716
9	1.500000	9	0.1250000	9	0.0104166	9	0.0008681
10	1.6666667	10	0.1388889	10	0.0115741	10	0.0009645
11	1.8333333	11	0.1527778	11	0.0127315	11	0.010610

Zoll	enthält Fuß	Linie	enthält Fuß	Punct	enthält Fuß	Linie	enthält Zoll
1	0.0833333	1	0.0069444	1	0.0005787	1	0.0833333
2	0.1666667	2	0.0138889	2	0.0011574	2	0.1666667
3	0.2500000	3	0.0208333	3	0.0017361	3	0.2500000
4	0.3333333	4	0.0277778	4	0.0023148	4	0.3333333
5	0.4166667	5	0.0347222	5	0.0028935	5	0.4166667
6	0.5000000	6	0.0416667	6	0.0034722	6	0.5000000
7	0.5833333	7	0.0486111	7	0.0040509	7	0.5833333
8	0.6666667	8	0.0555556	8	0.0046296	8	0.6666667
9	0.7500000	9	0.0625000	9	0.0052083	9	0.7500000
10	0.8333333	10	0.0694444	10	0.0057870	10	0.8333333
11	0.9166667	11	0.0763889	11	0.0063657	11	0.9166667

l. Verwandlung des Duodecimal-Flächenmaßes in Decimaltheile.

□ Fuß	enthält □ Klafter	□ Zoll	enthält □ Klafter	□ Linie	enthält □ Klafter
1	0.02777778	1	0.00019290	1	0.00000134
2	0.05555556	2	0.00038580	2	0.00000268
3	0.08333333	3	0.00057870	3	0.00000402
4	0.11111111	4	0.00077160	4	0.00000536
5	0.13888889	5	0.00096451	5	0.00000670
6	0.16666667	6	0.00115741	6	0.00000804
7	0.19444444	7	0.00135031	7	0.00000938
8	0.22222222	8	0.00154321	8	0.00001072
9	0.25000000	9	0.00173611	9	0.00001206
10	0.27777778	10	0.00192901	10	0.00001340

□ Zoll	enthält □ Fuß	□ Linie	enthält □ Fuß	□ Punct	enthält □ Fuß
1	0.00694444	1	0.00004823	1	0.00000033
2	0.01388889	2	0.00009645	2	0.00000067
3	0.02083333	3	0.00014468	3	0.00000100
4	0.02777778	4	0.00019290	4	0.00000134
5	0.03472222	5	0.00024113	5	0.00000167
6	0.04166667	6	0.00028935	6	0.00000201
7	0.04861111	7	0.00033758	7	0.00000234
8	0.05555556	8	0.00038580	8	0.00000268
9	0.06250000	9	0.00043403	9	0.00000301
10	0.06944444	10	0.00048225	10	0.00000335

m. Verwandlung des Duodecimal-Kubikmaßes in Decimaltheile.

Kubik-Fuß	enthält Kubik-Klafter	Kubik-Zoll	enthält Kubik-Klafter	Kubik-Linie	enthält Kubik-Klafter
1	0.0046296296	1	0.0000026792	1	0.0000000016
2	0.0092592593	2	0.0000053584	2	0.0000000031
3	0.013888889	3	0.0000080376	3	0.0000000047
4	0.0185185185	4	0.0000107167	4	0.0000000062
5	0.0231481481	5	0.0000133959	5	0.0000000078
6	0.0277777778	6	0.0000160751	6	0.0000000093
7	0.0324074074	7	0.0000187543	7	0.0000000109
8	0.0370370370	8	0.0000214335	8	0.0000000124
9	0.0416666667	9	0.0000241127	9	0.0000000140
10	0.0462962963	10	0.0000267918	10	0.0000000155

Kubik-Zoll	enthält Kubik-Fuß	Kubik-Linie	enthält Kubik-Fuß
1	0.0005787037	1	0.0000003349
2	0.0011574074	2	0.0000006698
3	0.0017361111	3	0.0000010047
4	0.0023148148	4	0.0000013396
5	0.0028935185	5	0.0000016745
6	0.0034722222	6	0.0000020094
7	0.0040509259	7	0.0000023443
8	0.0046296296	8	0.0000026792
9	0.0052083333	9	0.0000030141
10	0.0057870370	10	0.0000033490

II. Tafel.

Vergleichung und Reduction der Gewichte.

a. Vergleichung der Gewichte.

Name des Ortes und des Gewichtes	Enthält	
	Wiener Pfund.	Kilogramme.
Aarau: Handelsgewicht Pfund = ¹⁄₁₀₀ Centner	0.850677	0.476389
Aleſſandria: Pfund = ¹⁄₂₅ Rubo = 12 Oncie = 96 Ottaves = 288 Denari = 6912 Grani	0.658929	0.369008
Alicante: Pfund (großes) = 12 Onças = ¹⁄₉₆ Cargo	0.925871	0.518499
„ kleines Pfund = 12 Onças .	0.617247	0.345666
„ caſtilianiſches Pfund = 16 Onças	0.822997	0.460888
Altenburg: Pfund	0.833002	0.466491
Altona: Pfund	0.864914	0.484362
Ancona: Pfund = 12 Once . .	0.590648	0.330770
Appenzell: ſchweres Pfund . . .	1.043635	0.584448
„ leichtes Pfund . . .	0.830172	0.464906
Barcellona: Pfund = 12 Onças .	0.730333	0.408995
Baſel: Pfund = 32 Loth . . .	0.874100	0.489506
Berlin: Pfund	0.835181	0.467711
Bern: Pfund = 16 Unzen = 32 Loth = 128 Quintl = 512 Pfennig. .	0.928784	0.520130
Bilbao: Pfund	0.874647	0.489813
Bologna: Pfund = 12 Onces = 192 Ferlini = 1920 Carati = 7680 Grani	0.646652	0.362133
Botzen: Pfund	0.894554	0.500961
Braunſchweig: Pfund	0.834500	0.467330
Bremen: Pfund	0.890159	0.498500
Bukareſt: Occa = 4 Littre = 400 Dram	2.301701	1.288980
Cagliari: Pfund = ¹⁄₁₀₀ Cantarello	0.715811	0.400863
Canea: Pfund (Rottel)	1.002658	0.561501
Carlsruhe: Pfund	0.892838	0.500000

Name des Ortes und des Gewichtes	Enthält	
	Wiener Pfund.	Kilogramme.
Caſſel: Pfund	0.864350	0.484046
Coburg: Pfund	0.910170	0.509706
Cöln: Mark = 16 Loth = 64 Quintl = 256 Pfennig = 512 Heller = 4352 Eſchen = 65536 Reichspfennigstheile	0.426241	0.238700
Conſtantinopel: Rottel	1.138999	0.637853
„ Quintal = Cantaar = 117⅓ Rottel . .	133.642527	74.841486
Copenhagen: Pfund = 2 Mark = 16 Unzen = 32 Loth = 128 Quart = 512 Ort	0.891637	0.499322
Corunna: ſchweres Pfund = 20 Unzen	1.026025	0.574586
„ leichtes Pfund = 16 Unzen	0.820820	0.459669
Cracau: Pfund	0.724638	0.405806
„ Stein	23.188406	12.985785
Darmſtadt: Pfund	0.892838	0.500000
Dresden: Pfund	0.834710	0.467448
Ferrara: Pfund = 12 Unzen = 192 Ferlini = 1920 Carati . . .	0.605727	0.339214
Florenz: Pfund = 12 Oncie = 288 Denari = 6912 Grani	0.606264	0.339515
Frankfurt a. M.: ſchweres Pfund .	0.902322	0.505311
„ leichtes Pfund .	0.835483	0.467880
Freiburg: Pfund	0.943973	0.528636
Fulda: Pfund	0.911302	0.510340
Genf: großes Pfund	0.983443	0.550740
„ kleines Pfund	0.819536	0.458950
Genua: großes Pfund	0.622897	0.348830
„ kleines Pfund . . .	0.566274	0.317120
„ Pfund zur Seide . . .	0.612591	0.343058
Glarus: ſchweres Pfund . . .	0.941376	0.527182
„ leichtes Pfund . . .	0.836788	0.468611
Gotha: Pfund	0.833002	0.466491
Gröningen: Pfund = 10 Onces = 100 Looden = 1000 Wigtjes = 10000 Korrels	1.785676	1.000000
Hamburg: Pfuud	0.864914	0.484362
Hanau: Pfund	0.834633	0.467405

Name des Ortes und des Gewichtes	Enthält	
	Wiener Pfund.	Kilogramme.
Hannover: Pfund = 2 Mark = 16 Unzen = 32 Loth = 128 Quintl = 512 Örtchen	0.874271	0.489602
Hildesheim: Pfund	0.833604	0.466828
Lauſanne: Pfund = 16 Unzen = 32 Loth = 128 Quart = 512 Deniers . .	0.907732	0.508341
Lavaletta: Pfund = 12 Unzen = 192 Sechzehnteltheile = 384 Trapaſt .	0.565402	0.316632
Lemberg: Pfund	0.750000	0.420009
Liſſabon: Pfund . . . . , .	0.819565	0.458966
London: Pfund Troy-Pound = 12 Ounces = 5760 Grains	0.666418	0.373202
„ Pfund avoir du poid . .	0.809883	0.453544
Lübeck: Pfund	0.863064	0.483326
Lucca: Pfund	0.664584	0.372175
„ Pfund Seidengewicht . .	0.595689	0.333593
Madrid: Pfund = 2 Marcos . .	0.822957	0.460866
Mahon: Rottel	0.750380	0.420222
Mailand: Pfund, metriſches . .	1.785676	1.000000
„ Pfund, großes	1.345000	0.753216
„ Pfund, kleines	0.575000	0.322007
Meſſina: Caſſico	19.493823	10.916775
„ Rotolo groſſo	1.559506	0.873342
„ Rotolo ſotile	1.417764	0.793965
Modena: Pfund = 12 Unzen . .	0.607380	0.340140
München: Pfund	0.999979	0.560000
Neapel: Rotolo	1.591044	0.891004
„ Libra = 12 Once = 360 Trappeſi = 7200 Acini	0.573202	0.321000
Neufchatel: Pfund	0.928753	0.520113
Nizza: Pfund	0.553642	0.310046
Osnabrück: Pfund	0.882027	0.493946
Oviedo: Pfund (großes) . . .	1.234447	0.691305
Palma: Rotolo	0.750381	0.420222
Paris: Kilogramme	1.785676	1.000000
„ Altes Pfund = 16 Unzen = 128 Gros	0.874099	0.489506
Parma: Pfund = 12 Unzen = 288 Denari = 6912 Gran . . .	0.582899	0.326431

Name des Ortes und des Gewichtes	Enthält	
	Wiener Pfund.	Kilogramme.
Patraſſo: Pfund = 12 Ounces . .	0.713506	0.399572
„ Pfund Seidengewicht = 15 Ounces	0.891883	0.499465
Petersburg: Pfund = ¹/₄₀ Pud = 32 Loth = 96 Solotnik	0.730331	0.408994
Piſa: Pfund	0.606312	0.339542
Prag: Pfund	0.918470	0.514354
Ragusa: Pfund	0.648618	0.363234
Rom: Pfund = 12 Unzen = 288 Denari = 6912 Grani	0.605749	0.339227
Roſtock: Pfund Wagegewicht . .	0.908109	0.508552
St. Gallen: Pfund, ſchweres . .	1.043633	0.584447
„ Pfund, leichtes . .	0.830375	0.465020
Schafhauſen: Pfund, ſchweres . .	1.026716	0.574973
„ Pfund, leichtes . .	0.821386	0.459986
Solothurn: Pfund	0.926633	0.518926
Stockholm: Schalpfund . . .	0.756302	0.423538
Valencia: Pfund	0.637135	0.356803
Venedig: Pfund, großes . . .	0.851765	0.476999
„ Pfund, leichtes . . .	0.537899	0.301230
Warſchau: Pfund (Funt) . .	0.724099	0.405504
Wien: Pfund Handelsgewicht . .	1.000000	0.560012
„ Pfund Münzgewicht . .	1.022978	0.572880
Wiesbaden: Pfund	0.840493	0.470686
Zürch: Pfund Handelsgewicht . .	0.941376	0.527182
„ Pfund zur Seide . . .	0.836788	0.468611

In jedem Lande iſt jenes Gewicht das herrſchende, welches unter dem Namen der Hauptſtadt dieſes Landes angegeben wurde.

b. Verwandlung der Gewichte.

Zu dem Logarithmus der	addire	um zu erhalten den Logarithmus der
Bairiſchen Pfunde	0.7481880—1	
„ Loth	0.2430380—2	
„ Gran	0.8628268—5	
Däniſchen Pfunde	0.6983807—1	
„ Loth	0.1932307—2	
„ Ort	0.8130195—5	
Engliſchen Pfunde Troy - Gewicht .	0.5719428—1	
„ Loth	0.1917316—2	
„ Gran	0.8115192—5	
Engliſchen Pfund avoir - dupoid . .	0.6566194—1	
Franzöſiſchen Pfunde	0.6897580—1	
„ Loth	0.1846080—2	
„ Gran	0.8043968—5	
Niederländiſchen Pfunde	0.0000000	
„ Looden	0.0000000—2	
„ Correls	0.0000000—4	Kilogramme.
Öſterreichiſchen Pfunde	0.7481973—1	
„ Loth	0.2430473—2	
„ Gran	0.8628361—5	
Preußiſchen Pfunde	0.6699776—1	
„ Loth	0.1648276—2	
„ Gran	0.7846164—5	
Ruſſiſchen Pfunde	0.6117169—1	
„ Loth	0.1065669—2	
„ Solotnik	0.6294457—3	
Sächſiſchen Pfunde	0.6697333—1	
„ Loth	0.1645833—2	
„ Gran	0.7843721—5	
Schwediſchen Pfunde	0.6268925—1	
„ Loth	0.1217425—2	
„ Gran	0.7415313—5	
Um zu erhalten den Logarithmus der	ſubtrahire	vom Logarithmus der

c. Reduction der Abwägungen auf den leeren Raum (S. 58).

Temperatur	Logarithm. α.	Logarithm. β.
0°	4.58573	3.66145
1	4.58411	3.65985
2	4.58248	3.65825
3	4.58087	3.65666
4	4.57926	3.65508
5	4.57766	3.65350
6	4.57607	3.65193
7	4.57448	3.65037
8	4.57289	3.64881
9	4.57131	3.64725
10	4.571	3.647
11	4.56974	3.64571
12	4.56818	3.64416
13	4.56661	3.64263
14	4.56351	3.63957
15	4.56196	3.63804
16	4.56042	3.63653
17	4.55889	3.63503
18	4.55736	3.63352
19	4.55584	3.63202
20	4.55432	3.63053
21	4.55281	3.62904
22	4.55130	3.62756
23	4.54980	3.62608
24	4.54830	3.62461
25	4.54681	3.62314

III. Tafel.

Dichte der Körper

a. Dichte feſter und tropfbarer Körper.

(Die Bedeutungen der abgekürzten Namen folgen am Ende.)

Name der Körper	Dichte	Name der Körper	Dichte
A.		Alkohol abſoluter	
		bei 20°C . . Sohm	0.791
Aktinolith	2.937	1 Gew.Waſſ. 99 Alkoh.	0.793
Äther, und zwar:		2 98	0.795
Arſenikäther . . Boul	0.6900	3 97	0.797
Benzoeäther bei 10°.5		4 96	0.799
Dum.	1.0539	5 95	0.801
Eſſigäther	0.8664	6 94	0.804
Oxaläther bei 7°.5		7 93	0.808
Dum.	0.0929	8 92	0.811
Pyrolichnicus . . Tur	0.83	9 91	0.815
Salpeteräther bis 4°.C		10 90	0.818
Dum.	0.886	11 89,	0.821
Salzäther bei 0°.C .	0.8740	12 88	0.823
Schwefeläther bei 0°.C	0.7155	13 87	0.826
» bei 20°.C	0.713	14 86	0.828
Agat . . . . Bri	2.667	15 85	0.831
	2.553	16 84	0.833
Aknit	3.24	17 83	0.836
Alabaſter . . . Bri	2.611	18 82	0.838
	2.811	19 81	0.841
Alaun	1.753	20 80	0.843
Alaunſchiefer . Kir	2.339	21 79	0.846
	2.588	22 78	9.848
Alaunſtein (rhomb. Alaun-		23 77	0.851
haloid) . . . Ms.	2.5	24 76	0.853
	2.8	25 75	0.856
Albin (pyram. Kuphon-	2.2	26 74	0.858
ſpath) . . . Ms.	2.5	27 73	0.861
Albit	2.61	28 72	0.863
	2.68	29 71	0.866

Name der Körper		Dichte	Name der Körper		Dichte
30 Waſſer	70 Alkohol	0.868	70 Waſſer	30 Alkohol	0.955
31	69	0.870	71	29	0.957
32	68	0.873	72	28	0.958
33	67	0.875	73	27	0.960
34	66	0.878	74	26	0.961
35	65	0.880	75	25	0.963
36	64	0.882	76	24	0.964
37	63	0.885	77	23	0.966
38	62	0.887	78	22	0.967
39	61	0.890	79	21	0.969
40	60	0.892	80	20	0.970
41	59	9.894	81	19	0.971
42	58	0.897	82	18	0.073
43	57	0.899	83	17	0.974
44	56	0.902	84	16	0.976
45	55	0.904	85	15	0.977
46	54	0.906	86	14	0.978
47	53	0.908	87	13	0.980
48	52	0.911	88	12	0.981
49	51	0.913	89	11	0.983
50	50	0.915	90	10	0.984
51	49	0.917	91	9	0.986
52	48	0.919	92	8	0.987
53	47	0.922	93	7	0.989
54	46	0.924	94	6	0.990
55	45	0.926	95	5	0.992
56	44	0.928	96	4	0.994
57	43	0.930	97	3	0.995
58	42	0.932	98	2	0.987
59	41	0.935	99	1	0.998
60	40	0.937	100	0	1.000
61	39	0.939	Alkohol in Hunderttheilen des Volumens. Gouv.		
62	38	0.941			
63	37	0.943	Bei 0° C	10	0.98950
64	36	0.945		20	0.97950
65	35	0.947		30	0.97175
66	34	0.949		40	0.96000
67	33	0.950		50	0.94300
68	32	0.952		60	0.92400
69	31	0.953		70	0.90030

Name der Körper	Dichte	Name der Körper	Dichte
Bei 0° 80	0.87440	Bei 20° R 80	0.85360
90	0.84650	90	0.82550
100	0.81060	100	0.78940
Bei 5° R 10	0.98825	Allanit . . . Thom. {	3.524
20	0.97800		4.001
30	0.96925	Allophan . . . .Str. {	1.852
40	0.95650		1.889
50	0.93900	Almandin (dodek. Gra-	
60	0.91900	nat)	4.178
70	0.89515	Aloe	1.358
80	0.86920	Aluminit	1.669
90	0.84125	Amalgam, natürliches	
100	0.80530	(dodek. Merkur) . Ms.	13.755
Bei 10° R 10	0.98700	Amblygonit . . . . {	3.00
20	0.97650		3.04
30	0.96675	Ambra grau . . . . {	0.780
40	0.95300		0.926
50	0.93500	» grün	1.083
60	0.91400	» roth	1.083
70	0.89000	» ſchwarz . . . {	1.078
80	0.86400		1.080
90	0.83600	Amethyſt	2.655
100	0.80000	Amianth	2.3134
Bei 15° R 10	0.98575	Ammoniak concentrirt .	0.875
20	0.97500	75 Thl. Waſſ. 25 Thl. Am.	0.966
30	0.96425	70 30	0.959
40	0.94950	65 35	0.953
50	0.93100	60 40	0.947
60	0.90900	55 45	0.942
70	0.88485	50 50	0.936
80	0.85880	45 55	0.9304
90	0.83075	40 60	0.925
100	0.79470	35 65	0.9198
Bei 20° R 10	0.98450	30 70	0.915
20	0.97350	25 75	0.9098
30	0.96175	20 80	0.905
40	0.94600	15 85	0.9001
50	0.92700	10 90	0.8947
60	0.90400	5 95	0.889
70	0.87970	0 100	0.883

Name der Körper	Dichte
Ammoniak :	
„ wolframſaures Has.	1.938
„ ſchwefelſaures Has.	1.768
„ ſalpeterſaures Has.	1.578
„ phosphorſaures Has.	1.895
„ kohlenſaures Has.	0.966
Ammonium amalgam. nahe	3.000
Amblygonit . . Bre.	3.00 3.04
Analzim (hex. Kuphonſpath)	2.068
Andaluſit prismat. . .	3 104
Anhydrit	2.899
Ankerit gelblich weiß .	3.000
„ grünlich . . .	3.049
Antimonglanz (axotom.)	5.564
Antimonium (rhom.) gediegen	6.646 6.624 6.866
Apatit (rhomb. Flußhaloid)	3.225
Aplom (dodekaed. Granat)	3.444
Apophyllit blättriger .	2.335 3.251
„ ſtrahliger . . .	3.129
Aquamarin	2.650 2.722
Arragon (prism. Kalkhaloid) . . . . . „ von Böhmen . .	2.931 2.926 2.947 2.931 2.9466
Arvedſonit	3.431
Arſenik gediegen und vollkommen rein . Her.	5.672
„ in ſublimirten Kryſtallen . . . Gui.	5.700
dieſelben nach dem Erhitzen	5.959
„ weißer . . . Gui.	3.766
„ gelber (Auripigment)	3.424
Arſenfluorid . . . Unv.	2.730
Arſenikkies (axotom.) .	7.228
„ prismatiſch . . .	6.127
Arſenſulphurid . . .	3.334
Aſand	1.327
Asbeſt . . . . . Bri.	0.908
„ biegſamer . . .	2.444
„ gemeiner . . .	2.050 2.675
	1.450
Asphalt	2,060 1.070 2.060
Augit	3.226 3.777
„ blaßgrün . . .	3.256
„ wachsgelb . . .	3.278
Augitſpath	3.234
Automolit (octaed. Corund)	4.1 4.3
Avanturin dunkler . .	2.642
„ durchſcheinend . .	2.667
Axinit (prismatiſch) . .	3.271
Azurſpath	3.039
B.	
Baroſelenit	4.400 4.865
Baryte . . . . Ms.	3.3 7.3
Parachros Baryt Ms.	3.3 3.9
Zinkbaryt . . Ms.	3.3 4.5
Scheelbaryt . Ms.	6.0 6.1

Name der Körper	Dichte
Hallbaryt . . Ms.	3.6 4.7
Bleibaryt . . Ms.	6.0 7.3
Antimonbaryt . Ms.	5.5 5.6
Baryt waſſerfreier .	2.374 4.000
Baryterde eſſigſaure Has.	1.828
» phosphorſaure Has.	1.2867
» ſalpeterſaure . Has.	2.915
» ſalzſaure . . Has.	2.826
» ſchwefelſaure . .	3.125
Baryto-Calcit . . .	3.66
Baryum	4.000
Baſalt	2.421 3.330
Bauſteine	2.5
Bergkryſtall farbelos .	2.650
» roſenroth . . .	2.670
Bergmehl	0.362 1.372
Bergnaphta rectificirt .	0.758
Bergtheer	1.100
Bernſtein durchſcheinend	1.078
» grün	1.0829
» roth	1.0834
» undurchſichtig .	1.0855
(gelbes Erdharz) . Ms.	1.081
Beryll	2.650 2.722
Bier braun . . . Bri.	1.039
» weiß. . . . Bri.	1.023
Bildſtein . . . . Kla.	2.815
Bri.	2.827
Bimsſtein	0.914 1.647
Biotin . . . . Mont.	3.11
Bittererde	2.300
Bitterſalz natürliches Ms.	1.751

Name der Körper	Dichte
Bitterſpath	2.926
Bituminöſes Holz (harzige Steinkohle) . Ms.	1.288
Blaſenſtein von Menſchen	1.700 1.714
Blättertellur (prismat. Tellurglanz) . Ms.	7.0 7.2
Blätterzeolith (hemipris. Kuphonſpath) . . Ms.	2.200
Blauſpath (prismatoid. Lazurſpath) . . Ms.	3.0 3.1
Blei reines . . Kup.	11.3303
» gepreßt . . Mor.	11.388
Bleiamalgam . . Kup.	
1 Thl. Blei 2 Thl. Queckſ.	13.0181
1 » 3 »	13.0397
1 » 4 »	13.1581
Blei mit Wismuth legirt zu gleichen Theilen .	10.709
Blei grünes	7.098
» chromſaures . .	6.000 6.760
» eſſigſaures (Bleizucker)	2.395 2.745
» kohlenſaures (diprism.) . . . Ms.	6.465
» weiß durchſichtig .	6.729
» molybdänſaures (pyram.) gelb Ms.	6.760
» phosphorſaures (rhomb.) . . .	7.208
» ſalpeterſaures Has.	4.068
» ſalzſaures . Chen.	6.065
» ſchwefelſaures, weiß (prism.) . . . Ms.	6.298
» wolframſaures (hemiprismat. Bleibaryt) . . . . Ms.	8.000

Name der Körper	Dichte
Bleibaryt (axotom.) gelbbraun . . . . Ms.	6.265
Bleiglanz (hex.) . Ms.	7.5 7.6
„ kryſtalliſirt . .	7.586
„ ſtrahlig	7.500
Bleijodid	6.110
Bleikalk	8.940
Bleiprotoxyd . . . Her.	9.277
Bleiperoxyd	9.096
Bleiſuperoxyd . . . Her.	8.902
Blenden	3.9 8.2
Glanzblende . . .	3.9 4.05
Granatblende . . .	4.0 4.2
Purpurblende . . .	4.5 4.6
Rubinblende . . .	5.4 8.2
Blende (hexaed.) Glanzblende . . . . Ms.	3.9 4.05
Blut des Menſchen . .	1.054
Blutkuchen	1.126
Blutwaſſer	1.0250 1.0310
Blutſtein	4.360
Boll . . . . . Bre.	1.977
Borax . . . . . Ms.	1.716
Borazit (octaed.) . H.	2.566
„ „ . Ms.	2.974
Botryogen . . . H.	2.039
Brandſchiefer . . . Kar.	2.060
Brauneiſenſtein (prism. Eiſenerz) . . Ms.	3.8 4.2
Braunkohle (harzige Steinkohle) . . Ms.	1.270
Braunſpath v. Salzburg	2.842
„ v. Freiberg . .	2.861
Braunſtein ſchwarz . .	4.722
Braunſtein (pyram. Manganerz braun prism.)	4.626
Brechweinſtein . . .	2.246
Brewſterit	2.12 2.00
Brochanit . . . Mag.	3.87
Brom . . . . . Bal.	2.966
Bronz antike . . . Cl.	9.200
Bronzit . . . Koch.	3.247
Breunnerit	3.001
Buntkupfererz (rhomb.) Kupferkies . . . Ms.	4.9 5.1
Butter . . . . . Bri.	0.942
C.	
Cacaobutter . . . Bri.	0.892
Cadmium rein vollkommen . . . . Her.	8.659
„ kohlenſaures . Her.	4.420
„ oxyd . . . . Her.	8.183
Calait . . . Fiſch.	2.830 3.000
Calomel	6.707
Campfer . . . . Bri.	0.9857
Carinthin (hemiprism. Augitſpath) . . H.	3.127
Carneol	2.62
Cautſchouc . . . . Bri.	0.989
Cavolinit	2.15
Celeſtin von Tyrol . .	3.858
Cerinſtein (untheilbares Cererz) . . . H.	4.912
Ceylanit	3.765 3.795
Chondrodit	3.199
Chabaſit	2.041
Chalcedon	2.207 2.691

Name der Körper	Dichte
Chiaſtolith . . Lan.	2.94 3.000
Chlor tropfbares . .	1.330
„ wäſſeriges . . .	1.003
Chlorammonium . .	1.42
Chlorhydrat	1.200
Chlorbaryum	3 860 4.156
Chlorblei . . . Mon	5.238 5.336
Chlorcalcium	2.214 2.269
Chlorcyan (doppel) . Ser.	1.320
Chlorprotoxyd . . .	2.400
Chlorphosphor tropfbarer . . . . Dav.	1.45
Chlorit	2.713
Chlorkalium kryſt. . Kir.	1.836
Chlorkohlenſtoffwaſſerſtoff	3.42
Chlormerkur	5.139
Chlornatrium . . .	2.170
Chlorſilber . . Boul.	5.548
Chlorſchwefel halb . .	1.700
Chlorſchwefel einf. Thom.	1.628
Chlorſtickſtoff	1.653
Chlorzinn	2.293
Chriſtianit . . Mont.	2.772
Chrom	5.900
Chromeiſenſtein (prism. Chromerz)	4.498
Cronſtedit	3.348
Chryſoberyll	3.600 3.720
Chryſolith	3.340 4.410
Chryſopras	2.459
Copal aus China . .	1.063
„ dunkel	1.139
„ durchſcheinend . .	1.040
„ aus Madagascar	1.060
Couzeranit . . . Duf.	2.69
Cyan (flüſſig.) . . Far.	0.900
Cyanchlorid	1.32
Cyanit (prism. Dyſtenſpath) blau . . Ms.	3.5 3.7
D.	
Datolith (prism. Dyſtomſpath . . Ms.	2.9 3.0
Davyn . . . . . Mont.	2.3
Diallag metalliſirender toskaniſch	3.256
„ metalliſirend kryſt.	3.054
Dichroit	2.56
Dolomit (makrotyp. Kalkhaloid) grünlich weiß	2.884
„ von St. Gotthard	2.859
Doppelkohlenwaſſerſt. Far.	
„ bei 15.5°C . . .	0.85
„ bei 5.5°C . . .	0.956
Demantſpath (rhomb. Corund) braun . Ms.	3.921
Diamant (octaed.) weiß Ms.	3.520
„ blau . . . . H.	3.525
„ braſilianiſch . H.	3.444
Diamant, farbelos orientaliſch . . . . H.	3.521
„ grün . . . H.	3.523
„ orange . . . H.	3.550
„ roſenroth . . H.	3.531
Diaspor . . . . Hy.	3.4324
Drachenblut	1.204
Duplicatſalz	2.571
E.	
Egeran (pyram. Granat) . . . . . Ms.	3.399

Name der Körper	Dichte	Name der Körper	Dichte
Eis nach		Epidot	3.269
„ Muſſchenbroek	0.888	Erdkobold (prism. Koboldglimmer) rother Ms.	2.948
„ Kraft	0.905	„ ſchwarzer Ms.	2.200
„ Irvine	0.937	Erdöhl (ſchwarzes Erdharz) Ms.	0.8 1.2
„ Williams	0.945	„ braun Ms.	0.828
„ Heinrich	0.905	„ ſchwarz Ms.	1.073
„ Royer u. Dumas	0.950	„ hyazinthroth Ms.	1.160
„ Oſann	0.927	Erze Ms.	3.4 7.4
Eiſen (octaed.) gediegen Ms.	7.768	Titanerz Ms.	3.4 4.4
„ gegoſſen Bri.	7.207	Zinkerz Ms.	5.4 5.5
„ geſchmiedet	7.788	Kupfererz Ms.	5.6 6.0
„ phosphorid	6.700	Zinnerz Ms.	6.3 7.1
„ Roheiſen	7.251	Scheelerz Ms.	7.1 7.4
„ eſſigſaures Has.	1.368	Tantalerz Ms.	6.0 6.3
Eiſenblau (prism. Eiſenglimmer) Ms.	2.6 2.7	Uranerz Ms.	6.4 6.6
Eiſenocher	2.950	Cererz Ms.	4.9 5.0
Eiſenperoxyd Bus.	5.225	Chromerz Ms.	4.4 5.5
„ Deutoxyd Bus.	5.400	Eiſenerz Ms.	3·8 5.3
Eiſenoxydul Her.	5.300	Manganerz Ms.	4.0 4.8
Eiſenoxydul kieſelſaures	3.500 3.870	Eſſiggeiſt brenzliger Mac.	0.828
„ phosphorſaures mit Manganoxydul	3.430	Euchroit H.	3.389
Eiſenoxyd Her.	4.959	Euclas (prism. Smaragd) H.	3.062
Eiſenoxydul-oxyd (Hammerſchlag Bre.	3.500	„ „ „ Ms.	3.098
Eiſenplatin aus Rußland Bre.	14.67 15.79	Eudialyt Stro.	2.898
Eiſenpecherz Vau.	3.430 3.775	Ey von einer Henne	1.090
Eiſen kieſelhaltiges Stro.	6.778		
Eiſenſilicid gekohltes,			
„ blättrig	6.777		
„ körnig	7.324		
Eiſenſinter Ull.	2.40		
Eiſenſpath Kar.	2.964		
Elaolith	2.589		
Elfenbein	1.825		

Name der Körper	Dichte
F.	
Fahlerz (tetraed. Kupferglanz) . . . . Ms.	5.104 4.910 4.798
Fahlunit . . . . Hie.	2.61
„ unkryſt. . Tro. W.	2.68
„ kryſtall. ſchwarz .	2.74
„ grau	2.79
Faſſait . . . . . . H.	3.328
Feldſpath . . . H.	1.841 2.437 2.600 2.717
Ferguſonit . . . All.	5.838
Tur.	5.800
Fett von . . . . Bri.	
Hammel	0.924
Kalb	0.934
Ochſen	0.923
Schwein . . .	0.937
Fettſtein . . . . Hof.	2.618
Feuerſtein	2.580 2.630
Fibrolith . . . . Bour.	3.214
Fluorcalcium	3,15
Fluß (octaed. Flußhaloid) von St. Gallen in Steierm. . . Ms.	3.140
Flußſpath . . . . H.	2.614
Ms.	3,194
G.	
Gadolinit (prismat.) H.	4.200 4.238
Galmay (prism. Zinkbaryt) von Roßegg in Kärnthen . . . Ms.	
„ (rhomb. Zinkbaryt)	3.379
faſt honiggelb . Ms.	4.442

Name der Körper	Dichte
Gehlenit . . . . H.	3.029
Kob.	2.89
Gelberde . . . . Bre.	2.240
Gemmen . . . . Ms.	1.9 4.7
Gerſte	1.278
Gieſekit	2.832
Glanze . . . . Ms.	4.2 7.6
Kupferglanz . . Ms.	4.4 5.8
Silberglanz . . Ms.	6.9 7.2
Bleiglanz . . Ms.	7.4 7.6
Tellurglanz . . Ms.	7.0 7,2
Molybdänglanz Ms.	4.4 4.6
Wismuthglanz . Ms.	6.1 6.4
Antimonglanz . Ms.	4.2 5.8
Melanglanz . . Ms.	5.9 6.4
Glanzkobold (hexaed.) Ms.	6.298
Glas, böhmiſches Bouteillenglas. . . bis	2.732
„ aus Glauberſalz .	2.545
„ aus Borax . .	2.600
„ Fenſterglas . .	2.642
„ Kryſtallglas . .	2.892
„ gemeines Flaſchenglas	2,760
„ franzöſiſch weißes	2.892
Spiegelglas:	
„ von St. Gobin	2.370
„ von Neuhaus .	2.560
„ engliſches . .	2.450

Name der Körper	Dichte
Flintglas engliſches	3.373 3.442
„ franzöſiſches . .	3.158 3.200
„ deutſches von Körner	3.341
„ von Fraunhofer .	3.779
„ von Guinand . .	3.616
„ kieſelhaltiges borſaures Bleioxyd höchſtens . . Far.	6.4
Glaserz (hexaed. Silberglanz) . . . Ms.	6.9 7.2
Glanzkohle (harzloſe Steinkohle) . . Ms.	1.482
Glauberit (Brythinſalz) Ms.	2.807
Glauberſalz natürliches	1.4 1.5
„ waſſerlos kryſtall. Ms.	2.462
Glaukolith . . . . Ber.	2.721
Glimmer . . . Ms.	1.8 4.3
Euchlorglimmer Ms.	2.5 3.2
Kobaltglimmer Ms.	4.0 4.3
Eiſenglimmer . Ms.	2.6 2.7
Graphitglimmer Ms.	1.8 2.1
Talkglimmer . Ms.	2.7 3.0
Perlglimmer . Ms.	3.0 3.1
Glimmer (rhomb Talkglimmer) . H.	2.654 2.934
„ dunkelgrau von Sibirien . . Ms.	2.949
„ ſchwarz von Pinzgau . . . . H.	2.911

Name der Körper	Dichte
Glimmer ſilberweiß aus Sachſen . . . H.	2.45
„ vollkommen ſpaltbar . . . . . H.	2.883
„ lithionhaltig Tur.	2.985 2.897 3.0195
Glyciumoxyd	2.967
Gold (hexaedr.) . . .	7.6
„ gediegen in Geſchieben . . Hy.	14.857
„ 73.45 Th. Gold 26.48 Th. Silber v. Marmato Bous.	12.666
„ 88.24 G. 11.76 Silber v. Malpoſo. Bous.	14.706
„ 87.94 G. 12.06 Silber von Rio-Sucio . . Bous.	14.690
„ 64.93 G. 35.07 Silber von Santa-Roſa . . Bous.	14.149
„ rein geſchmolzen Hy.	19.2527
„ gehämmert . . Bri.	19.362
„ gemünzt in holländiſche Dukaten Bri.	19.352
„ in kaiſerl. Dukaten	18.852
„ in engliſche Guineen . . . Bri	17.629
„ franzöſiſches Geld	17.553
„ portugieſ. Münze Bri.	17.966
„ ſpaniſche . . Bri.	17.655
Goldblei 11 G. 1 B.	18.080
Goldeiſen 11 G. 1 E.	16.885
Goldkupfer 11 G. ½ K.	17.157
Goldplatin . . . Pri.	
beſt. aus 100 Th. G. 0 Pl.	19.36
99 1	18.4
98 2	19.0
97 3	19.0

Name der Körper	Dichte
96 4	19.8
95 5	19.1
94 6	18.6
93 7	18.7
92 8	19.5
91 9	19.4
90 10	18.7
89 11	18.0
88 12	19.4
87 13	18.8
86 14	18.6
85 15	20.0
84 16	19.1
83 17	19.2
82 18	20.5
81 19	20.9
80 20	18.9
75 25	20.9
70 30	20.0
65 35	19.9
60 40	19.9
55 45	18.9
50 50	20.0
Goldſilberkupfer 22 G. 71 S. 1 Kupf. . . .	17.344
Goldwismuth 11 G. 1 W.	18.038
Goldzink 11 G. 1 Z.	16.937
Goldzinn 11 G. 1 Z.	17.307
Granat (dodek.) gemein braun . . . Ms.	3.769
„ edler aus Tyrol Ms.	4.098
„ aus Ohlapian Ms.	4.125
„ aus Haddam in Connect . . Ms.	4.208
Granit grau	2.728
Granit grün von Dauphiné	2.683
„ von Egypten .	2.728
„ roth von Egypten	2.654
„ „ von Dauphiné	2.643

Name der Körper	Dichte
Granit ſchön roth . .	2.761
„ ſtrahlig	2.668
Graphit . . . Kar.	2.247 2.419
Graphit (rhomb. Graphit-Glimmer) . Ms.	1.8 2.1
Grauſpiesglanzerz . .	3.615
(prismatoid. Antimonglanz) . . . Ms.	4.2 4.7
Groſſular (dodec. Granat) . . . . Ms.	3.615
Grünerde (prism. Talkglimmer) . . . Ms.	2.713
Gummi, Ajou . . .	1.4456
„ Ammoniac . . Bri.	1.2071
„ Baſſora . . Bri.	1.4346
„ Bdellium . . Bri.	1.1377
„ Drachenblut . Bri.	1.204
„ Epheu . . . Brr.	1.295
„ Gutti . . . Bri.	1.2216
„ Euphorbium . Bri.	1.1244
„ Lac . . . . . Bri.	1.1390
„ Maſtix . . . Bri.	1.074
„ Monbin . . .	1.4206
„ Myrrhe . . Bri.	1.3600
„ Sandarac . . Bri.	1.092
„ Sagapiſches . Bri.	1.201
„ Tragant . . .	1.3161
„ Weihrauch . . .	1.1732
„ Yvy	1.2948
Gußſtahl	7.919
Gyps (prismatoid. Gypshaloid), durchſichtiger . . . . Ms.	2.310
„ blättriger . . H.	2.473
„ compacter . . H.	1.872
„ halbdurchſichtiger H.	2.3062
„ undurchſichtiger H	2.1673

Name der Körper	Dichte	Name der Körper	Dichte
		Herſchelit . . . . Lev.	2.11
H.		Hyazinth (pyram. Zirkon) . . . . . Ms.	4.505
Haloide . . . . Ms.	2.2	Himmelskörper:	
	3.3	Ceres	0.736
„ Alaunhaloid Ms.	2.5	Erde . . . . Dub.	4.5
	2.8	„ . . . . . . Hut.	4.71
„ Flußhaloid Ms.	3.0	„ . . . . . . Car.	4.39
	3.3	„ Mittelwerth . .	4.60
„ Gypshaloid Ms.	2.2	Juno.	2.44
	3.0	Jupiter	0.97
„ Kalkhaloid Ms.	2.5	Mars	3.04
	3.2	Merkur	11.3
„ Kryonhaloid Ms.	2.9	Pallas	4.32
	3.0	Saturn	0.44
Harze überhaupt . Ms.	0.7	Sonne	1.10
	2.5	Uranus	8.51
„ Alouhiharz. . Bri.	1.060	Venus	4.64
„ Benzoe . . . Bri.	1.092	Veſta.	5.52
„ Caragnaharz . .	1.1244	Hirſchhornſalz . . .	1.496
„ Colophon . . .	1.07	Hiſingerit	3.045
	1.08	Hohlſpath . . . . Hy.	2.944
„ Elemi . . . Bri.	1.018	Holz:	
„ Gambogium .	.1221	„ Ahorn friſch . Sch.	0.9036
„ gemeines . . .	1.089	„ „ getrocknet .	0.6592
„ Guajac	1.205	„ Atlas . . . Gri.	1.078
	1.228	„ Birke friſch . .	0.9012
„ Gummilack. . .	1.199	„ „ getrocknet Sch.	0.6274
„ Jalappa . . Bri.	1.2185	„ Birnbaum . . .	0.9012
„ Labdanum . . Bri.	1.186	„ Botanibayholz Gri.	1.067
„ Schiffpech . Bri.	1.0364	„ Braſilienholz Gri.	1.132
	1.0146	„ Buchen, Splint	
„ Takamahak. . Bri.	1.046	„ „ trocken Sch.	0.982
Hauyn . . . . Gme.	2.687	„ „ friſch . .	0.591
Gis.	3.333	„ „ Stamm friſch	0.9476
Helvin (tetraed.) Granat	3.100	„ „ „ trocken	0.5474
Hetepozit . . . Duf.	3.524	„ Buxbaum . . Mus.	1.33
	3.390	„ Campeſchen . Mus.	0.9130
Heulandit	2.192	„ Cocosholz . . Gri.	1.336
	2.213	„ Cypreſſen . . .	0.644

Name der Körper	Dichte
Holz:	
„ Ebenholz . . Gri.	1.226
„ Edeltanne . . Sch.	
„ „ friſch . .	0.8941
„ „ getrocknet	0.5550
„ Eichen von Kern	
60 Jahre alt .	1.170
„ Erle friſch . . Sch.	0.8571
„ „ getrocknet .	0.5001
„ Eſche friſch . .	0.9036
„ „ trocken Sch.	0.6440
„ „ Zweige friſch	0.734
„ „ trocken .	0.580
„ Eſpe friſch . . Sch.	0.7654
„ „ getrocknet .	0.4302
„ Guajacholz . Gri.	1.341
„ Hainbuche friſch Sch.	0.9452
„ „ getrocknet .	0.7695
„ Königsholz . . Gri.	1.069
„ Kork	0.240
„ Kiefer friſch . Sch.	0.9121
„ „ getrocknet .	0.5501
„ Lerche friſch . Sch.	0.9206
„ „ getrocknet .	0.4735
„ Linden friſch Sch.	0.8170
„ „ getrocknet .	0.4390
„ Mahagony . . .	1.06
„ Mehlbeere friſch Sch.	0.8633
„ „ getrocknet .	0.5910
„ Nußbaum . . .	0.677
„ Pappel gemeine .	0.383
„ „ ſpaniſche weiß	0.529
„ „ ital. friſch .	0.7634
„ „ getrockn. Sch.	0.3931
„ Pflaumenbaum .	0.785
„ Pomeranzenbaum	0.705
„ Roßkaſtan. friſch Sch.	0.8614
„ „ getrocknet .	0.5749
„ Rothtanne friſch Sch.	0.8699
„ „ getrocknet .	0.4710

Name der Körper	Dichte
Holz:	
„ Saalweide friſch Sch.	0.7155
„ „ getrocknet .	0.5289
„ Schwarzpappel,	
„ friſch . Sch.	0.7795
„ getrocknet .	0.3656
„ Sommereichen v.	
Kern	0·618
„ friſch . .	0.695
„ trocken .	0.720 / 0.795
„ von Splint friſch	0.610
„ „ Stamm friſch	0.845 / 0.850
„ „ Wurzel friſch	0.880
„ „ Zweigen friſch	0.698 / 0.780
„ Steineiche . . .	0.900 / 1.100
„ Stieleiche friſch Sch.	1.0494
„ „ getrocknet .	0.6777
„ Traubeneiche, friſch	1.0754
„ „ getrocknet Sch.	0.7075
„ Tulpenholz . Gri.	1.070
„ Ulme, friſch . Sch.	0.9476
„ „ getrocknet . .	0.5474
„ Weide, weiße friſch Sch.	0.9859
„ „ getrocknet .	0.4873
Honig	1.450
Honigſtein (pyram. Melichromerz) . . . Ms.	1.597
Hopnit . . . . . Bw.	2.76
Hornblende	2.922 / 3.410
„ baſaltiſch hemipr. Augitſpath) . Ms.	3.026
Hornerz (hex. Perl. Kerat)	5.552
Hornſilber . . . . Her.	5.129

Name der Körper	Dichte
Hornſtein	2.530 / 2.653
Humboldolith . . Co.	3.104
Huraulith . . . . Duf.	2.270
Hyalith (untheilbarer Quarz) . . . . H.	2.110
Hyaloſiderit	2.875
J.	
Jaspis blutrother . .	2.6277
„ grauer	2.764
„ grüner	2.6274
„ wolkiger . . .	2.7354
Jaspis	2.500 / 2.820
Ichthyophthalm (apotom. Kuphonſpath) . . Hy.	2.467
Idokras	3.3
Jefferſonit	3.51 / 3.60
Indianit . . . Bour.	2.74
Indigo ſublimirter C. .	1.35
Indigo	0.769
Indigoblau . . Dum.	1.35
„ Pigment . . .	0.9 / 1.2
Inulin	1.356
Jod bei 0° C . . G. L.	4.948
Jodkohlenwaſſerſtoff Far.	1.05
Iridium in Pulver Bz.	15.863 / 19.500
„ in Stücken . Bz.	15.588
Iſopir	2.912
Judenpech	1.104
K.	
Kadmium bei 13° R gegoſſen . . . . Mit.	8.604
Kadmium gehämmert Mit.	8.6944
Kadmiumoxyd . . Her.	8.183
Kadmium kohlenſaures . . . . . . Her.	4.420
Kalihydrat	1.708 / 2.100
Kalilauge nach Dal. mit 100 Theilen Kali	2.40
84	2.20
72.7	2.00
63.6	1.88
56.8	1.78
51.2	1.68
46.7	1.60
42.9	1.52
39.6	1.47
36.8	1.44
34.4	1.42
32.4	1.39
29.4	1.36
26.3	1.33
23.4	1.28
19.5	1.23
16.2	1.19
13.0	1.15
9.5	1.11
4.7	1.06
Kali, arſenikſaures . .	1.80
„ chromſaures . .	2.612
„ kohlenſaures . .	1.4594
„ ſalpeterſaures . .	1.98
„ ſalzſaures . . .	1.8365
„ ſchwefelſaures . .	2.636
„ ſaures, weinſteinſaures	1.900
„ Eiſenoxydul blauſaures	1.833
Kalium bei 0° C . . .	0.8651

Name der Körper	Dichte
Kalk:	
» ätzender	1.842
» boraxſaurer . Has.	0.7007
» eſſigſaurer . . Has.	1.005
» flußſaurer . . .	3.191
» kohlenſaurer . .	2.456 2.720
» » kryſt. .	2.717
» phosphorſaurer .	3.180
» ſalpeterſaurer Has.	1.621
» ſalzſaurer . . Has.	1.760
» ſchwefelſaurer Beu.	2.3316
Kalkſpath . . . . Beu.	2.723
» eiſenhaltig . . .	2.778
» gelblich grün . .	2.727
» halbdurchſichtig .	2.731
» rhomb. von Dauphiné	2.508
» weiß, magneſiahaltig	2.647
Kalkſtein (rhomb. Kalkhaloid) . . . Ms.	2.721
» blättrig	2.710 2.837
» feſt	1.386 2.720
» ſandig	2.742
Kaneelſtein (prism. Granat) . . . . . Ms.	3.636
Kanonengut	8.441 9.235
Karfunkel, gemeiner .	3.800
» orientaliſcher . .	4.000 4.188
Karpholith . . . Bre.	2.935
Katzenauge	2.560 2.625
Kerate. Eine Grenze . Ms.	5.5
Kieſe . . . . Ms.	4.1 7.7
Arſenikkies . Ms.	5.7 7.4
Eiſenkies . Ms.	4.4 5.05
Kobaltkies . Ms.	6.1 6.6
Kupferkies . Ms.	4.1 5.1
Nikelkies . Ms.	7.5 7.7
Kieſelerde	2.743
Kleber . . . . . Bri.	1.482
Klebſchiefer . . . Kla.	2.080
Knochen (Ochſen-) . .	1.656
Kobalt, metalliſch . Ber.	7.512
» gegoſſen . . .	7.811
» Oxyd, glaſiges .	2.4405
» Superoxyd . . Her.	5.322
» Bleierz . . . Bau.	8.444
» Blei 6—8 Th. K. 1 Th. B. Gme.	9.780
» Glas, blaues (Schmalte) . .	2.440
» Superoxyd . Her.	5.322
Kochſalz (her. Steinſalz) Ms.	2.257
Kohlen, natürliche Ms.	1.2 1.5
» aus Alkohol . .	2.100
» » Atlasholz mit Poren . Gri.	0.55
» ohne Poren Gri.	0.84
» » Botanibaiholz mit Poren Gri.	0.57
» ohne Poren Gri.	1.12
» » Braſilienholz mit Poren Gri.	0.60
» ohne Poren Gri.	1.40
» » Ebenholz mit Poren . Gri.	0.93
» ohne Poren Gri.	1.36

Name der Körper	Dichte
Kohlen aus Eichenholz .	1.573
» kryſtalliſirt Ser.	0.980
» » Guajac Chen.	0.68718 0.84829
» » Kokosholz mit Poren . Gri.	0.94
» ohne Poren Gri.	1.84
» » Königsholz mit Poren . Gri.	0.70
» ohne Poren Gri.	1.17
» » Kork . . .	0.100
» » Pappelholz Chen.	0.12372 0.18743
» » Steinkohlen . deſtillirt Her.	1.865
» » Tannenholz .	0.600
» » Tulpenholz mit Poren . Gri.	0.76
» ohne Poren Gri.	1.26
Kohlenſulphurid . . .	2.63 1.272
Kohlenwaſſerſtoff, Gemenge, wie es ſich aus comprimirtem Öhlgas abſetzt . . . . . Far.	0.821
Kohlenwaſſerſtoff, ſchwefelſaurer . . . Ser.	0.980
Korallen, rohe . . Mus.	2.6889
Korund (rhomboedr.) grau . . . Ms.	3.942
» aus China . .	3.981
» » Indien . .	3.875
Krebsaugen	1.890
Kreide	2.797 2.657
Kreuzſtein (paratomer. Kuphonſpath) . . Ms.	2.3 2.4
Kryſoberyll (prism. Corund.) ſpargelgrün Ms.	3.854
Kryſolith (prism.) . Ms.	3.441

Name der Körper	Dichte
Kryolith (prismatiſches Kryonhaloid) Ms. et H.	2.963
Kuhmilch	1.019
Kupfer (octaedr.) gediegen . . . . Hy.	8.5844
» gegoſſen . . .	7.788
» gehämmert . .	8.878
» gezogen zu Draht	8.78
» geſchmolzen u. ſchnell abgekühlt . . Her.	8.900
» von Sibirien . .	8.508
» » Ungarn . .	7.728
» arſenikſaures . .	1.150
» eſſigſaures . . Has.	1.779
» phosphorſaures .	4.205
» ſalpeterſaures Has.	2.174
» ſalzſaures . . .	3.750
» ſchwefelſaures . .	2.194
Kupferglas (prism. Kupferglanz) . . . Ms.	2.5 3.0
Kupferglanz (prismatoid.) . . . . Ms.	5.7 5.8
Kupferglimmer (rhomb. Euchlorglimmer) Bour.	2.5 2.6
Kupfergrün (untheilbares Staphylinmalachit) . . . . . Ms.	2.031
Kupferkies (pyramid.) Ms.	6.169
Kupferlazur	3.831
» (prismatiſches Laſurmalachit) . Ms.	3.7 3.9
Kupferindig . . Bre.	3.80 3.82
Kupfermanganerz Bre.	3.197 3.216
Kupfernikel (prismat. Nikelkies) . . . Ms.	7.5 7.7
Kupferprotoxyd . . Bus.	5.300
» Bioxyd . . . Bus.	6.136
» Oxyd . . . Her.	6.093

Name der Körper	Dichte
Kupferoxydul . . . Her.	6.052
» Phosphorid . Bus.	7.122
Kupferſmaragd (rhomb. Smaragdmalachit) Ms.	3.2 3.4
Kupferſchaum (prismatiſcher Euchlorglimmer) . . . . Ms.	2.5 3.2
Kupfervitriol aus Böhmen	6.607
» aus Sachſen . .	6.648
Kupferzinn 6.25 K. 1 Zinn Buch.	8.880
» 3 1 Chri.	8.879
» 1 1 Buch.	8.468 8.790
» 1 3 Chri.	7.843
» 1 10 Chri.	7.472
Kyan, tropfbares . .	0.900
L.	
Labradonit	2.751
Labradorſtein . . . H.	2.670 2.692
Lackmuspigment . . .	1.9
Laſurſtein (dodecaedr. Lazurſpath)	2.9 3.0
Latrolith	1.80
Lazulith (prism. Lazurſpath) . . . Ms.	3.0 3.1
Lava	2.795 2.823
Leberſtein	2.666
Lepidolith . . . . H.	2.831
Leucit . . . Ms. et H.	2.483
Lievrit (diprism. Eiſenerz) . . . . Ms.	3.8 4.1
Ligurit . . . . Leon.	3.49
Linſenerz (prism. Lirokonmalachit) . . Ms.	2.8 3.0
Lomonit (diatom. Kuphonſpath) . . . Hy.	2.3 2.4
M.	
Magneſit . . . . Bre.	2.808
Magneteiſenſtein (octaed. Eiſenerz) . . Ms.	4.8 5.2
Magnetkies (rhomb. Eiſenkies)	4.4 4.7
Magneſia . . . . Kir.	2.300
Magneſiahydrat kryſt. . .	2.130
» eſſigſaure . . Has.	1.378
» phosphorſaure Has.	1.549
» ſalpeterſaure . .	1.736
» ſalzſaure . . Has.	1.601
» ſchwefelſaure Wer.	1.232
Malachite . . . Ms.	2.0 4.6
Staphylinmalachit Ms.	2.0 2.2
Liroconmalachit Ms.	2.8 3.0
Olivenmalachit Ms.	3.6 4.6
Laſurmalachit . Ms.	3.7 3.9
Smaragdmalachit Ms.	3.2 3.4
Habronemmalachit Ms.	4.0 4.3
Malachit (hemiprism. Habronemmalachit) Ms.	3.6 4.05
Manachanit	4.427
Mangan . . . Bach.	8.0301 8.013
Manganblende (hexaedr. Glanzblende) . . Ms.	4.014
Manganſpath . . . Br.	3.538

Name der Körper	Dichte	Name der Körper	Dichte
Marmor:		Meteoreiſen v. Peru Bgr.	7.355
„ afrikaniſcher . .	2.798	Milch von Eſeln . Bri.	1.036
„ von Biscaya . .	2.695	„ „ Kühen . Br.i	1 032
„ aus Caſtilien . .	2.700	„ „ Menſchen Bri.	1.0203
„ dunkler	2.695	„ „ Pferden . Bri.	1.035
„ carrariſcher . .	2.717	„ „ Schafen . Bri.	1.041
„ egyptiſcher, grün	2.668	„ „ Ziegen . Bri.	1.034
„ franzöſiſcher . .	2.649	Molken von Kuhmilch Bri.	1.019
„ florentiniſch. gelb	2.516	Molybdän . . . Buch.	8.600
„ v. Granada, weiß	2.705	Molybdänſilber . . Bre.	8.000
„ norwegiſcher . .	2.728	Moorkohle (harzige Steinkohle) . . . . Ms.	1.223
„ pariſcher . . .	2.838	Muriacit (prism. Gypshaloid) . . . Ms.	2.7 3.0
„ pyrenäiſcher . .	2.726	Muſſit	3.245 3.350
„ römiſcher ſchwarz	2.717	Myrrhen	1.160
„ „ violett .	2.755	Myrthenwachs . .	1.015
„ ſchweizer . . .	2.714	**N.**	
„ ſibiriſcher . . .	2.728	Nadelerz . . . . In.	6.125
„ von Valencia . .	2.710	Naholit	2.168
Marmolith	2.47	Naphta ameiſenſaures .	0.9157
Meerſchaum . . . Kla.	1.600	Naphtalin künſtliches .	0.78
Bre.	1.279	Natrium bei 10° C . Dav.	0.9348
Mejonit (pyram. Feldſpath) . . . . Ms.	2.612	Natrum, kohlenſaures (hemiprism. Natronſalz) . . . . Ms.	1.423
Melanit (dodecaedr. Granat) . . . . . Ms.	3.701	„ eſſigſaures . . Has.	2.109
Menakan . . . . Gri.	4.427	„ phosphorſaures Has.	1.333
Menakeiſenſtein . . Bre.	4.75	„ kohlenſaures kryſtalliſirtes . . Has.	1.738
Menakerz (prism. Titanerz) . . . . . . Ms.	3.468	„ ſalzſaures (prism. Salz) . . .	2.125 1.526
Mennig	8.940	„ ſalpeterſaures . Kla.	2.0964
Meſſing	7.600 8.800	„ ſchwefelſaures . .	1.446
Metalle nat. vorkom. Ms.	9.7 20.0	„ blauſaures Eiſenoxydul	1.800
Meteorſtein	1.94 3.800		
Meteoreiſen v. Lenarto Bgr.	7.149		
„ vom Cap . . Bgr.	7.544		
„ von Bahumielic in Böhmen . . Bgr.	7.342		

Name der Körper	Dichte
Natrum, anderthalbſchwefelſaures . Thom.	2.26
» » waſſerfrei	2.640
» » kryſtalliſirt	1.350
» borſaures . . Has.	1.723
Nephelin (rhomb. Feldſpath). . . . . Ms.	2.5 2.6
Nephrit . . . . . Bre.	3.024
Nikelblech, dargeſtellt von Gersdorff . .	8.477
Nikel, dargeſtellt von Richter . . Bgr.	8.834
» dargeſtellt von Gruber	8.713
» reinſte Sorte . .	7.000 9.000
» geſchwefelter » Kupfernikel . .	6.620
Nikelſpiesglanzerz . .	6.451
Nikelſuperoxyd . . Her.	4.846
O.	
Obſidian (empyrodoxer Quarz) . . . . Ms.	2.395
Oktaedrit (pyram. Titanerz) . . . . Ms.	3.8 3.9
Öhle:	
» Ackermünzenöhl .	0.912
» Aniſöhl bei 25° .	0.9857
» Bergamotöhl . .	0.8856
» Bernſtein . . .	0.8792
» Beyandt . . .	0.8856
» Buchecker . . .	0.9230
» Cajeput bei 9° .	0,9474
» Calmus	0.8990
» Camillen . . .	0.8943
» Cascarillen . . .	0.9380
Öhle:	
» Ceder . . . Bra.	0.8786
» Citronen . . .	0.8517
» » bei 22° .	0.8470
» Coriander . . .	0.8655
» Delphin . . .	0.9178
» Dille	0.9128 0.881 0.9940
» Erd	0.8800
» Fenchel	0.9294
» » Samen .	1.008
» Fuſelöhl a. Getreide	0.821
» » mit Waſſer	0.8233
» Gewürznelken . .	1.036
» flüchtiges aus Hanf	0.926
» aus Haſelnüſſen .	0.916
» Kolſa (gutes Rüböhl bei 15°) . .	0.9136
» Kopaivabalſam .	0.9925
» Krauſemünze . .	0.9696
» Kümmel . . Bra.	0,975
» Lavendel . . .	0.9480
» Leinſamen . . .	0.928 0.9530
» » bei 12° Sau.	0.9395
» » bei 25° Sau.	0.93
» » bei 50° Sau.	0.9125
» » bei 94° Sau.	0.8815
» Löffelkraut . . .	0.943
» Mais	0.9538
» Mandeln . . .	0.9178 0,92
» Meliſſen . . Bra.	0.9750
» Mohn bei 15° Sau.	0.9249
» Mohn	0.929
» Muscatnuß . .	0.948
» Nelken	1.0340
» Nuß	0.9470
» Oliven	0.915

Name der Körper	Dichte
Öhle:	
„ Oliven grüne Bra.	0.9135
„ „ gelbe .	0.9220
„ „ weiße .	0.9275
„ Peterſilie . . Bra.	1.1650
„ Pfeffermünze . .	0.9550
„ Pomeranzenblüthe	0.9085
„ Pomeranzenſchalen	0.8880
„ Raps	0.9193
„ Rauten . . . Bra.	0.9110
„ Reinfarren . . .	0.933
„ Ricinus bei 12° Sau.	0.9699
„ „ bei 25° Sau.	0.9575
„ „ bei 94° Sau.	0.9081
„ Roſen bei 32°.5 .	0.8320
„ Rosmarin . . Bra.	0.915
„ Rüböhl bei 15° Sau.	0.9128
„ Salvei	0.901
„ Saſſafras bei 6° .	1.245
„ „ bei 12°	1.110
„ Schafgarben . Bra.	0.8520
„ „ bei 15° Sau.	0.9170
„ Segenbaum . Bra.	0.9155
„ Senf flüchtig . .	1.0387
„ Spiköhl	0.8770
„ Sternanis . . .	0.982
„ Tauſendguldenkraut bl. . . .	0.852
„ Terpentin . . Bra.	0.8725
„ Thymian	0.905
„ Valeriana . . .	0.9650
„ Wachholder . .	0.911 0.858
„ Wallnüſſe . . .	0.928
„ „ bei 12° Sau.	0.9283
„ „ bei 25° Sau.	0.9194
„ „ bei 94° Sau.	0.871
„ Weinöhl bei 10°.5 Dum.	0.9174

Name der Körper	Dichte
Öhle:	
„ Weinöhl ſüßes Ser.	0.921
„ Weinſteinöhl . .	1.5400
„ Wermuth . . .	0.9725
„ Wurmkraut . Bra.	0.9315
„ Yſop	0.8892
„ Zimmt	1.035
Olivinerz (prism. Olivenmalachit) . Ms.	4.2 4.6
Omphacit (parat. Augitſpath) . . . . H.	3.328
Okenit . . . . Kob.	2.28
Onyx	2.586 2.628
Opal (untheilb. Quarz) H.	1.700 2.118
Opium	1.3365
Ortit	3.288
Osmelith . . . Bre.	0.792 2 833
Osmium ungefähr . Bz.	10.000
Osmium Iridium aus Rußland . . . Bre.	17.969 18.571
„ „ „ Bz.	18.644
Oſtranit . . . Bre.	4.32 4.4
P.	
Packfong gegoſſen . Bgn.	8.517
„ zu Blech gewalzt Bgn.	8.563
„ zu Draht gezog. Bgn.	8.553
Palladium . . . Bz. Dum. Low.	11.8 11.682 12.148
„ gegoſſen . . Bz.	11.3
Paulit (prismatoid. Schillerſpath) . . . Ms.	3.3 3.4

Name der Körper	Dichte
Pech, weißes	1.072
Pechkohle	1.29 1.350
Pechſtein (empyrodox. Quarz) . . . . Ms.	2.212
Perlen, orientaliſche. .	2.684 2.750
Perlglimmer (rhomb.) Ms.	3.032
Periklin . . . Bre.	2.53 2.56
Petalit (prism. Petalinſpath) . . . Bre.	2.42 2.45
Pharmacolith . . . Kla.	2.640
Phosphor	1.770 1.821
Phosphorplatin . . .	5.280
Phosphorprochlorid . .	1.450
Picknit (prism. Topas) Ms.	3.494
Pikrosmin . . . . H.	2.660 2.596
Pineytalg bei 15° Bab.	0.926
Pinit	2.782
Piſtacit (prismatoid. Augitſpath) . . . . Ms.	3.425
Platin, gediegen. . Ms.	17.332
„ in Naturkörnern	15.600 17.200
„ gemünzt. . . .	21.012 22.100
„ geſchmolzen . .	20.857
„ gewalzt	22.069
„ peruaniſches Wol.	17.7
„ Körner in Salpeterſäure geſotten .	17.500 18.500
„ aus Rußland Bre.	17.1 17.6
„ Draht	19.267
„ n. Wollaſtons Methode dehnbar gemacht (in Drahtform) .	21.5

Name der Körper	Dichte
Platin, von Clarke mit dem Knallgebläſe geſchmolzener Draht	21.16
Platinpalladium (zu gleichen Theilen) . . .	15.141
Platinſchwamm (im Mittel) . . . . . Lie.	16.557
Polirſchiefer . . Hab.	0.590 0.606
Polyhalit . . . Stro.	2.7698
Porcellain:	
„ Berliner . . .	2.293
„ chineſiſches . . .	2.384
„ franzöſiſches . .	2.145
„ ſächſiſches . . .	2.493
„ Sanitätsgut . .	2.254
„ Wiener feinſtes	2.209 2.387
„ „ Mittelgatt.	2.132
Porcellainſpath . . Fs.	2.649
Porphyr, grün . . .	2.676
„ von Cordova . .	2.7278
„ roth	2.765
„ von Cordova . .	2.7542
„ „ Dauphiné .	2.7933
Pyrollolith	2.55 2.60
Pyrochlor . . Woeh.	4.206 4.216
Pyrop (dodecaedr. Granat) . . . . . . Ms.	3.788
Pyrorthit . . . . Bz.	2.19
Pyroſmalit	3.077
Q.	
Quarz (rhomboedr.) H. Beu.	2.640 2.670 2.690 2.654

Name der Körper	Dichte
Queckſilber bei 0° C .	13.598
„ Präcipitat roth .	8.399
„ blauſaures . . Has.	2.761
„ borſaures . . Has.	2.266
„ phosphorſaures Has.	4.985
„ ſalpeterſaures Has.	3.914
„ ſalzſaures . . Has.	7.176
„ ſchwefeligſaures Has.	4.068
„ ſchwefelſaures .	6.440
Queckſilberhornerz (pyram. Perlkerat) . .	6.4 6.5
Queckſilberoxyd . . Her.	11.085
„ oxydul . . . Her.	10.690
„ deutoxyd . . .	7.140
„ jodid	7.750
„ biſulphurid . .	8.124
R.	
Raſeneiſenſtein . . Kar.	2.603
Rauſchgelb (prismatoid. Schwefel) gelb. Ms.	3.480
„ (hemiprism. Schwefel) rothes . Ms.	3.556
Rautenſpath (brachytyp. Kalkhaloid) nelkenbraun . . Ms.	3.001
„ gelb	3.112
Reißblei	1.987 2.089
Retinasphalt . . . Hat.	1.135
Rhodium	11.000
Rhodiumgold	15.48 16.8
Rhodiumſilbergold 38.5 R. 61.0 G. 0.5 S. Wol.	15.40
Rhätizit (prism. Diſthenſpath) . . . . Ms.	3.559
Rotheiſenſtein (rhomb. Eiſenerz) . . . Ms.	5.251
Rothgiltigerz (rhombd. Rubinblende) . . Ms.	5.846
Rothkupfererz (octaedr. Kupfererz) . . . Ms.	5.992
Rothſpiesglanzerz (prism. Purpurblende) . Ms.	4.5 4.6
Rubellit (roth ſibiriſcher Schörl)	3.100
Rubin, braſilianiſcher .	3.130
„ orientaliſcher . .	3.991
Rutil (peritom. Titanerz) . . . . . . Ms.	4.249
S.	
Samen von	
„ Acer pseudoplatanus L.	0.630
„ Aconitum barbatum	0.776
„ „ Lycoctonum	0.840
„ „ tauricum Dec.	0.795
„ Agrostemma Githago L.	1.233
„ „ Coronaria L.	1.289
„ Agrostis mexicana L.	1.100
„ Alcina perfoliata Cuv.	0.837
„ Allium angulosum L.	1.187
„ „ danubiale Spreng. .	1.165
„ „ inodorum Ait. . .	1.164
„ „ sibiricum L.	1.184
„ „ suaveolens Jacq. . .	1.126
„ Amaranthus cruentus L.	1.450

Name der Körper	Dichte
Samen von	
„ Amaranthus hypochondriacus L. . . .	1.416
„ Amygdalus communis L. (nackte Körner) . . .	1.033
„ Anchusa officinalis L.	0.923
„ Androsace maxima L.	1.251
„ Anthemis altissima L.	0.875
„ „ tinctoria L.	0.990
„ Antirrhinum majus L.	1.124
„ Aquilegia vulgaris	1.220
„ Arabis hirsuta Scop.	1.197
„ Aster chinensis L.	0.916
„ Astragalus baeticus L.	1.394
„ „ glyciphyllus L. . . .	1.326
„ Athamanta Libanotis L. . . .	0.540
„ Atropa Belladonna L.	1.019
„ Aethusa Cynapium L.	0.646
„ Avena elatior L. Same m. Spelzen	0.600
„ „ nuda L. Grützhafer (nackte Körner)	1.314
„ „ orientalis L.	1.021
„ „ sativa L. .	1.345
„ „ alba (unenthülſete Körner)	1.050
„ „ trisperma .	1.005
„ Benincasa cerifera Savi	0.705
Samen von	
„ Bertholletia excelsa Humb. (die aus den Hülſen genommenen Körner) .	1.017
„ Beta vulgaris L. (die mit dem Kelche verwachſ. Samen)	0.588
„ Betula alba L. (klein geflügelte Samen) . . .	0.536
„ Biscutella auriculata L.	0.368
„ Brassica campestris oleifera Dec. Kohlreps. . . .	1.110
„ „ eruca L. .	1.211
„ „ Napus oleifera Dec. Rübſen .	1.134
„ „ praecox Dec. Sommerreps.	1.143
„ Bromus erectus L. (Same m. Spelzen)	0.323
„ „ inermis L. .	0.746
„ Bunias orientalis W.	0.843
„ Bupleurum rotundifolium . . .	1.240
„ Canna indica L. (nackte Körner) .	1.365
„ „ rubra W. .	1.357
„ Cannabis sativa L.	0.945
„ Carduus marianus L.	1.160
„ Carpinus Betulus L. (die kleinen Samennüſſe) . . .	1.147
„ Carthamus tinctorius L. . . .	0.672

Name der Körper	Dichte
Samen von	
„ Carum Carvi L.	1.156
„ Centaurea benedicta L.	1.080
„ Ceratonia siliqua Lamb. (Samenkörner)	1.410
„ Chrysanthemum coronarium L.	0.770
„ Cocos lapidea Garten (ganze Frucht)	1.339
„ „ Testa lignea (die Frucht)	1.355
„ Coriandrum sativum L.	0.635
„ Cucumis Melo L.	0.890
„ „ sativus L.	1.041
„ Cynoglossum officinale L.	0.904
„ Datura Stramonium L.	1.033
„ Delphinium Ajacis L.	1.136
„ Digitalis purpurea L. (nackte Körner)	0.773
„ Diosma crenata L.	1.037
„ Ervum Lens L. sem. flavesc.	1.363
„ „ virescen.	1.360
„ Euphorbia Lathyris L. (eckige Körner)	0.998
„ Gerſtengraupen (abgerollte Körner v. Hordeum distichon L. nutans)	1.437
„ Gries (halbzerſtoßene Körner von Triticum Spelta L.)	1.407
Samen von	
„ Hesperis matronalis L.	1.165
„ Hordeum coeleste L. (nackte Körner)	1.371
„ „ distichon L.	1.317
„ „ hexastichon L.	1.350
„ „ nigrum W.	1.360
„ „ nudum Arduino (nackte Körner)	1.401
„ „ vulgare L. (unenthülſete Körner)	1.351
„ Holcus lanatus L.	0.301
„ Hyoscyamus niger L.	1.178
„ Hyssopus officinalis L.	1.098
„ Iris halophylla Pall.	0.863
„ „ pratensis Lam.	0.830
„ Lactuca sativa L.	1.043
„ „ „ virosa L.	0.856
„ Linum usitatissimum L.	1.163
„ Lithospermum officinale L.	1.223
„ Malva parviflora L.	1.172
„ Medicago sativa L.	1.337
„ Melissa officinalis	1.009
„ Mirabilis Jalappa L.	1.002
„ Nicotiana rustica L. (eckige Körner)	1.095
„ „ Tabacum L.	1.046
„ Oryza sativa L. v. Carolina (enthülſete Körner)	1.479
„ „ von Malland	1.455
„ Panicum italicum L.	1.179

Name der Körper	Dichte
Samen von	
„ Panicum miliaceum L.	1.184
„ Papaver somniferum	1.142
„ Phaseolus communis L.	1.298
„ Phleum pratense L.	1.022
„ Phoenix dactylifera L. (eckige Steinfrucht) . .	1.364
„ Pinus Abies L. (Nüſſe ohne die Flügel)	0.853
„ „ Larix L. .	0.848
„ „ Picea L. .	1.070
„ „ sylvestris L.	0.807
„ Pisum sativum L. sem. maj.	1,355
„ „ min.	1.324
„ Polygonum Fagopyrum L.	1.104
„ „ tartaricum L.	1.199
„ Pyrus Malus L. (die Samenkörner) .	1.145
„ Quercus Robur L. (unenthülſete Körner	0.969
„ Ricinus communis L.	0.902
„ „ inermis Jacq. (nackte Körner) . .	0.438
„ Rosa canina L. Samenkörner .	1.075
„ Salvia officinalis .	1.060
„ Sinapis alba L. .	1.236
„ Tragopogon picroides . . .	0.584
Samen von	
„ Triticum compactum Host. . .	1.332
„ „ compositum	1.329
„ „ dicoccon .	1.072
„ „ monococcon (in unenthülſ. Körn.)	1.232
„ „ polonicum .	1.355
„ „ sativum L. hybernum aristatum	1.403
„ „ „ aestivum aristatum	1.374
„ „ „ muticum	1.337
„ „ hybernum	1.333
„ „ Spelta L. (enthülſ. Körner vom J. 1824)	1.347
„ „ (unenthülſ. Körner) .	1.081
„ „ (unenthülſ. Körner vom Jahre 1825)	1.085
„ Tropaeolum majus L. (Same in lederartig. Nüſſen)	0.210
„ Vicia bengalensis	1.344
„ „ dumetorum	1.203
„ „ Faba . . .	1.273
„ „ lutea . .	1.272
„ „ monantha Dec.	1.327
„ „ narbonensis	1.300
„ Vitis vinifera (Samenkörner) . .	1.060
„ Zea Mays L. . .	1.147
Salmiak	1.420 1.453
Salpeter	1.93
„ natürlicher . . Has.	1.9369

Name der Körper	Dichte	Name der Körper	Dichte
Salpeterkochſalzlöſung,		4.6	0.9930
geſättigte (36°) Lon.	1.3057	4.0	0.9940
Salzkupfererz . . Leon.	4.43	. . . . 3.6	0.9945
Sandſtein zum Pflaſter	2.416	3.2	0.9952
„ von Briſtol . .	2.510	3.0	0.9958
„ „ St. Cloud . .	2.201	2.7	0.9964
„ „ Fontainebleau	2.562	2.5	0.9967
Saupurit	3.256	2.3	0.9970
Saſſafras	0.482	2.1	0.9973
Säure, natürliche mine-	3.7	2.0	0.9974
raliſche . . . Ms.	0.0015	1.7	0.9978
Ätherſäure	1.0150	1.6	0.9979
Ameiſenſäure, concen-		Boraxſäure	1.495
trirteſte . . .	1.117	„ kryſtalliſirt . . .	1.480
„ mit gleichen Th.		„ verglaſet . . .	1.803
Waſſer . . .	1.030	Butterſäure bei 25°	
Arſenikſäure . . .	1.8731	Chev.	0.9675
„ verglaſet . . .	3.391	Chinaſäure	1.637
„ 100 Th. derſelben in 43 Th.		Citronenſäure (kry-	
		ſtalliſirt)	1.617
Waſſer . . .	2.550	Cyanſäure . . Ser.	1.7
„ natürliche . .	3.698		1.8
„ (Arſenikblüthe)		Delphinſäure bei 25° C	
Arſenigte Säure . Her.	3.729	Chev.	0.9410
Aſparaginſäure (8°.5)		Eſſigſäure, concentrir-	
Pli.	1.873	teſte.	1.063
Benzoeſäure . . .	0.667	„ am meiſten mit Waſ-	
Blauſäure (2° R.) .	0.205	ſer verdichtet . .	1.0791
„ „ waſſerfreie		„ weiße	1.025
bei 7° C . G. L.	0.7058	„ rothe	1.014
„ wäſſerige nach Ure		„ Waſſergehalt 0%	1.0630
Procent Säure 16.0	0.9570	8.3	1.0742
10.6	0.9768	17	1.0770
9.1	0.9815	23	1.0791
8.0	0.9840	28.1	1.0763
7.3	0.9870	33.3	1.0742
6.4	0.9890	37.6	1.0728
5.8	0.9900	47	1.0658
5.3	0.9914	50	1.0637
5.0	0.9923	51.8	1.0630

Name der Körper		Dichte	Name der Körper		Dichte
Flußborſäure, tropf-			19	81	1.1051
bare		1.770	20	80	1.1109
Flußſäure, concen-			21	79	1.1168
trirteſte . . .		1.0609	22	78	1.1227
„ mit möglichſt viel			23	77	1.1286
Waſſer . . .		1.250	24	76	1.1343
Hydrojodſäure, con-			25	75	1.1403
centrirt . . G. L.		1.700	26	74	1.1465
Hydrothionſäure, bei			27	73	1.1525
7°.2 tropfbar . Far.		0.9	28	72	1.1587
Kleeſäure		1.507	29	71	1.1648
Kampherſäure . . Has.		0.770	30	70	1.1709
Molybdänſäure . .		3.460	31	69	1.1770
Öhlſäure 18° . . .		0.898	32	68	1.1833
Orangenſäure . . .		1.0176	33	67	1.1895
Phosphorſäure, waſ-			34	66	1.1958
ſerfreie . . .		2.687	35	65	1.2019
„ Hydrat verglaſet		2.876	36	64	1.2084
„ wäſſerige . .		2.000	37	63	1.2148
Stachelbeerſäure . .		1.0581	38	62	1.2212
Salpeterſäure, mög-			39	61	1.2277
lichſt concentrirt .		1.580	40	60	1.2341
1 Th.	99 Th. Waſſ.	1.0053	41	59	1.2402
2	98	1.0106	42	58	1.2462
3	97	1.0159	43	57	1.2523
4	96	1.0212	44	56	1.2583
5	95	1.0267	45	55	1.2644
6	94	1.0320	46	54	1.2705
7	93	1.0375	47	53	1.2765
8	92	1.0430	48	52	1.2826
9	91	1.0485	49	51	1.2887
10	90	1.0540	50	50	1.2947
11	89	1.0595	51	49	1.3001
12	88	1.0651	52	48	1.3056
13	87	1.0708	53	47	1.3110
14	86	1.0764	54	46	1.3163
15	85	1.0821	55	45	1.3216
16	84	1.0878	56	44	1.3270
17	83	1.0935	57	43	1.3323
18	82	1.0993	58	42	1.3376

Name der Körper		Dichte	Name der Körper		Dichte
59	41	1.3427	99	1	1.4980
60	40	1.3477	100	0	1.5000
61	39	1.3529	Salpeterſäure, voll=		
62	38	1.3579	kommen weiß, con=		
63	37	1.3630	centrirt		1.480
64	36	1.3681	Salzſäure		1.194
65	35	1.3732	1 Th.	99 Th. Waſſ.	1.0020
66	34	1.3783	2	98	1.0040
67	33	1.3833	3	97	1.0060
68	32	1.3882	4	96	1.0080
69	31	1.3945	5	95	1.0100
70	30	1.3978	6	94	1.0120
71	29	1.4023	7	93	1.0140
72	28	1.4065	8	92	1.0160
73	27	1.4107	9	91	1.0180
74	26	1.4147	10	90	1.0200
75	25	1.4189	11	89	1.0220
76	24	1·4228	12	88	1.0239
77	23	1.4269	13	87	1.0259
78	22	1.4306	14	86	1.0279
79	21	1.4346	15	85	1.0298
80	20	1.4385	16	84	1.0318
81	19	1.4424	17	83	1.0337
82	18	1.4460	18	82	1.0357
83	17	1.4500	19	81	1.0377
84	16	1.4530	20	80	1.0397
85	15	1.4570	21	79	1.0417
86	14	1.4600	22	78	1.0437
87	13	1.4640	23	77	1.0457
88	12	1.4670	24	76	1.0477
89	11	1.4700	25	75	1.0497
90	10	1.4730	26	74	1.0517
91	9	1.4760	27	73	1.0537
92	8	1.4790	28	72	1.0557
93	7	1.4820	29	71	1.0577
94	6	1.4850	30	70	1.0597
95	5	1.4880	31	69	1.0617
96	4	1.4910	32	68	1.0637
97	3	1.4940	33	67	1.0657
98	2	1.4960	34	66	1.0677

Name der Körper		Dichte	Name der Körper		Dichte
35	65	1.0697	75	25	1.1515
36	64	1.0718	76	24	1.1536
37	63	1.0738	77	23	1.1557
38	62	1.0758	78	22	1.1578
39	61	1.0778	79	21	1.1599
40	60	1.0798	80	20	1.1620
41	59	1.0818	81	19	1.1641
42	58	1.0838	82	18	1.1661
43	57	1.0859	83	17	1.1681
44	56	1.0879	84	16	1.1701
45	55	1.0899	85	15	1.1721
46	54	1.0919	86	14	1.1741
47	53	1.0939	87	13	1.1762
48	52	1.0960	88	12	1.1782
49	51	1.0980	89	11	1.1802
50	50	1.1000	90	10	1.1822
51	49	1.1020	91	9	1.1846
52	48	1.1041	92	8	1.1857
53	47	1.1061	93	7	1.1875
54	46	1.1082	94	6	1.1893
55	45	1.1102	95	5	1.1910
56	44	1.1123	96	4	1.1928
57	43	1.1143	97	3	1.1946
58	42	1.1164	98	2	1.1964
59	41	1.1185	99	1	1.1982
60	40	1.1206	100	0	1.2000
61	39	1.1226	Schwefelſäure in un-		
62	38	1.1247	durchſichtigen Na-		
63	37	1.1267	deln bei 13° R. .		1.9546
64	36	1.1287	„ geſchmolzen bei		
65	35	1.1308	20° . . Boul.		1.970
66	34	1.1328			
67	33	1.1349	„ möglichſt con-		
68	32	1.1369	centrirt . .		2.125
69	31	1.1389	„ wie ſie im Han-		
70	30	1.1410	del als Vitriol-		
71	29	1.1431	öhl vorkommt		1.860
72	28	1.1452	„ engliſche . . .		1.848
73	27	1.1473	Schwefelige tropfbar Bus.		1.45
74	26	1.1494	Hydrat derſelben . .		1.05

Name der Körper	Dichte	Name der Körper	Dichte
Verdünnte Schwefel-		40	1.297562
ſäure nach Dalton		45	1.340860
trockene Säure 81 p. c.	1.850	50	1.386607
80	1.849	55	1.434725
79	1.848	60	1.486006
78	1.847	65	1.540191
77	1.845	70	1.594626
76	1.842	75	1.653449
75	1.838	80	1.709026
74	1.833	85	1.760161
73	1.827	90	1.804971
72	1.819	95	1.831763
71	1.810	100	1.840556
70	1.801	Säure bei 25° C 0 p. c.	0.995478
69	1.791	2.5	1.011532
68	1.780	5	1.027204
67	1.769	10	1.060449
66	1.757	20	1.131126
65	1.744	30	1.207842
64	1.730	40	1.286807
63	1.715	50	1.377973
62	1.699	60	1.476711
61	1.684	70	1.586291
60	1.670	80	1.699580
58.6	1.650	90	1.793986
50	1.520	100	1.828646
40	1.408	Unterſchwefelſäure .	1.347
30	1.300	Schwefelblauſäure .	1.0203
20	1.200	Schwefelnaphtalin-	1.3
10	1.100	ſäure, feſte Far.	1.4
Verdünnte Schwefel-		Tantalſäure . . Eck.	6.500
ſäure nach Delezenne		Weinſteinſäure . .	1.750
Säure bei 15° C 0 p. c.	0.998635	Wolframſäure . . Her.	5.274
5	1.028375	Aeide caprique 15° C	
10	1.065856	Chev.	0.910
15	1.099755	» kynique 8°.5 C Pli.	1.637
20	1.137816	Salmiak, natürlicher .	1.528
25	1.176687	Salze überhaupt: natür-	2.9
30	1.215421	liche, mineraliſche .	1.2
35	1.256211		

Name der Körper	Dichte	Name der Körper	Dichte
Saphir (rhomb. Corund.) roth . Ms.	3.909	1/7 6/7	1.093
„ blau	3.979	1/8 7/8	1.081
Sauſſurit . . . . H.	3.256	1/9 8/9	1.071
Scapolith (pyram. Feldſpath) . . . . H.	2.724	Schwefelkies (hexaedr.) Ms.	4.9 5.05
Schabaſit (rhomb. Kuphonſpath) . . Ms.	2.0 2.1	Schwefelkohlenſtoff . .	1.272
Schaumkalk	2.533	Schwefelkupfer . . Her.	5.792
Schießpulver, gehäuft .	0.836	Schwefelmolybdän . .	4.138 4.569
„ geſchüttelt . . .	0.932	Schwefelnatronlöſung Gui.	
„ geſtampft . . .	1.745	½ Schwefelnatr. ½ Waſſ.	1.412
Schillerſpath (diatomer) . . . . Ms.	2.6 2.8	1/3 2/3	1.270
Schörl	2.920 3.212	1/4 3/4	1.190
Schörlit	3.530	1/5 4/5	1.151
Schrifterz . . . . Rei.	5.723	1/6 5/6	1.125
Schwarzeiſenſtein (untheilb. Manganerz) Ms.	4.0 4.2	1/7 6/7	1.106
Schwarzkohle (harzige Steinkohle) . . Ms.	1.271	1/8 7/8	1.093
Schwarzſpiesglaserz (diprism. Kupferglanz) Ms.	5.7 5.8	1/9 8/9	1.083
Schwefel, natürlicher Ms.	1.9 3.6	1/10 9/10	1.073
„ (prismatiſch.) . Ms.	2.072	Schwefelſilber . . .	6.900
„ gediegen . . .	2.033	Schwefelwismuth . .	7.591
„ dick flüſſig . . .	2.325	Schwerſpath (prism. Halbaryt) . . . . „ blaßgelb v. Harz H.	4.426
Schwefelantimon (1½)	4.600	„ bläulichweiß von Kremnitz . . H.	4.412
Schwefelarſenik roth .	3.600	„ ſchmalteblau von Siebenbürgen H.	4.473
„ gelb .	3.480	„ weiß, durchſichtig H.	4.480
Schwefelblei	7.585	„ „ vom Harz H.	4.415
Schwefelchlorid . . .	1.600	„ „ kryſtall. von Freiberg . . Ms.	4.446
Schwefelkalilöſung Gui.		Schwerſtein (pyramid. Scheelbaryt) Ms.	6.0 6.1
½ Th. Schwefkal. ½ Waſſ.	1.369	„ weiß, theilbar . .	6.076
1/3 2/3	1.227	Sedativſalz	1.479
1/4 3/4	1.167	Selen	4.300 4.320
1/5 4/5	1.129	Selenblei bei 10°.5 . .	7.697
1/6 5/6	1.109	Selenſilber . . G. R.	8.0

Name der Körper	Dichte	Name der Körper	Dichte
Serpentin . . . Ms.	2.684	Sodalit (dodekaed. Ku-	
	2.507	phonſpath). Ms. et H.	2.295
H.	2.560	Soole von Kochſalz bei	
Silber (hexaedr.) gediegen	10.4723	15° R mit 0.71 p. c. Salz	1.005
„ gegoſſen . . .	10.474	1.42 Bis.	1.010
„ gehämmert . . .	10.511	2.11	1.015
„ Sterling oder eng-		2.82	1.020
liſches Probeſilber	10.200	3.52	1.025
„ nach dem franzöſi-		4.21	1.030
ſchen Münzfuße		4.91	1.035
vom Jahre 1780		5.69	1.040
gegoſſen . . .	10.047	6.28	1.045
„ dasſelbe gemünzt .	10.048	6.97	1.050
„ in Kronthalern .	10.106	7.65	1.055
	10.227	8.33	1.060
„ „ Speciesthalern	10.196	9.00	1.065
	10.227	9.68	1.070
„ „ Zwanzigern . .	9.217	10.53	1.075
	10.106	11.02	1.080
Silberjodid	5.614	11.73	1.085
Silberoxyd . . . Her.	7.143	12.35	1.090
Silber, phosphorſaures		13.01	1.095
(7°.5) C . . .	7.32	13.67	1.100
„ pyrophosphorſau-		14.33	1.105
res . . . Stro.	5.306	15.00	1.110
Silberkupferglanz . .	6.255	15.64	1.115
Silberamalgam 36 S.		16.29	1.120
64 G.	14.000	16.94	1.125
Silberantimon 24 S.		17.59	1.130
76 A.	9.600	18.23	1.135
Silberſulphurid . . .	6.900	18.87	1.140
Silbit	2.161	19.52	1.145
Siliciumeiſen mit Koh-	6.800	20.15	1.150
lenſtoff	7.300	20.79	1.155
Sillimanit . . . . Bow.	3.41	21.43	1.160
Skorodit . . . . Ms.	3.162	22.06	1.165
Smaragd	2.678	22.69	1.170
	2.775	23.32	1.175
Sodabiſulphurid . . .	1.800	23.94	1.180
Sodaalaun	1.600	24.57	1.185

Name der Körper	Dichte
25.19	1.190
25.82	1.195
26.44	1.200
27.50	1.205
Spathe . . . . Ms.	2.0 3.7
Schillerſpath . Ms.	2.6 3.4
Diſtenſpath . Ms.	3.5 3.7
Triphanſpath . Ms.	2.8 3.1
Dyſtomſpath . Ms.	2.9 3.0
Kuphonſpath . Ms.	2.0 2.5
Petalinſpath . Ms.	2.4 2.5
Feldſpath . . Ms.	2.5 2.8
Augitſpath . . Ms.	2.7 3.5
Lazurſpath . . Ms.	2.9 3.0
Spatheiſenſtein (parachros Baryt) . . Ms.	3.829
Speck . . . . . . Bri.	0.948
Speckſtein . . . . Bre.	2.604
Speiskobold (octaedr. Kobaltkies) . . Ms.	6.4 6.6
Sphärulit . . . Bre.	2.52 2.40
Sphen (prism. Titanerz) . . . . . Ms.	3.468
Spiesglanz, regul. . .	6.640 6.624
„ Protoxyd . Boul.	5.778
„ Deutoxyd . Boul.	6.525
Spiesglanzſilber (prism. Antimon) . . Hy.	9.820 9.4406
Spiesglanzweiß (prism. Antimonbaryt) . Ms.	5.5 5.6
Spiesglanzzinn 1 Sp. 1 Z.	6.803
„ 1 „ 3 „	7.059
Spinell (dodec. Corund.) H.	2.282
Spinellane (prismat. Antimon) . . . . Kla.	2.282
Spodumen (prismat. Triphanſpath) . . Ms.	3.0 3.1
Spreuſtein	2.300
Sprödglanzerz (prism. Melanglanz) . . Ms.	5.9 6.4
Stahl, gehämmert . .	7.840
„ gehärtet in Waſſer	7.816
„ gehämmert und gehärtet in Waſſer	7.818
„ weicher	7.833
Stangenkohle (harzloſe Steinkohle) . . . Ms.	1.400
Staurolith (prismatoid. Granat) . . . . Ms.	3.3 3.9
Stearopten von Anisöhl bei 12°	1.014
„ 25°	0.9849
„ 50°	0.9669
Steinmark . . . Bre.	2.435 2.492
Sternbergit . . . . H.	4.215
Stilbit	2.75 2.95
Stilpnoſiderit . . . Ull.	3.611
Storax	1.1098
Strahlerz	4.192
Strahlkies (prism. Eiſenkies)	4.678 4.847
Strahlſtein (hemiprism. Augitſpath)	2.931

Name der Körper	Dichte
Strahlzeolith (prismatoid. Kuphonſpath) Ms.	2.161
Straß	3.5 3.6
Strontionerde . . Has.	1.647
„ ſchwefelſaure . .	1.460
„ ſalpeterſaure . Has.	3.006
„ ſalzſaure . . Has.	1.440
Strontianit (peritomer Halbaryt) . . . Ms.	3.6 3.8
Strontium	4.0 5.0
Süßerde	2.967
T.	
Tabasher bei 13°.3 kalkiger . . . . Tur.	2.189
„ durchſcheinend Tur.	2.167
„ durchſichtig . Tur.	2.160
Tachylit . . . Bre.	2.5 2.54
Tafelſpath, bräunlich (prismatoid. Augitſpath) . . . . Ms.	2.805
Talg	0.942
Talkhydrat . . . Cle.	2.350
Tantalit (prism. Tantalerz) . . . . Ms.	6.0 6.3
Tellur, gediegen . Mag.	6.138
Tellurblei . . . G. R.	8.159
Tellurſilber	8.565
Tennantit . . . . Phi.	4.375
Terpentin, flüſſig . .	0.991
Thonerde, reine . . .	0.820
„ eſſigſaure . . Has.	1.245
„ ſchwefelſaure . Has.	2.219
„ ſalpeterſaure . Has.	1.645
„ geglühte . . .	2.000
Thon	2.680 1.800
Thonſtein . . . Hof.	1.819 2.198
Thorerde . . . . Bz.	9.402
Thorit . . . . . Bz.	4.63
Titan . . . . Wol.	5.300
Titanoxyd	3.820
Titaneiſen (axotom. Eiſenerz) . . . . Ms.	4.4 4.8
Topas (prismat.) durchſichtig . . . . Ms.	3.499
Tremolit (hemiprismat. Augitſpath) weiß H.	2.931
Tungſtein, brauner . .	5.576
„ grauer	5.800 6.028
„ in metall. Zuſtand	17.600
„ v. Schlackenwald	6.076
Turmalin (rhomb.) grün Ms.	3.076
Türkis	2.86 3.000
U.	
Uran . . . . . Rich. Kla.	6.940 6.440
Uranpecherz (untheilb. Uranerz) . . . Ms.	6.4 6.6
Urin von Menſchen . Bri.	1.015
V.	
Vauquelenit . . Leon.	5.5 5.78
Verſteinertes Holz . .	2.045 2.675
Veſuvian (pyram. Granat)	3.3 3.4

Name der Körper	Dichte
Vitriolſalz . . . Ms.	1.8
	2.3
Vitriol, natürl. Eiſenvitriol . . . Ms.	1.832
„ Danziger . . .	1.715
„ engliſcher . . .	1.839
	1.880
Kupfervitriol . Hof.	2.194
	2.230
natürl. Zinkvitriol Ms.	2.036
W.	
Wachs gelbes . . . Bri.	0.965
„ weißes . . . Bri.	0.969
Walkerthon trocken . .	2.583
„ mit Waſſer . . .	2.632
Wallfiſchtheer	0.923
Wallrath	0.943
Wandſtein (paratom. Kalkhaloid) . . Ms.	2.95
	3.1
Waſſer rein deſtillirt .	1.000
Regenwaſſer b. 14° R v. d. größt. Dichte Zim.	1.0001
	1.0013
möglichſt oxygenirt mit) 475fachem Volumen Oxygengas) . Then.	1.452
Waſſer vom Meere und zwar: in einer geograph. Breite Länge	
30° 6′ S. 11° 42′ O. J.Dav.	1.02667
26° 55′ 7° 34′	1.02671
6° 0′ N. 19° 17′ W.	1.02667
9° 5′ 25° 8′	1.02671
12° 6′ 28° 28′	1.02671
15° 56′ 32° 38′	1.02672
18° 15′ 34° 6′	1.02672
20° 55′ 35° 49′	1.02823
23° 27′ 37° 8′	1.02823
28° 1′ 37° 57′	1.02762
31° 8′ 38° 27′	1.02823
34° 8′ 37° 57′	1.02742
42° 10′ 30° 36′	1.02721
44° 51′ 26° 37′	1.02721
47° 5′ 14° 12′	1.02721
49° 3′ 8° 1′	1.02648
vom todten Meere	1.245
„ „ „ Gme.	1.21223
Waſſer v. Achner Schwefelquellen . . .	1.004
„ Burgſcheider Schwefelquellen . . .	1.004
„ ungeſchwefelt . .	1.003
„ v. Spaa, Pouhonquelle bei 8° R .	1.001
Geronſterquelle bei 7.°5 R	1.0008
Souvenirquel. 7¾° R	1.00075
erſte Tonneletquelle bei 7¾° R . . .	1.00075
zweite Tonneletquelle bei 7¾° R	1.0007
„ Mineral v. Baaden, bei 13° bis 14° R .	1.004
„ von Bartfeld . .	1.0163
„ „ Barèges . .	1.00037
„ „ Bilin bei 16° R	1.007374
mittlere Quelle .	1.00968
Seitenquelle . .	1.00826
kleinere im Gerölle	1.00823
„ Borſeker in Siebenbürgen bei 14° R	1.098
„ vom Eger Franzensbrunnen, von Eiſen befreit bei 18° .	1.00539
Salzquelle . . Bz.	1.004883
„ Forges bei 18° Bri.	1.00012
„ Gaſtein . . . Hüh.	1.0002
„ Karlsbaderſprudel . . . . Bz.	1.004975

Name der Körper	Dichte
Waſſer von Luchatſchowitz 17°.C . Pla.	1.00766 1.008035
» Liebwerdaer . Reu.	
Chriſtiansquel. b. 8°R	1.0009
Joſephinenquelle .	1.0018
Liebwerdaer Stahlbrunn	1.0027
Wilhelmsbrunn .	1.0018
» Marienbad. Ferdinandsquel. b. 8° Stein.	1.004627
» Plombières . .	1.00012
» Pyrmonter . .	1.0024
» Rohitſcher . . .	1.0048
» Ronneby . . Bz.	1.00255
» Saidſchützer Bitterwaſſer v. Hauptbr.	1.01761
Roſesbrunn . .	1.01730
» Selzer	1.0027
» Sulzer Salzbrunnen (10° R) . .	1.0400
» Sales in Pyrmont	1.0502
» Rocoaro (im Venet.) bei 17°.5 R . .	1.00438
mit Kohlenſäure geſättigt	1.524
Waſſerblei (rhomb. Molybdänglanz) . . Ms.	4.591
Waſſerglas . . . Fs.	1.25
Wawellit	2.337
Weißſylvanerz . . Rei.	10.678
Weihrauch	1.173
Wein: Bordeaux . Bri.	0.994
» Burgunder, rother Bri.	0·993
» » weißer	0.988
» Cap roth . . .	1.018
» » weiß . . .	1.039
» Canary	1.033
» Champagner . Bri.	0.998
» Conſtanzer . Bri.	1.082
» franzöſiſcher weißer	1.02
Wein: Incrançon . Bri.	0.993
» Madera . . . Bri.	1.038
» Malaga . . . Bri.	1.022
» Mosler	0.916
» Öſterreicher . .	1.000
» Pekaret . . . Bri.	0.9997
» Porto	0.993
» Rhein	0.999
» Tokayer . . . Bri.	1.054
» Xeres . . . Bri.	0.992
Weinſtein	1.849
» roh	1.900
Weinſteinrahm . . .	1.900
Weinſteinſalz	1.550
Weizen	1.346
Wetzſchiefer . . . Kir.	2.722
Wismuth (octaed.) gediegen . . . . Her.	9.737 9.312
Wismuth gegoſſen . .	9.756 9.822
» geſchwefelt . Her.	6.467 7.591
» natürlicher . . .	9.020 9.570
Wismuthblei 1 W. 1 B. Mus.	10.710
Wismuthglanz (priſm). Ms.	6.549
Wismuthoxydhydrat Her.	6.761
» geglüht Boul. . . Her.	8.968 8.211
Wismuthblende . . .	5.912 6.006
Wismuthocker . . Bri.	4.361
Wismuthzinn 41 Th. W. 59 Zinn . . .	8.345
» 1 Th. W. 3 Th. Z.	7.776
Witherit (dipr. Halbaryt) weiß halbdurchſichtig Ms.	4.301
Withanit . . . . Bw.	3.137
Wolfram metall. . All. Buch.	17.220 17.400

Name der Körper	Dichte
Wollaſtonit	2.805
Wootz	7.665
Y.	
Yttererde . . . Eck.	4.842
„ phosphorſ. 16°C Bz.	4.5577
„ ſchwefelſ., kryſt. Eck.	2.79
Yttertantal . . . All.	5.838
Yttrocerit . . . . Bz.	3.447
Yu . . . . . . Rem.	2.86 3.4
Z.	
Zeichenſchiefer . Kir.	2.114
Ber.	2.186
Zein . . . . Biz.	1.0347
Zink, geſchmolzen . Bri.	6.861
„ zuſammengepreßt Bri.	7.191
„ gegoſſen . . .	7.190
„ oxyd (prism. Zinkerz) . . . Ms.	5.432
„ ſchwefelſaures . .	1.327
„ ſalpeterſaures . Has.	2.096
„ ſalzſaures . . Has.	1.577
„ Baryt (rhomb.) honiggelb . . .	4.441
Zinkenit . . . G. R.	5.303
Zinn, möglichſt rein Kup.	7.2912
„ a. Böhmen, gegoſſen	7.312
„ „ England . Bri.	7.291
„ „ China, Japan, Oſtindien . Bri.	7.296
„ „ Malaga . .	7.296
„ „ „ gehämmert	7.306
Zinnamalgam . . Kup.	
1 Th. Zinn 2 Th. Queckſ.	11.3816
1 1	10.3447

Name der Körper	Dichte
2 Th. Zinn 1 Th. Queckſ.	9.3185
3 1	8.8218
Zinnblei: 1 Th. Z. 1 Th. B.	8.8640
2 3	9.2653
1 2	9.5535
2 5	9.7701
1 3	9.9387
2 7	10.0734
1 4	10.1832
3 2	8.4973
2 1	8.2669
5 2	8.1094
3 1	7.9942
Zinnoxydul . . . Her.	6.666
„ geglüht . . . Her.	6.639
„ Hydrat	4.933
Zinndeutoxyd . . . Bus.	6.900
Zinnperchlorid . . .	2.250
Zinnproſulphürid . Bus.	5.267
Zinnbiſulphurid . . Bus.	4.415
Zinnkies . . . . . Kh.	4.350
Zinnober (peritom. Rubinblende) . .	8.098
„ dunkelroth . . .	7.786
„ kryſtalliſirt . . .	10.218
Zinnſtein (pyram. Zinnerz) kryſtalliſirt	6.960
„ ſtängelig zuſammg.	6.519
Zircon (pyramidal.) H.	4.416
Zirconerde	4.300
Zöleſtin (prismatoid. Halbaryt) weiß durchſcheinend . . . . . Ms.	3.858
Zoiſit (prismatoid. Augitſpath)	3.269 3.334 3.336 3.355
Zucker (weiß)	1.6065
Zurlith . . . . Mont.	2.274

b. Dichte der Gaſe und Dünſte.

Name des Gaſes oder Dunſtes		Dichte	Gewicht eines Lichtes bei 0° C und 0' B. in Granen
Atmoſphäriſche Luft . . .	G. L.	1.0000	1.2991
Ätherdünſte uud zwar:			
Benzoeätherdunſt . . .	Dum.	5.409	7.0267
Eſſigätherdunſt . . .	Dum.	3.0634	3.9796
Jodwaſſerſtoffätherdunſt . .	G. L.	5.4749	7.1123
Oxalätherdunſt . . .	Dum.	5.087	6.6084
Salpeterätherdunſt . . .	Then.	2.627	3.4127
Salzätherdunſt . . .	Then.	2.2190	2.8827
„ ſchwerer		3.4434	4.4728
Schwefelätherdunſt . . .	G. L.	2.5860	3.3595
Alkoholdunſt	G. L.	1.6133	2.0958
Ammoniakgas . . .	B. et A.	0.5967	0.7752
Arſenikdunſt	Dum.	5.1839	6.734
Arſenikwaſſerſtoffgas . . .	Dum.	2.695	3.5023
Bordunſt	Dum.	0.7487	0.9726
Bromdunſt	Bz.	5.3934	7.0065
Bromchlorid	Dum.	3.942	5.1212
Bromſäuregas	Bz.	2.731	3.5479
Chlorgas . . .	G. L. et Then.	2.4216	3.2088
Chlorarſenik in Min. . . .	Dum.	6.3006	8.1850
Chlorkieſel	Dum.	5.9390	7.7154
Chlorkohlenſtoff	Thom.	3.4722	4.5106
Chlorphosphordunſt in Min. .	Dum.	4.875	6.3332
Chlorperoxydgas	Gme.	4.1182	5.3498
Chlorprotoxydgas . . .	Dav.	2.4090	3.1294
Chlorbor	Dum.	3.942	5.1212
Chlorcyangas	G. L.	2.123	2.7578
Chlorzinn in Mar. . . .	Dum.	1.1997	1.5583
Chloroxycarbongas . .	I. Dav.	3.3990	4.4156
Chlorſtickſtoffoxydgas		1.5269	1.9835
Chlortian	Dum.	6.836	8.8806
Cyangas	G. L.	1.8064	2.3467
Cyanſaurer Dunſt . . .	G. L.	0.9476	1.2310
Flußſäuregas . . .	Thom.	2.3694	3.0779
Flußborſäuregas . . .	I. Dav.	2.3790	3.0799
Flußſiliciumgas	Dum.	3.600	4.6768
Joddunſt	Bz.	8.7078	11.3122

Name des Gaſes oder Dunſtes		Dichte	Gewicht eines Lichtes bei 0° C und 0' B. in Granen
Joddunſt	Dum.	8.716	11.3231
»	G. L.	8.6195	11.1975
Jodwaſſerſtoffgas	G. L.	4.430	5.7550
Jodſäuregas	Bz.	4.4193	5.7410
Kohlendunſt	Thom.	0.4166	0.5417
Kohlenſäuregas . . .	Bz. et Dul.	1.5245	1.9805
Kohlenoxydgas	Cru.	0.9569	1.2431
Kohlenwaſſerſtoffgas im Max. .	Thom.	0.9816	1.2752
» im Min. . .	Then.	0.5596	0.7270
» aus Steinkohlen . .		0.300 0.654	0.390 0.850
Naphtadunſt von Miano . .	Sau.	2.833	3.6804
Phosgengas	I. Dav.	3.3894	4.4030
Phosphordunſt	Dum.	2.2052	2.8647
Phosphorprofluorid . . .	Dum.	5.9390	7.7154
Phosphorwaſſerſtoff im Min.	G. L. et Then.	1.1912	1.5471
» » im Max.	Thom.	0.9028	1.1728
Queckſilberdunſt	Dum.	6.976	9.0625
Salpetergas	Bér.	1.0388	1.3495
Salpetrigſaures Gas . . .	G. L.	3.1764	4.3243
Salzſäuregas . . .	B. et A	1.2474	1.6205
Sauerſtoffgas . . .	B. et A.	1.10359	1.4335
Schwefeldunſt	Thom.	1.1111	1.4434
Schwefelſäuregas . .	G. L. et Then.	2.1204	2.7546
Schwefeligſaures Gas . . .	Dav.	2.1930	2.8489
Schwefelcarboniddunſt . . .	G. L.	2.6447	3.4357
Schwefelwaſſerſtoffgas .	G. L. et Then.	1.1912	1.5474
Siliciumdunſt	Dum.	1.0197	1.3245
Siliciumfluoridgas . . .	Dum.	5.9390	7.7153
Stickgas	Bz. et Dul.	0.9757	1.2675
Stickſtoffoxydgas	Gme.	1.5252	1.9814
Terpentinöhldunſt . . .	G. L.	5.0130	6.5124
Titandunſt	Dum.	2.107	2.7371
Titanperchloridgas . . .	Dum.	6.836	8.881
Waſſerdunſt	G. L.	0.6231	0.8100
Waſſerſtoffgas . . .	Bz. et Dul.	0.0688	0.0894
Zinndunſt	Dum.	4.053	5.265
Zinnperchloriddunſt . . .	Dum.	9.1997	11.9511

c. Reduction der Beaumé'ſchen Aräometergrade auf das ſpecifiſche Gewicht.

(Nach Jacquin und Huß.)

Beaum. Grade	Specifiſches Gewicht	Beaum. Grade	Specifiſches Gewicht	Beaum. Grade	Specifiſches Gewicht
10°	1.0000	55°	0.7560	35°	1.3190
11	0.9930	56	0.7518	36	1.3311
12	0.9861	57	0.7476	37	1.3434
13	0.9792	58	0.7435	38	1.3559
14	0.9724	59	0.7394	39	1.3686
15	0.9657	60	0.7354	40	1.3815
16	0.9591	61	0.7314	41	1.3947
17	0.9526	62	0.7251	42	1.4082
18	0.9462			43	1.4219
19	0.9399			44	1.4359
20	0.9336	0	1.0000	45	1.4501
21	0.9274	1	1.0070	46	1.4645
22	0.9212	2	1.0141	47	1.4792
23	0.9151	3	1.0213	48	1.4942
24	0.9091	4	1.0286	49	1.5096
25	0.9032	5	1.0360	50	1.5253
26	0.8974	6	1.0435	51	1.5413
27	0.8917	7	1.0511	52	1.5576
28	0.8860	8	1.0588	53	1.5742
29	0.8804	9	1.0666	54	1.5912
30	0.8748	10	1.0745	55	1.6086
31	0.8693	11	1.0825	56	1.6264
32	0.8638	12	1.0906	57	1.6446
33	0.8584	13	1.0988	58	1.6632
34	0.8531	14	1.1071	59	1.6823
35	0.8479	15	1.1155	60	1.7019
36	0.8428	16	1.1240	61	1.7220
37	0.8378	17	1.1326	62	1.7427
38	0.8329	18	1.1414	63	1.7640
39	0.8281	19	1.1504	64	1.7858
40	0.8233	20	1.1596	65	1.8082
41	0.8186	21	1.1690	66	1.8312
42	0.8139	22	1.1785	67	1.8548
43	0.8093	23	1.1882	68	1.8790
44	0.8047	24	1.1581	69	1.9038
45	0.8001	25	1.2082	70	1.9291
46	0.7956	26	1.2184	71	1.9548
47	0.7911	27	1.2288	72	1.9809
48	0.7866	28	1.2394	73	2.0073
49	0.7821	29	1.2502	74	2.0340
50	0.7777	30	1.2612	75	2.0610
51	0.7733	31	1.2724		
52	0.7689	32	1.2838		
53	0.7646	33	1.2954		
54	0.7603	34	1.3071		

IV. Tafel.

Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

a. Längenausdehnung feſter Körper.

Lineare Ausdehnung bei 0° C = 1.000000.

Subſtanzen	Ausdehnung für 0° — 100° C		Beobachter
Antimon	0.00108330	$^1/_{923}$	Sme.
Blei	0.00288200	$^1/_{346}$	Ell.
»	0.00286667	$^1/_{348}$	Sme.
»	0.00287300	$^1/_{348}$	Herb.
»	0.00308600	$^1/_{324}$	Bert.
»	0.00271900	$^1/_{367}$	Mor.
»	0.00284836	$^1/_{351}$	Lav.
»	0 00290200	$^1/_{344}$	Hor.
Bronze	0.00181667	$^1/_{550}$	Sme.
Eis	0.002451200	$^1/_{407}$	Hei.
Eiſen	0.00114600	$^1/_{872}$	Ell.
»	0.00117200	$^1/_{853}$	Herb.
»	0.00119200	$^1/_{838}$	Bert.
»	0.00110000	$^1/_{909}$	Mor.
» (Schmiede=)	0.00122045	$^1/_{819}$	Lav.
» »	0.00125833	$^1/_{794}$	Sme.
» »	0.00115600	$^1/_{865}$	Bor.
» »	0.00115600	$^1/_{865}$	Tral.
» »	0.00114560	$^1/_{872}$	Schw.
» »	0.00111155	$^1/_{899}$	Aug.
» »	0.00111545	$^1/_{896}$	Aug.
» »	0.00112330	$^1/_{890}$	Aug.
» »	0.00114550	$^1/_{872}$	Aug.
» »	0.00144600	$^1/_{691}$	Häll.
» »	0.00126660	$^1/_{789}$	Dul.
» »	0.00116800	$^1/_{856}$	Hor.
» » ſchwach gehämmert	0.00122045	$^1/_{819}$	Dest.

Subſtanzen	Ausdehnung für 0° — 100° C		Beobachter
Eiſen zu Draht gezogen	0.00114010	$^1/_{877}$	Tro.
» (Guß-)	0.00110940	$^1/_{901}$	R.
Glas (Flint engl.)	0.00081166	$^1/_{1298}$	Lav.
» (Flint franz.)	0.00087199	$^1/_{1147}$	Lav.
» weißes	0.00083333	$^1/_{1200}$	Sme.
» »	0.00094400	$^1/_{1059}$	Herb.
» »	0.00099100	$^1/_{1009}$	Bert.
» »	0.00086100	$^1/_{1161}$	Dul.
Glasröhre	0.00077615	$^1/_{1288}$	R.
» von St. Gobain	0.00089089	$^1/_{1122}$	Lav.
» gemeine	0.00087572	$^1/_{1142}$	Lav.
» andere	0.00089760	$^1/_{1114}$	Lav.
» »	0.00091751	$^1/_{1090}$	Lav.
» dünne	0.00092100	$^1/_{1085}$	Hor.
» von 0.2 C Glasdicke	0.00091300	$^1/_{1095}$	Hor.
Glasſtab	0.00080787	$^1/_{1237}$	R.
Glasſtange, maſſ.	0.00091900	$^1/_{1088}$	Hor.
» »	0.00092500	$^1/_{1081}$	Hor.
Gold	0.00140100	$^1/_{713}$	Ell.
»	0.00131100	$^1/_{762}$	Bert.
»	0.00147500	$^1/_{677}$	Mor.
» feines (de depart.)	0.00146606	$^1/_{682}$	Lav.
» nicht geglühet	0.00155155	$^1/_{645}$	Lav.
» geglühet	0.00151361	$^1/_{660}$	Lav.
Hartloth 1 Zink 2 Kupfer	0.00205833	$^1/_{485}$	Lav.
Kalkſpath (rhom. nach der Hauptax.)	0.00286	$^1/_{349}$	Mit.
Klempnerloth	0.00250533	$^1/_{399}$	Sme.
Kohle von Tannenholz	0.0010	$^1/_{1000}$	Hei.
» » Eichenholz	0.0012	$^1/_{833}$	Hei.
Kupfer	0.00171000	$^1/_{584}$	Ell.
» geſchlagenes	0.00170000	$^1/_{588}$	Sme.
» »	0.00191880	$^1/_{521}$	Tro.
» »	0.00179000	$^1/_{558}$	Mor.
» »	0.00178400	$^1/_{560}$	Bor.
» »	0.00172244	$^1/_{581}$	Lav.
» »	0.00171222	$^1/_{584}$	Lav.
» »	0.00184110	$^1/_{543}$	Dul.
Kupfer 8 Zinn 1 Th.	0.007817		Sme.
Marmor von St. Beat.	0.0004181	$^1/_{2391}$	Dest.
» » Carrara	0.0008487	$^1/_{1178}$	Dest.

Subſtanzen	Ausdehnung für 0° — 100° C		Beobachter
Marmor von Solſt	0.00056849	$^{1}/_{1769}$	Dest.
Meſſing	0.00182300	$^{1}/_{548}$	Ell.
»	0.00193332	$^{1}/_{517}$	Sme.
Meſſingdraht	0.00187821	$^{1}/_{532}$	Des.
»	0.00188500	$^{1}/_{530}$	Herb.
Meſſing gegoſſen	0.00187500	$^{1}/_{533}$	Sme.
» »	0.00193400	$^{1}/_{517}$	Bert.
» »	0.00186671	$^{1}/_{535}$	Lav.
» »	0.00188971	$^{1}/_{529}$	Lav.
„ engliſches Stabmeſſing	0.00189280	$^{1}/_{528}$	R.
„ Hamburger	0.00185540	$^{1}/_{538}$	R.
„ Tyroler Tafelmeſſing	0.00190300	$^{1}/_{525}$	Hor.
Palladium	0.00100000	$^{1}/_{1000}$	Wol.
Phosphor von 0° bis 39°.5	0.00142455		Er.
Platin	0.00085655	$^{1}/_{1167}$	Bor.
»	0.00099180	$^{1}/_{1008}$	Tro.
»	0.00085700	$^{1}/_{1167}$	Mor.
»	0.00098390	$^{1}/_{1016}$	Dul.
»	0.00090000	$^{1}/_{1111}$	Wol.
» Silber	0.00197800	$^{1}/_{505}$	Ell.
»	0.00207000	$^{1}/_{483}$	Herb.
»	0.00190500	$^{1}/_{524}$	Bert.
»	0.00198800	$^{1}/_{503}$	Mor.
»	0.00208260	$^{1}/_{480}$	Tro.
Kapellenſilber	0.00190974	$^{1}/_{524}$	Lav.
„ Pariſer	0.00190868	$^{1}/_{524}$	Lav.
Spiegelmetall	0.00193333	$^{1}/_{517}$	Sme.
Spiesglanz	0.00108330	$^{1}/_{923}$	Sme.
Stahl gehärtet	0.00122500	$^{1}/_{816}$	Sme.
» »	0.00137500	$^{1}/_{727}$	Bert.
» » bei 30°R angel.	0.00136900	$^{1}/_{730}$	Lav.
» » deßgleichen	0.00138600	$^{1}/_{721}$	Lav.
» » bei 65° R angel.	0.00123956	$^{1}/_{807}$	Lav.
» weicher	0.00107500	$^{1}/_{930}$	Ell.
» »	0.00118990	$^{1}/_{840}$	Tro.
» »	0.00115000	$^{1}/_{869}$	Sme.
» »	0.00107875	$^{1}/_{927}$	Lav.
» »	0.00107956	$^{1}/_{926}$	Lav.
» »	0.00110400	$^{1}/_{905}$	Bert.
» „	0.00114470	$^{1}/_{873}$	R.

Subſtanzen	Ausdehnung für 0° — 100° C		Beobachter
Stahlſtange	0.00116000	1/862	L.
„ ſteyriſche . . .	0.00115200	1/868	Hor.
„ (Huntsman) . .	0.00107400	1/931	Hor.
„ Fiſcherſcher aus Schafhauſen	0.00111200	1/899	Hor.
Stein (zum Bau) von St. Pernon	0.00043027	1/2324	Dest.
„ „ „ St. Leu .	0.00064890	1/1541	Dest.
Töpferzeug braun engliſch. . .	0.00012	1/8333	
„ mit Kohle poros gemacht .	0.00004	1/25000	
Weichloth 1 Zinn 2 Blei . .	0.00250533	1/399	Sme.
Wismuth	0.00139167	1/718	
Zink, gegoſſen	0.00294167	1/339	Sme.
„	0.00305100	1/328	Mor.
„	0.00296800	1/337	Hor.
„ durch Hämmern um 1/12 verlängert	0.00310833	1/322	Sme.
Zinkloth 1 Th. Zink 2 Th. Kupfer	0.00205833	1/486	Sme.
Zinn gemeines	0.00248330	1/407	Sme.
„ feines	0.00228330	1/438	Sme.
„ „	0.00232200	1/430	Herb.
„ „	0.00255700	1/391	Bert.
„ „	0.00216400	1/462	Mor.
„ „	0.00209300	1/477	Hor.
„ von Falmouth	0.00217298	1/460	Lav.
„ „ Malakka . . .	0.00193765	1/516	Lav.

b. Dichte und Volumen des Waſſers bei verſchiedenen Temperaturen.

(Nach Hallſtröm.)

Volumen und Dichte = 1 bei 4°.1 C. Volumen und Dichte = 1 bei 0° C.

Temperatur	Dichte	Volumen	Dichte	Volumen
0°	0.9998918	1.0001082	1.0000000	1.0000000
1	0.9999382	1.0000617	1.0000466	0.9999536
2	0.9999717	1.0000281	1.0000799	0.9999202
3	0.9999920	1.0000078	1.0001004	0.9998996
4	0.9999995	1.0000002	1.00010817	0.9998918
4.1	1.0000000	1.0000000	1.00010824	0.99989177
5	0.9999950	1.0000050	1.0001032	0.9998968
6	0.9999772	1.0000226	1.0000856	0.9999144
7	0.9999472	1.0000527	1.0000555	0.9999445
8	0.9999044	1.0000054	1.0000129	0.9999872
9	0.9998497	1.0001501	0.9999579	1.0000421
10	0.9997825	1.0002200	0.9998906	1.0001094
11	0.9997030	1.0002970	0.9998112	1.0001888
12	0.9996117	1.0003888	0.9997196	1.0002804
13	0.9995080	1.0004924	0.9996160	1.0003841
14	0.9993922	1.0006081	0.9995005	1.0004997
15	0.9992647	1.0007357	0.9993731	1.0006273
16	0.9991260	1.0008747	0.9992340	1.0007666
17	0.9989752	1.0010259	0 9990832	1.0009176
18	0.9988125	1.0011888	0.9989207	1.0010805
19	0.9986387	1.0013631	0.9987468	1.0012548
20	0.9984534	1.0015490	0.9985615	1.0014406
21	0.9982570	1.0017560	0.9983648	1.0016379
22	0.9980489	1.0019549	0.9981569	1.0018465
23	0.9978300	1.0021746	0.9979379	1.0020664
24	0 9976000	1.0024058	0.9977077	1.0022976
25	0.9973587	1.0026483	0.9974666	1.0025398
26	0.9971070	1.0029016	0.9972146	1.0027932
27	0.9968439	1.0031662	0.9969518	1.0030575
28	0.9965704	1.0034414	0.9966783	1.0033328
29	0.9962864	1.0037274	0.9963941	1.0036189
30	0.9959917	1.0040245	0.9960993	1.0039160

c. Dichte und Volumen des Queckſilbers bei verſchiedenen Temperaturen.

(Nach Dulong und Petit.)

Temperatur	Dichte	Volumen	Temperatur	Dichte	Volumen
—20° C	1.00360	0.99640	5	0.99910	1.00090
19	1.00342	0.99658	6	0.99892	1.00108
18	1.00324	0.99676	7	0.99874	1.00126
17	1.00306	0.99694	8	0.99856	1.00144
16	1.00288	0.99712	9	0.99838	1.00162
15	1.00270	0.99730	10	0.99820	1.00180
14	1.00252	0.99748	11	0.99802	1.00198
13	1.00234	0.99766	12	0.99784	1.00216
12	1.00216	0.99784	13	0.99766	1.00234
11	1.00198	0.99802	14	0.99748	1.00252
10	1.00180	0.99820	15	0.99730	1.00270
9	1.00162	0.99838	16	0.99712	1.00288
8	1.00144	0.99856	17	0.99694	1.00306
7	1.00126	0.99874	18	0.99676	1.00324
6	1.00108	0.99892	19	0.99658	1.00342
5	1.00090	0.99910	20	0.99640	1.00360
4	1.00072	0.99928	21	0.99622	1.00378
3	1.00054	0.99946	22	0.99604	1.00396
2	1.00036	0.99964	23	0.99586	1.00414
— 1	1.00018	0.99982	24	0.99568	1.00432
0	1.00000	1.00000	25	0.99550	1.00450
+ 1	0.99982	1.00018	26	0.99550	1.00468
2	0.99964	1 00036	27	0.99532	1.00486
3	0.99946	1.00054	28	0.99514	1.00504
4	0.99928	1.00072	29	0.99496	1.00522
			30	0.99478	1.00540

d. Volumen und Dichte der Gaſe bei verſchiedenen Temperaturen.

(Nach Gay Luſſac und Dalton.)

Temperatur	Volumen	Dichte	Temperatur	Volumen	Dichte
—30°	0.88750	1.12676	—16°	1.06000	0.94339
29	0.89125	1.12201	17	1.06375	0.94007
28	0.89500	1.11731	18	1.06750	0.93676
27	0.89875	1.11265	19	1.07125	0.93348
26	0.90250	1.10803	20	1.07500	0.93023
25	0.90625	1.10343	21	1.07875	0.92699
24	0.91000	1.09890	22	1.08250	0.92378
23	0.91375	1.09439	23	1.08625	0.92059
22	0.91750	1.08991	24	1.09000	0.91743
21	0.92125	1.08548	25	1.09375	0.91428
20	0.92500	1.08108	26	1.09750	0.91116
19	0.92875	1.07671	27	1.10125	0.90804
18	0.93250	1.07238	28	1.10500	0.90497
17	0.93625	1.06809	29	1.10875	0.90191
16	0.94000	1.06382	30	1.11250	0.89887
15	0.94375	1.05960	31	1.11625	0.89594
14	0.94750	1.05540	32	1.12000	0.89285
13	0.95125	1.05124	33	1.12375	0.88987
12	0.95500	1.04712	34	1.12750	0.88691
11	0.95875	1.04302	35	1.13125	0.88398
10	0.96250	1.03875	36	1.13500	0.88105
9	0.96625	1.03492	37	1.13875	0.87815
8	0.97000	1.03092	38	1.14250	0.87527
7	0.97375	1.02695	39	1.14625	0.87241
6	0.97750	1.02301	40	1.15000	0.86956
5	0.98125	1.01900	41	1.15375	0.86673
4	0.98500	1.01522	42	1.15750	0.86393
3	0.98875	1.01137	43	1.16125	0.86114
2	0.99250	1.00756	44	1.16500	0.85836
1	0.99625	1.00375	45	1.16875	0.85561
0	1.00000	1.00000			
1	1.00375	0.99625	46	1.17250	0.85287
2	1.00750	0.99251	47	1.17625	0.85015
3	1.01125	0.98878	48	1.18000	0.84745
4	1.01500	0.98507	49	1.18375	0.84477
5	1.01875	0.98137	50	1.18750	0.84210
6	1.02250	0.97768	51	1.19125	0.83945
7	1.02625	0.97412	52	1.19500	0.83682
8	1.03000	0.97046	53	1.19875	0.83420
9	1.03375	0.96682	54	1.20250	0.83160
10	1.03750	0.96319	55	1.20625	0.82901
11	1.04125	0.96038	56	1.21000	0.82644
12	1.04500	0.95693	57	1.21375	0.82389
13	1.04875	0.95351	58	1.21750	0.82135
14	1.05250	0.95011	59	1.22125	0.81883
15	1.05625	0.94674	60	1.22500	0.81632

Temperatur	Volumen	Dichte	Temperatur	Volumen	Dichte
—61°	1.22875	0.81383	—81°	1.30375	0.76701
62	1.23250	0.81135	82	1.30750	0.76481
63	1.23625	0.80889	83	1.31125	0.76263
64	1.24000	0.80645	84	1.31500	0.76045
65	1.24375	0.80402	85	1.31875	0.75829
66	1.24750	0.80160	86	1.32250	0.75614
67	1.25125	0.79920	87	1.32625	0.75362
68	1.25500	0.79681	88	1.33000	0.75187
69	1.25875	0.79364	89	1.33375	0.74976
70	1.26250	0.79207	90	1.33750	0.74766
71	1.26625	0.78972	91	1.34125	0.74557
72	1.27000	0.78898	92	1.34500	0.74349
73	1.27375	0.78500	93	1.34875	9.74142
74	1.27750	0.78277	94	1.35250	0.73937
75	1.28125	0.78048	95	1.35625	0.73732
76	1.28500	0.77821	96	1.36000	0.73522
77	1.28875	0.77594	97	1.36375	0.73327
78	1.29250	0.77369	98	1.36750	0.73126
79	1.29625	0.77145	99	1.37125	0.72926
80	1.30000	0.76923	100	1.37500	0.72727

e. Ausdehnung mehrerer anderer tropfbarer Körper.

Volumen bei 0° C = 1.

Name	Volumen bei 100° C	Ausdehnung von 0° — 100°	Experimentator
Äther	1.07000	$^1/_{14}$	Dal.
Alkohol	1.10000	$^1/_{10}$	Dal.
Fette Öhle überhaupt .	1.08000	$^1/_{12.5}$	Dal.
Baumöhl	1.12600	$^1/_7$	Ach.
»	1.15000	$^1/_{6.7}$	L.
Leinöhl	1.16200	$^1/_9$	
Geſättigte Kochſalzlöſung	1.05000	$^1/_{20}$	Dal.
Salpeterſäure . . .	1.10000	$^1/_{10}$	Dal.
Salzſäure	1.06000	$^1/_{17}$	Dal.
Schwefelſäure . . .	1.06000	$^1/_{17}$	Ach.
» . . .	1.0758	$^1/_{13}$	Dal.
Terpentinöhl . . .	1.07000	$^1/_{14}$	Dal.
Waſſer	1.04775	$^1/_{20.92}$	Hall.

d. Comparativer Stand mehrerer Thermometer aus verſchiedenen Flüſſigkeiten bei denſelben Temperaturen.

1. Nach de Luc.

Queckſilber	Olivenöhl	Kamillenöhl	Quendel-öhl	Salzſoole geſättigte	Alkohol	1 Thl. Alkoh. 1 Thl. Waſſer	1 Thl. Alkoh. 3 Thl. Waſſer	Waſſer
80°R	80°.0	80°.0	80°.0	80°.0	80°.0	80°.0	80°.0	80°.0
75	74.6	74.7	74.3	74.1	73.8	73.2	71.6	71.0
70	69.4	69.5	68.8	68.4	67.8	66.7	62.9	62.0
65	64.4	64.3	63.5	62.6	61.9	60.6	55.2	53.5
60	59.3	59.1	58.3	57.1	56.2	54.8	47.7	45.8
55	54.2	53.9	53.3	51.7	50.7	49.1	40.6	38.5
50	49.2	48.8	48.3	46.6	45.3	43.6	34.4	32.0
45	44.0	43.6	43.4	41.2	40.2	38.4	28.4	26.1
40	39.2	38.6	38.4	36.3	35.1	33.3	23.0	20.5
35	34.2	33.6	33.5	31.3	30.3	28.4	18.0	15.9
30	29.3	28.7	28.6	26.5	25.6	23.9	13.5	11.2
25	24.3	23.8	23.8	21.9	21.0	19.4	9.4	7.3
20	19.3	18.9	19.0	17.3	16.5	15.3	6.1	4.1
15	14.4	14.1	14.2	12.8	12.2	11.1	3.4	1.6
10	9.5	9.3	9.4	8.4	7.9	7.1	1.4	0.2
5	4.7	4.6	4.7	4.2	3.9	3.4	0.1	0.4
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
— 5				4.1	3.9			
—10				8.0	7.7			

2. Nach Gay-Luſſac.

Temperatur nach C	Waſſer	Alkohol	Schwefelkohlenſtoff	Schwefeläther
0	0.00	0.00	0.00	0.00
5	3.34	5.55	6.14	8.15
10	6.61	11.43	12.01	16.17
15	10.50	17.51	17.98	24.16
20	13.15	23.34	23.80	31.83
25	16.06	29.15	29.65	39.14
30	18.85	34.74	35.06	46.42
35	21.52	40.28	40.48	52.06
40	24.10	45.68	45.77	58.77
45	26.50	50.85	51.08	65.48
50	28.56	56.02	56.28	72.01
55	30.60	61.01	61.14	78.38
60	32.42	65.96	66.21	
65	34.02	70.74		
70	35.47	75.48		
75	36.70	80.18		

V. Tafel.

Reduction der Thermometergrade.

a. Reduction der verſchiedenen Scalen.

$\frac{5}{4} R = C$ $\frac{9}{4} R + 32 = F$

Réaum. Grade R	machen		Réaum. Grade R	machen	
	Celſiſche C	Fahrenheit'ſche F		Celſiſche C	Fahrenheit'ſche F
0°	0°	32°			
1	1.25	34.25	41°	51.25	124.25
2	2.50	36.50	42	52.50	126.50
3	3.75	38.75	43	53.75	128.75
4	5.00	41.00	44	55.00	131.00
5	6.25	43.25	45	56.25	133.25
6	7.50	45.50	46	57.50	135.50
7	8.75	47.75	47	58.75	137.75
8	10.00	50.00	48	60.00	140.00
9	11.25	52.25	49	61.25	142.25
10	12.50	54.50	50	62.50	144.50
11	13.75	56.75	51	63.75	146.75
12	15.00	59.00	52	65.00	149.00
13	16.25	61.25	53	66.25	151.25
14	17.50	63.50	54	67.50	153.50
15	18.75	65.75	55	68.75	155.75
16	20.00	68.00	56	70.00	158.00
17	21.25	70.25	57	71.25	160.25
18	22.50	72.50	58	72.50	162.55
19	23.75	74.75	59	73.75	164.75
20	25.00	77.00	60	75.00	167.00
21	26.25	79.25	61	76.25	169.25
22	27.50	81.50	62	77.50	171.50
23	28.75	83.75	63	78.75	173.75
24	30.00	86.00	64	80.00	176.00
25	31.25	88.25	65	81.25	178.25
26	32.50	90.50	66	82.50	180.50
27	33.75	92.75	67	83.75	182.75
28	35.00	95.00	68	85.00	185.00
29	36.25	97.25	69	86.25	187.25
30	37.50	99.50	70	87.50	189.50
31	38.75	101.75	71	88.75	191.75
32	40.00	104.00	72	90.00	194.00
33	41.25	106.25	73	91.25	196.25
34	42.50	108.50	74	92.50	198.50
35	43.75	110.75	75	93.75	200.75
36	45.00	113.00	76	95.00	203.00
37	46.25	115.25	77	96.25	205.25
38	47.50	117.50	78	97.50	207.50
39	48.75	119.75	79	98.75	209.75
40	50.00	122.00	80	100.00	212.00

$\frac{4}{5}$ C = R $\frac{9}{5}$ C + 32 = F.

Celſiſche Grade C	machen		Celſiſche Grade C	machen		Celſiſche Grade C	machen	
	Reaumureſche R	Fahrenheit'ſche F		Reaumureſche R	Fahrenheit'ſche F		Reaumureſche R	Fahrenheit'ſche F
0°	0°	32.00						
1	0.80	33.80	36°	28.80	96.80	71°	56.80	159.80
2	1.60	35.60	37	29.60	98.60	72	57.60	161.60
3	2.40	37.44	38	30.40	100.40	73	58.40	163.40
4	3.20	39.20	39	31.20	102.20	74	59.20	165.20
5	4.00	41.00	40	32.00	104.00	75	60.00	167.00
6	4.80	42.80	41	32.80	105.80	76	60.80	168.80
7	5.60	44.60	42	33.60	107.60	77	61.60	170.60
8	6.40	46.40	43	34.40	109.40	78	62.40	172.40
9	7.20	48.20	44	35.20	111.20	79	63.20	174.20
10	8.00	50.00	45	36.00	113.00	80	64.00	176.00
11	8.80	51.80	46	36.80	114.80	81	64.80	177.80
12	9.60	53.60	47	37.60	116.60	82	65.60	179.60
13	10.40	55.40	48	38.40	118.40	83	66.40	181.40
14	11.20	57.20	49	39.20	120.20	84	67.20	183.20
15	12.00	59.00	50	40.00	122.00	85	68.00	185.00
16	12.80	60.80	51	40.80	123.80	86	68.80	186.80
17	13.60	62.60	52	41.60	126.60	87	69.60	188.60
18	14.40	64.40	53	42.40	127.40	88	70.40	190.40
19	15.20	66.20	54	43.20	129.20	89	71.20	192.20
20	16.00	68.00	55	44.00	131.00	90	72.00	194.00
21	16.80	69.80	56	44.80	132.80	91	72.80	195.80
22	17.60	71.60	57	45.60	134.60	92	73.60	197.60
23	18.40	73.40	58	46.40	136.40	93	74.40	499.40
24	19.20	75.20	59	47.20	138.20	94	75.20	201.20
25	20.00	77.00	60	48.00	140.00	95	76.00	203.00
26	20.80	78.80	61	48.80	141.80	96	76.80	204.80
27	21.60	80.60	62	49.60	143.60	97	77.60	206.60
28	22.40	82.40	63	50.40	145.40	98	78.40	208.40
29	23.20	84.20	64	51.20	147.20	99	79.20	210.20
30	24.00	86.00	65	52.00	149.00	100	80.00	212.00
31	24.80	87.80	66	52.80	150.80			
32	25.60	89.60	67	53.60	152.60			
33	26.40	91.40	68	54.40	154.40			
34	27.20	93.20	69	55.20	156.20			
35	28.00	95.00	70	56.00	158.00			

$\frac{5}{9}$ (F — 32) = C. $\frac{4}{9}$ (F — 32) = R.

Fahren=heit'ſche F	machen C	machen R	F	machen C	machen R	F	machen C	machen R
0°	—17.78	—14.22						
1	17.22	13.77	41°	5.00	4.00	81°	27.22	21.77
2	16.67	13.33	42	5.56	4.44	82	27.78	22.22
3	16.11	12.88	43	6.11	4.88	83	28.33	22.66
4	15.56	12.44	44	6.67	5.33	84	28.89	23.11
5	15.00	12.00	45	7.22	5.77	85	29.44	23.55
6	—14.44	—11.55	46	7.78	6.22	86	30.00	24.00
7	13.89	11.11	47	8.33	6.66	87	30.56	24.44
8	13.33	10.66	48	8.89	7.11	88	31.11	24.88
9	12.78	10.22	49	9.44	7.55	89	31.67	25.33
10	12.22	9.77	50	10.00	8.00	90	32.22	25.77
11	—11.67	— 9.33	51	10.56	8.44	91	32.78	26.22
12	11.11	8.88	52	11.11	8.88	92	33.33	26.66
13	10.56	8.44	53	11.67	9.33	93	33.89	27.11
14	10.00	8.00	54	12.23	9.77	94	34.44	27.55
15	9.44	7.55	55	12.78	10.22	95	35.00	28.00
16	— 8.89	— 7.11	56	13.33	10.66	96	35.56	28.44
17	8.33	6.66	57	13.89	11.11	97	36.11	28.88
18	7.78	6.22	58	14.44	11.55	98	36.67	29.33
19	7.22	5.77	59	15.00	12.00	99	37.22	29.77
20	6.67	5.33	60	15.56	12.44	100	37.78	30.22
21	— 6.11	— 4.88	61	16.11	12.88	101	38.33	30.66
22	5.56	4.44	62	16.67	13.33	102	38.89	31.11
23	5.00	4.00	63	17.22	13.77	103	39.44	31.55
24	4.44	3.55	64	17.78	14.22	104	40.00	32.00
25	3.89	3.11	65	18.33	14.66	105	40.56	32.44
26	— 3.33	— 2.66	66	18.89	15.11	106	41.11	32.88
27	2.78	2.22	67	19.44	15.55	107	41.67	33.33
28	2.22	1.77	68	20.00	16.00	108	42.22	33.77
29	1.67	1.33	69	20.56	16.44	109	42.78	34.22
30	1.11	0.88	70	21.11	16.88	110	43.33	34.66
31	— 0.56	— 0.44	71	21.67	17.33	111	43.89	35.11
32	0.00	0.00	72	22.22	17.77	112	44.44	35.56
33	+ 0.56	+ 0.44	73	22.78	18.22	113	45.00	36.00
34	1.11	0.88	74	23.33	18.66	114	45.56	36.44
35	1.67	1.33	75	23.89	19.11	115	46.11	36.88
36	2.22	1.77	76	24.44	19.55	116	46.67	37.33
37	2.78	2.22	77	25.00	20.00	117	47.22	37.77
38	3.33	2.66	78	25.56	20.44	118	47.78	38.22
39	3.89	3.11	79	26.11	20.88	119	48.33	38.66
40	4.44	3.55	80	26.67	21.33	120	48.89	39.11

Fahren-heit'ſche F	machen C	machen R	F	machen C	machen R	F	machen G	machen R
121°	49.44	39.55	156°	68.89	55.11	191°	88.33	70.66
122	50.00	40.00	157	69.44	55.55	192	88.89	71.11
123	50.56	40.44	158	70.00	56.00	193	89.44	71.55
124	51.11	40.88	159	70.56	56.44	194	90.00	72.00
125	51.67	41.33	160	71.11	56.88	195	90.56	72.44
126	52.22	41.77	161	71.67	57.33	196	91.11	78.88
127	52.78	42.22	162	72.22	57.77	197	91.67	73.33
128	53.33	42.66	163	72.78	58.22	198	92.22	73.77
129	53.89	43.11	164	73.33	58.66	199	92.78	74.22
130	54.44	43.55	165	73.59	59.11	200	93.33	74.66
131	55.00	44.00	166	74.44	59.55	201	93.89	75.11
132	55.56	44.44	167	75.00	60.00	202	94.44	75.55
133	56.11	44.88	168	75.56	60.44	203	95.00	76.00
134	56.67	45.33	169	76.11	60.88	204	95.56	76.44
135	57.22	45.77	170	76.67	61.33	205	96.11	76.88
136	57.78	46.22	171	77.22	61.77	206	96.67	77.33
137	58.33	46.66	172	77.78	62.22	207	97.22	77.77
138	58.89	47.11	173	78.33	62.66	208	97.78	78.22
139	59.44	47.55	174	78.89	63.11	209	98.33	78.66
140	60.00	48.00	175	79.44	63.55	210	98.89	79.11
141	60.56	48.44	176	80.00	64.00	211	99.44	79.55
142	61.11	48.88	177	80.56	64.44	212	100.00	80.00
143	61.67	49.33	178	81.11	64.88			
144	62.22	49.77	179	81.67	65.33			
145	62.78	50.22	180	82.22	65.77			
146	63.33	50.66	181	82.78	66.22			
147	63.89	51.11	182	83.33	66.66			
148	64.44	51.55	183	83.89	67.11			
149	65.00	52.00	184	84.44	67.55			
150	65.56	52.44	185	85.00	68.00			
151	66.11	52.88	186	85.56	68.44			
152	66.67	53.33	187	86.11	68.88			
153	67.22	53.77	188	68.67	69.33			
154	67.78	54.22	189	87.22	69.77			
155	68.33	54.66	190	87.78	70.22			

Proportialtheile

0°.1 F	0.°06 C
0.2	0.11
0.3	0.17
0.4	0.22
0.5	0.28
0.6	0.33
0.7	0.39
0.8	0.44
0.9	0.50

b. Reduction des Weingeiſtthermometers auf das Queckſilberthermometer.

80theil. Weingeiſt Therm.	80theil. Queckſilbertherm. nach			80theil. Weingeiſt Therm.	80theil. Queckſilbertherm. nach		
	Deluc	Luz	Wildt		Deluc	Luz	Wildt
—20			—29.54	+16	19.39	19.32	19.41
19			27.86	17	20.52	20.47	20.54
18			26.18	18	21.64	21.62	21.67
17			24.51	19	22.76	22.77	22.79
16			22.92	20	23.88	23.92	23.91
—15		—20.69	—21.33	+21	25.00	25.07	25.03
14		19.15	19.74	22	26.08	26.22	26.10
13		17.61	18.24	23	27.15	27.36	27.17
12		16.07	16.74	24	28.22	28.50	28.23
11		14.68	15.24	25	29.29	29.64	29.29
—10		—13.29	—13.78	+26	30.37	30.74	30.35
9		11.91	12.35	27	31.45	31.84	31.41
8		10.53	10.93	28	32.52	32.93	32.47
7		9.16	9.51	29	33.59	34.02	33.53
6		7.81	8.13	30	34.66	35.11	34.59
— 5		6.46	— 6.75	+31	35.70	36.15	35.00
4		5.13	5.37	32	36.75	37.19	36.62
3		3.84	4.00	33	37.80	38.23	37.63
2		2.56	2.66	34	38.85	39.27	38.64
1		1.28	1.33	35	39.89	40.31	39.65
0	0.00	0.00	0.00				
+ 1	1.29	1.29	1.29	+36	40.87	41.34	40.64
2	2.57	2.57	2.57	37	41.85	42.37	41.63
3	3.85	3.85	3.85	38	42.83	43.40	42.61
4	5.13	5.13	5.13	39	43.81	44.43	43.59
5	6.38	6.38	6.37	40	44.78	45.45	44.57
+ 6	7.63	7.63	7.61	+41	45.76	46.39	45.42
7	8.87	8.87	8.85	42	46.74	47.32	46.48
8	10.11	10.11	10.09	43	47.72	48.25	47.44
9	11.27	11.27	11.28	44	48.69	49.18	48.39
10	12.43	12.43	12.46	45	49.66	50.11	49.34
+11	13.59	13.59	13.74	+46	50.58	50.00	50.26
12	14.75	14.75	14.82	47	51.49	51.89	51.18
13	15.91	15.91	15.97	48	52.40	52.78	52.10
14	17.07	17.07	17.12	49	53.32	53.67	53.02
15	18.23	18.17	18.27	50	54.24	54.56	53.95

80theil. Weingeiſt Therm.	80theil. Queckſilbertherm. nach			80theil. Weingeiſt Therm.	80theil. Queckſilbertherm. nach		
	Deluc	Luz	Wildt		Deluc	Luz	Wildt
+51	55.17	55.45	54.88	+66	68.36	68.36	68.18
52	56.10	56.34	55.81	67	69.18	69.18	69.02
53	57.03	57.23	56.73	68	70.03	70.03	69.86
54	57.95	58.12	57.65	69	70.87	70.88	70.70
55	58.87	59.01	58.57	70	71.71	71.71	71.54
+56	59.79	59.89	59.49	+71	72.55	72.55	72.38
57	60.68	60.76	60.38	72	73.39	73.39	73.22
58	61.57	61.63	61.27	73	74.23	74.28	74.07
59	62.46	62.50	62.16	74	75.08	75.03	74.92
60	63.34	63.37	63.05	75	75.90	75.90	75.77
+61	64.22	64.24	63.95	+76	76.72	76.72	76.62
62	65.12	65.11	64.85	77	77.54	77.54	77.47
63	65.93	65.93	65.68	78	78.36	78.36	78.32
64	66.74	66.74	66.51	79	79.18	79.18	79.16
65	67.55	67.55	67.34	80	80.00	80.00	80.00

c. Reduction hoher Grade des Queckſilberthermometers auf wahre Wärmegrade.

Grade des 100theil. Queckſilbertherm.	wahre Wärmegrade	Differenz	Grade des 100theil. Queckſilbertherm.	wahre Wärmegrade	Differenz
101°	100°.977	0.023	200°	197°.075	2.925
105	104.886	0.114	205	201.893	3.107
110	109.768	0.232	210	206.708	3.292
115	114.647	0.353	215	211.520	3.480
120	119.523	0.477	220	216.328	3.672
125	124.396	0.604	225	221.133	3.867
130	129.264	0.736	230	225 934	4.066
135	134.130	0.870	235	230.732	4.268
140	138.992	1.008	240	235.527	4.473
145	143.841	1.159	245	240.318	4.682
150	148.702	1.298	250	245.106	4.894
155	153.559	1.441	255	249.891	5.109
160	158.407	1.593	260	254.671	5.329
165	163.265	1.735	265	259.450	5.550
170	168.094	1.906	270	264.224	5.776
175	172.933	2.067	275	268.995	6.005
180	177.764	2.236	280	273.761	6.239
185	182.600	2.400	285	278.527	6.473
190	187.428	2.572	290	283.288	6.712
195	192.253	2.747	295	288.046	6.954
			300	292.800	7.200

VI. Tafel.

Capillardepreſſion des Queckſilbers im Barometer.

a. Tafel von Schleiermacher und Eckhart.

Durchmeſſer der Barometerröhre	Höhe der Sehne										
	mm 0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
mm. 0.5	mm 4.975	8.912	12.560	12.616							
1.0	1.262	2.450	4.377	5.581	6.098	6.171					
2.0	0.299	0.595	1.152	1.643	2.037	2.338	2.541	2.658	2.699	2.681	2.612
3.0	0.121	0.242	0.476	0.695	0.893	1.066	1.206	1.316	1.397	1.449	1.473
4.0	0.060	0.120	0.240	0.354	0.460	0.546	0.530	0.702	0.758	0.805	0.838
5.0	0.034	0.069	0.138	0.205	0.247	0.299	0.308	0.3[illegible]0	0.428	0.468	0.476

b. Tafel von Laplace und Bouvard.

Durchmeſſer der Röhre	Depreſſion nach		Durchmeſſer der Röhre	Depreſſion nach	
	Laplace	Bouvard		Laplace	Bouvard
Mm.					
21		0.028	11	0.3506	0.330
20.5		0.032	10.5		0.372
20	0.0352	0.036	10	0.4201	0.419
19.5		0.041	9.5		0.473
19	0.0430	0.047	9	0.5354	0.534
18.5		0.053	8.5		0.604
18	0.0586	0.060	8	0.6851	0.684
17.5		0.068	7.5		0.775
17	0.0754	0.077	7	0.8813	0.877
16.5		0.087	6.5		0.995
16	0.0970	0.099	6	1.1482	1.136
15.5		0.112	5.5		1.306
15	0.1245	0.127	5	1.5055	1.507
14.5		0.143	4.5		1.752
14	0.1597	0.161	4	2.0388	2.053
13.6		9.181	3.5		2.415
13	0.2047	0.204	3	2.9023	2.902
12.5		0.230	2.5		3.594
12	0.2602	0.260	2	3.5599	4.579
11.5		0.293			

VII. Tafel.

Reduction des Barometerſtandes auf die Normaltemperatur 0° C.

Correction $= -\frac{b\,t}{5550}$

Barome-terſtand in Millim.	Temperatur							
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
400	0.072	0.144	0.216	0.288	0.360	0.432	0.504	0.577
10	0.074	0.148	0.221	0.295	0.369	0.443	0.516	0.591
20	0.076	0.152	0.227	0.302	0.378	0.454	0.529	0.606
30	0.078	0.155	0.232	0.309	0.387	0.465	0.540	0.620
40	0.079	0 158	0.238	0.316	0.396	0.476	0,654	0.635
50	0.081	0.162	0.243	0.324	0.405	0.486	0.567	0.649
60	0.083	0.166	0.248	0.331	0.414	0.497	0.580	0.663
70	0.085	0,170	0.254	0.338	0.423	0.508	0,593	0.678
80	0.087	0.173	0.259	0.345	0.432	0.519	0,605	0.692
90	0.088	0.176	0.264	0.352	0.441	0.530	0.618	0.707
500	0.090	0.180	0.270	0.360	0.450	0.540	0.630	0.721
10	0.092	0.184	0.275	0.367	0.459	0.551	0.642	0.735
20	0.094	0.188	0.281	0.373	0.468	0.562	0.655	0.750
30	0.096	0.191	0.287	0.380	0.477	0.573	0,667	0.764
40	0.098	0.194	0.292	0.387	0.486	0.584	0,680	0.779
50	0.099	0.198	0.297	0.396	0.496	0.594	0.693	0.793
60	0.101	0.202	0.302	0.403	0.504	0.605	0.705	0.807
70	0.103	0.206	0,308	0.410	0.513	0.616	0.718	0.822
80	0.105	0.209	0.313	0.418	0.522	0.627	0,730	0.836
90	0.106	0,212	0.319	0.425	0.531	0.638	0,743	0.850
600	0.108	0.216	0.324	0.432	0.540	0.648	0.757	0.865
10	0.110	0.220	0.330	0.439	0.549	0.659	0.769	0.979
20	0.112	0.224	0.335	0.446	0.558	0.670	0.781	0.894
30	0.115	0.227	0.341	0.454	0.567	0.681	0.794	0.908
40	0.116	0.230	0 346	0.461	0.576	0.692	0.807	0.922
50	0.117	0.234	0.351	0.469	0.585	0.702	0.819	0.937
60	0.119	0.238	0 356	0.476	0.594	0.713	0.831	0.951
70	0.121	0.241	0.362	0,484	0.603	0.724	0.844	0.966
80	0.123	0.245	0.367	0.491	0.612	0.735	0.856	0.980
90	0.124	0.249	0.373	0.498	0.621	0.746	0.869	0.995
700	0.126	0.252	0.378	0.505	0.631	0.757	0.883	1.009
10	0.128	0.256	0.383	0.512	0.640	0.768	0.896	1.023
20	0.130	0,259	0.389	0.520	0.649	0.779	0.908	1.038
30	0.132	0.263	0.394	0.527	0.658	0.790	0.921	1.052
40	0.134	0.267	0,400	0.534	0.667	0.800	0.933	1.067
50	0.135	0.270	0.405	0.541	0.676	0.811	0 946	1.081
60	0.137	0.274	0.410	0.548	0.685	0.822	0.951	1,095
70	0.139	0.277	0.416	0.556	0.694	0.833	0.971	1.110
80	0.141	0.281	0.421	0.563	0.703	0.844	0.984	1.124
90	0.143	0,284	0.427	0.570	0.712	0.855	0.997	1.139

$$\text{Correction} = -\frac{b\,t}{5550}$$

Barometerſtand	Temperatur							
	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
400	0.649	0.721	0.793	0.865	0.937	1.009	1.081	1.153
10	0.665	0.739	0.813	0.886	0.960	1.034	1.103	1.182
20	0.681	0.757	0.833	0.908	0.984	1.059	1.135	1.211
30	0.697	0.475	0.853	0.930	1.007	1.084	1.162	1.240
40	0.714	0.793	0.873	0.952	1.030	1.109	1.189	1.269
50	0.730	0.811	0.892	0.973	1.054	1.135	1.216	1.297
60	0.746	0.829	0.912	0.994	1.077	1.160	1.243	1.326
70	0.762	0.847	0.932	1.016	1.100	1.185	1.270	1.355
80	0.778	0.865	0.952	1.038	1.123	1.210	1.297	1.383
90	0.795	0.883	0.972	1.060	1.147	1.235	1.326	1.412
500	0.811	0.901	0.991	1.081	1.171	1.261	1.351	1.441
10	0.827	0.919	1.011	1.102	1.194	1.286	1.378	1.470
20	0.843	0.937	1.031	1.124	1.218	1.311	1.405	1.499
30	0.860	0.955	1.051	1.146	1.241	1.336	1.432	1.528
40	0.876	0.973	1.071	1.168	1.264	1.361	1.459	1.557
50	0.892	0.991	1.090	1.189	1.288	1.387	1.486	1.586
60	0.908	1.009	1.110	1.210	1.311	1.412	1.513	1.615
70	0.924	1.027	1.130	1.232	1.334	1.437	1.540	1.644
80	0.940	1.045	1.150	1.253	1.358	1.462	1.567	1.673
90	0.956	1.063	1.170	1.275	1.382	1.487	1.594	1.702
600	0.973	1.081	1.189	1.297	1.405	1.515	1.621	1.730
10	0.989	1.099	1.209	1.318	1.428	1.538	1.648	1.759
20	1.005	1.117	1.229	1.340	1.451	1.563	1.675	1.788
30	1.022	1.135	1.249	1.362	1.474	1.588	1.702	1.817
40	1.038	1.153	1.269	1.383	1.498	1.613	1.729	1.846
50	1.054	1.171	1.288	1.405	1.522	1.639	1.756	1.875
60	1.070	1.189	1.308	1.426	1.545	1.664	1.783	1.904
70	1.086	1.207	1.328	1.448	1.569	1.689	1.810	1.933
80	1.103	1.225	1.348	1.470	1.592	1.714	1.837	1.962
90	1.119	1.243	1.368	1.492	1.616	1.740	1.864	1.991
700	1.135	1.261	1.387	1.514	1.640	1.766	1.892	2.019
10	1.151	1.279	1.407	1.536	1.663	1.791	1.919	2.048
20	1.167	1.297	1.427	1.557	1.687	1.816	1.946	2.077
30	1.183	1.315	1.447	1.580	1.710	1.841	1.973	2.106
40	1.200	1.333	1.467	1.600	1.733	1.866	2.000	2.134
50	1.216	1.351	1.486	1.622	1.757	1.892	2.027	2.163
60	1.236	1.379	1.506	1.644	1.780	1.917	2.054	2.192
70	1.249	1.397	1.526	1.665	1.804	1.942	2.081	2.221
80	1.265	1.405	1.546	1.687	1.827	1.967	2.10[illegible]	2.250
90	1.280	1.423	1.566	1.708	1.850	1.992	2.13[illegible]	2.289

$$\text{Correction} = -\frac{b\,t}{5550}$$

Barometerſtand	Temperatur							
	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
400	1.225	1.297	1.369	1.441	1.513	1.585	1.657	1.729
10	1.255	1.330	1.403	1.477	1.551	1.624	1.698	1.772
20	1.286	1.362	1.437	1.513	1.589	1.664	1.740	1.815
30	1.316	1.395	1.471	1.549	1.627	1.703	1.781	1.859
40	1.347	1.427	1,515	1.585	1.664	1.743	1.822	1.902
50	1.378	1.459	1.540	1.621	1.703	1.782	1.864	1.946
60	1.409	1.491	1.574	1.657	1.740	1.822	1.906	1.989
70	1.440	1.524	1.608	1.693	1.777	1.862	1.948	2.032
80	1.470	1.556	1.642	1.729	1.815	1.901	1.989	2.075
90	1.500	1.589	1.676	1.765	1.853	1.941	2.030	2.118
500	1.531	1.621	1.711	1.802	1.891	1.981	2.071	2.161
10	1.561	1.653	1.745	1.838	1.926	2.021	2.112	2.204
20	1.592	1.686	1.779	1.874	1.967	2.060	2.154	2.247
30	1.623	1.718	1.813	1.910	2.005	2.100	2.195	2.291
40	1.653	1.751	1.847	1.946	2.043	2.140	2.237	2.334
50	1.684	1.783	1.882	1.982	2.080	2.179	2.278	2.377
60	1.715	1.816	1.916	2.018	2.119	2.219	2.320	2.421
70	1.746	1.848	1.950	2.054	2.156	2.258	2.361	2.464
80	1.777	1.871	1.984	2.090	2.194	2.298	2.403	2.507
90	1.807	1.903	2.019	2.126	2.232	2.338	2.444	2.551
600	1.838	1.946	2.054	2.162	2.270	2.378	2.486	2.594
10	1.869	1.978	2.089	2.198	2.307	2.417	2.527	2.637
20	1.900	2.011	2.123	2.234	2.345	2.457	2.568	2.680
30	1.930	2.043	2.157	2.270	2.383	2.497	2.610	2.724
40	1.960	2.076	2.191	2.306	2.421	2.536	2.651	2.767
50	1.991	2.108	2.225	2.342	2.459	2.576	2.692	2.810
60	2.022	2.140	2.259	2.378	2.496	2.616	2.734	2.854
70	2.053	2.173	2.294	2.414	2.534	2.655	2.776	2.897
80	2.084	2.206	2.328	2.450	2.572	2.695	2.818	2.941
90	2.114	2.238	2.362	2.486	2.610	2.734	2.859	2.984
700	2.145	2.271	2.397	2.523	2.648	2.774	2.900	3.027
10	2.176	2.303	2.431	2.560	2.686	2.813	2.941	3.070
20	2.206	2.336	2.465	2.596	2.723	2.853	2.983	3.113
30	2.236	2.368	2,498	2.632	2.761	2.892	3.024	3.157
40	2.268	2.400	2.533	2.668	2.799	2.932	3.065	3.200
50	2.298	2.433	2.568	2.702	2.837	2.972	3.107	3.244
60	2.329	2.466	2.602	2.738	2.875	3.012	3.148	3.287
70	2.360	2.500	2.636	2.774	2.913	3.052	3.190	3.330
80	2.390	2.532	2.671	2.810	2.951	3.091	3.231	3.373
90	2.420	2.564	2.705	2.846	2.989	3.131	3.273	3.417

$$\text{Correction} = -\frac{b\,t}{5550}$$

Barometerſtand	Temperatur							
	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°	32°
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
400	1.801	1.873	1.945	2.017	2.089	2.162	2.234	2.306
10	1.846	1.920	1.993	2.067	2.141	2.216	2.290	2.363
20	1.891	1.967	2.042	2.118	2.193	2.270	2.346	2.421
30	1.936	2.014	2.090	2.168	2.246	2.324	2.402	2.479
40	1.981	2.060	2.139	2.219	2.298	2.378	2.458	2.536
50	2.026	2.107	2.188	2.269	2.350	2.432	2.513	2.594
60	2.071	2.154	2.236	2.319	2.402	2.486	2.569	2.652
70	2.116	2.200	2.285	2.370	2.454	2.540	2.625	2.709
80	2.161	2.247	2.333	2.420	2.507	2.594	2.681	2.767
90	2.206	2.294	2.382	2.471	2.559	2.648	2.737	2.824
500	2.251	2.341	2.431	2.521	2.612	2.702	2.792	2.882
10	2.296	2.388	2.480	2.571	2.664	2.756	2.840	2.948
20	2.341	2.435	2.528	2.622	2.716	2.810	2.904	2.997
30	2.386	2.482	2.577	2.672	2.769	2.864	2.960	3.055
40	2.431	2.529	2.625	2.723	2.822	2.918	3.016	3.112
50	2.477	2.575	2.674	2.773	2.873	2 972	3.071	3.170
60	2.522	2.622	2.722	2.823	2.925	3.026	3.127	3.228
70	2.567	2.669	2.771	2.874	2.977	3.080	3.183	3.285
80	2.612	2.716	2.820	2.925	3.030	3.134	3.239	3.343
90	2.657	2.763	2.869	2.975	3.082	3.188	3.295	3.401
600	2.702	2.810	2.918	3.026	3.135	3.243	3.351	3.459
10	2.747	2.857	2.966	3.076	3.187	3.297	3.407	3.516
20	2.792	2.904	3.015	3.127	3.239	3.351	3.463	3.574
30	2.837	2.951	3.064	3.177	3.292	3.405	3.519	3.632
40	2.882	2.998	3.112	3.228	3.344	3.459	3.575	3.689
50	2.928	3.044	3.161	3.278	3.396	3.513	3.630	3.747
60	2.973	3.091	3.209	3.328	3.448	3.567	3.686	3.805
70	3.018	3.138	3.258	3.379	3.500	3.621	3.742	3.862
80	3.063	3.185	3.307	3.430	3.553	3.675	3.798	3.920
90	3.108	3.232	3.356	3.480	3.605	3.729	3.854	3.978
700	3.153	3.279	3.405	3.531	3.658	3.784	3.910	4.036
10	3.198	3 326	3.453	3.581	3.710	3.838	3.966	4.094
20	3.243	3.373	3.502	3.632	3.762	3.892	4.022	4 151
30	3.288	3.420	3.550	3.682	3.815	3.946	4 078	4.209
40	3.333	3.467	3.599	3.733	3.867	4.000	4.134	4.267
50	3.379	3.513	3.648	3.783	3.919	4.054	4.189	4.324
60	3.424	3 560	3.696	3.833	3.971	4.108	4.245	4.381
70	3.469	3.617	3.745	3.884	4.023	4.162	4.301	4.439
80	3.514	3.654	3.794	3.934	4.076	4.216	4.357	4.497
90	3.559	3.701	3.843	3.985	4.128	4.270	4.413	4.555

VIII. Tafel.

Capillaritätshöhe verſchiedener Flüſſigkeiten in gläſernen Haarröhren.

(Nach Emmett.)

(Die zwiſchen zwei Horizontallinien befindlichen Zahlen beziehen ſich immer auf dasſelbe Röhrchen.)

Flüſſigkeit	Erhöhung
Waſſer	4 575 engliſche Zoll
Faſt geſättigte Kaliſubcarbonidlöſung . .	4.45
Concentrirte Salzſäure	3.35
1 Theil Zucker und 4 Theil Waſſer . . .	3.25
1 Theil Alkohol und 10 Theil Waſſer . . .	3.2
Alkohol	1.95
Waſſer	0.4 engliſche Zoll
Salpeterſäure	0.3
Raffinirtes Fiſchöhl	0.15
Lavendelöhl	0.15
Kaltes Waſſer	2.45 engliſche Zoll
Siedheißes Waſſer	2.05
Kalter Alkohol	0.95
Siedheißer Alkohol	0.875
Waſſer in Schnee geſtellt	2.25
„ bei 21° 1 C	2.1
„ am Siedpuncte	1.8
Waſſer	100 Theile
Geſättigte Salmiaklöſung	102.7
Kaliumſulphuridlöſung	95.7
Salzſaures Natrum	95.2
Schwefelſaures Kupfer	88.2
Salpeterſäure	84.0
Salzſäure	75.0
Alkohol	70,1
Weinöhl	40.8
Citronenöhl	88.4
Wallfiſchöhl, raffinirt	42.8
Lavendelöhl	37·5

IX. Tafel.

Tafel zur Berechnung der Berghöhen.

(Nach Oltmans.)

(a).

Barometerſtand	Höhe	Barometerſtand	Höhe	Barometerſtand	Höhe	Barometerſtand	Höhe
mm	m	mm	m	mm	m	mm	m
370	418.5	410	1236.0	450	1977.3	490	2655.4
371	440.0	411	1255.4	451	1994.9	491	2671.6
372	461.5	412	1274.8	452	2012.6	492	2687.9
373	482.9	413	1294.1	453	2030.2	493	2704.1
374	504.2	414	1313.3	454	2047.8	494	2720.2
375	525.4	415	1332.5	455	2065.3	495	2736.3
376	546.6	416	1351.7	456	2082.8	496	2752.3
377	567.8	417	1370.8	457	2100.2	497	2768.3
378	588.9	418	1389.9	458	2117.6	498	2784.4
379	609.9	419	1408.9	459	2135.0	499	2800.4
380	630.9	420	1427.9	460	2152.3	500	2816.3
381	651.8	421	1446.8	461	2169.6	501	2832.2
382	672.7	422	1465.7	462	2186.9	502	2848.1
383	693.5	423	1484.6	463	2204.1	503	2864.0
384	714.3	424	1503.4	464	2221.3	504	2879.8
385	735.0	425	1522.2	465	2238.4	505	2895.6
386	755.6	426	1540.8	466	2255.5	506	2911.3
387	776.2	427	1559.5	467	2272.6	507	2927.0
388	796.8	428	1578.2	468	2289.6	508	2942.7
389	817.3	429	1596.8	469	2306.6	509	2958.4
390	837.8	430	1615.3	470	2323.6	510	2974.0
391	858.2	431	1633.8	471	2340.5	411	2989.6
392	878.5	432	1652.2	472	2357.4	512	3005.2
393	898.8	433	1670.6	473	2374.2	513	3020.7
394	919.0	434	1689.0	474	2391.1	514	3036.2
395	939.2	435	1707.3	475	2407.9	515	3051.7
396	959.3	436	1725.6	476	2424.6	416	3067.2
397	979.4	437	1743.8	477	2441.3	517	3082.6
398	999.5	438	1762.1	478	2458.0	518	3097.9
399	1019.5	439	1780.3	479	2474.6	519	3113.3
400	1039.4	440	1798.4	480	2491.3	520	3128.6
401	1059.3	441	1816.5	481	2507.9	521	3143.9
402	1079.1	442	1834.5	482	2524.3	522	3159.2
403	1098.9	443	1852.5	483	2540.8	523	3174.4
404	1118.6	444	1870.4	484	2557.3	524	3189.7
405	1138.3	445	1888.3	485	2573.7	525	3204.9
406	1157.9	446	1906.2	486	2590.2	526	3220.0
407	1177.5	447	1924.0	487	2606.6	527	3235.1
408	1197.1	448	1941.8	488	2622.9	528	3250.2
409	1216.6	449	1959.6	489	2639.2	529	3265.3

Barometerſtand	Höhe	Barometerſtand	Höhe	Barometerſtand	Höhe	Barometerſtand	Höhe
mm	m	mm	m	mm	m	mm	m
530	3280.3	577	3956.9	624	4580.5	671	5158.8
531	3295.3	578	3970.7	625	4593.2	672	5170.6
532	3310.3	579	3984.5	626	4606.0	673	5182.5
533	3325.3	580	3998.2	627	4618.7	674	5194.3
534	3340.2	581	4011.9	628	4631.4	675	5206.1
535	3355.1	582	4025.6	629	4644.0	576	5217.9
536	3370.0	583	4039.3	630	4656.7	677	5229.7
637	3384.8	584	4052.9	631	4669.3	678	5241.4
538	3399.6	585	4066.6	632	4682.0	679	5253.2
539	3414.4	586	4080.2	633	4694.5	680	5264.9
540	3429.2	587	4093.8	634	4707.1	681	5276.6
541	3443.9	588	4107.3	635	4719.7	682	5288.3
542	3458.6	589	4120.8	636	4732.2	683	5300.0
543	3473.3	590	4134.3	637	4744.7	684	5311.6
544	3487.9	591	4147.8	638	4757.2	585	5323.2
545	3502.5	592	4161.3	639	4769.7	686	5334.8
546	3517.2	593	4174.7	640	4782.1	687	5346.4
547	3531.8	594	4188.1	641	4794.6	688	5358.0
548	3546.3	595	4201.5	642	4807.0	689	5369.6
549	3560.8	596	4214.9	643	4819.4	690	5381.1
550	3575.3	597	4228.2	644	4831.7	691	5392.7
551	3589.8	598	4241.6	545	4844.1	692	5404.2
552	3604.2	599	4254.9	646	4856.4	693	5415.7
553	3618.6	600	4268.2	647	4868.7	694	5427.2
554	3633.0	601	4281.4	648	4881.0	695	5438.7
555	3647.4	602	4294.7	649	4893.3	696	5450.1
556	3661.7	603	4307.9	650	4905.6	697	5461.5
557	3676.0	604	4321.1	651	4917.8	698	5472.9
458	3690.3	605	4334.3	652	4930.0	699	5484.3
559	3704.6	606	4347.4	653	4942.2	700	5495.7
560	3718.8	607	4360.5	654	4954.4	701	5507.1
561	3733.0	608	4373.7	655	4966.6	702	5518.4
562	3747.2	609	4386.7	656	4978.7	703	5529.8
563	3761.3	610	4399.8	657	4990.9	704	5541.1
564	3775.4	611	4412.8	658	5003.0	705	5552.4
565	3789.5	612	4425.9	659	5015.1	706	5563.7
566	3803.6	613	4438.9	660	5027.2	707	5575.0
567	3817.7	614	4451.9	561	5039.2	708	5586.2
568	3831.7	615	4464.8	662	3051.2	709	5597.5
569	3845.7	616	4477.7	663	5063.3	710	5608.7
570	3859.7	617	4490.7	664	5075.3	711	5619.9
571	3873.7	618	4503.6	665	5087.2	712	5631.1
572	3887.6	619	4516.4	666	5099.2	713	5642.2
573	3901.5	620	4529.3	667	5111.2	714	5653.4
574	3915.4	621	4542.1	668	5123.1	715	5664.6
575	3929.3	622	4554.9	669	5135.0	716	5675.7
576	3943.1	623	4567.7	670	5146.9	717	5686.8

Barometerſtand	Höhe	Barometerſtand	Höhe	Barometerſtand	Höhe	Barometerſtand	Höhe
mm	m	mm	m	mm	m	mm	m
718	5697.9	737	5905.9	756	6108.6	775	6306.2
719	5709.0	738	5916.7	757	6119.1	776	6316.5
720	5720.1	739	5927.5	758	6129.6	777	6326.7
721	5731.1	740	5938.2	759	6140.1	778	6337.0
722	5742.1	741	5949.0	760	6150.6	779	6347.2
723	5753.1	742	5959.7	761	6161.1	780	6357.4
724	5764.2	743	5970.4	762	6171.5	781	6367.6
725	5775.1	744	5981.2	763	6182.0	782	6377.8
726	5786.1	745	5991.9	764	6192.4	783	6388.0
727	5797.1	746	6002.5	765	6202.8	784	6398.2
728	5808.0	747	6013.2	766	6213.2	785	6408.3
729	5819.0	748	6023.8	767	6223.6	786	6418.5
730	5829.9	749	6034.4	768	6234.0	787	6428.6
731	5840.8	750	6045.1	769	6244.4	788	6438.7
722	5851.7	751	6055.7	770	6254.7	789	6448.8
733	5862.5	752	6066.3	771	6265.0	790	6458.9
734	5873.4	753	6076.9	772	6275.4		
735	5884.2	754	6087.5	773	6285.7		
736	5895.1	755	6098.0	774	6296.0		

(b).

t° — t,	Meter	t° — t,	Meter	t° — t,	Meter
0.2	0.3	6.8	10.0	13.4	19.7
0.4	0.6	7.0	10.3	13.6	20.0
0.6	0.9	7.2	10.6	13.8	20.3
0.8	1.2	7.4	10.9	14.0	20.6
1.0	1.5	7.6	11.2	14.2	20.9
1.2	1.8	7.8	11.5	14.4	21.2
1.4	2.1	8.0	11.8	14.6	21.5
1.6	2.3	8.2	12.1	14.8	21.8
1.8	2.6	8.4	12.4	15.0	22.1
2.0	2.9	8.6	12.6	15.2	22.4
2.2	3.2	8.8	12.9	15.4	22.7
2.4	3.5	9.0	13.2	15.6	22.9
2.6	3.8	9.2	13.5	15.8	23.2
2.8	4.1	9.4	13.8	16.0	23.5
3.0	4.4	9.6	14.1	16.2	23.8
3.2	4.7	9.8	14.4	16.4	24.1
3.4	5.0	10.0	14.7	16.6	24.4
3.6	5.3	10.2	15.0	16.8	24.7
3.8	5.6	10.4	15.3	17.0	25.0
4.0	5.9	10.6	15.6	17.2	25.3
4.2	6.2	10.8	15.9	17.4	25.6
4.4	6.5	11.0	16.2	17.6	25.9
4.6	6.8	11.2	16.5	17.8	26.2
4.8	7.1	11.4	16.8	18.0	26.5
5.0	7.4	11.6	17.1	18.2	26.8
5.2	7.6	11.8	17.4	18.4	27.1
5.4	7.9	12.0	17.6	18.6	27.4
5.6	8.2	12.2	17.9	18.8	27.7
5.8	8.5	12.4	18.2	19.0	28.0
6.0	8.8	12.6	18.5	19.2	28.2
6.2	9.1	12.8	18.8	19.4	28.5
6.4	9.4	13.0	19.1	19.6	28.8
6.6	9.7	13.2	19.4	19.8	29.1

(c).

Höhe	Geographiſche Breite.											
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
200	1.2	1.2	1.2	1.0	1.0	1.0	0.8	0.8	0.6	0.6	0.6	0.4
400	2.4	2.4	2.4	2.2	2.0	2.0	1.8	1.7	1.4	1.2	1.0	0.8
600	3.4	3.4	3.4	3.2	3.0	2.8	2.6	2.4	2.0	1.8	1.6	1.2
800	4.5	4.5	4.5	4.3	4.1	3.8	3.5	3.1	2.8	2.4	2.0	1.7
1000	5.7	5.7	5.7	5.3	5.1	4.8	4.3	3.8	3.4	3.1	2.6	2.2
1200	7.0	7.0	6.8	6.4	6.0	5.8	5.1	4.6	4.2	3.6	3.1	2.6
1400	8.2	8.2	8.0	7.6	7.1	6.7	6.1	5.4	4.8	4.2	3.6	3.0
1600	9.2	9.2	9.0	8.8	8.2	7.6	7.0	6.2	5.6	4.8	4.1	3.4
1800	10.4	10.4	10.2	9.8	9.4	8.6	8.0	7.0	6.3	5.4	4.6	3.8
2000	11.6	11.5	11.3	11.0	10.4	9.6	8.8	7.8	7.0	6.0	5.1	4.2
2200	12.8	12.6	12.6	12.1	11.4	10.6	9.7	8.6	7.6	6.6	5.6	4.6
2400	14.0	14.0	13.8	13.3	12.5	11.6	10.6	9.4	8.4	7.2	6.1	5.1
2600	15.2	15.2	15.0	14.4	13.6	12.6	11.6	10.5	9.2	8.0	6.8	5.6
2800	16.6	16.5	16.4	15.6	14.8	13.6	12.6	11.4	10.0	8.8	7.4	6.2
3000	17.9	17.7	17.6	16.8	15.8	14.6	13.6	12.2	10.8	9.4	8.0	6.6
3200	19.1	18.9	18.7	18.0	17.0	15.7	14.6	13.1	11.5	10.1	8.6	7.0
3400	20.5	20.3	20.1	19.3	18.4	16.9	15.7	14.1	12.4	10.9	9.2	7.7
3600	21.8	21.7	21.4	20.4	19.6	18.0	16.7	15.0	13.4	11.6	9.8	8.2
3800	23.1	22.9	22.6	21.6	20.6	19.1	17.7	15.9	14.3	12.4	10.5	8.7
4000	24.6	24.4	24.0	22.9	21.9	20.3	18.7	17.0	15.1	13.1	11.2	9.4
4200	25.9	25.7	25.3	24.3	23.0	21.6	19.9	18.0	15.9	14.0	12.0	10.1
4400	27.5	27.3	26.8	25.8	24.3	23.0	21.1	19.1	16.9	15.0	12.9	10.8
4600	28.9	28.7	28.2	27.1	25.6	24.3	22.3	20.3	18 0	15.9	13.6	11.5
4800	30.4	30.2	29.6	28.4	27.0	25.5	23.4	21.3	19.0	16.7	14.3	12.1
5000	31.8	31.6	30.9	29.8	28.4	26.7	24.6	22.3	19.9	17.4	15.0	12.7
5200	33.0	32.8	32.1	31.0	29.7	28.0	25.7	23.3	20.8	18.2	15.7	13.3
5400	34.3	34.1	33.5	32.4	30.8	29.2	26.7	24.3	21.7	19.1	16.4	13.9
5600	35.7	35.5	34.8	33.7	32.1	30.2	27.8	25.3	22.6	19.9	17.2	14.5
5800	37.1	36.9	36.1	35.0	33.2	31.3	28.9	26.3	23.6	20.7	17.8	15.1
6000	38.5	38.3	37.5	36.3	34.3	32.3	30.0	27.3	24.6	21.5	18.5	15.7

(d).

Höhe	Correction Meter	Höhe	Correction Meter
400	1.71	600	0.63
450	1.39	650	0.42
500	1.11	700	0.22
550	0.86	750	0.03

X. Tafel.

Höhe von bewohnten Ortſchaften, Seen, Flüſſen und Bergen über die Meeresfläche.

a. Bewohnte Ortſchaften.

Name des Ortes	Höhe	Name des Ortes	Höhe
A.		Andreasberg im Harz	1884
		Anger in Öſterreich	2322
		Anghiari in Toscana	1242
		Annaberg in Sachſen	1883
Aarau in der Schweiz	1140	„ „ Schleſien	1422
Abbenſee	221	Annecy in Savoyen	1318
Abbeville in Frankreich	74	Annenur im Kaukaſus	2670
Abendsberg i. d. Schweiz	5630	Ansbach in Franken	1100
Abtenau in Salzburg	2329	Antiochia	1680
Adelsberg in Krain	2159	Antiſana, die Meierei, in Süd-Amerika	12604
Admont in Steiermark	1789	Aoſta in Piemont	1818
Agordo im Venezianiſchen	1947	Appenzell i. d. Schweiz	1325
Aiguebelle in Savoyen	930 990	Aranjuez in Spanien	1548
Airolo, am Gotthardsberge	3534 3898	Arberg in der Schweiz	1434
Aix in Savoyen	768	Arbois in der Franche Comté	832
Ala in Tyrol	3154	Arezzo in Toscana	674
Alauſi, nahe bei den Cerroquellen in Quito	7488	Argunsk in Sibirien	3116
Allevard in Frankreich	1356	Ario in Amerika	5964
Almaguer in Neu-Granada	6984	Arlon in Frankreich	1856
Altenau im Harz	1368	Arnſtadt im Schwarzburgiſchen	849
Altenberg in Sachſen	2288	Arona in der Lombardie	720
Altenmarkt in Steiermark	1351	Arpenaz, an einem Waſſerfalle in Savoyen	2392
Alt-Walldorf in Ungarn	2215	Artern in Thüringen	668
Amiens in Frankreich	138	Aſtiago in Oberitalien	3133
Amſtäg in der Schweiz	1579	Auersberg in Sachſen	3091
Andeer in der Schweiz	3060	„ „ Baiern	1693
Andermatt i. d. Schweiz	4356 4446	„ „ Krain	3186
		Augsburg in Bairrn	1464

Name der Ortes	Höhe
Auguſtusberg im Erzgebirge	992
Aulney in Frankreich	351
Auſſee in Steiermark	2086
Auſſig in Böhmen	372
Avallon	829
Auxerre in Frankreich	266
Averſerthal, das in Graubündten	5000
Avignon in Frankreich	84
Avio in Tyrol	476
B.	
Baden in Öſterreich	638
Baden-Baden, Schloßberg	1476
Baireuth	1105
Barancas de Johannes in Neu-Spanien	9840
Barcellona in Spanien, die Kathedralkirche	204
Barcellonette in Savoyen	3480
Barege im ſüdl. Frankreich, das Thor zu den Bädern	3972
S. Bartolomeo, Can. Inſeln	2591
Baſel in der Schweiz	890
„ der Spiegel des Rheins	666
Baſſano in Italien	459
Baume les Nones, am Doubs in Frankreich	810
Bautzen in der Lauſitz	578
Beaucaire in Frankreich	78
Beaumont an der Oiſe in Frankreich	236

Name des Ortes	Höhe
Bebra in Thüringen	711
Belfort in Frankreich	1080
Belki-Tiphir in Sibirien	5643
Bellegard in den Pyrenäen	1350
Bellenz im Canton Teſſin	696
Belluno in Oberitalien	1281
Benavente in Spanien	1980
Beneckenſtein im Klettenbergiſchen	1458
Bernard, Hoſpiz	7668
„ kleines	6750
Berlin in Brandenburg	127
Bern in der Schweiz	1792
Berchtesgaden in Baiern	1662 2006
Beſançon in Frankreich	755
Bex in der Schweiz	1328
„ die Saline	2323
Bezieres in Frankreich	348
Biberach in Deutſchland	1652
Biſchofswerda in Sachſen	776
Blankenburg im Harz	732
Bleiberg in Kärnthen	2832
Bocza in den Karpathen	2840
Bökſtein in Salzburg	3384
Bogota, Santa-Fé, in Amerika	8180
Bologna in Italien	374
Bomers am Ufer des Seinefluſſes	62
Bonn in Rheinpreußen	138
Bonneville in Savoyen	1385
Borna in Sachſen	394
Botzdorf in Ungarn	2205
Botzea in Tyrol	1074
Bourg en Breſſe in Frankreich	684

Name des Ortes	Höhe	Name des Ortes	Höhe
Braunlage im Blankenburgiſchen	1692	Bundſchuh in Salzburg, die Bergſtube . . .	5148
Braunſchweig in Deutſchland	292	Burg-Tonna in Sachſen	752
Breslau in Schleſien	388 400	**C.**	
Breiſach in Deutſchland	728	Calabora mitten in einer Llanos in Süd-Amerika	564
Breitenbach in Schwarzburg-Sondershauſen	1174	Calais am Kanal . .	36
Breſt in Frankreich .	108	Camanacoa in Cumana im ſüdlichen Amerika	624
Breville, höchſtes Dorf im Fornangthale . . .	6162	Cambridge in Nord-Amerika	210
Briançon in Frankreich	3995 4026	Camenz in der Lauſitz .	1522
Brieg in Ober-Wallis	2184	Capellen in Öſterreich .	2047
Brixen in Tyrol . .	1791 1903	Camoscie im Kirchenſtaate	714
Brockenberg, der, oder das Torfhaus auf dem Harz	2466	Canazai, ein Dorf am Abhange der Vedretta Marmolatta in Tyrol	4582
Broman am Mont Cenis	3752	Capo d'Iſtria in Dalmatien	4198
Broterode in Thüringen an der Kirche . . .	1708	Carcaſſonne in Süd-Frankreich	457
Brougeres in den weſtl. Vogeſen	1488	Carfuß in Tyrol . .	4847
Bruck an der Mur in Steiermark . . .	1393	Cariaco in Cumana .	30
Brückenberg in Böhmen	2293	Caripe, Hauptniederlaſſung der Miſſionen der Chaymas-Indianer	2472
Bruneck in Salzburg .	1668	S. Carlos in Amerika	511
Brunecken in Tyrol .	2610	Carlshafen in Nieder-Heſſen	292
Brüſſel in den Niederlanden	262	Carolina in Amerika .	5581
Brüx in Böhmen . .	628	„ „ Spanien .	1700
Bucheben in Salzburg	3495	Carracas in Süd-Amerika	2496
Buchtorma in Sibirien	807		
Buchberg in Schleſien	2410		
„ „ Unteröſterreich	1748		
Budweis in Böhmen .	1152		
Buga in Neu-Granada	2994		

Name des Ortes	Höhe	Name des Ortes	Höhe
Carthago in Neu-Granada	2964	Clauſenthal am Harz	1955 1740
Caſſel in Nieder-Heſſen	483	Clermont in Auvergne	1590
Caſtelnaudary in Languedoc	702	Cluſe an der Arve	1504
Caſtres in Frankreich	738	Coburg, Schloß in Sachſen	1583
Caxamanca in Peru	8460	Cölleda in Thüringen	654
Cembra in Tyrol	1816	Cöln in Rheinpreußen	130
Cerdon in Frankreich	1815	Coimbra in Portugal	281
Cero im Venetianiſchen	2282	Colmar in Elſaß	552
Chalons ſur Marne, in Frankreich	338	Como in Nord-Italien	654
Chamberg in Savoyen	822 846	Coni in Piemont	1050
Chamouny, die Priorei	3144 3174 3198	Conſtanz am See gleiches Namens	1182
Champagnol am Ain in Frankreich	1512	Convento di Varnia in Toscana	3411
Chantilly in Frankreich	111	Corcovado in Braſilien	1970
Charo in Neu-Spanien	5868	Cordova in Spanien	748
Chatillon in Frankreich	522	Cortina in Tyrol	3775
Chatreuſe im Thale der Repoſoir	3213	Coſel in Schleſien	624
Chaudefond, la, in Neufchatel	3030 3075	Cottbus in der Lauſitz	315 336
Chaumont in Frankreich	432	Courmayeur in Piemont	3750
Chaumont im Depart. der obern Marne	1166	Creſpadore im Venetianiſchen	1171
Chiavenna in Italien	1080	Croſſen in der Neumark	159
Chilpanſingo in Neu-Spanien	3332	Cuença in Quito	7740
Cholula eben daſelbſt	6480	Cuernavaco in Neu-Spanien	5100
Chriſtianberg in Böhmen	1414	Cumana in Süd-Amerika	18
Chur in Graubündten	1809	Cunters, ein Wirthshaus an der großen Straße über den Septimer- und Julierberg	3522
Clairet in Frankreich	1818	**D.**	
Claus, Schloß an der Steyer	1534	Darmſtadt in Heſſen	341
Clauſen in Tyrol	1767	Darney in Frankreich	756

Name des Ortes	Höhe
Davos in Engadin die Hauptkirche . . .	4546
Dazio im Livinerthale	2868
Derenberg im Halberſtädtiſchen	572
Deſſau im Anhaltiſchen	116
Dijon in Frankreich .	667 726 799 805
Dillingen in Deutſchland	1262
Diſentis in Bündten der Rhein	3550
Döbeln in Sachſen . .	563
Dol in Frankreich . .	600
Domo d'Oſſola in Piemont	942
Donauwerth in Schwaben	1053
Donaueſchingen in Schwaben	2124
Dorf im Himalayagebirge, wo ſich Dr. Gerard aufhielt . .	13789
Dortmund in Deutſchland	440
Dresden in Sachſen .	280
Duderſtadt in Eichfeld	567
Dünkirchen in Frankreich	28
Durango in Neu-Spanien	6430
Düſſeldorf in Deutſchland	120
E.	
Ebersdorf in den reus. Herrſchaften . . .	1590
Eckardsberge in Thüringen	676
Eger in Böhmen . .	1389
Einſiedeln in der Schweiz	2744 2938 2974
Eiſenach in Thüringen	635
Eiſenerz in Steiermark	2056 2083
Eisleben in der Grafſchaft Mannsfeld	279
Elberfeld in Deutſchland	425
Elbersweiler in Deutſchland	927
Elbingerode im Harz	1398 1422
Ellrich im Klettenbergiſchen	822
Elmau im Innthale .	2683
Elwangen, Schloß in Deutſchland . . .	1331
Enego in Oberitalien .	2540
Engadin, das, bei Sils	6300
Engelberg, Kloſter in der Schweiz	3185
Engi in der Schweiz .	2425
Enontekis in Lappland	1341
Entlibuch in der Schweiz	2256
Erfurt in Thüringen .	594
Erival in Lothringen .	1680
Erlangen in Baiern .	997
Eroſa im Seitenthal nach dem Schallſickthale in Bündten	5487
Esmeralda, die öſtlichſte Niederlaſſung der Spanier auf Guiana . .	1062
F.	
Faidio im Livinerthale .	2292
Falkenſtein, Ruinen am Taunus	1470

Name des Ortes	Höhe
Faucogny in Frankreich	1188
Favergne in Frankreich	726
Feltre in Italien . .	971
Fettan im untern Engadin	4696
Fiume in Dalmatien .	22
Finſtermünz in Tyrol .	2808
Flachau in Salzburg .	2590
Flinsberger Geſundbrunnen in Schleſien . .	1548
Flitſcher-Clauſe, Höhe des Schloſſes in Friaul	2014
Florenz in Italien . .	225
Foligno im Kirchenſtaate	559
Fontainebleau in Frankreich	227
Formazzo, ein Dorf in der ſüdl. Alpenkette .	3888
Forſt im Rieſengebirge	3752
Frankenhauſen im Schwarzburgiſchen .	438
Frankfurt am Mayn .	228
„ an der Oder .	116
Franzensbad in Böhmen	1417
Frauenberg in Heſſen .	1241
Freiberg in Sachſen	1093 1146
Freiburg (in Breisgau)	862
„ i. d. Schweiz	812
Freiſingen in Baiern .	1096
Friedberg in Steiermark	1755
Friedland in Schleſien	1502
Friedrichsthal am Ufer der Elbe	3208
Fuente de la Cuchilla, die Feſtungswerke zur Vertheidigung von Carracas	2842
Fueſſen in Baiern . .	2455
Fulda am gleichnamigen Fluſſe	1838
G.	
Gabel in Böhmen . .	755
Gadmen in der Schweiz	4146
Gais in der Schweiz .	2938
St. Gallen	2086
Gap im ſüdöſtl. Frankreich	2184 2592
Gaſtein, Wildbad in Salzburg	2939
„ Markt	2718
Geisbach in Salzburg .	2852
Geismar in Nieder-Heſſen	500
Genf in der Schweiz	1155 1198
Gera in Sachſen . .	703
Geſchienen am St. Gotthardtsberge . . .	3282 3396
Gibaldhauſen in Eichsfeld	480
Gibraltar, Felſen in Spanien	1400
St. Gilgen in Salzburg	1687
Gex am Fuße des Columbier in Jurages . .	1686
Gieſen in Ober-Heſſen	437
Giornico im Livinerthale	1098
Gittelde im Harz . .	610
Giromagny in Elſaß .	1569
Giswigl in der Schweiz	1440
Glarus in der Schweiz	1491
Glatz in Schleſien . .	867 907
Glurns in Tyrol . .	2586
Gmünd in Öſterreich .	1114
Gmunden „ .	1566
Görlitz in der Lauſitz .	521
Görz in Friaul . . .	264
Gotthard, Hoſpiz . .	6440
Goldenſtein in Mähren	1946

Name des Ortes	Höhe	Name des Ortes	Höhe
Göttingen in Hannover	420 496 526	Halle in Preußen . .	574
Goldeck in Salzburg .	2200	Hallein in Salzburg .	1346
Golling „ „ .	1386	Hallſtadt in Öſterreich .	1503
Goslar am Clausthor	751 822	Hammelburg im Fuldiſchen	1155
Gotha in Thüringen .	878 924	Handeck in der Schweiz	4421
Gottesberg in Schleſien	1729	Hannover in Deutſchland	243
Grandvaux in Frankreich	2646	Harcour in Frankreich .	136
Greenwich im Obſ. Engl.	100	Harzburg, das Salzwerk Juliushalle . . .	864
Grenoble in Frankreich	948	Hasligrund i. d. Schweiz	2030
Greſſonay im Leſſathale	4044	Heidelberg in Thüringen	1161
Grindelwaldthal in der Schweiz	5150	„ „ Baden .	313
Großarl in Salzburg .	2655	Heiligenblut in Kärnthen	4210
Groß-Schlagendorf in Ungarn	1997	Helmſtädt in Deutſchland	1429
Guacharo, die Pyramide von Neu-Andaluſien	4920	Hempelsbaude in Schleſien	3839
la Guaira, Hafen in Venezuela	24	Herrnkretſcham in Böhmen	321
Guanaxato in Neu-Spanien	5574	Herrnhut in der Ober-Lauſitz	900 944
Guarda im untern Engadin	4924	Herzberg in Sachſen .	220
Guben in der Lauſitz .	529	Hildburghauſen in Ober-Sachſen	1069
Guttanen i. d. Schweiz .	3252	Hildesheim in Nieder-Sachſen	148
Guttenſtein in Öſterreich	1404	Hinterrhein an den Quellen des Hinterrheins	4770
		Hirſchberg in Schleſien	1046 1092
H.		Hiſſelau in Steiermark	1443
		Hohenelbe in Böhmen .	1488
Habelſchwerd in Schleſien	942	Hochfilzen in Tyrol . .	2982
Hainchen im Erzgebirge	879	Höhlenſtein in Tyrol .	4461
Halberſtadt in Nieder-Sachſen	825	Hohegeiß, Dorf im Stift Walkenried . . .	1748 1914
Hall in Tyrol . . .	1774 1718	Hohenberg in Öſterreich	1519
		Hohenelb im Rieſengebirge	1488
		Hollenſtein, Dorf in Öſterreich	1368

Name des Ortes	Höhe	Name des Ortes	Höhe
Holzmünden an der Weſer	291		3004
Honda in Neu-Granada	1068	Joux-Läde i. d. Schweiz	3030
Honfleur in Frankreich	228		3060
	250	Jouxthal „ „	3054
Hoſpital, Dorf in Uri	4542	Irkutzk im aſiatiſchen	
Hummelberg in der		Rußland	1355
Schweiz, die Sil .	2735	Iſchel in Öſterreich . .	1433
Hüttau in Salzburg .	1975	Judenburg in Ober-	
Hüttſchlag „ .	2938	Steyermark . . .	2268
		Ivrea in Piemont . .	757
J.		**K.**	
Jasmund auf der Inſel		Kalmanka in Rußland	364
Rügen	540	Käsmark in Ungarn .	1850
Jauer in Schleſien . .	665	Kahlwang in Steiermark	2202
Ibague in Neu-Granada	4218	Kalionuskana . . .	1104
Ibarra in Quito . .	7104	Kanderſteg im Canton	
Idria in Krain . . .	1448	Bern	4535
Ilanz in Bündten . .	2177	Karlsbad in Böhmen .	1176
St. Ildefonſo in Spanien	3550	„ der Sprudel	1161
	705	Karlsruhe in Baden .	1380
Ilefeld in Hohenſtein	822	Kaſan im aſiat. Rußland	1580
	852	Katharinenburg in Per-	
Ilſenburg in Wernin-	732	mien	1320
gerode	758	Kautakeino in Lappland	784
Imelau in Salzburg .	2812	Kelbra im Schwarz-	
Immenſtadt in Rothen-		burg'ſchen	514
fels	2184	Kempten in Schwaben	
Imſt in Tyrol . . .	2527	an der Kirche . . .	2064
Ingolſtadt in Baiern .	1016	Kiachta in Aſien . . .	2400
	1525		1503
Inſpruck in Tyrol . .	1645	Klagenfurt in Kärnthen	1554
	1774		1375
Joachimsthal in Böh-		Koburg in Sachſen .	876
men	2286	Königsbrück in der Lauſitz	468
St. Johann, Pongau in		Königsſtein am Taunus,	
Salzburg	1839	Schloß	1260
Johann-Georgenſtadt im		„ Städtchen . . .	1070
Erzgebirge	2365	Kollman in Tyrol . .	1616

Name des Ortes	Höhe
Koluwanſky in Sibirien	1392
Kommotau in Böhmen	953
Kopenhagen in Dänemark	82
Korgonskoy in Sibirien	1844
Kourinskaia „	665
Krainburg in Krain .	1178
Krakau an der Weichſel	669
Krasnojarskoi in Sibirien	684
Kreutzburg in Eiſenach	532
Kulm in Böhmen . .	691
Kupferberg in Schleſien	1330
Kupferſuhl im Thüringerwalde	880
L.	
Lamure im Depart. der Iſere in Frankreich .	2736
Lanark in Schottland .	660
Landshut in Schleſien .	1254
Langenfeld in Krain .	1099
Langenſalza in Thüringen	744
Langres in Frankreich .	1368
Lanslebourg am Mont-Cenis	4139 4145 4247
Lasfelden bei Oſterode .	588
Lauban in der Lauſitz .	577
Laufen in Salzburg .	1275
Lauſanne im Waadtlande	1566
Lauſcha im Koburg'ſchen	1912
Lauterbrunnen in der Schweiz	2450
Lavaron in Tyrol . .	3786
Laybach in Krain . .	1268
Laybach, Ober-, in Krain	1137
Leipzig in Sachſen . .	316 321 336
Lend in Salzburg . .	1989
Leoben in Steiermark	1568
Leogang im Salzburgiſchen, Schmelzhütte	2715
Leukerbad in der Schweiz	4404
Leutmeritz in Böhmen .	353
Lichtenſtäg in der Schweiz	1979
Liebau in Schleſien . .	1493
Liebenſtein, Badeort in Thüringen	1017
„ altes Schloß ebenda	1472
Liebwerda in Sachſen .	1124
Liegnitz in Schleſien .	365
Lietzen in Steiermark .	1896
Lignieres in Neufchatel	2489
Lima in Peru, großer Platz	534
Lindau am Bodenſee .	1196
Linz in Oberöſterreich .	689
Locarno im Canton Teſſin	708
Locle in Neufchatel .	2830
Lodz, Dorf in Frankreich	1122
Löbau in der Lauſitz .	630
Löwen in Schleſien .	480
Löwenberg „ .	775
Lofer in Salzburg . .	1750
London in England .	40
Lons le Saulnier in Frankreich	726
Lowoſitz in Böhmen .	414
Loxa in Süd-Amerika .	6036
Lucern in der Schweiz	1320
Lucſivna in Ungarn .	2233
Luneville in Frankreich	651
Lunz unweit den Quellen der Ips	1926

Name des Ortes	Höhe
Luxemburg in den Niederlanden	1142
Luz in Frankreich	2340
Lyon in Frankreich	228 538
M.	
Macaluba in Amerika	150
Maçon in Frankreich	462
Madrid in Spanien	1830 1842
Magdeburg an der Elbe	1234
Mailand in der Lombardie	394
Malborghetto in Italien	2118
Malor in Kemtchong	1056
Mals in Tyrol	3105
Mannheim	258
Manten in Kärnthen	2120
Mantes in Frankreich am Ufer der Seine	75
la Marche am Mouzon in Lothringen	1056
Mariahülf in Baiern	2496
Maria-Münſterthal in Engadin	4077
Maria-Zell in Steiermark	2544
Marienbad in Böhmen	1863
Marienberg in Sachſen	1836
Marſeille in Frankreich, Obſervatorium	144
Mataro in Spanien	192
Martinach in Wallis	1464 1480
Matrey in Tyrol	3201 3228
Maurice, ein Badeort in den Alpen	4200 4800
Mayen in der Schweiz	1480
Mappures am Orinoko in Guiana	558
Medveczka in Ungarn	2732
Meffersdorf in der Ober-Lauſitz	1336
Mehlin in Thüringen	1373
Meinungen in Henneberg	831
Meißen in Sachſen	258
Melniſchkoi in Rußland	997
Melnitſchaya in Sibirien	1188
Melun in Frankreich	216
Memmingen in Baiern	1884
Meran in Tyrol	896
Metz in Frankreich	452
Meyringen i. d. Schweiz, Spiegel der Aar	1852
Mexico in Amerika	7088
Mezieres in Frankreich	775
Mine de la Melado in Mexico	7026
St. Michael in Salzburg	3117
Micuipampa in Peru	10950
Mielly in Frankreich	1230
Minksdorf in Ungarn	2382
Mitterſil in Salzburg	2381
Modane in Savoyen	3258
Modena in Italien	201
Mompax in Neu-Granada	396
Monaco in Italien	1658
Montauban in Frankreich	582
Montd'or les Baines in Frankreich	3044
Mont-Joie, ein Alpenthal	2862
Montlion in Frankreich	2961
Montmelian in Savoyen	834

Name des Ortes	Höhe
Morat oder Murten in der Schweiz . . .	1144
Morges oder Morſee in der Schweiz . . .	1134
Morlac in Frankreich .	732
Moskwa in Rußland .	1614
Motier-Travers in Neufchatel	2262 2220
Moudon oder Milden im Waadt	1554
Mouniska in Lappland	700
München in Baiern .	1658 1410 1553 1622
Münſter in den Vogeſen	1188
„ „ Walliſerland	4440
Mürzzuſchlag in Steiermark	2090
Murcia iu Spanien .	462
Muska in der Lauſitz	292 301
N.	
Nako, Dorf im Himalayagebirge	11068
Nancy in Frankreich .	608
Nantes „ .	75
Mantua „ .	2573
Narbonne „ .	204
Naumburg im Fürſtenthum Jauer . . .	514 541
Nauders in Tyrol . .	3908
Neapel in Italien . .	26
Neiße in Schleſien . .	592
Neuburg an der Mürz	2204
Neudorf in Böhmen .	1108
Neufchatel i. d. Schweiz	1296 1350
Neukirchen in Salzburg, Pinzgau	2555
Neumarkt in Salzburg	1875
„ „ Tyrol .	818
„ „ Ungarn .	1735
Neunkirchen in Öſterreich	1062
Neuſtadt unterm Hohenſtein	828
Neu-Valencia in Amerika	1404
Nieder-Nowgorod in Rußland	1068
Nicolajevskoy in Sibirien	884
Nion im Waadt . . .	1146
Nizza in Italien . . .	27
Nocera im Kirchenſtaate	1448
Noir Table in Frankreich	1467
Nonnenmatterweiher in Baden	2826
Nordhauſen in Niederſachſen	527
Nordheim in Sachſen	351 391
la Novaleſe in Piemont	2474
Nürnberg in Baiern .	945
O.	
Oberbrückenberg in Schleſien	2293
Oberhof in Gotha . .	2351
Oderbrück, Wirthshaus im Harz	2408
Orange in Frankreich .	196
Orleans „ .	360
Orſieres am Wege auf den Bernhard . .	2664
Osnabrück in Deutſchland	197
Oſterode im Harz . .	627 708

Name des Ortes	Höhe
P.	
Pachuca in Neu-Spanien	7637
Padua in Italien . .	32
Pampa marca in Quito	12672
Pampluna in Amerika .	7135
Pantenbrücke im Canton Glarus	3012
Paredones, Los, in Quito	12444
Paris, mittlerer Stand der Seine . .	104 126
„ Obſervatorium .	224
„ Plattform . . .	262
Parma in Italien . .	288
Parpan in Graubündten	4375
Paſſau in Baiern . .	789
Paſto in Neu-Granada	8052
Patermion in Italien .	1481
Payerne im Waadtlande	1383 1374
Pazcuato in Neu-Spanien	6780
Perotte in Neu-Spanien	7241
Perpignan in Frankreich	222
Peſt in Ungarn . . .	216
Petersburg in Rußland	106
Peterinſel, die, im Bielerſee	1424
Peterswald in Böhmen	1687
Petit-St.-Jean in Frankreich	729
Pfeffersbad, das, in der Schweiz	2110
Piacenza in Italien .	247
Pian, Wirthshaus in Tyrol	4872
Piſa in Italien . . .	51
Planina in Krain . .	1412
Plauen in Sachſen . .	1048
Pleſſur in Graubündten	4674
Plombieres in Frankreich	1368
Poligny „ „	918
Pontarlier „ „	2496 2551
Ponteba im Venetianiſchen	1757
Pont de Bonvoiſin im Dep. Montblanc . .	708
Pont de Lucey in Frankreich	894
Popayan in Süd-Amerika	5406
Porentruy am Ufer . .	1188
Prag in Böhmen . .	552
Predazzo in Tyrol . .	3198
Preßburg in Ungarn .	312
Prewald in Krain . .	1704
Prieure im Chamounythale	3144
Primolano an der Brenta	728
Puebla de los Angelos in Neu-Spanien .	6756
Q.	
Quaxuato in Neu-Spanien	6415
Queretaro in Neu-Spanien	5970 6415
Quikock in Lappland .	1010
Quito in Süd-Amerika	9036
R.	
Raab in Ungarn . .	256
Radſtadt in Salzburg .	2037
Ramaſſe, la, am Mont-Cenis	5980
Rattendorf in Kärnthen	1836
Rauris in Salzburg .	2811

Name des Ortes	Höhe
Rayas, Mina de, in Neu-Spanien	6696
Realp am St. Gotthardsberge	4733
Regensburg an der Donau	1116
Reichenau in Graubündten	1815
Reichenberg in Böhmen	1002
Reichenfels in Kärnthen	1967
Reichenhall in Baiern .	1915
Reinerzerbad in der Grafſchaft Glatz . . .	1678
Remiremont in Frankreich	1218
Reutlingen in Deutſchland	1142
Rochelle in Frankreich .	51
Rochejeane im Jura .	2700
Rom, Monte Capitolino auf der Weſtſeite vom tarpejiſchen Felſen 110′ über der Tiber . .	142
Rougemont, ein Schloß im Waadt	3036
Rudolſtadt im Schwarzburg'ſchen	622
S.	
Saalfelden in Salzburg	2022
Saarbrücke in Rheinpreußen	575
Saarburg in Rheinpreußen	714
Saarlouis in Rheinpreußen	524
Saatz in Böhmen . .	727
Sachſa, Dorf in Klettenburg'ſchen . . .	942
Sagan in Schleſien .	350 410
Saggaträsk in Lulea-Lappmark	1060
Salamanca in Neu-Spanien	5412
Salenche in Savoyen .	1674
Salins in Frankreich .	954
Salzburg die Stadt	1241 1261 1303 1380
Salzufeln in Deutſchland	254
St. Amarin in den Vogeſen	1074
„ Anna in Öſterreich .	2542
„ „ „ Krain . .	2843
„ Antonio de Lulumbamba unterm Äquator	7650
„ Bartholomäi in Baiern	2075
„ Branchier zwiſchen Martinach u. dem Bernhardsberg .	2268
„ Carlos del Rio Negro in Guyana . . .	762
„ Cloud in Frankreich	452
„ Crux in Cumana .	960
„ Diez in den Vogeſen	1032
„ Fe de Bogota in Neu-Granada	8082
„ Fernando in Amerika	1796
„ Franz, ein Schlößchen in Salzburg . .	2122
„ Gallen i. d. Schweiz	2086
„ Gertraud in Kärnthen	937
„ Gineſio in der Lombardie	2663

Name des Ortes	Höhe
St. Germain le Val in Frankreich	1260
„ Juan del Rivo in Amerika	6090
„ „ in Amerika	1164
„ Johann in Salzburg	1839
„ Jago in Chili	2458
„ Leonhard in Kärnthen	1611
„ „ „ Tyrol	2134
„ Margarethen in Salzburg	3178
„ Marcello in Toscana	1875
„ Maria aux Mines in den Vogeſen	1194
„ Martin in Amerika	7236
„ Maurice an der Moſel	1674
„ Marcello im Modeneſiſchen	1874
„ Michael im Schwarzwalde	802
„ „ in Salzburg	3117
„ Paul im Dep. der Unter-Alpen	4476
„ „ im Modeneſiſchen	2191
„ Pierre zwiſchen Martinach u. dem Bernh.	5004 / 5124
„ Saphorin im Waadt	624
„ Urſan in Frankreich	1326
„ Venantio im Modeneſiſchen	953
Santa in Peru	276
Sapada oder Platen im Venetianiſchen	3749
Sault im Depart. der Vaucluſe	2358
Schafhauſen in der Schweiz	1208
Schemnitz in Ungarn	2172
Schierke in Werningerode	1758

Name des Ortes	Höhe
Schils in Graubündten	3566
Schio in Italien, der Hauptplatz	660
Schlagendorfer Sauerbrunnen in Ungarn	3014
Schmalkalden in Henneberg	800
Schmiedeberg in Schleſien	1388
Schneeberg in Sachſen	1464
Schönau in Schleſien	846
Schönberg in der Lauſitz	1502
Schottwien in Öſterreich	1788
Schreibershau in Schleſien	1908
Schwaden im Canton Glarus	1623
Schwamberg in Steiermark	729
Schwanden i. d. Schweiz	1623
Schwarzenberg in Deutſchland	1335
Schwatz in Tyrol	1630 / 1705
Schweidnitz in Schleſien	778
Schweſterborn im Canton Schwyz	4404
Schwyth in der Schweiz	1677
Seeberg bei Gotha	720
Seeſen in Wolfenbüttel	584 / 636
Sempach in der Schweiz	1590
Seere im Depart. der Ober-Alpen	1890
Sévers in Frankreich	204
Sigmaringen in Deutſchland	1795
Silberberg in Schleſien	1344
im untern Theile	1375
„ im Schloßhof	2070
Simmern in Rheinpreußen	997

Name des Ortes	Höhe
Simplon, Dorf . .	4536 4554
Sitten im Wallis . .	1746
Soiſſon in Frankreich .	426
Solothurn i. d. Schweiz	1284
Someo im Maggiathale	1224
Sonnenberg im Meinungiſchen	1197
Sonthofen in Baiern .	2444
Sorjäsjaur in Lulea-Lappmark	2572
Spandau in Preußen .	99
Spiegelbauden in den Sudeten	4086
Spital, ein Stift am Pirn in Öſterreich .	1518
Stavnizca, ein Thal in Ungarn	4897
Steinach in Tyrol . .	3920
Steinen in Schwyz .	1384
Sterzing in Tyrol . .	2920
Stellberg in Ober-Sachſen, die Stadt . .	918
„ das Schloß . .	1086
Stixenſtein in Unter-Öſterreich	1279
Straßburg in Elſaß, am Fuße des Thurmes .	474
Stockholm in Schweden	300
Stuttgart in Würtemberg	837
Sulz in Ober-Elſaß .	840
T.	
Tambores in Neu-Granada	10362
Tamsweg in Salzburg	3022
Tarbes in Frankreich .	984
Tarvis in Kärnthen . .	2301

Name des Ortes	Höhe
Tasko in Neu-Spanien	5495
Taurominium in Sicilien	688
Tawetſch in Graubündten der Rhein . . .	4375
Taxenbach in Salzburg	2145
Tegernſee in Baiern .	2254 2324
Teiſendorf „ .	1530
Tepl, Stift in Böhmen	1968
Tetſchen in Böhmen .	321
Thann in Ober-Elſaß	1026
Thiers im Depart. Puy de Dome	1152
Thionville in Frankreich	484
Thun in Bern . . .	1788
Thunerſee „ . . .	1780 1787
Titmoning in Baiern .	1042
Tivoli im Kirchenſtaate, Tempel der Veſta .	595
Toblack in Tyrol . .	3902
Töpliz in Böhmen . .	700
Toledo in Italien . .	1734
Toluca in Neu-Spanien	8268
Torneaträsk in Lappland	1200
Toul in Frankreich . . .	495
Toulouſe „ . .	446
Tour d'Auvergne am weſtlichen Fuße des M. d'Or. . . .	2741 2835
Trachſellavinen in der Schweiz	3750
Trient in Tyrol . . .	754
Trier in Rheinpreußen	385
Trieſt in Italien . .	493
Trons in der Schweiz .	2654
Trſtena in Ungarn . .	1819
Tübingen in Würtemberg	1194
Truxillo in Peru . .	198

Name des Ortes	Höhe
Turin in Piemont . .	678 738 882
Tuttlingen in Schwaben	2033
Tyrol, das Schloß bei Meran	2060
U.	
Udine in Italien . .	427
Ulm in Schwaben . .	1138
Unken in Salzburg .	1990
Untertauern „ .	2838
Urnäſchen i. d. Schweiz	2553
Urſeren an der Matt am Gotthard	4435
Urſeren, das Hoſpital in Uri	4542 4556
V.	
Valenciana, Mina de, in Neu-Spanien, Eingang der Stollen .	7164
Valladolid in Neu-Spanien	6006
Valorbe im Waadt . .	2280 2262
Valorſine, das Pfarrhaus	2258
Val-Ombroſa in Toscana	3063
Vaux in Frankreich . .	2724
Veran, Dorf im Dep. der Ober-Alpen . .	6282
Verdun in Frankreich .	528
Verona in Italien . .	157
Verſoythal, das, bei Chapin	4668
Villach in Kärnthen .	1442

Name des Ortes	Höhe
Villa de Cura in Süd-Amerika	1596
Villeta in Neu-Granada	3342
Vittoria, la, in Süd-Amerika	1614
W.	
Waldenburg in Sachſen	1359
Waging in Salzburg .	1356
Wagram „ .	2380
Waidhofen in Öſterreich	1000
Walkenried in Ober-Sachſen	2230
Wallenburg im Canton Baſel	1299
Wallenſtadt i. d. Schweiz	900
Wartburg, die, bei Eiſenach	1118
Waſen am St. Gotthardsberge	2850 2847
Waſſerburg in Baiern	1241 1264
Weida im Stifte Walkenried	1080
Weimar in Ober-Sachſen	650
Weißbad in der Schweiz	2542
Weißtannen, Flecken in Glarus	3079
Werfen in Salzburg .	1639
Werningerode die Stadt	744
„ der Schloßberg	1110
Wetzlar, Spiegel der Lahn	390
Wichodna in Ungarn .	2319
Wien, das Pflaſter von St. Stephan . . .	495
Willamſton in Nord-Amerika	1668

Name des Ortes	Höhe	Name des Ortes	Höhe
Wittenberg in Sachſen	137		
Wolfsberg in Kärnthen	1478		
Wörgl in Tyrol . . .	1831	**Z.**	
Wolkenſtein, die Ruinen in Steiermark . .	2202	Zell in Tyrol	1615
Wünſchelburg in Schleſien	1492	Zell am See, in Salzburg	2380
Würzburg	525	Zella in Thüringen . .	1420
		Zernetz im untern Engadin, die Innbrücke	4261
X.		Zinuskel im obern Engadin	4688
Xaluppa in Amerika .	4068	Zittau in der Lauſitz .	664
		Zſchopau in Ober-Sachſen	961
		Zürch in der Schweiz .	1251
Y.		Zumdorf am St. Gotthardsberg	4627
Yverdon i. d. Schweiz	1287 1320	Zweyſimmern in der Schweiz	2832 3898

b. Flüſſe und Seen.

Name des Ortes	Höhe
Aar bei Grimſel, Hoſpiz	5778
» » Stockboden . .	5186
» » Handeck . . .	4421
» » Meyringen . .	1852
» unter Bern . . .	1476
» bei Bern	1548
» » Solothurn . .	1310
Achenſee in Tyrol . .	2849 2919
Aller bei Gifthorn . .	203
Allier, Quelle . . .	4383
Amazonenfluß, Rentema gegenüber	1164
Arve, Urſprung . . .	3433
Baikalſee	1715
Bober bei Landshut .	1234
» » Rudelsſtadt	1184
» » Hirſchberg .	994
» » Löwenburg	775
» » Bunzlau .	737
» » Sagan . .	309
Bodenſee	1089
Brennerſee	4126
Brientſee am Jura . .	3060
Bouchelſee	3687
Cenisſee (am M. Cenis)	5890
Chairkunim, Quelle in Sibirien	4717
Donau bei Ulm . . .	1138
» » Donauwerth	1053
» » Ingolſtadt	1000
» » Regensburg	972
» » Paſſau . .	789
» » Linz . . .	689
» » Wien . .	480
» » Preßburg .	310
» » Raab . .	256
» » Peſt . . .	215
Doubs, Quelle bei Mouthe	2856
Drau, Urſprung in Tyrol	3680
Eſchatz, Urſprung . .	1790
Eder, Quelle . . .	1877
Eger, wo ſie in die Elbe fällt	338
» bei Mühlbach . .	1414
Eichenſee im Schwarzwalde	1467
Elbe bei Herrnkrätſcham	298
» » Roſawitz . .	342
» » Außig . . .	372
» » Lauba . . .	387
» » Leitmeritz . .	405
» » Schönprieſen	359
» » Tetſchen . .	338
» » Wittenberg .	204
Ems bei Rheine . . .	89
Enareſee in Lappland .	400
Feldbergſee	3417
Fresmillo, Quelle . .	3336
Fünfſeen in den Karpathen	6121
Fundenſee in Salzburg	4100
Fuſchelſee » »	1967
Ganges, Quelle . . .	12141
Gardon »	2877
Gaubeſee	5492
Genferſee	1126
Giri, Urſprung . . .	6944
Gmundnerſee	1566
Goſauſee in Öſterreich .	3471
Grundlſee	2031
Hallſtädterſee	1464
Ilſe bei Hornburg . .	388

Name des Ortes	Höhe
Irtiſch, fünf Werſte ober ſeiner Mündung in die Smol bei Smolianka	724
„ „ Tara	386
„ „ Gonby	261
Katzbach, Urſprung	1388
„ bei Schönau	846
„ „ Goldberg	631
„ „ Liegnitz	365
„ „ Parſchwitz	270
Katzenſee i. d. Schweiz	1340
Korgan, Mündung	2274
Khair-Kounim (Sibirien) Urſprung	4717
„ bei Tſchibiten	3150
„ „ Tſcharych	2975
„ beim Zuſammenfluſſe mit dem Korgon	2219
Königsſee in Baiern	2075
Lacherſee	850
Lago di Como	655
„ „ Lugano	876
„ „ Maggiore	642
„ „ Vareſe	798
Langſee in Salzburg	7029
Lauzonſee	6372
Lahn, Quelle	1720
„ bei Marburg	666
„ „ Gießen	487
„ „ Wetzlar	390
Lauerzerſee	1382
Leir, bei Hannover	243
Lechariaſee	7242
Leopoldſteinerſee in Steiermark	1860
Lieou, See	6196
Loire, Quelle	1555
„ bei Chamalieves	4312
„ „ Peyredeyre	1589

Name des Ortes	Höhe
Lomijauerſee	2123
Loue, Urſprung	1634
Lubſt „	578
Luzernerſee	1314 1320 1350 1392
Mattſee in Salzburg	1779
Moldau bei Friedberg	1800
„ „ Budweis	1145
„ „ Prag	480
Mont perdu, See	7882
Moſel, Quelle	2232
„ bei Vagney	1260
„ „ Epinal	978
„ „ Thionville	484
„ „ Oberbillig	381
„ „ Trier	385
Mummelſee	3186
Murtnerſee	1320
Neiße, Urſprung	2708
„ bei Schreibersdorf	1476
„ „ Habelſchwert	1017
„ „ Glatz	847
„ „ Wartha	745
„ „ Camenz	683
„ „ Neiße	592
„ „ Löwen	480
„ „ Schurgaſt	440
„ „ Muskau	275
Neckar bei Tübingen	989
„ „ Eberbach	393
Neuſchatelerſee	1285 1314 1320
Newa bei Petersburg	106
Nil, Quelle	9912
Ob bei Doubrovini	189
Oberalpſee in der Schweiz	6224

Name des Ortes	Höhe
Oberblegiſee i. d. Schweiz	4420
Oberſee in Salzburg	2986
Ocker bei Wolfenbüttel	306
Oder bei Koſel	510
» » Brügg	419
» » Ohlau	392
» » Glogau	212
» » Neuſatz	190
Ohlau, Urſprung bei Neualtmannsdorf	904
» bei Münſterberg	622
» » Strehlen	472
» » Ohlau	392
» » Breslau	367
Oignon, Urſprung	2136
Om bei Kainsk	484
Oncet, See in den Pyrenäen	7122
Orb, Urſprung	3710
Our, Quelle	2710
Paber, Urſprung	12145
Pallajörn, See in Lappland	1004
Pavenſee	3702
Pfinz, Urſprung	1145
Piave »	3978
» Mündung in die Boita	1827
Pilatusſee in der Schweiz	5625
Po, Urſprung	6008
Porce »	8658
Preberſee in Salzburg	4594
Quadalquivir bei Mengibar	542
Rhein, Urſprung	4770
» bei Taweſch	4375
» » Surrim	2774
» » Diſſentis	3557
» » Trons	2654
» » Reichenau	1850
Rhein, bei Königsberg	1666
» » Ragatz	1545
» » Schönberger Höhe	1453
» » Gams	1413
» » Schafhauſen	1208
» » Köln	130
» » Bonn	128
» » Düſſeldorf	120
Rhone, Urſprung	5130
» bei Oberwald	4370
» unter Brieg in Wallis	2064
» bei Martigny	1374
» » St. Maurice	1272
» Austritt aus dem Lehman	1160
Rhön bei Steinwand	2025
» » Stapelsberg	1688
Rienz, Urſprung	4871
Ruhr bei Arnsberg	560
Rotom, See	5038
Rotorn »	5607
Saar bei Saarbrück	575
» » Saarburg	714
Saone, Urſprung	1240
» bei Viomenil	1218
» » Darney	756
» » Juſſy	714
» » Gray	624
» Mündung bei Lyon	490
Salzache, Quelle	4439
Sau, Urſprung bei Wurzen	2485
Schluchſee im Schwarzwalde	2287
Schrott, Urſprung	485
Seealpſee i. d. Schweiz	2052
Seine, Urſprung	1338

Name des Ortes	Höhe	Name des Ortes	Höhe
Seine, bei Paris . .	104	Vaucluſe, Quelle . .	336
	126	Virithjaurſee in Lapp=	
Sempacherſee	1585	land	1788
Semtiſerſee in Appenzell	3790	Vierwaldſtädterſee . .	1320
Sieg, Quelle . . .	1762	Waag bei Hradeck . .	1848
Sill bei Himmelburg .	2735	„ „ St. Nikolai	1697
Siller bei Weißbad .	2542	„ „ Roſenberg .	1357
Sipon, Quelle Yuſu .	14898	„ „ Lubochna .	1289
Spree bei Spandau .	99	Wallenſtädterſee . . .	1356
Tagliamento, Urſprung	4142	Wallerſee in Baiern .	2522
Tartaſſa bei Spaskoe .	461	Wedde bei Immenrode	571
Tegernſee	2304	Weſer bei Holzminden .	273
Tepel bei Carlsbad . .	1109	„ „ Karlshafen .	291
Thunerſee	1780	„ „ Minden . .	88
Tiber bei Rom . . .	32	Wilderſee	2843
Tjitarum, Urſprung .	4359	Wirijauerſee	1788
Todtenſee auf dem Grimſel	6630	Wolga bei Kaſan . .	880
Traun	6720	Wuttach bei Stühlingen	1385
Treun, Urſprung . .	1464	Zellerſee in Salzburg .	2380
Trübſee	1464	Zürcherſee	1226
Vaſtinjaurſee in Lappland	1700	Zugerſee	1303

c. Berghöhen.

Name des Berges	Höhe
I.	
Seealpen mit den Apenninen.	
(Italien, zum Theile, Sicilien, Corſica, Piemont und Frankreich zum Theile.)	
Mittlere Höhe der Alpenkämme . . Hum.	7068
„ „ der Alpenpäſſe . . . Hum.	7200
Höchſter Alpengipfel Hum.	14772
Ätna (Gibello) . Spa.	11400
Sau.	10281
Alpe di Doccia . . P.	4138
Beguines (eine Höhe auf dem St. Beaume) Cass.	3358
Bolgario . . . . P.	3496
Boscolengo . . . P.	4178
Calvo . . . . Nob.	4800
Campo dei Fiori . Or.	3833
Cavo (mons albanus) Bch.	2928
Cervello . . . . Per.	5622
Cima del Craſte . . .	7664
„ „ Impoſſibile .	1782
„ di Doccia . . .	4138
„ Dodici	7189
„ del ſaſſo Cimone P.	3798
„ de Tornipa . .	5484
„ di Vernina . P.	4914
Cimona . . . . P.	6548
Col du Braun . . Mz.	3013
„ „ Brois . . Mz.	2522
„ „ Fenetre . . Sau.	8460
„ de Tende . . Mz.	5526

Name des Berges	Höhe
Conus (höchſte im Krater des Veſuvs) Bch.	3275
Criſtol . . . . Gue.	2526
Epomeo . . . . Bch.	2364
Erix (Giuliana) . Bosc.	3624
Gran Saſſo . Schuck	8255
Macaluba	150
Madonia (Gebirge) Bosc.	3528
Montague de la Lence Cue.	4110
Monte Aventino . . Cal.	146
„ Bisbino . . Or.	4144
„ Bulgario . P.	3496
„ Calvaggione Or.	5321
„ Canzo . . . Or.	4264
„ Capitolino . Cal.	151
„ Celio . . . Cal.	195
„ Ceramede . Or.	5113
„ Esquilino . Cal.	177
„ Gianicolo . Cal.	185
„ Gordona . . Or.	4403
„ Grigna . . Or.	6766
„ Groſſo . . Per.	6888
„ Legnoncino . Or.	5325
„ Legnone . . Or.	8131
„ S. Lucio . Or.	4992
„ Mario (villa Melini) . . . Cal.	410
„ d'Oro . . . Per.	8166
„ Pino . . . Or.	3681
„ Piscio . . Cal.	150
„ Pizzo di Gino Or.	6996
„ Pizzo d'Orſera Or.	3011
„ Pontione di Mezzegra . Or.	5224
„ Quirinale . Cal.	148
„ Reſegnone di Lecco . . Or.	5825

Name des Berges	Höhe
Monte Vaticano . Cal.	93
„ Viminale . Cal.	160
„ Viſo . . . Or.	3747
Radicofani . Schuck.	2315
Radicoſa . . Schuck.	2719
Rocca di Papa . . Bch.	2230
Rocher d'Avignon Gue.	144
„ de Vaucluſe Gue.	684
Rotondo	8694
Per.	8226
San Gennaro . Bosc.	3924
Sibylla (Mte. della) Bosc.	7038
Sila	4634
Somma . . Schuck.	3509
Soracle (St. Oreſt) Schuck.	2129
Strongolo (Strombili.) Borch.	2520
Val=ombroſa . . P.	3063
Vaucluſe (Montgn. de) Gue.	2016
Velino . . . Schuck.	7872
Ventoux . . . Que.	6030
Veſuv . . . . . Sau.	3659
Hum.	3504
St. Victoire . . . Dar.	2880
Vulcano . . . . . Bch.	2400

II.

Cottiſche Alpen.

(Frankreich zum Theile, Piemont zum Theile.)

Name des Berges	Höhe
Aiguille noire de Nevache	7890
Aurouze . . . Gue.	8604
Autane . . . . Vill.	9029
Belladonne . . Heric.	9666
Bonvoiſin . . . Jans.	6492
Bouirieres (Bouchieres) Jans.	6615
Caſes de Faudon . Vill.	5159
Chabrieres . . . Gue.	9093
Chaillot le Vieux . Vill.	10224
Chalange (Ganggeb.) Schreib.	8200
Charance . . . . Heric.	4799
Chamechande . . Vill.	6437
Charbres . . . . Jans.	4618
Chiracsberge . . Jans.	6454
Col, zwiſchen Ancelle und Ourſieres . Gue.	7494
Col de la Coche . Vill.	6437
Gue.	5892
„ du Galibier . Jans.	8593
„ de Lagnel . Vill.	9986
„ „ Laniere . Gue.	9990
„ „ „ höchſter Gipfel . . Gue.	12990
„ „ Maleutra Heric.	5113
„ zwiſchen Morin und Fouillouſe . Gue.	7392
„ zwiſchen Morin und Laclapier . Gue.	8442
„ du Noyer . Vill.	5091
„ d'Ournon . Heric.	2549
„ de Praclos . Heric.	5938
„ „ Saix . . Gue.	10338
Vill.	10282
„ „ Servieres Vill.	7182
„ „ Souffle . Heric.	9744
„ „ Turbat . Vill.	9957
Heric.	8001
„ „ Urtis . . Vill.	5664
Coſte Loupet . . Heric.	7470
Drouveyre und Champoléon . . . Jans.	6437
St. Egnard . . Heric.	4145
Elionen (die drei) Heric.	11953
Faraux (Gebirgskette) Jans.	7542

Name des Berges	Höhe
Genevre . . Heric.	6258
Vill.	5960
Grand Som . . Heric.	6463
St. Guillaume . Heric.	6169
Herbia (die groſze) Vill.	9921
Infernat oder l'Infernay . . . Farm.	9851
Jans.	9026
Jocelme . . . Gue.	13002
Joug de l'Aigle . Heric.	7252
Laurang la Chapelle gegenüber . . . Gue.	11880
Laurang bei Chapelle im Gadmarthale . Vill.	6157
Lauſanice und Col de Siolane . . Gue.	9096
Lantaret . . . Heric.	6449
Loucyra . . . Gue.	13548
Loupilan . . . Gue.	13260
Monetier de Mauray Vill.	7564
Montagne de l'Ours Jans.	6563
„ de l'Ourſine Heric.	5585
Mont Bayard . Heric.	3752
„ Berar . . Vill.	8090
„ de Faudon . Gue.	2016
„ „ Lans . Heric.	4005
Motte (la) . . . Vill.	3570
Montrachat bei Grenoble . . . Heric.	3998
Vill.	2743
Muan de Bellone Gue.	10218
Neron . . . . Heric.	4060
Obioux . . . . Heric.	8964
Olan im Godmarthale Heric.	12966
Jans.	12308
Ozon . . . . Gue.	12624
Parpaillon in Crevousthale . . . Heric.	8384
Peliour . . . . Farm.	13237
Petit Chaillot . Jans.	7379
Pic du Chevalier Heric.	8163
Pi de Lauzon . Vill.	6772
Pic de Servieres Vill.	9026
Port du St. Lans Heric.	3623
Pouzene (Spitze) Heric.	7827
Puy Champoléon Vill.	7545
Roc de Nievre . Gue.	12972
Rouſſes (les grandes) Heric.	9359
Sarcena . . . Vill.	4805
Septiaux, Col . Vill.	7182
Siraberg . . . Vill.	7230
Soleil Bian . . Heric.	6132
Sueſe, la . . . Vill.	6295
Viſo v. Buiſtolas Mor.	9438
Schuck.	9373
„ (höchſte Spitze) Vill.	12987
„ (höchſte Spitze auf der Seite des Col Lagnel) . Gue.	12326

III.

Die grauen Alpen.

(Piemont und Savoyen, zum Theile.)

Name des Berges	Höhe
Col de Bonhomme Sau.	7530
„ della Cermetta Berg.	3888
Iſeran	12403
	10800
Mont Cenis . . Sau.	11058
Muſſa-Alpe . . Vill.	5159
St. Michael am Cenis Sau.	8670
Paß über den kleinen Bernhardsberg Sau.	6750
Paß über den Cenis Sau.	6360
Portia-Alpe (höchſter Punct) . . . Berg.	6048
Roche-Melun . . Sau.	10752

IV.

Die penniniſchen Alpen.

(Piemont und Wallis zum Theil, Savoyen zum Theil.)

Name des Berges		Höhe
Aiguille d'Argentier	Schuck.	12564
Aiguille Dru . .	Sau.	11682
Aiguille de Géant	Lech.	13044
Aiguille de Goûte	Sau.	11442
Aiguille du Midi .	Sau.	12054
Allee blanche . . .	Sau.	7494
Baraſſon	Gy.	9180
Berg de la Cote .	Sau.	7914
Blaitier . . .	Pict.	7992
Breven	Sau.	7836
	Pict.	7698
Breithorn	Sau.	12012
Büel von la Martine	Pict.	9664
	Berg.	9645
	Schuck.	9492
	Sau.	9480
	L.	9463
Chenalette (Horn) . .		8418
Col de Balm .	Gy.	7098
	Sau.	7086
„ des gr. Bernhard	P.	8430
	Sau.	7542
	Pict.	7476
„ de Ferret . .	Sau.	7170
„ de Forclaz .	Sau.	4668
„ du Tour . .	Sau.	8376
„ de Geant . .	Sau.	10598
„ zwiſchen dem Leſa u. Challantthale	Sau.	8160

Name des Berges		Höhe
Col über das Matterhorn	Sau.	10284
„ de la Seigne	Pict.	7644
	Sau.	7578
„ Tarat	Sau.	7146
Combin	Sau.	13252
Crammont . .	Sau.	8424
	Pict.	8406
Dent du Midi .	Sau.	9805
	Gy.	9228
Dents d'Oches . .	Sau.	6789
Dodeinaz	Sau.	12571
Formonaz . . .	Berg.	5639
Grenier	L.	7854
Hoſpice Montagne verte . . .	Berg.	5850
	Schuck.	5842
	Sau.	5724
Matterhorn . .	Sau.	13854
	Gy.	13800
Miage-Gletſcher .	Sau.	6456
Mittagshorn . . .	L.	11670
Molo . . .	Schuck.	5731
	L.	5694
Montblanc .		14772
	Tra.	14793
	Schuck.	14691
	Sau.	14676
	Pict.	14556
	L.	14346
Plattform am Fuße der Aiguille de Goute	Sau.	9582
Pointe de Dronaz	Sau.	8460
Rothhorn	Sau.	9036
Talefre	Vill.	8087
	Sau.	8006
Mte. Tourné .	Need.	10098
Tournette . . .	Berg.	7278
	Pict.	7068
Valſora, Gletſcher	Pict.	7728

Name des Berges	Höhe
Vandagne . . . Pict.	4590
Velan (höchſte Spitze des Bernhard) . . Sau.	10391
Pict.	10332
Varens . . . . Sau.	7200
Mte. Vergy . . Berg.	7038
Voirons . . . . Sau.	4206
Zuckerhut . . . . Sau.	8796
V.	
Die Lepontiniſchen-Alpen.	
(Schweiz und Piemont, zum Theile.)	
Aporthorn . . . Müll.	10170
Auf dem Gallen Wah.	7420
Betzberg . . . Wah.	6212
Bisbino . . . . Or.	4143
Blackenſtock . . Müll.	9540
Brüſtenſtock oder Stägerberg . . . Müll.	9515
Calbega od. della Gado Or.	5251
Calmot . . . . Weiss.	6054
Campo Fiori . . . Or.	3828
Caſſine dell' Uomo Berg.	6722
Ceramede ob Tremezzo Or.	5106
Col d'Egna . . . Sau.	6624
„ zwiſchen Leſa und Dobbiathal . Schuck.	7416
Corno di Canzo . Or.	4260
Culma d'Orta . Berg.	2838
Feudo von Fieudo Müll.	9500
P.	8586
Sau.	8268
Fibia von Pettina Müll.	9760
Sau.	8382
Furca di Betta . . Sau.	8106
„ „ Bosca . Sau.	7213
Galenſtock . . . Müll.	11280

Name des Berges	Höhe
Gineſio, Mte. . . Or.	2662
Gletſcherberg . . . Gy.	10500
Gordona . . . . Or.	4396
Gray-Stock . . Müll.	8816
Grieshorn . . . Müll.	9460
Grigna (nördliche) von Mte. Godena . . Or.	7459
Grigna (ſüdliche) . Or.	6762
Iſenſtock . . . Wah.	8185
Legnocino . . . . Or.	5316
Legnone . . . . P.	8640
Or.	8130
Lucendro-Spitze . Sau.	9730
Maienthalerſtock Mull.	8890
Marſchallhorn v. Marſel . . . . . Müll.	9560
Mittagshorn . . Mull.	6990
Muſchel von Moſchelhorn (ſchwarze) . Eb.	9410
Mutterhorn von Piſchiora . . . Müll.	9800
Mte. Pino . . . Or.	3696
Oberalpſtock . . Müll.	10200
Paß d'Olen . . Müll.	8628
„ über d. Griesberg Sau.	7338
„ über den Turca zwiſchen Matterhorn u. Galenſtock Sau.	7748
Mull.	7745
Wah.	7493
„ über den Simplon Mull.	6240
Sau.	6174
Piazza Vachera . . P.	7462
Pizzi bianco . . . Sau.	9565
Pizzo de Gino . . Or	6996
„ d'Oſera . . . Or.	3006
Poncione di Mezegra Or.	5220
Proſo von Broſen Mull.	9200
Sau.	8262

Name des Berges		Höhe
Ramithorn	Mull.	8770
Reſignone	Or.	5720
Mte. Reuscer	Or.	3852
Mte. Roſa	Sau.	14580
	Or.	14344
	Schuck.	14163
Roßbodenſtock	Wah.	8735
Salvatorberg	Or.	2882
Santo Primo	Or.	5224
„ Lucio	Or.	4788
Saſſo del Ferro	Or.	3330
Sept Borner	P.	3282
Sixmadun v. Badus	Mull.	9115
Spital a. d. Gotthard	Weis.	6700
	Mull.	6650
	P.	6573
	Wahl.	6424
	Sau.	6390
Spitzliberg	Müll.	10635
Steinenberg	Weis.	7130
Sudlinenalp	Wah.	6384
Süſtenhorn	Müll.	10860
Süſtenſcheideck	Müll.	7114
Surenenegg	Wah.	7029
Urnerſpitze	Müll.	9944
Vogelberg	Müll.	10230
Windgellen	Müll.	9790
VI.		
Berner-Alpen.		
Abgeſchütz	Mull.	7850
Alpe Hochbauen	Müll.	6660
„ Niederbauen	Müll.	6114
Alt-Els	Tral.	11432
Arſi-Grath	Müll.	5940
Äußere Eiger	Tral.	12268
Bäucklen	Wah.	5412
Balmhorn	Müll.	11415
Birchboden (Ebene)	Wah.	5068

Name des Berges		Höhe
Blümlisalp	Tral.	11393
Briſen	Müll.	7610
Brüning	Wah.	3114
Bürgenberg	Müll.	3750
	Wah.	3492
Biziſtok	Müll.	5912
Buſcherhorn	Müll.	5525
Dali von Bokiſtok	Müll.	7008
Dent de Morcle	Gy.	9156
	Wild.	8951
Diablerets	Müll.	9967
	Wild.	9682
Doldenhorn	Tral.	11287
Ezel	Wah.	6554
Faulhorn	Tral.	8020
Feuerſtein	Wah.	5999
Finſteraarhorn	Tral.	13234
Gamſtspiel	Müll.	7875
Grimſel	Sau.	9104
Grindelwald-Scheideck	Tral.	6045
Groß-Schaufflenburg oder Hochhut	Müll.	8285
Hanen-Engelberg	Wah.	8165
Hangetgletſcherhorn	Müll.	10070
Hochgadmenſtock	Müll.	9486
Hochkant	Tral.	6834
Hochſtollen	Müll.	7665
Hoch-Wallenſtock	Wah.	8080
Hoſpitium auf dem Grimſel	Wah.	5778
Jauchliſtock	Müll.	7468
Jochliberg	Müll.	6735
Jorat	Pict.	2826
	Sau.	2748
Jungfrau	Tral.	12872
Laubergrathſpitze	Wah.	7668
	Müll.	7575
Lauterbrunn-Scheideck	Tral.	6284

Name des Berges	Höhe
Mährenhorn . . Müll.	9182
Mönch oder innere Eiger . . . Tral.	12666
Moleſſon . . . . Sau.	6181
Mondloch . . . Wah.	5262
Morgenberghoru Tral.	6990
Nägelis-Gräthli Müll	9975
Napf	4920
Nieſen . . . . Tral.	7340
Ochſenſtock . . Müll.	7330
Oldenhorn	9630
Paß über den Dent de Jaman . . Sau.	4572
Berg.	7034
„ üb. d. Gemmi Sau.	6985
Müll.	6922
„ über den Grimſel Müll.	7118
Wah.	6768
„ über d. Jauchli Müll.	6696
„ über das Joch vom Engelberge Müll.	6910
„ über Surenenegg Müll.	7165
Pilatus v. Frackmont Müll.	6562
„ im Oberhaupt, genannt Ringflue Wah.	6570
„ auf dem Leib Wah.	5784
Ravil . . . . Weis.	7532
Reuliſſen	5400
Ritzlihorn . . . Müll.	10130
Rothſtock . . . Müll.	8785
Rothſtockſattel, nördl. Wah.	8248
„ ſüdlicher . Wah.	8080
Ruckhubel . . . Wah.	9039
Sättliſtock . . . Müll.	8665
Scheideggerſtock . Müll.	6514
Scheinberg . . Müll.	6115
Schienalp . . . Wah.	4131
Schloßberg bei Uri Müll.	9766
Schreckhorn . . Tral.	12560
Schwarzberg . . Wah.	5505
Seidel von Siddelhorn Müll.	8675
Tral.	8580
Spannort (große) Müll.	9968
„ (kleine) Müll.	9760
Stanzerhorn . . Müll.	5930
Stockhorn . . . Tral.	6767
Stotzigberg . . Müll.	8482
Tannhorn . . . Wah.	6532
Titlisberg . . . Müll.	10117
Tomlishorn . . Wah.	6450
Tour d'Ay . . . Wild.	6815
Vieſcherhorn . . Tral.	12500
Weidihorn . . . Müll.	6045
Weilerhorn . . Müll.	5895
Weisberg . . . Wah.	8190
Weisſtock . . . Müll.	8900
Wendeſtöcke	9476
Wetterhorn . . Tral.	11454
Widderfeld . . Pfei.	6858
Wildgaisberg . . Müll.	8365
Zingel v. Saliſtock Müll.	5930

VII.

Schweizer-Alpen.

Name des Berges	Höhe
Blanke Alp . . Wah.	5673
Blum von Schönalp Pfei.	6112
Bötzleralpe . . Wah.	5481
Doſen (eine Spitze des Rigi) . . . Wah.	5190
Ebenalp . . . Wah.	5094
Entlibuch . . . Wah.	2256
Etzel . . . . Müll.	3310
Fähnernalpe . . Wah.	4676
Feuerberg . . . Müll.	8925
Feuerſtein . . . Wah.	5999

Name des Berges	Höhe
Fluberig . . . Müll.	6335
Flühli . . . . . Wah.	2699
Gäbris v. Gaisberg Wah.	3884
Gais . . . . . Hoff.	2938
Gabris . . . . . Hoff.	3884
Glärniſch (vordere) Müll.	8025
Groß-Aubrig . Wah.	5239
Großwald . . . Wah.	3554
Hackenweg . . Wah.	4135
Hirzli . . . . . Müll.	5070
Hochalpe . . . Wah.	4784
Hochmeesmer . . Wah.	6680
Hochſäntis . . . Wah.	7671
Hochwache . . . Pfei.	2630
Hohe Rhone . . Wah.	3402
Hornli . . . . . Wah.	3496
Hüttliberg . . . Wah.	2686
Jochli . . . . . Wah.	6735
Joch Hulftegg . . Wah.	3252
Joch, das den Kamor mit Fähnern verbündet . . . . . Wah.	3874
Kamor . . . . . Wah.	5407
Kaſten (hohe) . . Wah.	5540
Knieperſpitze . . Wah.	4825
Krauchkamm . . Wah.	6704
Kroneberg . . . Hoff.	5190
Lägerberg (höchſte Spitze) Wah.	3603
Lambergratſpitze Wah.	7668
Leugelſtock . . . Wah.	5314
Megelisalpe . . Wah.	4647
Meßner (hohe) . Wah.	6680
Mieſerenberg . . Müll.	6995
Minnalp . . . Wah.	6588
Mondberg . . . Wah.	7396
Murliberg . . . Müll.	5315
Mythen von Hackenberg Pfei.	5868
Müll.	5860

Name des Berges	Höhe
Paß auf dem Gebirge Pragel . . . . Eb.	5159
Pfandſtock . . . Müll.	7960
Rauchengletſcher . Müll.	6942
Regiſtaffel . . . Wah.	5270
Pfei.	4866
Reiſerſtock . . . Müll.	8635
Rigifirſt (Spitze) Wah.	5141
Rigikulm . . . Wah.	5555
Rigidoßen . . . Wah.	5141
Rigifirſt . . . Wah.	5103
Rohne (hohe) . Wah.	3808
Roßſtock . . . Müll.	7700
Rotheſtock . . . Wah.	8080
Wah.	8248
Ruffi oder Roßberg Wah.	4870
Ruckhübel . . . Wah.	7039
Sattelalpe . . Wah.	4227
Säntis (hohe) . Müll.	7700
Wah.	7671
Schäfleralpe . . Wah.	5926
Schien von Scheyen Müll.	6950
Schnabelhorn . Wah.	3413
Schneealpe, eine ſumpfige Ebene auf dem Rigi Wah.	5105
Schwarzberg . . Wah.	5502
Schweſterhorn . Wah.	1569
Sorenberg . . Wah.	3513
Tomlisalp . . . Wah.	5185
Viznauerſtock . . Müll.	4656
Voglisegg	2963
Waſſerberg . . Müll.	7335
Wildkirchlein . . Wah.	4615

VIII.

Rhätiſche Alpen.

(Graubündten und Tyrol.)

Name des Berges	Höhe
Albersſpitze . . Stern.	6138
Alpele, hohe . . G. St.	7372

Name der Berges	Höhe	Name der Berges	Höhe
Altiſſimo di Nago . Fal.	6395	Gandſtock . . . Müll	6985
Beide Brüder . Roe.	4479	Geishorn	6900
Birkenkogl . . G. St.	8688	Geyrenſpitze . . . Roe.	7824
Biscota = Alpe . . Fal.	4451	Gilſertsberg . . G. St.	7694
Bolgen	4968	Gimpelberg . . G. St.	6872
Brandjoch . . . . Fal.	7423	Gleiersſpitze . . Stern.	6000
Brenner . . . Bch.	6360	Glockthurm . . G. St.	10294
Burgo di Bolca . Fal.	2967	Glungeſerberg . G. St.	8217
„ „ Velo (Gipf.) Fal.	3978	Grödnerjoch . . . Fal.	6608
Canisfluhe . . . G. St.	6284	Großrettenſtein . G. St	6767
Capatſchalpe . . . Fal.	7088	Grünten . . . . L.	4068
Churfürſt (große) Müll.	6950	Gurtisſpitz . . G. St.	5457
Cima de Craſte Stern.	7664	Guſcheralp . . . Roe.	5573
Col di Barchi . . Fal.	4322	Hatſcheroewand . G. St.	9773
„ de Braun . . Fal.	4727	Hausſtock . . . Müll.	9660
Dachberg . . . Müll.	9350	Hirſchſengberg . G. St.	5847
Danzenwelle . . G. St.	9675	Hienerſpiel . . G. St.	8336
Dödiberg . . . Müll.	11110	Hochederberg . . G. St.	8590
Edelsberg . . . G. St.	5002	Hochgerach . . G. St.	6028
Fälkniß . . . . Müll.	7825	Hochſtraßenberg . G. St.	6072
Fallerhorn . . Müll.	7865	Hoch = Tſchernoiwand Fal	11645
Fanaſerberg . . Roe.	6338	Hochwang . . . Roe.	6535
Fellhorn . . . G. St.	5388	Hochvogel . . . G. St.	7948
Feuerſtädterberg . G. St.	5055	Iſingerſpitz . . G. St.	7841
Fineſtra (la) . . Stern.	6618	Juiſenberg . . G. St.	6070
Fläſcherberg . . . Roe.	3134	Kaiſerjoch . . . G. St.	9570
Froſtenzer Sandberg G. St.	5010	Kärfenſtock . . Müll.	8405
Frauhut . . . . Fal.	6492	Kaiſer Ferdinandsberg	
Fundelkopf . . G. St.	7372	Wah.	4163
Fünſtermünz, Paß . .	2808	Kallerberg . . . Müll.	7875
Fürnli = Scheideck Esch.	7251	Kaltenbergferner . G. St.	8913
Fürſt, hoher . . G St.	10464	Kamerſtock . . . Müll.	6340
Gaderiolhorn . . Müll.	8725	Kamm ob. Maienfeld Müll.	7150
Gadriaberg . . . Fal	9036	Karlisberg . . . Müll.	6030
Gaishorn . . . G. St.	6901	Kirchſtein	2100
Galanda . . . . Roe.	7877	Kiſtenberg . . . . Eb.	10398
„ (höchſte Spitze)		Klaridenberg . . Müll.	10030
Müll.	8360	Königswand . . G. St.	11872
Roe.	8253	Kothbachſpitz . . G. St.	7907
Gandkogel . . . G. St.	5726	Krautskammpaß . Wah.	6704

Name der Berges	Höhe	Name der Berges	Höhe
Kreuzberg ober Schän=		Paß über d. Brenner Bch.	4374
nis . . . . Müll.	5860	Fal.	4114
Kreutzſpitz, kleine G. St.	7739	„ üb. d. Splügen Sau.	6170
Kinnenberg . . G. St.	2039	Patſcher=Kogel G. St.	6906
Kutzen . . . . Müll.	7795	Peiſſenberg . . . Hei.	3145
Laaſerſpitze . . . . Fal.	7885	Penzengraberſpitz . Fal.	6624
Lagoreiberg . . G. St.	8040	Pfenderberg . . G. St.	3265
Labachſpitze . . G. St.	9503	Pfinnſpitz . . . G. St.	9559
Leilskamm . . Müll.	6450	Piz Lat . . . G. St.	8596
Maliſerberg . . . Roe.	7537	„ Peverin . . Müll.	8427
Matton . . . . . Roe.	5534	„ Kegneren . Müll.	8660
Mittagsſpitze . . G. St.	6434	„ Valzhein	10220
Mittagsplatte . . Roe.	4245	Plateau=Tolgaria (höch=	
Monte Baldo . G. St.	6762	ſter Punct) . . . Fal.	3786
„ Bolca . . Fal.	2967	Plattey=Kogel . Wal.	9756
„ Bondon G. St.	6703	Ploſeberg . . . G. St.	7681
„ Burgo di Velo		Reicheſpitz . . . G. St.	9089
Fal.	3978	Remmſpitz . . . G. St.	9864
„ Caren . G. St.	6012	Riedberger=Horn . .	5076
„ Corno del Fre=		Ringel oder Glaſer=	
rone . G. St.	8226	berg . . . . Roe.	9775
„ Gazza . G. St.	6408	Müll.	9725
„ Liſſer . . . Fal.	5134	Roenberg . . . G. St.	6495
„ Maggiore Stern.	6858	Rotthorberg . . Müll.	7570
„ di Nago . Fal.	6395	Rothwand . . . G. St.	8302
„ Paſubio G. St.	6887	Rumerjochsgipfel . Fal.	7082
„ Pizzo . G. St.	6721	Sailerberg . . . Fal.	7383
„ Scanupia G. St.	6561	Salvenberg . . G. St.	5602
„ Selva piana G.St.	2967	Salzberg (Gipfel) Wal.	4949
„ Tomba . . Fal.	5590	Sattelberg . . . Fal.	6637
„ Viola . . Fal.	2695	Sauren . . . Müll.	9530
Mondberg . . . Wah.	7396	Scaletta=Scheideck Esch.	7820
Müttlekopf . . G. St.	8520	Sceſa plana . . Roe.	9207
Muttenjoch . . G. St.	7631	Müll.	9112
Oberberg . . . Wal.	4803	Saſberg . . . G. St.	8233
Ofenflüh . . . Müll.	7900	Schärhorn . . Müll.	10142
Offen=Scheideck . Esch.	6486	Scheibe ober Elm Müll.	9535
Ortlersſpitze . . Geb.	14416	Scheiber=Kogel . . Fal.	7626
G. St.	12020	Scheiterberg . . Roe.	5462
Padaunerkogl . G. St.	6348	Schiltberg . . . Müll.	7405

Name des Berges	Höhe
Schleierberg . . G. St.	6798
Schlernberg . . G. St.	7877
Schneeberg bei Sterzing . . . . Bch.	7764
Schnee-Chor-Keſſel-Spitze . . . . Fal.	7478
Schröfwand . . G. St.	8882
Schwarzhorn . . G. St.	7563
Schweinferjoch . G. St.	11522
Seegrubenſpitze . G. St.	6971
Segnes (Spitze des Tshingel.) . . Müll.	8900
Similaunſpitz . G. St.	11118
Solſtein (groß) . . Fal.	9106
„ (klein) . G. St.	7802
Sonnjoch . . . G. St.	7550
Sonnenwendjoch (hinteres) . . . G. St.	6071
Sorles von Waldraſterſpitze . . . . G. St.	7733
Speer ob Weſen Müll.	6050
Wab.	5915
Spianjoch . . . G. St.	9022
Spingeſer-Ochſenboden (Gipfel) . . . . Fal.	7248
Spitzmeilenberg . Müll.	7690
Spitznerjoch . . G. St.	7434
Spitzſtein . . . G. St.	4883
Spitze zu Satteln und Seegruben . . . Fal.	7068
Stanskopfberg . G. St.	8465
Steinſalz oder Waſſerberge . . . . . Bch.	5088
Stella . . . . Berg.	10485
Sterzlaberg	5587
Stilſerjoch . . G. St.	7426
Sumano . . . Stern.	3937
Tauffenjoch . . . Fal.	6571
Taurerjoch . . . . Fal.	5551
Toblacherfeld . . . Fal.	3915
Tombenhorn . . Müll.	9795
Tomba . . . . . Fal.	5590
Trefauenkaiſer . G. St.	7123
Vedretta-Marmolatta Fal.	10800
Venta . . . Stern.	1761
Vernumiſpitz . . G. St.	8661
Vilan v. Auguſtenberg Roe.	7356
Vilandersberg . G. St.	7713
Viola . . . . . Fal.	2696
Volzeinerberg . . . Roe.	4280
Waitzfeld . . . G. St.	10180
Wandelſtein	2058
Wanekberg . . G. St.	7657
Waldkamm (hohe) . Fal.	5490
Waldraſterſpitz . G. St.	8342
Wandkopf (hohe) G. St.	5409
Wechſelſtein . . Stern.	5918
Widderſtein . . G. St.	7787
Wiedersbergerhorn G. St.	6525
Wildegrad-Kogl G. St.	9133
Wildſpitzferner . G. St.	11592
Winterſtaudeberg G. St.	5759
Wörgelſpitz . . G. St.	5619
Zangenberg . . G. St.	7659
Zugſpitze . . . Stern.	7734
Zunderkopf . . G. St.	6032

IX.

Noriſche Alpen. (Kärnthen, Salzburg, Steiermark, Öſterreich.)

Name des Berges	Höhe
Alpe, übergoſſene . .	9000
Alpſteig . . . E. R.	3297
Ankogel . . . K. St.	10300
Anninger	1938
Außerardens . . K. St.	6169
Bärnkogel . . . K. St.	7094

Name des Berges	Höhe	Name des Berges	Höhe
Bilarkenſtein . . Schul.	5860	Göhl (hohe) . . Moll.	7815
Blaſſenberg . . Glück.	5511	Goldberg (Rauriſer) Moll.	7668
Brennkogel . . Hac.	7980	Großenberg . . E. R.	8381
Schul.	7857	Greiner (Fuß) . Moll.	6554
Brennſpitze	5494	„ (Spitze)	8800
Brodingeralpe	5272	Greiterſattel	2516
Clauß, Paß	2772	Grimming . . Schul.	7247
Dachſtein . . Schul.	8937	Großglockner . Moll.	12978
G. St.	9132	Schieg.	11982
Donnerkogel . . . Klc.	6330	K. St.	12000
Däumel	6054	Grubalpen	5120
Dürrenſtein	8043	Grünſchacher . . G. St.	3022
Eibenberg	4790	Gſtätteralpe	5060
Eiſenhut	7470	Gſchaid . . . . G. St.	3183
Eiskeller	5195	Gugenbichel	5100
Emerbergerkogel G. St.	1444	Hainzen	5049
Erzberg (Gipfel) bei Eiſenerz . . . Schul.	4590	Haukogel	8964
Falzalpe	5500	Hallthal . . . G. St.	1920
Faulkogel	8100	Heuberg	2110
Filzen, hohe	2520	Heiligenblut-Thauern Schieg.	8058
Feuerkogel am Kranabetſattel . . . . . Klc.	4847	Hengſtthal (obern Ende) Fal.	2203
Fraukogel	7272	Heislitz . . . . . Fal.	2589
„ ſteinerne Säule Kul.	5238	Hengſt . . . . G. St.	2661
Gahnsberg . . . G. St.	3022	Herzog Ernſt oder der große Kogel . Moll.	9096
Gaisberg . . . Bch.	4012	Hierlaz . . . . Schul.	5772
Hum.	3890	Hinteralp . . . Moll.	5070
Gailling, hohe . . .	9800	Hirſchberg . . . Schul.	6008
Gamskahrkogel . . . Bgr.	7600	Hirſchkopf	6883
Radjetze (Alpe daſelbſt) Bgr.	5097	Hirſchwang . . G. St.	1920
Gejaikopf	6824	Hohenberger Geſcheid E. R.	2572
Geierskopf . . . Beck.	8502	Hohenberg . . . G. St.	1561
Geisberg . . . . Hum.	3890	Hochgailing . . Moll.	9798
Gerlosalpe	5511	Hochkalter	8800
Gerlosſtein . . . Moll.	5811	Höllkogel . . . . Schul.	5711
Gerloswand . . . Moll.	6621	Hohenſtaufen . Hum.	5408
Gletſcher des Hallſtädter-Schneeberges . Schul.	8120	Hohenwartshöhe (am Großglockner) Schieg.	10392
Glöckt (hohe)	5827		

Name des Berges	Höhe	Name des Berges	Höhe
Hochmannshorn am ſteinernen Meer . . .	7600	Langgeſcheid . . E. R.	2344
Hochzink, am ſteinernen Meer	8052	Leopoldsberg bei Wien G. St.	1356
Hundſtein	6488	Looskogel	4929
Hundſtödt	7722	Lilienfelderalpen G. St.	3699
Hutwiſch . . . G. St.	2916	Marzſteg . . . Schul.	2267
Imberg . . . Moll.	2122	Madelrigel . . . Fal.	3144
Kallersberg	7400	Meer, ſteinernes . .	6500
Kalkbretten . . K. St.	7500	Mittagskogel	5453
Kaltenbrunneralpen .	4510	Mönchberg	1900
Kammerſtein . . . Fal.	1064	Mühlſtürze	6999
Kammerkahr	5621	Muranerkopf	9500
Kammerhorn	7850	Narr, der hohe . . .	10632
Kantenbrunn . . .	8900	Naßfeld . . . . Bgr.	4626
Kapuzinerberg . . .	2122	Neuburgeralpen (Gipfel) Schul.	4260
Kaiſerſtein . . G. St.	6632	Neuſtädteralpe . . .	5339
Kahrkogel	5318	Nebelsbergalpen . .	4939
Käsberg . . . E. R.	5215	Neſterſcharte	4567
Katſcher-Paß . . . Kar.	4896	Niederalpel . . G. St.	3800
Kahlenberg am Ramſaugebirge . . . Kle.	5471	Obdachalpe . . . Kul.	5870
„ bei Wien . . .	1356	Ochſenhörner	8306
Kalmberg . . . Schul.	5434	Ochſenkogel	6700
Kreskogel	8963	Ötſcher . . . . . E. R.	5900
Hempel o. Zeires Schull.	5218	„ höchſte Holzhütte	2783
Klampaß . . . K. St.	1800	Oſterhorn	5995
Klingeralpe	4490	Packberg . . . Schul.	2882
Knidlhorn	6820	Petersalpe . . . Kul.	5236
Koppenkahrſtein . . Kle.	7575	Pinzgauerhöhe . Moll.	4457
Korkogel . . . Schul.	5827	Plankenſtein . . . Kle.	5956
Kramkogel	7498	Pötſchenberg . . . Bch.	3151
Koppen, hoher . . Kle.	5391	Preber	8610
Kreutz (hohe) . . Schul.	8411	Predil . . . . . . Fal.	3590
Kreutzjoch . . . Mol.	7646	Preduleralpe . . G. St.	5220
Kreutzkogel	8806	Priel . . . . . G. St.	7951
Krippenſtein . . Gluck.	5721	Ratenthalalpen	4323
Krimmel	3290	Radſtädter Tauern-Paß Kar.	5083
Lackenkogel	6132	Beck.	4754
Lueg, Paß	1460	Rädmar, außere Schul.	2196

Name des Berges	Höhe	Name des Berges	Höhe
Raſchberg	4639	Schlappereben . . .	9030
Rathhausberg . Beck.	8184	Semmering . . G. St.	3210
Schieg.	8167	Schmidtenſtein . . .	4800
„ Fuß der Maſchine Bg.	3560	Schneealpe . . G. St.	5580
Raxalpe . . . G. St.	6517	Schneeberg b. Neuſt. Bg.	6600
Raſtkopf . . . . Moll.	7758	Fal.	6444
Rauriſertauern (hohes Thor)	8805	Schöberl	7283
		Schönbühel	5200
Reitalphorn	5220	Speigkogel	5091
Reiterſteinberg . . .	6249	Schöckl . . . . . Lies.	4778
Reitertritt	4687	Schottmalhorn . . .	6000
Rettenbachalpe . . .	4826	Schreck	4769
Ringkogel	5396	Schrott, hoher . . .	5339
Rinnerkogel . . . Kle.	5979	Schütt, ober Mitterſee E.R.	3081
Rohrenberg . . E. R.	2652	Schwab, hoher . G. St.	7175
„ . . G. St.	2652	Schwambergeralpe, untere . . . . Kul.	4357
Roſalienkapelle . G. St.	2294		
Roſenleithen . . G. St.	2900	Salmshöhe . . Schieg.	8350
Roßfeldalpe	4000	Sonnſteinſpitz . . Kle.	2655
Rothenſtein	6856	Sonnblick	9000
Rothhorn	7300	Sonntagshorn . . .	5976
Rothkogel	5223	Spitzenſtein . . . Kle.	4623
Saalfelder=Scharte .	7002	Spitzmauer	7464
Salzberg bei Hallſtadt		Speigberg . . . . Kle.	6490
Glück.	4000	Speigkogel . . . Kul.	5640
Sandlingberg . . Kle.	5090	Stangalpe . . . E. R.	7140
Sarſtein (Gipfel) Schul.	5901	Steinberg . . . Beck.	7988
Glück.	5463	Steinhüttelgrad . . Kle.	5998
Sattel des Prehnhübel E. R.	3734	Stinnerkogel . . Schul.	6355
Schul.	3732	Sulzeralpen	4663
Kar.	3636	Tännengebirge . Hum.	6644
		Taubenkahr . . Schul.	5531
Sattel in Waidboden E. R.	4798	Teufelshorn	7264
Schafeckkogel . . . Kle.	3743	Thanberg	2416
Schafeckalpen . . Kle.	4143	Thierkahrhorn . . .	6100
Schafberg bei Mondſee . . . . . Kle.	5372	Thorſtein	9336
		Thron (hohe)	7245
Schareck	10200	Thörlwand	4008
Scheibwaldgipfel . Fal.	5175	Traunſtein . . Luc.	4050
Schilcherhöhe . . Moll.	6736	Untersberg . . Hum.	5516

Name des Berges	Höhe
Untersberg Firmianalpe	2469
„ Schwaigmühlalpe	4400
„ Klingeralpe . .	4490
„ Steinbruch . .	1450
Bieſch oder Wiesbach-horn . . . . Schul.	10800
Villacheralpe . . . Fal.	7375
Wachkopf . . . . Moll.	7758
Wandelkäſer . . Käser.	6486
Waſchenegg . . E. R.	7902
Watzmann . . Beck.	9058
Waxriegel am Schnee-berg . . . . . Fal.	5712
Wechſel . . . . E. R.	5332
Weichſelboden (Holz-hütte) . . . Schul.	2390
Wießbachhorn . . .	10800
Wildalpe . . . Schul.	1716
Wildenkogel . . Kle.	5454
Wildonerberg	1716
Windfels . . . . Moll.	6879
Windfelshörner . Moll.	8052
Ziſtelalpe	2966
Zwölferkogel . . Schul.	5731

X.

Karniſche, Juliſche und Dinariſche Alpen.

(Kärnthen, Krain, Friaul zum Theile, Illyrien.)

Name des Berges	Höhe
Bella . . . . . G. St.	2399
Berlosnig . . . G. St.	3358
Bergut, Brch. . G. St.	2742
Braiko, Brch. . G. St.	3358
Capo di Terſtennik G. St.	3815
Coinikberg . . . G. St.	2458
Col Grand . . . Fal.	4978
Csuk . . . . G. St.	2305
Dinario (mons adrius) Hac.	7000
Dobratſch . . . . Fal.	7375
Ertberg . . . G. St.	2481
Germadaberg . G. St.	2077
Gmainig . . . G. St.	2097
Karlsberg . . . . Kar.	1486
Kleik . . . . . . Hac.	6500
Kokusberg . . . G. St.	2047
Liſſaz . . . . . G. St.	2883
Loibl . . . . . . Fal.	4243
Maigriſchan . . G. St.	2555
Monte Croce . . . Fal.	5102
„ Grabri . G. St.	2836
„ Oſſero (Inſel Loſſini) . G. St.	1795
„ Sys (Inſel Cherſo) G. St.	1963
„ St. Mauro Fal.	4727
„ Tiſſol . . . G. St.	2561
Nanosberg . . . G. St	3988
Oberſchie . . . . G. St.	2353
Obir	6842
Orgliachberg . . G. St.	3392
Oſtrich . . . . G. St.	2134
Pliſſiviczagebirge Wal.	5550
Predil . . . . . . Fal.	3592
Preſiſtiberg . . G. St.	2285
Raſchuſchitza . . G. St.	3319
Razborberg . . G. St.	3962
Sbevinza . . . G. St.	3107
Scaletta . . . . Fal.	3308
Schabnik . . . G. St.	3137
Siaberg . . . . G. St.	3810
Sidonie . . . . G. St.	2023
Sinsnik . . . . . Hac.	7000
Slaunik . . . . G. St.	3152
Sokolich	2318
Spigni, Brch. . G. St.	3055
Steineralpen . . Vals.	10274

Name des Berges	Höhe
Strada . . . G. St.	2441
Stroſcha . . . G. St.	2305
Szohova . . . G. St.	2327
Terglou . . . Schul.	9378
Veli Planik . . G. St.	3903
Veliki Hraſiſti . G. St.	2272
Wellebit: Spitze Velika Viskohicza Wal.	4338
„ Spitze Badamj Wal.	4164
Zeroſchitz . . . G. St.	2504
Zeroviza . . . G. St.	2588
XI.	
Hämus- und Lacha-Gebirge.	
Athosſpitze	3108
Elias (Ipſara) . . .	1678
„ (Mikone) . . .	1222
„ (Tenedos) . . .	591
Eliasberg (Paros) . .	2361
Jupiter (Naxos) . .	3124
Kerki (Samos) . . .	4497
Lacha von Olympus .	6120
Monte Santo (Athos)	6360
Orbelos . . . Pou.	9000
XII.	
Karpathen.	
Beckorſtößchen . Wah.	4571
Biſtrouv (Spitze) Wah.	3849
Budislav	6888
Chocsalpe . . . Wah.	4915
Djumbieralp (höchſter Gipfel) . . . Wah.	6170
Durlberg (Gipfel) Wah.	5586
Hintere Leithen . Wah.	6184
Hochwald . . . Wah.	2689
Janorzka-Scala Wah.	3947
Joch Nad-Mlina Wah.	5366
Käsmarkerſpitze . . .	7974
Kahlbacher-Grat Wah.	5269
Klackberg . . . Wah.	4168
Königſtraße . . Wah.	2244
Krywan (gr.) . . Rum.	7818
Wah.	7538
Kukurazza . . . Bede.	4680
Lomnitzerſpitze . Rum.	8100
Wah.	7942
Nachtſtein . . . Wah.	4677
Nad. Pavlava . Wah.	5575
Neſſelblöße . . . Wah.	4371
Neppi-hibbu . . Wah.	6025
Näzkowa . . . Wah.	6569
Nohats . . . . Wah.	6407
Sattel, welcher das Mittelgebirge mit den Tatra verbindet . Wah.	5379
Stirnberg . . . Wah.	5899
Stoch . . . . Wah.	4878
Surul . . . . Ler.	7078
	6468
Thalebene über Völkerſee . . . . . Wah.	5459
Teufelshochzeit (Cſertova Szvadba) . . Wah.	3696
Thörtchter Gern . Wah.	6301
Tſcharerpaß . . Wah.	3286
Ünökoe . . . . Bede.	7392
Weißwand . . . Wah.	3424
Weg zwiſchen den Thuratzer Krywan und den Stoch . . . Wah.	3721
XIII.	
Sudetten.	
Anna. od. Chelmberg Char.	1422
Bleiberg . . . Char.	2256

Name des Berges	Höhe	Name des Berges	Höhe
Brunnberg, öſtliche Kuppe . . . Hos.	4698	Menſe oder Manze (hohe) Lind.	3268
		Char.	3242
Buchberg an der Gſar=wieſe . . . . . Hos.	2838	Mittelberg . . . Char.	3666
Buchberg bei Lands=hut . . . . Char.	2410	Molkenburg . . Char.	2884
Buchenhübel . . Lind.	2540	Neſſelgrunder=Fort Char.	2113
Dreyſtein N. W. Teich	3786	Ochſenkopf . . Char.	2744
„ S. W. Teich	3654	Ottenſtein . . . Char.	2618
Eule (hohe) . . Char.	3036	Rad (große) . . Char.	4702
Falkenberge . . Char.	2037	Reifträger . . . Char.	4280
Frieſenſteine . . Char.	2888	Lind.	3750
Glaſerberg . . . Char.	2777	Schnee oder Rieſenkoppe Lind.	4950
Grulicher Marienberg Da.	2289	Gerst.	4884
Hahnkoppe . . . Char.	2295	Schneeberg (großer) Char.	4300
Heidelberger Ziegen=rücken . . . Hos.	3042	Da.	4262
Heſſenberg . . . Char.	1316	„ (kleiner) Char.	3876
Heuſcheuer . . . Char.	2893	Schneegrube	4488
Heidelberg . . Lind.	2858	Schreiberauer Schnee=grube (kleine) . Char.	4486
Hochberg . . . Char.	1930	Schwarzberg . . Char.	3605
Hochſtein . . . Char.	2803	Seefelder . . . Char.	2858
Hochwald . . . Char.	2699	Seifenberg . . . Char.	4476
Hummel . . . Char.	2402	Sonnenkoppe . . Char.	2840
Jauersberg . . Char.	3000	Spiegelberg bei Glatz Char.	2803
Jeſchkenberg . . . Hos.	2982	„ „ „ Hos.	3888
Kammkoppel . . Char.	4004	Spieglitzer Schnee=berg . . . . . Da.	4380
Karlsberg . . . Char.	2542	Spitzberg . . . Char.	2517
Keſſelberg . . . Hos.	4368	„ bei Silber=berg . . . . Char.	1950
Kitzelberg . . . Char.	2033	Strohhaube (große) Lind.	2275
Klapperſteine . . Char.	3 456	Sturmhaube (große) Hos.	4584
Kleiſchberg . . Char.	1508	Char.	4540
Koppe (kleine) . Char.	4331	Tafelfichte . . . Hos.	3546
„ (ſchwarze) Char.	4302	Char.	3379
Koppenplan . . . Hos.	4332	Warthaberg . . Char.	1702
Kynaſt . . . . Hos.	1848	Zobtenberg . . Char.	2318
Char.	1812		
Lahnberg . . . . Hos.	4513		
Landshuter oder Schmie=debergerberg . Char.	2255		

Name des Berges	Höhe
XIV. Oberlauſitzer-Gebirge.	
Donnersberg . . . Hos.	2641
Drechslerberg . . Bch.	2341
Geltſch . . . . . Hos.	2018
Hochwald . . . Char.	2239
Huthaus . . . Gers.	2150
Keulenberg . . Char.	1302
Gers.	1241
Königſtein . . . Gers.	1400
Kottmar . . . Gers.	1710
Char.	1621
Kreuzberg . . . Lind.	1686
Landskrone . . Gers.	1304
Lautſche o. Spitzberg Char.	2309
Oybin . . . . Gers.	1591
Schneeberg bei Teſchen Lind.	2289
XV. Erz-Gebirge.	
Auersberg . . . Char.	3090
Fichtelberg (ſächſiſcher)	3731
Char.	3621
Grüne Stein . . . Sey.	2820
Ochſenkopf	2744
Schellenberg . . Gers.	1438
Schneckenſtein . Char.	1510
Schwarzwald (Berg) Char.	3870
XVI. Fichtelgebirge.	
Annaberg bei Eger Da.	1729
Culmberg	2270
Farnleiten oder Zinnberg . . . . . Fab.	3316

Name des Berges	Höhe
Fichtelberg . . . . Fab.	3521
Hohe Sonne . . Hoff.	1333
Ochſenkopf	4920
	3620
	3170
Schneeberg, nördlich von Fichtelſee Fab.	3682
Bg.	3222
Gers.	3214
Da.	3071
XVII. Böhmer-Wald.	
Arber . . . . . Hos.	3840
Dreyſeſſelberg . . .	2798
Heidelberg . . . Hos.	4203
Lin.	3517
Kobel in Regensburg .	2215
Rachel . . . . . Hos.	3792
Scheibenberg	1663
XVIII. Thüringer-Wald.	
Blusberg . . . Feer.	2574
Breitenberg . . Hoff.	1920
Burkersdorferhöhe Linke.	1622
Culmberg . . . Reich.	2269
Dolmar . . . Feer.	2184
Dreiherrnſtein . Hoff.	2192
Ettersberg . . . . v. L.	1260
Gebaberg . . . . Feer.	2324
Gebrannte Stein Hoff.	2682
Gehege . . . . . Reich.	1834
Gerberſtein . . Hoff.	2148
Heimersdorf (gr. Hoch.) Feer.	1739
Hirzbol oder dürre Wieſe Hoff.	2061

Name des Berges	Höhe
Hohe Sonne . . Hoff.	1333
Hörſelberg	1086
Hühnerwieſe . . Hoff.	2111
Inſelberg . . Voigt.	3127
Zach.	2832
Hoff.	2791
	2604
v. L.	2449
Klinge . . . . Hoff.	1608
Lerchenhügel . . Reich.	2142
Neufang . . . Hoff.	1975
Pfarrenkopf . . Linke.	2517
Pfütze, rothe . . Hoff.	2159
Porphyrfels (höchſter am Mittelgebirge) Hoff.	2485
Punct (höchſter) zwiſchen der rothen Pfütze und der Hühnerwieſe . . . . Hoff.	2294
Quittelsberg . . Linke.	1889
Reifweg . . . Hoff.	2274
Rupberg . . . Hoff.	2567
Sandberg . . . Hoff.	2419
Schloßberg bei Lobenſtein . . . . Rech.	1644
Schneekopf . Voigt.	3316
	3018
Feer.	2975
Zach.	2886
Hoff.	2760
v. L.	2673
Schützenſtein . . Hoff.	2248
Seimberg . . . Hoff.	2366
Sieglitzberg . . Reich.	2198
Sigismundiberg . Feer.	2330
Steiger . . . Voigt.	1035
Steinheiderberg oder Kieferle . . . . Feer.	2598
Linke.	2578
Stoffelskuppe . Hoff.	1225
Stoffelkuppe Fuß am Thale der Elma Hoff.	745
Streifling . . . Hoff.	1558
Tafelſtein . . . Hoff.	2456
Trohberg . . . Hoff.	2150
Vogelhaide . . Hoff.	2221
„ Fuß derſelben Hoff.	2116
Wachsſtein . . Hoff.	1548
Weiſſenberg, kleiner Hoff.	2282
„ großer Hoff.	2217
Wurzelberg . . Linke.	2374
Zellauer-Laube, höchſter Punct . . Hoff.	2639

XIX.

Rhöngebirge.

Name des Berges	Höhe
Aſchenberg . . Schnei.	1160
Ausſpann . . Schnei.	1240
Bibraſtein . . . Gott.	2168
Dammersfeld . Gott.	2868
Hell.	2529
Dreyſtelz . . . Gott.	2092
Ebersberg . . Schnei.	2004
Eyerhauk . . . Hell.	2416
Florensberg . . Hell.	1205
Frauenberg . . Gott.	1118
Heimberg . . . Hell.	1327
Kreuzberg . . Schnei.	2800
Hell.	2533
Klingeberg . . . Hoff.	1659
Milzeburg . . Hoff.	2527
Gott.	2516
Petersberg . . Gott.	1398
Hell.	1320
Rabenſtein . . Hell.	2317
Reifwig . . . Hoff.	2275
Rupberg . . . Hoff.	2567
Seunberg . . . Hoff.	2366
Steinwand . Schnei.	2025

Name des Berges		Höhe
Stappelsberg .	Hell.	1688
Streifling . . .	Hoff.	1588
Trochberg . . .	Hoff.	2150
„ Fuß .	Hoff.	2045
Wachtkuppel . .	Hell.	1882

XX.

Spitzen der Flötzgebirge.

Name des Berges		Höhe
Brandberg . .	Rosen.	1295
Kyffhäuſer . . .	Ros.	1458
	Char.	1444
Meißner		2184

XXI.

Harz.

Name des Berges		Höhe
Achtermannshöhe	Heron.	2706
	Rosen.	2580
Brandhey . . .	Heron.	1812
Brocken . . .	Hei.	3562
	Gers.	3528
	Heron.	3486
	Rosen.	3455
	Kar.	3368
	v. L.	3276
	L.	3270
Bruchberg . .	Heron.	3018
	Rosen.	2699
Dietrichskoppe	Heron.	1848
Eichelberg . . .	Heron.	1638
Eulenſtein . . .	Heron.	1302
Eversberg . . .	Heron.	2058
Feuerſteine . . .	Heron.	2680
Heiligenſtock . .	Heron.	1752
Heinreichshöhe	Heron.	3168
Herzberg . . .	Rosen.	1494
Hohegeis		1893
Kahlenberg		2184
Kaulberg . . .	Rosen.	1572
Rammelsberg .	Heron.	1914
Roßtrappe . . .	Heron.	1464
Steinberg . . .	Heron.	1428
Warthaberg . .	Heron.	1302
Winterberg, kleiner	Heron.	2682
Wormberg .	Heron.	2880
	Rosen.	2634
Zwieſelberg . .	Heron.	1302

XXII.

Siebengebirge.

Name des Berges		Höhe
Drachenfels . .	Benz.	1005
Gänſehals . .	Benz.	1547
Löwenburg . .	Benz.	1444
Ölberg	Benz.	1444
Petersberg . .	Benz.	1040
Wolkenburg . .	Benz.	1015

XXIII.

Weſterwald.

Name des Berges		Höhe
Altenburg		1216
Galgenberg		2604
Pfaffenhain		1256

XXIV.

Taunusgebirge.

Name des Berges		Höhe
Altkönig . . .	Schm.	2400
Dünsberg . . .	Schm.	1440
Feldberg, großer	Schm.	2605
„ kleiner	Schm.	2458
Haſſelhecke . . .	Schm.	1125
Hausberg . . .	Schm.	1350
Platte	Schm.	1500
Stauffert . . .	Schm.	1285
Stoppelberg . .	Schm.	1150
Trompeter . . .	Schm.	1560

Name des Berges	Höhe
XXV.	
Odenwald.	
Königsthal . . Wild.	2050
Malchen, genannt Melibocus	1550
XXVI.	
Rauhe Alp.	
Roßberg . . . Wild.	3699
XXVII.	
Schwarzwald.	
Belchen . . . Wild.	4357
Berg, worauf Kaltenbrann liegt Wild.	2400
„ worauf Kaſtelberg liegt Wild.	1370
„ worauf Probſtey-Bürgel liegt Wild.	2091
Blauen . . . Wild.	3597
Feldberg . . . Wild.	4608
Heiligenborn	2049
Hohekopf . . . Wild.	2560
Hundsrücken	3815
Kandelberg . . Wild.	3901
Kandern	1103
Karlsſtein	3012
Katzenſtein	1695
Kniebis . . . . Wild.	2560
Köhlgarten . . Wild.	3792
Lauterbach	1841
Mannslohe . . Wild.	2236
Marzeller-Egarten Wild.	2898
Öllache . . . Wild.	2456
Rohrkopf . . . Wild.	3633
Schlingerberg . Wild.	1184
Sirnitz . . . . Wild.	3313
Steinberg	3516
Stoinberg . . Wild.	5338
Teufelsberg	1124
XXVIII.	
Vogeſen.	
Ballon d'Alſace . . Gy.	3870
„ de Lure, Gipfel Gy.	3492
„ „ Serance Gy.	5726
„ „ Sulz . Berg.	4422 4322
Bärenkopf, Gipfel Gy.	2874
Berggipfel zwiſchen Erival und Remirmont . . . Gy.	2364
„ zwiſchen Fraize la Croix au Mines . . . . Gy.	2436
„ zwiſchen Offenbach und Sulzbach Gy.	2376
Breſoir, Gipfel . Gy.	3840 3814
Chambreyberg . . Gy.	2202
Chatel-Gehänge . . Gy.	2028
Donnersberg bei Kirchheim	2102
Granel Donon . . Gy.	3138
Haut de Freſſe . . Gy.	2332
„ d'Honec . . . Gy.	4128
„ du Rhau . . Gy.	2982
„ „ Thau oder Neuve-Rocheſpitze . Gy.	3060
La Louviere . . . Gy.	2340
Les Chaumes, Gipfel Gy.	3942
St. Martin-Spitze Gy.	2364
Odilienberg . . . Cy.	2466
Ormond-Spitze . . Cy.	2682

Name des Berges	Höhe	Name des Berges	Höhe
Plateau über dem Erwalthale . . Berg.	2199	Chabaus, Spitze . Gy.	2658
Punct, höchſter, zwiſchen Chauteau-Lambert und Corrallieres . . Gy.	2334	Chalamont, Schloß, Ruine . . . . Gy.	2664
„ höchſter, zwiſchen Chateau-Lambert und Vieille-Fanderie . . Gy.	2874	Chaſteral o. Geſtler Gy.	4980
Sandſteinhöhe . . Gy.	3090	Tral.	4968
XXIX.		Ost.	4957
Juragebirge.		Chaſſeron . . . Tral.	4980
Areche . . . . . Gy.	2148	Ost.	4956
Avignon, Spitze . . Gy	2832	Chateleu . . . . Gy.	3972
Baillardſpitze . . . Gy.	2904	Chaumont, Gipfel . Gy.	3804
Balm, la . . . . Gy.	2598	Chaux d'Ailly, Schlucht Gy.	2586
Bec à l'Oiſeau . Ost.	3841	Chrenoix, Spitze . Gy.	3090
Bemont o. Bermont Gy.	2940	Cernil, Wirthshaus Ost.	3641
„ Höhe von . Gy.	3288	Colbert, Gipfel . . Gy.	2472
Berg bei Bonnetage, mittlere Höhe Gy.	2964	Columbier, Gipfel Gy.	5184
„ über den Querittes . . . . Gy.	3060	Combes, Höhe des Wirthshauſes . . Gy.	3876
Berggipfel zwiſchen la Brevin und Montier Travers . Gy.	4020	Corbon, Gipfel . . Gy.	2886
„ zwiſchen Mouthy und Remoray Gy.	3180	Cote, la, höchſte Spitze	2706
„ zwiſchen Porentrui und St. Urſane Gy.	2958	Courroux, Gipfel . Gy.	2466
„ zwiſchen la Plaine und la Riviere Gy.	3114	Courtelain, Gipfel . Gy.	2136
„ zwiſchen Remoray und St. Pointe-See . . . . Gy.	3168	Cret de Chalem . . Gy.	3414
„ zu Remoray und Vaux . . . Gy.	3192	„ „ de Locle . Gy.	3158
		„ Moniot	3312
		Creux du Vent . . Ost.	4512
		Crocitite, la . . . Gy.	1956
		Dent de Vaulion Gy.	4596
		Sau.	4468
		Des Bois-Kapelle Gy.	3360
		Dole . . . . Gy.	5208
		Schuck.	5185
		Tral.	5174
		Sau.	5076
		Eſſervillers-Gelande Gy.	2568
		Evillers-Gelande . Gy.	2832
		Faucille . . . . . Gy.	5104
		Fauverge . . . . Gy.	2976
		Gran de Chalem . Gy.	3414
		Grand Marchand . Gy.	3186

Name der Berges	Höhe	Name des Berges	Höhe
Grand Mont, Gipfel Gy.	3222	Naiſſey Geländ . . Gy.	2262
„ Salbert . . Gy.	1992	Noirmont . . . . Gy.	3384
Grangeberg . . . Gy.	4368	Pacote . . . . Ost.	3782
Groß = Taureau Ost.	4083	Paſſavant . . . . Gy.	2256
Gy.	4056	Paß la Cluſette . . Gy.	3696
Gieslefluе . . . Tral.	2383	Pierre Pertuis . Gy.	2424
Haſſenmatte . . Tral.	4476	Berg.	2319
Gy.	4470	Pittou . . . . . . L.	4230
Hautſchel . . . . Gy.	2628	Plateau de Fourge Gy.	3450
Haute-Pierre, Felſen Gy.	2748	Pouillat . . . . Gy.	2190
Hircey . . . . . Gy.	2154	Poulleret . . . Gy.	3930
Holoferne, Schloß,		Ost.	3933
Ruine . . . . Gy.	2352	Poupet . . . . . Gy.	2616
Joux de la Ville . Ost.	3613	Preßhaut, Gipfel . Gy.	3852
Landoz . . . . . Gy.	4393	Punct, höchſter, zwi-	
Laumont oder Blau-		ſchen Trevilliers und	
berg . . . . . Gy.	2364	Indevilliers . . Gy.	2442
Leberberg . . . . Gy.	3726	Racine . . . . Ost.	4439
Machairn . . . . Sau.	5386	Reculet . . . . Gy.	5289
Maclusfelſen . . . Gy.	3018	Tral.	5196
Mahu, Schloß, Rui-		Reugney-Geländ . Gy.	2712
ne . . . . . . Gy.	2460	Rizouryſpitze . . . Gy.	3972
Miroirs, les . . . Gy.	2958	Roche d'or . . . . Gy.	2616
Mons-Chavens . . Gy.	3696	Rötyberg . . . . Gy.	4308
Mont Pele . . . Gy.	3192	Rouſſes . . . . . Gy.	3432
„ Charvey . . Gy.	2376	Saleberg . . . . Gy.	4131
„ du Cerf . Ost.	3692	Saleve, kleiner . . Cy.	2730
„ Cicon . . . Gy.	3012	Sapea . . . . . Gy.	2724
„ D'or . . . Gy.	4500	Seroliet . . . Ost.	4134
„ Larba, Gipfel Gy.	3792	Sublieres . . . . Gy.	2400
„ de Sey . . Gy.	3672	Sucheron . . . . Gy.	4920
„ Tendre . Tral.	5202	Suchet, Gipfel . . Gy.	4830
Gy.	5196	Tete de Rang . Ost.	4384
„ Terrible . . Gy.	2442	Gy.	4296
„ Tournée . Ost.	3970	Thevenon de Vertr. .	4270
Gy.	3960	Trieve . . . . . Gy.	2298
Montalon . . . . Gy.	2762	Tronchats . . . . Gy.	3048
Monte Venne . . . Gy.	2094	Venne-Geländ . . Gy.	2988
Montrivel . . . . Gy.	2376	Wannenflue	3980
Mouſſiers . . . . Gy.	3588	Weiſenſtein . . . Gy.	3966

Name des Berges		Höhe
XXX.		
Sevennen und Gebirge in Auvergne.		
Bugarach . . .	Cass.	3903
Cacadogne		5320
Cantal	Cass.	5988
Capucin . . .	Berg.	4257
	Bch.	4161
Col de Carbre . .	Del.	5203
Coſta, la . . .	Cass.	5154
Cote de la Prudelle	Berg.	2115
Courlande . . .	Cass.	5076
Croix Morand .	Berg.	4150
	Bch.	4063
Jugath, Gipfel	Berg.	3444
	Bch.	3350
Mont d'or . .	Cass.	6288
	Del.	5814
	Berg.	5751
	Bch.	5655
Mont Mezin		6162
„ Salvi . .	Cass.	2338
Montoſet		5100
Pierre ſur Haut . .		6144
Puy de Dome	Cass.	4902
	Del.	4554
	Berg.	4509
Puy de Barme	Berg.	3366
	Bch.	3271
„ Mary . .	Cass.	5736
	Del.	5106
„ de Pariou	Berg.	3666
	Bch.	3569
„ de Pradelle	Foujas.	4200
„ de la Vache	Bch.	2985
„ Violente .	Del.	4908
Punct, höchſter, von der Gebirgskette Thiers	Berg	2889

Name des Berges		Höhe
Roche de Couſin	Bch.	5216
Tête du Boeuf .	Homb.	4939
Trois Points de la Madelaine . . .	Pass.	4500
XXXI.		
Pyrenäen.		
Auriete	Char.	3846
Baccanera . .	Parr.	7042
Barthelmy . .	Cass.	7109
Brèche de Roland	Reb.	9252
Canigou . . .	Cass.	8646
Cap d'Andron .	Aub.	6318
Col de la Couillade	Char.	6096
„ „ Niſele . .	Ram.	7746
„ „ Pimené .	Ram.	7746
„ „ Port . .	Parr.	3997
„ „ Tourmalet	Ram.	6756
Coſta bona . .	Mech.	7578
Crauque . . .	Aub.	4200
Eſtella	Mech.	5450
Gallineron . .	Parr.	8728
Gavarnie . . .	Ram.	3446
Horn von Anie .	Ram.	7615
„ „ Arbizon	Ram.	8880
„ Kämme, mittlere Höhe derſelb.	Ham.	7500
Mont Calm		9690
„ Marboré, Cylinder des .		10262
„ „ Gipfel, höchſter	Hum.	10722
„ Maladetta	Cor.	10020
„ Marboré	Ram.	10500
„ Perdu		10362
Montagalles . .	Mech.	5223
Montague d'Hauſa	Jun.	4002
„ de Moſſet	Char.	7416
„ „ d'Orhi	Jun.	6186

Name des Berges		Höhe
Montague d'Orſan Sou-rietta	Jun	4806
„ „ Rancier	Char.	1720
„ „ Roc blanc	Char.	7812
Montſerrat . .	Mech.	3804
Monſet	L.	8461
	Cars.	7518
Murro di Barrageiro	Link.	3000
Neouvielle . . .	Ram.	9714
Notre-Dame du Mont	Mech.	3453
Päſſe, mittlere Höhe derſelben	Hum.	7302
Paß von Gavarnie . .		7182
„ „ Lavarece	Ram.	6906
„ de la Pez .	Ram.	10150
„ Oo	Ram.	9972
„ Tourmalet .	Ram.	6757
Pic d'Aiguillon . .	Reb.	9138
„ d'Ance . . .	Reb.	7956
„ d'Arbizon . .	Reb.	8760
„ d'Arre	Reb.	9024
„ d'Arnieugrand	Reb.	9246
„ d'Aule . . .	Reb.	9030
„ de Batoa . .	Reb.	9396
„ „ Baroude .	Reb.	9192
„ „ Badescun .	Reb.	9690
„ „ Bergons .	Ram.	6504
„ „ Cascade . .	Reb.	10086
„ „ Camphiel .	Reb.	9960
„ d'Eyre . .	Ram.	7602
„ de Gabigos .	Ram	7530
„ „ Gar . . .	Reb.	5622
„ „ Hermitans .	Reb.	9324
„ Long	Ram.	10008
„ di Midi . .	Reb.	9036
	Mech.	8820
„ de Montaigu	Ram.	7314
„ „ Monterouge	Char.	8628

Name des Berges		Höhe
Pic de Montouliou	Reh.	6504
„ „ Montvallier	Reb.	8730
„ „ Néouvielle .	Reb.	9696
„ „ Payrie .	Char.	8562
„ „ Poſets . .	Reb.	10584
„ „ Pouis . .	Reb.	9414
„ „ Quairat . .	Reb.	9510
„ „ Salfares	Mech.	4062
Plateau de Cautés	Char.	2916
Plaine d'Aſtos d'Oo	Char.	3384
Port d'Oo . .	Char.	9240
„ de la Picade	Char.	7458
„ „ Pinede .	Ram.	7746
„ „ Plan . .	Ram.	6936
„ „ Viel . .	Char.	7884
„ d'Embans .	Char.	4554
Puy Prigue . .	Mech.	8592
„ Rodos . .	Mech.	3254
„ le Calm Rodos	Mech.	4640
Rocca-corva .	Mech.	3052
Rolandsbreche .	Ram.	9000
Serra Maraho . . .		4000
Sierra Aſtura .	Link.	4000
Som de Sourbe .	Jun.	9642
Thurmſpitze des Marboré	Vidal.	9690
Tour de Marboré	Reb.	9414
Tuque de Maupas	Reb.	9690
Vallon de Suc .	Char.	4668
Vignemale . .	Vidal.	10332

XXXII.

Höhen auf der pyrenäiſchen Halbinſel.

Name des Berges		Höhe
Albujarras		8700
Cabezo de Maria	Link.	5964
Caſueletta . . .	Link.	2696
Cerajon de Murtas	Thal.	4620

Name des Berges	Höhe
Cerro von Xolucar Thal.	2502
Cumbre de Mulhazem . . . . . Link.	11081
Fels von Gibraltar . .	1400
Höchſter Theil der Straße S. Ildefonſo Link.	5748
Höhe von Caſuerga .	2004
„ der Sierra Morena . . . Link.	2292
„ derſelben in Puerto del Rey . Link.	2142
„ von Trembleque Grob.	1927
Malhao de Serro Link.	8000
Muela de Ares . Link.	4074
Paß v. Guadarama Grol.	4526
Penagoloſa . . Grol.	2268
Penalura . . . Grol.	7392
Picacho de la Veletta Thal.	6974
Pico auf der Sierra Eſpadan . . Link.	3394
Serra de Foia . Link.	4000
Sierra von Luxar Thal.	5957
Spitze des Guadarama-Gebirges . . Link.	8000

XXXIII.

Höhen in England und Schottland.

Name des Berges	Höhe
Allington Knoll Ry. et M.	309
Arbery-Hill . Ry. et M.	754
Arran Fowddy Ry. et M.	2773
Arrenig . . . Ry. et M.	2636
Axedge . . . Ry. et M.	1645
Bagſhot-Heath Ry. et M.	434
Barſtead . . Ry. et M.	540
Bar-Beacon Ry. et M.	612
Bardon-Hill . Ry. et M.	800
Beacon-Hill . Ry. et M.	647
Beakons . . Ry. et M.	2685
Beaſton-Caſtle Ry. et M.	800
Bedinam-Brav Jam.	2953
Bein an-oir à Charlois Jam.	2212
Ben Cleugh . . Jam.	2269
„ Chochan . Jam.	2814
„ Chonzin . Jam.	2740
„ Deiry . . Jam.	3329
„ Gloe . . Jam.	3495
„ Lady . . Jam.	2822
„ Laibers . . Jam.	3766
„ Lommond . Jam.	3059
„ Mere (Foutherlandſhire) . Jam.	3658
„ Mere (Portſhire) Jam.	3628
„ Newis . . Jam.	4108
„ Vewin . . Jam.	2814
„ Voirlich . Jam.	3095
„ Vewis . . Jam.	3489
Blackcomb . Ry. et M.	1801
Black Down Ry. et M.	766
Black-Hambleton-Down Ry. et M.	1169
Blacklarg . . . Jam.	2710
Black-Houſe-Feights Jam.	2223
Bleadale-Foreſt Ry. et M.	1604
Bottley-Hill Ry. et M.	835
Boulsworth-Hill Ry. et M.	1585
Bow-Fell . Ry. et M.	2735
Bow-Hill . Ry. et M.	659
Bradfield-Point Ry. et M.	1169
Bradley-Knoll Ry. et M.	913
Broadlaw . . Jam.	2632
Broadway-Beacon Ry. et M.	1019
Brown-Clee-Hill Ry. et M.	1694

Name des Berges	Höhe
Brown-Willy Ry. et M.	1284
Bruckhill . . . Jam.	2229
Cadre-Ferwyn Ry. et M.	2405
Cadre-Idris Ry. et M.	2734
Caigram . . . Jam.	3798
Cairgorm . . Ry. et M.	3798
Cairn-Kinnow Ry. et M.	1951
Cairnferg . . . Jam.	1968
Calf-Hill . . Ry. et M.	2053
Cam-Fell . Ry. et M.	2086
Capellante . Ry. et M.	2246
Carmorthen-Bau Ry. et M.	2436
Carnedd-David Ry. et M.	3215
Carned-Llewillyn Ry. et M.	3255
Carraton-Hill Ry. et M.	1133
Caſtle-King . Ry. et M.	827
Cat-Low . . . Jam.	2123
Chameragh-Riedge Jam.	2026
Cheviots-Hill . Jam.	2515
Collier-Law . Ry. et M.	1574
Coniſton-Fell Ry. et M.	2418
Cradle-Mountain Ry. et M.	2388
Croagh-Patrick Jam.	2500
Croß-Fell . Ry. et M.	2721
Crashfeld . . . Jam.	3180
Crouagh . . . Jam.	3179
Crowlorough-Brawn Ry. et M.	754
Dean-Hill . Ry. et M.	506
Dent-Hill . Ry. et M.	1046
Dilchling-Beacon Ry. et M.	805
Dollaburn . . . Jam.	2663
Dover-Caſtle Ry. et M.	440
Dunkery-Beacon Ry. et M.	1565
Dunnoſe . . Ry. et M.	743
Dwygan . . Ry. et M.	1943

Name des Berges	Höhe
Eywell-Hill Ry. et M.	784
Ettrick-Pen . . Jam.	2092
Fairlight-Down Jam.	562
Farley-Down Ry. et M.	657
Firle-Beakon Ry. et M.	769
Folkſtone-Turnpicke Ry. et M.	539
Frante-Stuple Ry. et M.	617
Furland . . Ry. et M.	452
Gareg-Mountain Ry. et M.	783
Garriach . . . Jam.	2814
Garth . . . Ry. et M.	920
Glumſeugh . . Jam.	2063
Goatfield . . . Jam.	2762
Grasmere-Fell Ry. et M.	2590
Hartfill . . . . Jam.	3099
Hatherſedge	1293
Hedgehope . . Ry. et M.	2204
Hillwellyn . . Jam.	3117
Hensbarrow-Beacon Ry. et M.	970
Highdere . . Ry. et M.	844
High-Picke . Ry. et M.	1971
Hillſileng . . . Jam.	1968
Hollan-Hill . Ry. et M.	593
Holme-Maß . Ry. et M.	1749
Holy-Head-Mountaine . . Ry. et M.	665
Ingleborough-Hill Jam.	1951
Inkpin-Beacon Ry. et M.	949
Kairn-Kinnow . Jam.	1951
Kithill . . . Ry. et M.	1001
Klochnabane . . Jam.	2223
Knok-Mele-Dawn Jam.	2532
Leith-Hill . Ry. et M.	932
Lillghoe . . Ry. et M.	656
Llandinan-Mountain Ry. et M.	1791
Llanelian-Mountain Ry. et M.	1041

Name des Berges	Höhe
Llangeinor-Mountain Ry. et M.	1744
Long-Mount-Foreſt Ry. et M.	1571
Long-Mountain Ry. et M.	1248
Looſehoe	1317
Lord-Seat . Ry. et M.	1609
Lowther-Hill . . Jam.	2365
Macgillicuddys Reeghs Jam.	3193
Malvernhill . Ry. et M.	1354
Mangeſton . . Jam.	2349
Meal-Fourvoung Jam.	2879
Millwood-Fell . Jam.	1876
Minchmoor-Hill Jam.	1876
Moel-Eilio . . Jam.	2225
Moel-Fammau Ry. et M.	1731
Moel-Morwith Ry. et M.	1658
Mount-Batok Ry. et M.	3236
Mourne-Hill Ry. et M.	2345
Mow-Capt . Ry. et M.	1024
Nephin . . . Ry. et M.	2476
Nine-Standards Ry. et M.	2009
Orpit-Hights Ry. et M.	1055
Pendle-Hill . Ry. et M.	1692
Penn-Hill	2106
Pengaen . . Ry. et M.	1416
Penmagen-Maur Ry. et M.	1445
Pennigent-Hill Ry. et M.	2130
Peter-Hill . . Jam.	2532
Pillar . . . Ry. et M.	2716
Plynlimmon-Mountain . . . Ry. et M.	2310
Quensberry-Hill Ry. et M.	2311
Radnor-Foreſt Ry. et M.	2030
Rivel-Mountain Ry. et M.	1751
Rivington-Hill Ry. et M.	1450
Rodneys-Pillar Ry. et M.	1125
Rooks-Hill . Ry. et M.	659
Roſeberry-Topping Ry. et M.	959
Rumbles-Moor Ry. et M.	1227
Sadlebock . . . Jam.	2860
Sairooch . . . Jam.	3189
Sea-Fell . . Ry. et M.	2970
Shehallien . . Jam.	3343
Sherwood-Foreſt . .	563
Shlirb-Dornin Ry. et M.	2954
Shunnor-Hill Ry. et M.	2185
Skiddow . . Ry. et M.	2835
Snowdon . . Ry. et M	3355
Stow-Hill . Ry. et M.	1330
Stowon . . Ry. et M.	828
Tregarron . Ry. et M.	1639
Tintohice . . . Jam.	2281
Trelley-Beacon Ry. et M.	949
Water-Cragg Ry. et M.	1750
Weaver-Hill Ry. et M.	1083
Wendover-Down Ry. et M.	849
Wharms-Hill . Jam.	2329
Whirnſide (Ingleton Folls) . . Ry. et M.	2240
Whernſide (Kettlewell-thal) . . . Ry. et M.	2250
White-Horſe-Hill Ry. et M.	837
White-Hill . Ry. et M.	1523
Wrekin . . . Ry. et M.	1238

XXXIV.

Höhen auf den nordiſchen Inſeln.

Name des Berges	Höhe
Hecla . . . . Bor.	4790
R.	4600
Parnaſſus . . . Mul.	3714
Schwarze Spitze Phill.	4244
Skalingsfield . . Stein.	2040
Weſter Jökull . . .	4800
Bor.	4424

Name des Berges	Höhe	Name des Berges	Höhe
Skandinaviſche Gebirge.		II.	
I.		In Schweden.	
Norwegen.		Adelat . . . . Törn.	4856
Age-Nuden . . . Bch.	4304	Almajalojegna . Wah.	5200
Akka-Solki . . . Bch.	3186	Areskut . . . . Törn.	4850
Berge, höchſte, auf Hindöe,		Jegna-Apo . . Wah.	5339
Vanöe, Arenöe, und		Kaskaiva . . . Wah.	4500
die zwei ſchroffen Fel-		Lairo . . . . Wah.	3008
ſen auf Dunöe Bch.	3000	Nord-Cap	1200
„ am Oſtufer der In-		Säkkoh . . . . Wah.	3000
ſel Qualöe . Bch.	2000	Saulo . . . . Wah.	5399
Bergkette, welche Beyern-		Schneehättan . . Esm.	7620
fiored einſchließt Bch.	3000	Staika . . . . Wah.	4750
Dovrefield . . . Bch.	4297	Sutitelma:	
Faxefield . . . Bch.	4000	„ 1) höchſte Spitze Wah.	5796
Field (das ſteile) Bch.	2054	„ 2) Oſtſpitze . Wah.	5544
Folge-Fonde . . Herz.	5432	„ 3) Nordnordweſtſpitze	
Jökullfjall . . Bch.	3500	Wah.	5264
Kieringfjall . . Wah.	2704	„ 4) Südſpitze Wah.	5173
Kornotjokko . . Wah.	4400	Sylfjällen . . . Wah.	2787
Lyngens-Gebirge Bch.	4000	Syltoppen . . Törn.	6079
Melderskyn . . Bch.	4558	Valli . . . . Wah.	4700
Midtskoug . . . Bch.	2000	Vallispicken . . Wah.	4100
Nordkapfelſen . Bch.	1200		
Nuppi-Vara . . Bch.	2494	XXXV.	
Oyskavelenfield . Bch.	3000	In Aſien.	
Pädnack . . . Wah.	3217		
Präſtekonen . . Bch.	1998	Ararat (höchſter) Parr.	17000
Revils-Eggen . Bch.	4292	Atlaï (kleiner) . Lax.	6558
Schweſtern (ſieben) Bch.	4000	Belki-Tigher . . .	5643
Skirri-porri . . Wah.	2680	Chipka-Pic . . Ger.	19411
Skollen . . . Wah.	2500	Caucaſus, Gebirgskette:	
Storwandsfield . Bch.	3330	mittlere Höhe des	
Strandäfjallet . Wah.	3005	Kammes . Hum.	7980
Strömklumpen . Wah.	2689	„ höchſter Gipfel Hum.	16698
Sule-Tind . . Bch.	5524	Cholhum, Schneege-	
Tulpajegna . . Wah.	3800	birge . . . . Paus.	6231
Zollmijaur . . . Bch.	2100	Chur (Oſtindien) . .	11394

Name des Berges		Höhe
Chur (Himalaya) . .		11044
D'haibun		23214
Dhawalagiri		26340
Dhologir		23999
Dſchamantel		23925
Dſchawechir		24156
Elbrus . . .	Kup.	16800
	Vid.	17388
Gete	Fab.	8000
Grenzgebirge zwiſchen China und Rußland		15810
Himalaya: mittlere Höhe der Päſſe	Hum.	14592
„ mittlere Höhe der Kämme .	Hum.	14592
„ höchſter Gipfel	Hum.	26340
Höchſter der Vulcane auf Sumatra . .	Fab.	1377
Imaus	Craw.	23424
Italitz		10068
Kholzure		6473
Kſchees	Rein.	5370
Mawna Koah (O-Whyhee)		13080
„ Roach (O-Whyhee)		14894
„ Woraray (O-Whyhee)		10122
Namaany Cooly Kandy (Ceylon)		5206
Oata-Dhoora, Paß an der Grenze der chineſiſchen Tartarei	Herb.	16678
Ophyr (Sumatra)	Pink.	12976
	Mars.	12162
Pawdinskoi-Kamen	Geo.	6367
Pic Adam's (Ceylon) .		5772
Schlangenberg . .	Pat.	1548
Sinai		6951
Sinaja-Sopka . . .		3631
S. Lioudranaia Gora .		2724
St. Katharina . . .		8400
Tiegereck . . .	Paus.	5240
		4613
Tumel-Mezereb . .		8946
Yamunavatari . . .		22214

XXXVI.

In Afrika.

Name des Berges		Höhe
Ambohiſtmenſiſche Gebirge	Roch.	10800
Atlas in Marocco, höchſte Spitze . .		13200
„ Hochebene . . .		10800
„ Vorgebirge . .		7200
Capberg		1476
Corona		1837
Dianenberg		2692
Esperanza (canariſche Inſeln)	Bch.	2563
Guimar (Teneriffa)	Bch.	4020
Kamberg		5300
Löwenkopf . . .	Cai.	2585
Pic auf Pico .	Feuille.	6558
Pico de Teyde .	Cor.	11406
	Bor.	11378
Piter-Boot . .	Roch.	2556
	Cai.	2544
Riebeckscaſtel . . .		2892
Salazes-Gebirge	Cai.	10158
	Cai.	9600
Schneeberge in Süd-Afrika . . .	Licht.	6000
Tafelberg . . .	Cai.	3666
	Licht.	3598
Teufels- oder Windberg	Licht.	3100
Tereda (canariſchen Inſeln)	Bch.	2945
Vulkan von Guimar	Cor.	4020

XXXVII.

Gebirge in Amerika.

I.

Die Cordilleras de los Andos in Süd-Amerika.

Name des Berges	Höhe
Mittl. Höhe d. Päſſe Hum.	10914
„ „ d. Kämme Hum.	11100
Höchſter Gipfel . Hum.	23646
Alto de Proble . Hum.	5802
Alto de Roble . . Hum.	8328
Alto de las Sepulturas . . . . Hum.	8262
Altiſana Vulcan . Hum.	17958
Capac-Urcu . . Hum.	16380
Cargueivirazzo . Hum.	14700
Catocache . . . Hum.	15420
Cayambe-Urcu . Hum.	18330
Cerro de Cocollar Hum.	2448
„ de S. Pallonia Hum.	9192
„ de Sitzan . Hum.	11622
Chimborazo . . Hum.	20148
Chuſſalong oder Corazon . . . . Hum.	14820
Cofre de Perate Ferrer	13110
Cuptana . . . Hum.	9546
Descabezado . . Mol.	20000
Duida . . . . Hum.	7854
El-Sergento . . Hum.	5160
Garita del Paramo Hum.	10794
Guaragua Pichindra Hum.	14592
Höhe von Pitatumba Hum.	8868
„ „ Pucara Hum.	9756
„ „ Quilquaſi Hum.	6030
„ „ Sunigaicu Hum.	13578
Javirac . . . . Hum.	9612
Illiniza . . . Hum.	16302
Montana del Paraguay . . . . Hum.	8838
Paramo de Chulucanas . . Hum.	8190
„ de Guamani Hum.	10284
„ del Poliche Hum.	10788
„ de Yamoca Hum.	8334
Pic la Cueſta de Tolima . . . Hum.	4200
„ Mulada . . Hum.	10944
Pichaco de los Ladrillos . . . Hum.	14412
Porto Chuelo (Spitze) Hum.	5736
Rucu-Pichincha . Hum.	14988
Salto de Tequendama . . . . Hum.	7596
Schinchulahua . Hum.	14420
Serro de Avila . Hum.	8100
Sierra Nevada de Merida de Maracaibo Hum.	14100
Tablahuma . . Hum.	14136
Tungurahua . . Hum.	15264
Tumiriquiri . . Hum	5856
Vulkan von Arequipa .	8392
„ „ Puracé Hum.	13650
„ „ Sangay Hum.	16080
„ „ Tungurahua Con.	15558
Hum.	15264
Weg von Asuay (höchſter Punct) . . Hum.	14561

II.

Cordilleras in Nord-Amerika.

Name des Berges	Höhe
Alberco de Palangeo Hum.	5536
Cerro Axusco . . Hum.	11310
„ de la Cruce Hum.	9882
„ de la Giganto .	4619
„ de Macultepe Hum.	4734

Name des Berges		Höhe
Cofre de Perote .	Hum.	12588
Cruz del Cerro de St. Michael .	Hum.	6612
Eliasberg		16924
El-Jacal . . .	Hum.	9618
El-Fraile . . .	Hum.	14232
Fairwether . . .	Hum.	13824
Hohe Ebene von Tinaxas	Hum	8364
Hohe Ebene Las Joares	Hum.	8160
Los Lanitos . .	Hum.	8665
Mamanchota . .	Hum.	8826
Nauopantepetel .	Hum.	12132
Pic (große) . .	Pike.	18581
„ Tancitaro .	Hum.	9852
Sierra de Cordova	Hum.	9930
Sitlaltepel . . .	Hum.	16332
Stony Mountains	Fied.	3300
Ventoſo (Spitze)	Hum.	8772
Vulkan von Colima	Hum.	9850
„ Jorullo .	Hum.	4002
„ Itzaccihuatl	Hum.	14766
„ v. Orizaba	Hum.	16332
„ Popokatepetl	Hum.	16584

III.

Gebirge im nordamerikaniſchen Freiſtaate.

Name des Berges		Höhe
Alleguanygebirge (Höhe)		3055
Aſcutney		1905
Blauen Gebirge	Will.	1920
Jacksons Warmquellengebirge . .	Will.	1893
	Will.	2204
Koatshill		3329
Killington		3239
Monadnoc		3051
Pic Otter		3752
Toresby-Berg . . .		2700
Waitshill . . .	Will.	7316
Waſhington		9379
Watchuſetsberge (nördl. höchſte) . . .	Büsch.	2825

IV.

Berge in Weſt-Indien.

Name des Berges		Höhe
Blauen Berge . .	Ed.	6828
Macanao (Gebirge)	Hum.	2052
Mount Miſery oder Elendsberg . .	Ed.	3711
Pelée auf Martinique		4416
Vulkan auf Guadaloupe . . .	Dup.	4794

XXXVIII.

Gebirge in Auſtralien.

Name des Berges		Höhe
Berg auf Atooi . . .		7296
„ Egmont . .	For.	14370
„ auf Otaheite .	For.	10230
Mavna Koah		2850
„ Roah .	Hor.	13524

XI. Tafel.

Expanſivkraft und Dichte der Dünſte.

a. Expanſivkraft und Dichte des Waſſerdunſtes.

(S. 250.)

(Dichte des Waſſers = 1 bei 0° C.)

Temperatur	Expanſivkraft	Dichte	Temperatur	Expanſivkraft	Dichte
	Mm			Mm	
—20°	1.333	0.00000154	+11°	10.074	0.00001032
19	1.429		12	10.707	0.00001092
18	1.531		13	11.378	0.00001157
17	1.638		14	12.087	0.00001224
16	1.755		15	12.837	0.00001299
—15	1.879	0.00000212	16	13.630	0.00001372
14	2.011		17	14.468	0.00001451
13	2.152		18	15.353	0.00001534
12	2.302		19	16.288	0.00001622
11	2.461		20	17.314	0.00001718
—10	2.631	0.00000292	21	18.317	0.00001811
9	2.812		22	19.417	0.00001914
8	3.005		23	20.577	0.00002021
7	3.210		24	21.805	0.00002133
6	3.428		25	23.090	0.00002252
— 5	3.660	0.00000398	26	24.452	0.00002376
4	3.907		27	25.881	0.00002507
3	4.170		28	27.390	0.00002643
2	4.448		29	29.045	0.00002794
1	4.745		30	30.643	0.00002938
0	5.059	0.00000540			
+ 1	5.393	0.00000573	31	32.410	0.00003097
2	5.748	0.00000609	32	34.261	0.00003263
3	6.123	0.00000646	33	36.188	0.00003435
4	6.523	0.00000686	34	38.254	0.00003619
5	6.947	0.00000727	35	40.404	0.00003809
6	7.396	0.00000772	36	42.743	0.00004017
7	7.871	0.00000818	37	45.038	0.00004219
8	8.375	0.00000867	38	47.579	0.00004442
9	8.909	0.00000919	39	50.147	0.00004666
10	9.475	0.00000974	40	52.998	0.00004916

Tempe-ratur	Expanſiv-kraft	Dichte	Tempe-ratur	Expanſiv-kraft	Dichte
	Mm			Mm	
+41°	55.772	0.00005156	+71°	239.450	0.00020174
42	58.792	0.00005418	72	250.230	0.00021013
43	61.958	0.00005691	73	261.430	0.00021889
44	65.627	0.00006023	74	273.030	0.00022794
45	68.751	0.00006274	75	285.070	0.00023789
46	72.393	0.00006585	76	297.570	0.00024702
47	76.205	0.00006910	77	310.490	0 00025699
48	80.195	0.00007242	78	323.890	0.00026739
49	84.370	0.00007602	79	337.760	0.00027789
50	88.742	0,00007970	80	352.080	0.00028889
51	93.301	0.00008354	81	367.000	0.00030025
52	98.075	0.00008753	82	382.380	0.00031195
53	103.060	0.00009174	83	398.280	0 00032399
54	108.270	0,00009606	84	414.730	0 00033637
55	113.710	0,00010054	85	431.710	0,00034916
56	119.390	0.00010525	86	449.260	0.00036237
57	125.310	0,00011011	87	467.380	0.00037590
58	131.500	0.00011523	88	486.090	0 00038984
59	137.940	0.00012044	89	505.380	0.00040417
60	144.660	0.00012599	90	525.280	0.00041891
61	151.700	0.00013179	91	545.800	0.00043405
62	158.960	0.00013760	92	566.950	0.00044956
63	166.560	0.00014374	93	588.740	0.00046556
64	174.470	0.00015010	94	611.180	0.00048201
65	182.710	0.00015668	95	634.270	0.00049886
66	191.270	0.00016356	96	658.050	0.00051613
67	200.180	0.00017066	97	682.590	0.00053388
68	209.440	0.00017797	98	707.630	0.00055191
69	219.060	0.00018566	99	733.460	0.00057055
70	229.070	0.00019355	100	760.000	0.00058955

$$e = (1 + 0.7153\,t)^5 \quad (\text{S. } 251).$$

(Hier bedeutet e die Expanſivkraft in Atmoſphären, jede zu 760 Millimetern gerechnet, t die Temperatur über oder unter 100°, das Intervall 100° gleich 1 geſetzt.)

Temperatur	Expanſivkraft in Atmoſphären	Temperatur	Expanſivkraft in Atmoſphären	Expanſivkraft in Atmoſphären	Entſprechende Temperatur	Expanſivkraft in Atmoſphären	Entſprechende Temperatur
100°	1	195	13.36	1	100° C	13	193.7
105	1.18	200	15.02	1½	112.2	14	197.19
110	1.41	205	16.46	2	121.4	15	200.48
115	1.66	210	18.21	2½	128.8	16	203.60
120	1.95	215	20.11	3	135.1	17	206.57
125	2.28	220	22.17	3½	140.6	18	209.4
130	2.64	225	24.38	4	145.4	19	212.1
135	3.06	230	26.77	4½	149.06	20	214.7
140	3.51	235	29.34	5	153.08	21	217.2
145	4.04	240	32.11	5½	156.8	22	219.6
150	4.61	245	35.09	6	160.2	23	221.9
155	5.25	250	38.27	6½	163.48	24	224.2
160	5.96	255	41.69	7	166.5	25	226.3
165	6.75	260	45.36	7½	169.37	30	236.2
170	7.70			8	172.1	35	244.85
175	8.56			9	177.1	40	252.55
180	9.72			10	181.6	45	259.52
185	10.75			11	186.03	50	265.89
190	12.00			12	190.0		

b. Expanſivkraft der Dünſte anderer Flüſſigkeiten.

(Die in Millimetern angegebenen Expanſivkräfte des Äthers, Alkohols, Steinöhles und Terpentinöhles rühren von Ure, die in Atmoſphären angegebenen von Cagniard de la Tour her.)

1. Ätherdunſt. Schwacher Äther.

Temperatur	Expanſivkraft	Temperatur	Expanſivkraft
	mm		Atmoſphär.
1°.11	157.40	187.5	37.5
6.67	205.70	200	48.5
12.22	261.60	212.5	59.7
18.33	330.10	225	68.6
23.33	408.90	237.5	78
28.89	507.90	250	86.3
34.44	627.30	262.5	92.3
40.00	761.90	275	104.1
		287.5	112.7
		300	119.4
		312.5	123.7
		325	130.9

2. Ätherdunſt. Stärkerer Äther.

Temperatur	Expanſivkraft	Temperatur	Expanſivkraft	Temperatur	Expanſivkraft
	mm		mm		Atmoſphär.
40°.56	761.90	71°.11	2039.00	187.5	42
43.33	826.40	73.89	2194.00	200	50.5
46.11	911.80	76.67	2357.00	212.5	58
48.89	1002.50	79.44	2517.00	225	63.5
51.67	1098.00	82.22	2750.00	237.5	66
54.44	1197.00	85.00	2948.00	250	70.5
57.22	1318.00	87.78	3169.00	262.5	74
60.00	1445.00	90.56	3395.00	275	78
62.78	1577.00	93.33	3627.00	287.5	81
65.56	1716.00	96.11	3842.00	300	85
68.33	1869.00	98.89	4216.00	312.5	89
				325	94

3. Alkoholdunſt. (Dichte des Alkohols 0.813)

Temperatur	Expanſivkraft	Temperatur	Expanſivkraft	Temperatur	Expanſivkraft
	mm		mm		mm
0°	10.15	57.22	308.60	102.22	1833.00
4.44	14.22	60.56	353.00	104.44	1993.00
7.22	17.77	62.78	405.10	107.22	2222.00
10.00	21.84	65.60	457.10	110.00	2390.00
12.78	25.39	68.33	515.60	111.11	2466.00
15.56	31.24	71.11	574.00	113.33	2631.00
18.33	37.84	73.89	645.10	114 44	2715.00
21.11	44.20	76.67	718.70	115.55	2825.00
23.89	53.33	78.33	761.90	117.77	3002.00
26.67	62.22	81.28	850.80	119.44	3101.00
29.44	74.41	82.22	882.10	120.00	3202.00
32.22	86.35	83.50	924.50	120.94	3337.00
35.00	99.05	85.17	1013.00	121.11	3360.00
37.78	114.70	87.78	1097.00	122.22	3520.00
40.56	132.00	89.61	1183.00	123.50	3649.00
43.33	152 30	91.28	1272.00	125.88	3850.00
46.11	180.90	93.33	1346.00	126.61	3941.00
48.89	205.70	96.67	1526.00	127.77	4099.00
51.67	234.30	98.89	1650.00	128.89	4218.00
54.44	269.20	101.11	1760.00		

4. Steinöhldunſt.

Temperatur	Expanſivkraft	Temperatur	Expanſivkraft
	mm		mm
157°.77	761.90	176.66	1190.00
161.11	805.10	179.44	1275.00
162.77	863.50	182.22	1353.00
165.55	924.50	185.00	1445.00
168.33	988.00	187.77	1541.00
171.33	1056.00	188.88	1572.00
173.90	1120.00	191.66	1625.00

5. Terpentinöhldunſt.

Temperatur	Expanſivkraft	Temperatur	Expanſivkraft
151.11	761.90	171.33	1201.00
153.11	828.00	172.77	1254.00
154.44	850.80	175.00	1313.00
157.22	894.00	176.66	1366.00
161.11	941.20	178.88	1437.00
162.22	960.00	180.50	1490.00
163.33	1021.00	182.22	1544.00
165.55	1069.00	183.33	1584.00
169.99	1142.00		

6. Schwefelkohlenſtoffdunſt.

Temperatur	Expanſivkraft
275	77.8 Atm.
287.5	89.2
300	98.9
312.5	114.3
325	129.6
331.2	133.5

7. Dünſte einiger anderer Körper.

Name des Körpers	Temperatur	Expanſivkraft
Ammoniakdunſt	10°	6.5 Atm.
Aniſöhldunſt	15.5	1.5 Millim.
Blauſäuredunſt	7	3.8 »
Campherdunſt	15.5	4 »
Chlorätherdunſt	9.3	62.6 »
Citronenöhldunſt	15	9 »
Cyandunſt	7.2	3.6—3.7 Atm.
Hydrothionſäuredunſt	10	17 »
Lavendelöhldunſt	13.75	73 Millim.
Roſenöhldunſt	14.5	2 »
Rosmarinöhldunſt	16	9.5 »
Salpeterätherdunſt	91.1	21.1 »
Salzſäuredunſt	10	40 Atm.
Stearopten vom Roſenöhl . . .	14.5	0·5 Millim.
Stickſtoffoxydulduunſt	7.2	50 Atm.

XII. Tafel.

Volumen der mit Dunſt geſättigten Luft.

$$v = \frac{b}{b - e} \text{ (S. 257).}$$

Volumen der trockenen Luft = 1.0000.

Temperatur	Luftvolumen	Temperatur	Luftvolumen	Temperatur	Luftvolumen
		0	1.0065		
—20	1.0017	+ 1	1.0071	+21	1.0233
19	1.0018	2	1.0076	22	1.0262
18	1.0020	3	1.0081	23	1.0278
17	1.0021	4	1.0086	24	1.0295
16	1.0023	5	1.0092	25	1.0313
—15	1.0024	6	1.0098	26	1.0332
14	1.0026	7	1.0104	27	1.0352
13	1.0027	8	1.0111	28	1.0373
12	1.0030	9	1.0118	29	1.0397
11	1.0032	10	1.0126	30	1.0420
—10	1.0034	11	1.0134	31	1.0445
9	1.0037	12	1.0142	32	1.0472
5	1.0039	13	1.0151	33	1.0499
7	1.0042	14	1.0161	34	1.0530
6	1.0045	15	1.0171	35	1.0561
— 5	1.0048	16	1.0182	36	1.0595
4	1.0052	17	1.0194	37	1.0629
3	1.0055	18	1.0206	38	1.0667
2	1.0058	19	1.0219	39	1.0706
1	1.0062	20	1.0223	40	1.0749

XIII. Tafel.

Aenderung des Haarhygrometers durch Aenderung der Temperatur. (S. 279)

Hygrometerſtand	Änderung für 1° C	Abſtand vom Sättigungspuncte	Hygrometerſtand	Änderung für 1° C	Abſtand vom Sättigungspuncte
25°	0°.364	46°.312	65	1.°420	12°.112
26	0.390	44.836	66	1.467	11.667
27	0.417	43.163	67	1.494	11.230
28	0.444	41.601	68	1.521	10.801
29	0.471	40.132	69	1.548	10.379
30	0.498	38.746	70	1.565	9.965
31	0.525	37.435	71	1.592	9.558
32	0.552	36.192	72	1.629	9.157
33	5.578	35.009	73	1.660	8.763
34	0.606	33.810	74	1.695	8.379
35	0.633	32.803	75	1.735	8.002
36	0.660	31.771	76	1.774	7.635
37	0.687	30.781	77	1.819	7.276
38	0.714	29.831	78	1.867	6.926
39	0.741	29.916	79	1.918	6.586
40	0.768	28.033	80	1.972	6.255
41	0.795	27.183	81	2.015	5.931
42	0.822	26.361	82	2.059	5.613
43	0.848	25.566	83	2.096	5.301
44	0.875	24.797	84	2.135	4.995
45	0.902	24.051	85	2.173	4.694
46	0.929	23.327	86	2.209	4.399
47	0.956	22.625	87	2.244	4.108
48	0.983	21.942	88	2.278	3.821
49	1.010	21.278	89	2.301	3.538
50	1.037	20.631	90	2.342	3.259
51	1.054	20.002	91	2.373	2.985
52	1.091	19.388	92	2.402	2.713
53	1.117	18.789	93	2.430	2.445
54	1.134	18.205	94	2.458	2.180
55	1.172	17.635	95	2.484	1.5984
56	1.198	16 532	96	1.961	1.9173
57	1.225	15.999	97	1.438	1.5844
58	1.252	15.479	98	1.254	1.1303
59	1.279	15.074	99	1.070	0.6100
60	1.306	14.467	100	0.885	0.0000
61	1.333	13.977			
62	1 360	13.498			
63	1.387	13.026			
64	1.404	12.565			

XIV. Tafel.

Spannkraft der Dünſte, welche den Graden des Haarhygrometers entſprechen.

(Nach Gay Luſſac S. 280.)

Grad des Haarhygrometers	Spannkraft der Dünſte	Grad des Haarhygrometers	Spannkraft der Dünſte	Grad des Haarhygrometers	Spannkraft der Dünſte
1	0.45	36	18.30	71	48.51
2	0.90	37	18.92	72	49.82
3	1.35	38	19.54	73	51.14
4	1.80	59	20.16	74	52.45
5	2.25	40	20.78	75	53.76
6	2.71	41	21.45	76	55.25
7	3.18	42	22.12	77	56.74
8	3.64	43	22.79	78	58.24
9	4.10	44	23.46	79	59.73
10	4.57	45	24.13	80	61.22
11	5.05	46	24.86	81	62.89
12	5.52	47	25.59	82	64.57
13	6.00	48	26.32	83	66.24
14	6.48	49	27.06	84	67.92
15	6.96	50	27.79	85	69.59
16	7.46	51	28.58	86	71.49
17	7.95	52	29.38	87	73.39
18	8.45	53	30.17	88	75.29
19	8.95	54	30.97	89	77.19
20	9.45	55	31.76	90	79.09
21	9.97	56	32.66	91	81.09
22	10.49	57	33.57	92	83.08
23	11.01	58	34.47	93	85.08
24	11.53	59	35.37	94	87.07
25	12.05	60	36.28	95	89.06
26	12.59	61	37.31	96	91.25
27	13.14	62	38.34	97	93.44
28	13.69	63	39.36	98	95.63
29	14.23	64	40.39	99	97.81
30	14.78	65	41.42	100	100.00
31	15.36	66	42.58		
32	15.94	67	43.73		
33	16.52	68	44.89		
34	17.10	69	46.04		
35	17.68	70	47.19		

XV. Tafel.

Spannkraft der Dünſte, welche den Graden des Fiſchbeinhygrometers entſprechen.

(S. 280.)

Grad des Fiſchbein-hygrometers	Spannkraft	Grad des Fiſchbein-hygrometers	Spannkraft
5°	7.9	45°	63.9
10	15.6	50	70.0
15	23.1	55	75.9
20	30.4	60	81.6
25	37.5	65	87.1
30	44.4	70	92.4
35	51.1	75	97.5
40	57.6	77.5	100.0

XVI. Tafel.

Länge des Secundenpendels.

Name des Ortes	Geographiſche Breite	Beobachtete Pendellänge	Auf die Meeresfläche reducirte Pendellänge	Aus allen Beobachtungen
			Mm	Mm
Spitzbergen Sab.	79° 49′ 58″ N	39.21464	996.0365	995.93941
Grönland. Sab.	74 32 19	39.20328	995.7478	995.73699
Hammerfeſt Sab.	70 40 5	39.19512	995.5405	995.54163
Drontheim Sab.	63 25 54	39.17428	995.0200	995.08284
Unſt . . B.	60 45 25	742.721034	994.9458	994.88706
„ . . . Kat.	60 45 28	39.17145	994.9395	994.88712
Portſoy . Kat.	57 40 59	39.16140	994.6906	994.64791
Leith . . B.	55 58 37	742.408533	994.5311	994.50960
„ . . . Kat.	55 48 41	39.15540	994.5354	994.50969
Clifton . . Kat.	53 27 43	39.14517	994.3018	994.29972
Arbury-Hill Kat.	52 12 55	39.14057	994.2228	994.19348
London . . Kat.	51 31 8	39.13908	994.1232	994.13360
„ . Sab.	» » »	39.13908	994.1232	994.13360
Königsberg Bes.	54 42 50	440.8147		994.4100
Shanklin-Farm Kat.	50 37 24	39.13551	994.0468	994.05610
Paris . . Bor.	48 50 14	440.5593	993.8493	993.90017
„ . . B.	» » »	741.90112	993.8666	993.90017
„ . Frey.	» » »	1.00000000	993.8666	993.90017
„ . Dup.	» » »	1.00000000	993.8673	993.90017
Clermont . B.	45 46 48	741.61059	993.5822	993.63055
Padua . . B.	45 24 3	993.597710	993.607294	993.607294
Fiume . . B.	45 19 0	993.563844	993.584075	903.584075
Mailand . B.	45 28 1	993.500800	993.547642	993.547642
Bordeaux . B.	44 50 26	741.60464	993.4530	993.54740
Figeac . . B.	44 36 45	741.56033	993.4578	993.52721
Toulon . Dup.	43 7 9	0.99953725	993.3858	293.39514
New-York Sab.	40 42 43	39.10153	993.1682	993.18334
Barcellona . B.	41 23 15	993.230852	993.2321312	993.2321312
Formentera B.	38 39 56	741.20540	992.9760	993.00533
Lippari . . B.	38 28 37	993.076357	993.0791638	993.0791638
Mowi-Inſ. Frey.	20 52 7	0.99792769	991.7850	991.66918
Jamaica . Sab.	17 56 7	39.03508	991.4739	991.50653
Guam-Inſ. Frey.	13 27 51	0.99759268	991.4520	991.30053
Trinidad . Sab.	10 38 56	39.01879	991.0609	991.19876
Sierra-Leone Sab.	8 29 28	39.01954	991.0953	991.13615
St. Thomas Sab.	0 24 41	39.02069	991.1094	991.02583
Rawak-Inſ. Frey.	0 1 34 S	0.99709528	990.9577	991.02557
Maranham Sab.	2 31 43	39.01197	990.8932	991.03544
Ascenſion Sab.	7 55 48	39.04206	991.1948	991.12211
„ . Dup.	7 55 9	0.99731962	991.1824	991.12185

Name des Ortes		Geographiſche Breite	Beobachtete Pendellänge	Auf die Meeresfläche reducirte Pendellänge	Aus allen Beobachtungen
Bahia . . .	Sab.	12° 59′ 21″	39.02378	991.2064	991.28180
Isle de France	Dup.	20 9 19	0.99790903	991.7682	991.62733
Rio-Janeiro	Frey.	22 55 13	0.99783413	991.6930	991.79483
Port Jackſon	Frey.	33 51 34	0.99876387	992.6260	992.60001
„ „	Dup.	33 51 34	0.99873358	992.5879	992.66012
Cap d. guten Hoffnung .	Frey.	33 55 15	0.99871111	992.5677	992.60504
Malvinen	Frey.	51 35 18	1.00022130	994.0657	994.13959
„ . .	Dup.	51 31 44	1.00028461	994.1295	994.13346

Die Beobachtungen von Borda und Beſſel ſind in Pariſer Linien, die von Kater und Sabine in engliſchen Zollen, die von Biot in Millimetern, endlich die von Duperrey und Freycinet nach einem Maße angegeben, deſſen Einheit die Länge des Secundenpendels zu Paris iſt.

Die Reſultate der letzten Spalte ſind aus allen Beobachtungen nach der Methode der kleinſten Quadrate berechnet.

XVII. Tafel.

Geſchwindigkeit des Schalles.

a) In der Luft bei verſchiedenen Temperaturen.

$$c = 333 \sqrt{(1 + 0.00375\ t)}.$$

Temperatur t	Geſchwindigkeit c Meter	Temperatur t	Geſchwindigkeit c Meter	Temperatur t	Geſchwindigkeit c Meter
—30	313.68	—10	326.68	+11	339.68
29	314.35	9	327.02	12	340.35
28	315.02	8	327.68	13	341.02
27	315.68	7	328.35	14	341.35
26	316.35	6	329.02	15	342.02
—25	316.68	— 5	329.68	+16	342.68
24	317.35	4	330.35	17	343.35
23	318.02	3	331.02	18	344.02
22	318.68	2	331.68	19	344.35
21	319.35	1	332.35	20	345.02
		0	333.00		
—20	320.02	+ 1	333·35	+21	345.68
19	320.68	2	334.02	22	346.35
18	321.35	3	334.68	23	347.02
17	322.02	4	335.35	24	347.68
16	322.68	5	336.02	25	348.02
—15	323.35	+ 6	336.68	+26	348.68
14	324.02	7	337.35	27	349.35
13	324.68	8	337.68	28	350.02
12	325.35	9	338.35	29	350.35
11	326.02	10	339.02	30	351.02

b) In anderen Gaſen bei 0° C.

Name des Gaſes		Geſchwindigkeit	Name des Gaſes		Geſchwindigkeit
		m			m
Alkoholdunſt . . .	Rs.	289.1	Salzſäuregas . .	Rs.	309.3
Ammoniakgas . .	Rs.	389.4	Sauerſtoffgas . .	Dul.	317.17
Kohlenoxydgas . .	Dul.	387.4	Schwefelſäuregas .	Rs.	229.2
Kohlenſäuregas . .	Dul.	261.6	Schwefelwaſſerſtoffgas	Rs.	318.7
Öhlbildendes Gas	Dul.	281.99	Stickgas	Dul.	261.9
Oxydirtes Stickgas	Rs.	281.4	Waſſerſtoffgas . .	Dul.	1269.5
Salpetergas . . .	Rs.	309.8	Waſſerdunſt . . .	Rs.	369.6

c) In tropfbaren Körpern bei 10° C.

Name der Flüſſigkeit		Compreſſibilität für 1 Atm. in Millionth. des Volumens	Schallgeſchwindigkeit
			m
Alkohol		94.95	1157
Ammoniak, tropfbarer		33.05	1842
Queckſilber		3.38	1484
Terpentinöhl		71.35	1276
Salpeterſäure		30.55	1535
Salzäther		84.25	1171
Schwefeläther		131.35	1039
Waſſer	C. et St.	47.85	1453

d) In feſten Körpern.

Name des Körpers	Schall-geſchwin-digkeit	Name des Körpers	Schall-geſchwin-digkeit
	m		m
Acajouholz	4532	Kupfer	4080
Ahornholz	4532	Lindenholz	5100
Birnbaumholz . . .	4250	Meſſing	3624
Birkenholz	4896	Nußbaumholz . . .	3624
Ebenholz	4896	Pflaumenbaumholz . .	3624
Eibenbaumholz . . .	3624	Silber	3060
Eichenholz	3624	Tabakpfeifenthon . .	3400
Eiſen oder Stahl . .	5664	Tannenholz	6120
Erlenholz	4896	Ulmenholz	4896
Fichtenholz	5440	Weidenholz	5440
Fiſchbein	2266	Weißbuchenholz . . .	4896
Glas	5664	Zinn	2550
Kirſchbaumholz . . .	5100		

XVIII. Tafel.

Brechungsexponenten.

a) Feſte und tropfbare Körper.

Brechungsexponent des leeren Raumes = 1.000.

Name des Körpers	Brechungsexponent	Name des Körpers	Brechungsexponent
Aether . . . Wol.	1.358	Anieſöhl . . . . Bw.	1.811
Yg.	1.374	Anhydrit, extraordinäre Bw.	1.6219
„ zum dreifachen Volumen ausgedehnt Bw.	1.0570	„ ordin. . Bw.	1.5772
Alaun . . . . Wol.	1.457	Apfelſäure . . . Bw.	1.395
New.	1.458	Apophyllit . . Hers.	1.5431
Yg	1.488	Aragonit ord. . Mal.	1.6931
Alaunlöſung, geſättigt . . . . Hers.	1.356	„ extr. . Mal.	1.5348
Alaunerde, ſalpeterſaure . Wol.	1.410	Arſenik . . . . Wol.	1.811
„ in Alkohol Wol.	1.422	Aſand . . . . Mx.	1.590
Alkohol . . . Wol.	1.372	Auge des Menſchen:	
„ ſp. Gw. 0.866 New.	1.370	Hornhaut . . . Bw.	1.386
„ gewäſſert . . Bw.	1.374	Waſſerfeuchtigkeit Bw.	1.3366
„ rectificirt . Hers.	1.372	ganze Linſe . . Bw.	1.3839
Aloe . . . . . . Bw.	1.634	äußere Lage der Linſe Bw.	1.3767
Ambraöhl . . . Wol.	1.505	mittlere Lage . . Bw.	1.3786
Amethyſt . . . Wol.	1.562	Kern . . . . . . Bw.	1.3999
Ammoniak, kauſt. . Bw.	1.349	Glasfeuchtigkeit . Bw.	1.3394
„ waſſerfrei, durch Kälte condenſirt . . . Bw.	1.752	Auge eines Lammes:	
		Hornhaut . . . Bw.	1.386
		äußere Lage der Linſe Bw.	1.386
		mittlere Lage . . Bw.	1.428
		Kern . . . . . . Bw.	1.436
„ ſalzſaures . Bw.	1.625	Glasfeuchtigkeit . Bw.	1.345
„ mit ſchwefelſaurer Magneſia Bw.	1.483	Auge des Kabeljau:	
		ganze Linſe . . Mon.	1.5492
		äußere Lage . . Bw.	1.410
Ammoniakgummi . Bw.	1.592	mittlere Lage . . Bw.	1.439
Anatas . . . . . Bw.	2.500	Kern . . . . Mon.	1.5929
Angelicaöhl . . . Bw.	1.491	Glasfeuchtigkeit Mon.	1.3531

Name der Körper		Brechungsexponent
Auge eines Ochſen:		
ganze Linſe	Mon.	1.4747
äußere Lage	Mon.	1.4293
Kern	Mon.	1.5425
Glasfeuchtigkeit	Mon.	1.3571
Waſſerfeuchtigkeit	Mon.	1.3358
Axinit	Bw.	1.735
Balſam: Copaiva	Mx.	1.507
„ „ in Alkohol	Wol.	1.440
	Mx.	1.397
„ Canada	Yg.	1.532
	Bw.	1.549
„ Gilead	Yg.	1.529
„ peruvianiſch	Bw.	1.597
„ Styrax	Bw.	1.585
„ Tolu	Bw.	1.628
„ „ in Alk.	Wol.	1.400
Baryt: kohlenſauer	Bw.	1.540
„ ſalzſauer	Bw.	1.646
„ ſchwefelſauer	Mal.	1.6468
„ „ extraord.	Mal.	1.6352
„ „ ordin.	Bw.	1.6201
Bergamotöhl	Yg.	1.473
	Bw.	1.471
Bergkryſtall		1.562
Bernſtein	Bw.	1.47
		1.552
Beryll	Bw.	1.598
Bibergeil	Bw.	1.626
Bittermandelöhl	Bw.	1.603
Blei, borſaures	Hers.	1.866
„ chromſauer	Bw.	2.926
„ „ max.	Bw.	2.974
„ „ min.	Bw.	2.508
„ eſſigſauer	Wol.	1.400
„ kieſelſauer	Hers.	2.123
„ kohlenſauer im max.	Bw.	2.084
„ „ min.	Bw.	1.813

Name der Körper		Brechungsexponent
Blei, ſalpeterſauer	Bw.	1.758
„ ſchwefelſauer	Bw.	1.925
Bleiſalpeter	Hers.	2.322
Blut vom Menſchen	Yg.	1.354
Boracit	Bw.	1.701
Borax	Cav.	1.467
	Bw.	1.475
Boraxglas (1 Th. Borax 2 Th. Kieſel)	Bw.	1.522
Brunnenwaſſer	Eul.	1.3366
Buchelöhl	Bw.	1.500
Butter, kalte	Wol.	1.480
Buxöhl	Yg.	1.356
Cajeputöhl	Yg.	1.478
	Bw.	1.483
Calcedon	Bw.	1.553
Caſſiaöhl	Bw.	1.641
	Hers.	1.64
	Mx.	1.603
Cautſchouc	Wol.	1.524
Chamillenöhl	Bw.	1.457
	Yg.	1.476
	Mx.	1.455
Chryſoberyll	Bw.	1.760
Chryſolith	Bw.	1.660
Citronenöhl	Bw.	1.527
Citronenſäure	Bw.	1.527
Cöllner-Waſſer	Mx.	1.382
Collophonium	Wol.	1.543
Comptonit	Bw.	1.553
Copal	Bw.	1.549
Cryolit	Bw.	1.344
Cuminöhl	Bw.	1.512
Cyan	Bw.	1.316
Diamant	New.	2.439
„	Roch.	2.487
„ braun		2.470
Dichroit	Bw.	1.544
Dillſamenöhl	Bw.	1.477
		1.487

Name der Körper	Brechungsexponent	Name der Körper	Brechungsexponent
Drachenblut . . . Bw.	1.520	Glas, blaßrothes . Bw.	1.570
Eis . . . . . Wol.	1.310	„ dunkelrothes . Bw.	1.729
Bw.	1.307	„ rothes mit Gold Bw.	1.715
Bw.	1.3085	„ purpurrothes . Bw.	1.608
Eiſenoxyd . . . . Yg.	2.100	„ rubinrothes . Bw.	1.601
Eiſen, ſalpeterſaures Wol.	1.375	„ roſenrothes . Bw.	1.570
„ ſalzſaures Wol.	1.385	„ oranges . . Bw.	1.695
„ ſchwefelſaures Mx.	1.494	„ lichtblaues . Bw.	1.570
Eyweiß v. Hühnerei Wol.	1.360	„ zimmtbraunes Bw.	1.530
Eiter . . . . . Bw.	1.395	„ opalartiges . Bw.	1.635
Elemiharz . . . Bw.	1.547	Glas (Flint-)	
Epidot, Max. . . Bw.	1.703	1 Th. Blei 4 Th. Kieſel	1.664
„ Min. . . Bw.	1.661	1 2	1.724
Eſſigſäure . . . Bw.	1.396	1 1	1.787
Eſſig, gemeiner . Bw.	1.347	3 4	1.732
„ deſtillirt . Eul.	1.372	2 1	1.830
Euklas, extr. . . Bw	1.663	3 1	2.028
„ ord. . . Bw.	1.6429	1 4	1.664
Feldſpath . . . Bw.	1.764	Glas (Flint-) Fraunhofers:	
Fenchelöhl . . . Bw.	1.506	„ „ Nr. 30 . Fr.	1.6374
Fenugreköhl . . Bw.	1.487	„ „ Nr. 23 . Fr.	1.6405
Fiſchbein . . . Bw.	1.345	„ „ Nr. 13 . Fr.	1.6420
Flohkrautöhl . . Bw.	1.498	„ „ (borſaur. Blei-	
Flüſſigkeit in Kryſtallen,		oxyd) Hers.	2.0652
ausdehnbarere . .	1.1311	„ „ kieſelhalt. bor-	
minder ausdehnbare .	1.2946	ſaures Blei-	
1. Flüſſigk. i. Topas Bw.	1.1311	oxyd . Hers.	1.8735
2. „ „ „ . .	1.2946	„ (Crown-) engliſches	
Flüſſigk. im Amethyſt Bw.	1.2106	Wol.	1.500
Flußſpath . . . Bw.	1.436	„ „ franzöſiſch. Wol.	1.504
Wol.	1.433	„ „ Fraunhofers	
Frauenmünzöhl Bw.	1.481	Nr. 13 Fr.	1.5314
	1.496	Nr. 9 Fr.	1.5331
Gewürznelkenöhl . .	1.596	Gold in Königswaſſer	
Glas, gemeines . . Bw.	1.530	gelöſet . . Wol.	1.364
„ v. St. Gobain Wol.	1.543	„ in Alkohol . Wol.	1.390
„ zu Bouteillen Bw.	1.582	Granat . . . . . Bw.	1.815
„ zu Tafeln . . Bw.	1.527	Guajac . . . . Yg.	1.600
„ grünes . . . Bw.	1.615	Bw.	1.619
„ hyacinthrothes Bw.	1.647	Gummi-Ammoniak Bw.	1.592

Name der Körper	Brechungsexponent	Name der Körper	Brechungsexponent
Gummi, arabiſcher New.	1.476	Kalk, unterſchwefelſaurer	
„ Tragant Bw.	1.520	rothe Strahlen Hers.	1.561
Holzöhl . . . . Bw.	1.506	„ gelblichgrüne Hers.	1.566
Honig . . . . . Yg.	1.495	„ wolframſ. max. Bw.	2.120
Horn . . . . . Bw.	1.565	„ „ min. Bw.	1.970
Jelappaharz . . . Bw.	1.608	Kalkwaſſer . . . . Bw.	1.334
Jodlöſung i. Weingeiſt Mx.	1.384	Kanellſtein . . . Bw.	1.750
Kalilöſung . . . Bw.	1.390	Kampfer . . . Wol.	1.487
Kali, arſenikſaures Wol.	1.535	Kochſalzlöſung, geſät-	
„ chromſaures, feſt		tigte . . . . . Cav.	1.375
max. Bw.	1.665	Kümmelöhl . . . Bw.	1.508
„ „ min. Bw.	1.319	Kupfer, ſchwefelſ. max. Bw.	1.552
„ kohlenſaures Bw.	1.482	„ „ min. Bw.	1.531
„ ſchwefelſaures Bw.	1.509	Labrador, Hornblen-	
„ „ Wol.	1.508	de . . . . Hers.	1.80
„ weinſteinſaures mit		Lavendelöhl . . Bw.	1.475
Soda . . . Bw.	1.515	Wol.	1.467
Kalkſpath, ord. . . Mal.	1.6543	Leinöhl . . . . Wol.	1.485
„ extr. . . Mal.	1.4833	Leucit . . . . . Bw.	1.527
„ ord. Strahl		Limoniöhl . . . Wol.	1.476
„ H (Fig. 105) Rud.	1.68330	„ in Alkohol Wol.	1.430
„ G	1.67617	Magneſia, ſalzſaure Wol.	1.416
„ F	1.66802	„ ſchwefelſaure Bw.	1.488
„ E	1.66360		1.465
„ D	1.65850	Majoranöhl . . . Bw.	1.491
„ C	1.65452	Mandelöhl . . Wol.	1.469
„ B	1.65308	Mandelſtein . . . Bw.	1.515
„ extraord. Strahl		Manna . . . . Yg.	1.533
„ H . . Rud.	1.49780	Maſtix . . . . . Bw.	1.560
„ G	1.49453	Marköhl, kalt . . Bw.	1.525
„ F	1.49075	„ geſchmolzen Bw.	1.481
„ E	1.48868	Meionit . . . . Bw.	1.606
„ D	1.48635	Mellit . . . . . Bw.	1.556
„ C	1.48455	„ . . . . . Bw.	1.538
„ B	1.48391	Meſotyp, max. . . Bw.	1.522
Kalk, ſalpeterſaurer Bw.	1.410	„ min. . . Bw.	1.516
Bw.	1.427	Mohnöhl . . . . Bw.	1.463
„ ſalzſaurer . Bw.	1.425	Muscatnüßöhl . Wol.	1.497
Bw.	1.440	Myrrhe . . . . Bw.	1.524
„ ſchwefelſaurer Wol.	1.525	Naphta . . . . Yg.	1.475

Name der Körper	Brechungsexponent	Name der Körper	Brechungsexponent
Nußöhl . . . Hers.	1.490	Quarz, D . . . Rud.	1.55328
Bw.	1.507	„ C . . . Rud.	1.55085
Obſidian . . . . . Bw.	1.488	„ B . . . Rud.	1.54990
Olibanum = Gummi Bw.	1.544	Queckſilber (wahrſcheinlich) . . . . Hers.	5.829
Olivenöhl . . . Wol.	1.469	Queckſilberchlorid . Bw.	1.970
Bw.	1.470	Rautenöhl . . Bw.	1.433
Opium . . . . . . Yg.	1.559		1.449
Orangeſchalenſaft . Bw.	1.403	Realgar, künſtlicher Bw.	2.549
Palmöhl . . . . . Yg.	1.475	Ricinusöhl . . Bw.	1.490
Pech, gemeines . . Bw.	1.530	Rodiumholzöhl . Bw.	1.500
„ Burgunder Bw.	1.546	Roſenholzöhl . . Bw.	1.505
Bw.	1.560	Rhum . . . . . . Yg.	1.360
Perlen . . . . . . Bw.	1.653	Rosmarinöhl . Bw.	1.469
Pfeffermünzöhl . . Yg.	1.473	Yg.	1.472
Phosphor . . . . . Bw.	2.224	Rubin . . . . . . Bw.	1.779
„ in Schwefelkohlenſtoff gelöſet . Mx.	1.708	Rüböhl . . . . Bw.	1.475
Phosphorglas . . Bw.	1.532	Salmiaklöſung, concentrirte . . . . Mx.	1.393
Phosphorſäure, flüſſige Bw.	1.426	Salpeter, ſpecifiſches Gewicht 1.48 . . Bw.	1.410
Mx.	1.460	Mx.	1.391
Pimentöhl . . . . . Bw.	1.503	Salpetrige Säure . Bw.	1.396
Platin in Königswaſſer gelöſet . . . Wol.	1.370	Salzſäure, concentr. Bw.	1.401
Pyrop . . . . . . Bw.	1.792	„ „ Bw.	1.4098
Quarz, extr. . . Mal.	1.558	„ ſp. Gew. 1.134 Bw.	1.392
„ ord. . . Mal.	1.548	Sandarak . . . . . Bw.	1.538
„ ordin. Strahl		Saphir, weiß . Wol.	1.768
„ H (Fig. 105) Rud.	1.55817	„ blau . . . . Bw.	1.794
„ G . . . Rud.	1.55425	Saſſafraßöhl . . . Bw.	1.532
„ F . . . Rud.	1.54965	„ . . Wol.	1.536
„ E . . . Rud.	1.54711	„ in Alkohol Wol.	1.405
„ D . . . Rud.	1.54418	Schellak . . . . . Bw.	1.525
„ C . . . Rud.	1.54181	Schildpatt . . . . Hy.	1.598
„ B . . . Rud.	1.54090	Schwefel, natürlicher Wol.	2.040
„ extraord. Strahl		„ gegoſſen Bw.	2.148
„ H . . . Rud.	1.56772	„ geſchmolzen Bw.	2.1
„ G . . . Rud.	1.56365	„ in Schwefelwaſſerſtoff gelöſet . . . Mx.	1.693
„ F . . . Rud.	1.55894		
„ E . . . Rud.	1.55631		

Name der Körper	Brechungs-exponent
Schwefelbalſam . Bw.	1.497
Mx.	1.532
Schwefelchlorid . . Bw.	1.67
Schwefelkali . . Wol.	1.375
Schwefelkohlenſtoff Hers.	1.68
„ bei — 0°.56 Bar.	1.643
„ „ 13°.89 Bar.	1.634
„ „ 28°.89 Bar.	1.625
Schwefelkalk . . . Bw.	1.375
Schwefelſäure, ſpecifiſches Gewicht 1.840 Mx.	1.440
„ „ Wol.	1.435
„ „ New.	1.428
Schwefelwaſſerſtoff, tropfbarer . . . . Far.	1.767
Sebenbaumöhl . . Bw.	1.482
Seife von Windſor Yg.	1.487
„ neapolitaniſche Yg.	1.479
Seifengeiſt . . Eul.	1.4088
Selenit . . . . Wol.	1.525
Selterwaſſer . . Eul.	1.3353
Soda, ſalpeterſaure Mx.	1.481
„ unterſchwefelſaure max. Hers.	1.785
„ „ min. Hers.	1.735
„ geſchmolzen . Yg.	1.411
Silber, ſalpeterſ. max. Bw.	1.788
„ „ min. Bw.	1.729
Smaragd . . . . Bw.	1.585
Spargelſtein . . . Yg.	1.657
Spermacetöhl . . Yg.	1.454
Speichel . . . . Yg.	1.339
Spießglanz, ſalzſ. Wol.	1.420
„ in Alkohol Wol.	1.410
Spießglanzglas New.	1.889
Spinell . . . Wol.	1.812
Stärkmehl	1.504
Steinſalz, grüne Strahlen . . . . Hers.	1.4985
„ rothe Strahlen Hers.	1.4929

Name der Körper	Brechungs-exponent
Stilbit . . . . . Bw.	1.508
Storax . . . . . Bw.	1.584
Strontian, kohlenſaurer max. Bw.	1.700
„ „ min. Bw.	1.543
„ unterſchwefelſaur. max. Hers.	1.651
„ „ min. Hers.	1.608
Styraxbalſam . . Bw.	1.584
Tabaköhl . . . . Bw.	1.547
Tabaſheer, gelblich Bw.	1.1111
„ von Nagpore . Bw.	1.1454
„ „ „ . Bw.	1.1503
„ weiß „ . Bw.	1.1825
Talg, kalt . . . Wol.	1.491
„ geſchmolzen Wol.	1.460
Terpentin . . . . Bw.	1.545
Terpentinöhl, gemeines Wol.	1.476
Wol.	1.486
„ deſtillirt . Bw.	1.470
Theriak . . . . . Bw.	1.500
Thimianöhl . . . Bw.	1.477
Topas, farbelos . . Bw.	1.6102
„ von Braſilien ext. B.	1.6401
„ „ ord. B.	1.6325
„ blauer . . . Bw.	1.636
„ gelber . . . Bw.	1.652
Thran . . . . . Bw.	1.483
Tragantgummi . . Bw.	1.520
Turmalin . . . . Bw.	1.668
Vogelleim . . . . Bw.	1.506
Wachholderöhl . . Bw.	1.473
Wachs bei 17°.5 . . Mal.	1.512
„ geſchmolzen Mal.	1.540
„ ſiedend . . . Mal.	1.442
„ weißes . . . Bw.	1.462
„ gelbes . . . Bw.	1.542
Wachsöhl . . . . Cav.	1.452

Name der Körper	Brechungsexponent	Name der Körper	Brechungsexponent
Waſſer . . . . Wol.	1.336	Wurmholzöhl . . Bw.	1.453
„ geſalzen . . . Bw.	1.343	Yſſopöhl . . . . . Bw.	1.485
Weihrauch . . . . Bw.	1.554	Zink, ſalzſaures Bw.	1.425
Wein, Porter . . Yg.	1.351	„ ſchwefelſaures Bw.	2.260
Weinöhl . . . . Yg.	1.379	Zinkblende	2.260
Weinſteinſäure max. Bw.	1.518	Zirkon max. . . . Bw.	2.015
„ min. Bw.	1.578	„ min. . . . Bw.	1.961
Wismuth, ſalpeterſaurer		Zucker, geſchmolzen Bw.	1.554
max. Bw.	1.89	„ nach öfterm Schmelzen . . . . . Bw.	1.555
„ „ min. Bw.	1.67		
„ „ Mx.	1.446	Zwergbaumöhl . . Bw.	1.483

b) Gaſe bei 0° C Temperatur und 0.^{m}76 Luftdruck.

Name des Gaſes	Brechungsexponent n		Brechungsvermögen $n^2 - 1$	Dichte
Atmoſphäriſche Luft Bw.	1.000294	1.000	0.000589	1.000
Ammoniakgas . Dul.	1.000385	1.309	0.000771	0.591
Chlorgas . . . Dul.	1.000772	2.623	0.001545	2.47
Cyangas . . . Dul.	1.000834	2.832	0.001668	1.818
Cyanwaſſerſtoffgas Dul.	1.000451	1.531	0.000903	0.944
Kohlenwaſſerſtoffgas im Min. . . . . Dul.	1.000443	1.504	0.000886	0.559
Kohlenoxydgas . Dul.	1.000340	1.157	0.000681	0.972
Kohlenſäuregas . Dul.	1.000449	1.526	0.000899	1.524
Öhlbildendes Gas Dul.	1.000678	2.302	0.001356	0.980
Phosphorwaſſerſtoffgas im Min. . . Dul.	1.000789	2.682	0.001579	1.256
Phosgengas . . Dul.	1.001159	3.936	0.002318	3.442
Sauerſtoffgas . . Dul.	1.000272	0.924	0.000544	1.1026
Salzätherdunſt . Dul.	1.001095	3.72	0.002191	2.234
Salzſäuregas . . Dul.	1.000449	1.527	0.000899	1.254
Schwefelätherdunſt Dul.	1.00153	5.197	0.003061	2.580
Schwefelwaſſerſtoffgas Dul.	1.000644	2.187	0.001288	1.178
Schwefeligſaures Gas Dul.	1.000665	2.260	0.001331	2.247
Schwefelkohlenſtoffdunſt Dul.	1.00150	5.110	0.00301	2.644
Stickgas . . . Dul.	1.000300	1.020	0 000601	0.976
Stickſtoffoxydgas Dul.	1.000303	1.03	0.000606	1.039
Stickſtoffoxydulgas Dul.	1.000503	1.710	0.001007	1.527
Waſſerſtoffgas . Dul.	1.000138	0.470	0.000277	0.0685

XIX. Tafel.

Zerſtreuungsverhältniſſe.

dn bedeutet den Unterſchied der Berechnungsexponenten der äußerſten Strahlen; $\frac{dn}{n-1}$ den Quotienten aus dieſem und dem Brechungsexponenten für die mittleren Strahlen.

Name der Körper		$\frac{dn}{n-1}$	dn
Alkohol	Bw.	0.029	0.011
Äpfelſäure		0.0282	0.011
Äther	Bw.	0.037	0.012
Alaun	Bw.	0.036	0.017
Alkohol	Bw.	0.029	0.011
Aloe	Bw.	0.085	0.058
Ambra	Bw.	0.032	0.012
Angelicaöhl	Bw.	0.051	0.025
Anieſöhl	Bw.	0.074	0.044
Apophyllit	Hers.	0.031	0.017
Auge v. Kabeljau: Waſſerfeuchtigk.	Bw.	0.035	0.012
» » » Glasfeuchtigkeit	Bw.	0.035	0.012
Axinit	Bw.	0.030	0.022
Balſam: Canada	Bw.	0.045	0.024
» Copaiva	Bw.	0.041	0.021
» Peruvianiſcher	Bw.	0.093	0.058
» Styrax	Bw.	0.069	0.039
» Tolu	Bw.	0.103	0.065
Baryt, ſchwefelſaurer	Bw.	0.029	0.019
» kohlenſaurer		0.0285	0.015
Bergamotöhl	Bw.	0.049	0.023
Bernſtein		0.041	0.023
Beryll	Bw.	0.037	0.022
Bergkryſtall, ord.	Rud.	0.00315	0.01727
» extr.	Rud.	0.00321	0.01782
Bibergeil	Bw.	0.036	0.018
Bittermandelöhl		0.079	0.048
Blauſäure		0.0227	0.080
Blei, chromſaures max.	Bw.	0.400	0.770
» » min.	Bw.	0.262	0.388
» eſſigſaures		0.069	0.040
» kohlenſaures, max.	Bw.	0.091	0.091
» » min.	Bw.	0.066	0.056
» ſchwefelſaures		0.066	0.056

Name der Körper		$\frac{dn}{n-1}$	dn
Borax, geſchmolzen		0.030	0.014
Boraxglas	Bw.	0.026	0.014
Cajeputöhl	Bw.	0.044	0.021
Caſſiaöhl	Bw.	0.139	0.089
Cautſchouc	Bw.	0.052	0.028
Chamillenöhl	Bw.	0.046	0.021
Chryſoberyll	Bw.	0.025	0.019
Chryſolith	Bw.	0.033	0.022
Citronenſäure	Bw.	0.035	0.019
Copal	Bw.	0.024	0.043
Cryolith	Bw.	0.022	0.007
Diamant	Bw.	0.038	0.056
Dillſamenöhl	Bw.	0.049	0.023
Eiſen, ſchwefelſaures . . .	Bw.	0.039	0.019
Eiweis vom Ei	Bw.	0.037	0.013
Elemiharz	Bw.	0.039	0.021
Epidot	Bw.	0.035	0.024
Feldkümmelöhl	Bw.	0.049	0.024
Feldſpath	Bw.	0·042	0.022
Fenchelöhl	Bw.	0.055	0.028
Fenugreköhl	Bw.	0.050	0.024
Flohkrautöhl	Bw.	0.049	0.024
Flußſpath	Bw.	0.022	0.010
Frauenmünzöhl		0.054	0.026
Gewürznelkenöhl	Bw.	0.062	0.033
Glas, gemeines . . .	Bosc.	0.036	
» zu Bouteillen . . .	Bw.	0.040	0.023
» braunes	Bw.	0.044	0.025
» dunkelrothes . . .	Bw.	0.060	0.044
» purpurrothes . . .	Bw.	0.051	0.031
» oranges	Bw.	0.053	0 042
» grünes	Bw.	0.061	0.037
» (Flint=) borſaures Bleioxyd	Hers.	0.0740	
» kieſelh. alborſaur. Bleioxyd	Hers.	0.0703	
» »	Bosc.	0.0527	0.032
» »	Bw.	0.052	0.029
» »	Bw.	0.048	0.028
» »	Bw.	0.048	
» verſchiedene Sorten .	Bosc.	0.0457 0.0525	
» (Crown=) grün . . .	Bw.	0.036	0.020

Name der Körper		$\frac{dn}{n-1}$	dn
Glas, verſchiedene Sorten .	Bosc.	0.033	
		0.0346	
Guajak	Bw.	0.066	0.041
Gummi-Ammoniak . . .	Bw.	0.063	0.037
„ arabiſches	Bw.	0.036	0.018
Harz, gemeines . . .	Bw.	0.057	0.032
Horn	Bw.	0.045	0.025
Kalkſpath, ord. . . .	Rud.	0.03022	0.0455
„ extr. . . .	Rud.	0.01389	0.0282
Kümmelöhl	Bw.	0.065	0.033
Kupfer, ſchwefelſaures . . .		0.036	0.019
Lavendelöhl	Bw.	0 045	0.021
Leim	Bw.	0.041	0.022
Leucit	Bw.	0.035	0.018
Limoniöhl	Bw.	0.048	0.023
Majoranöhl	Bw.	0.045	0.022
Maſtix	Bw.	0.038	0.022
Mohnöhl		0.044	0.020
Myrrhengummi	Bw.	0.037	0.020
Nußöhl	Bw.	0.043	0.022
Obſidian	Bw.	0.037	0.018
Olibanumgummi . . .	Bw.	0.045	0.024
Olivenöhl	Bw.	0.038	0.018
Pappelöhl	Bw.	0.044	0.020
Pech, Burgunder	Bw.	0.043	0.024
Pfeffermünzöhl	Bw.	0.040	0.019
Phosphor	Bw.	0.128	0.156
Phosphorglas		0.03157	0.017
Phosphorſäure, feſte . . .	Bw.	0.032	0.017
„ flüſſige . .		0.0283	0.012
Pimentöhl	Bw.	0.052	0.026
Pyrop	Bw.	0.033	0.026
Rapsöhl	Bw.	0.040	0.019
Rautenöhl	Bw.	0.037	0.016
Realgar, geſchmolzen . . .	Bw.	0.267	0.394
Rhodiumholzöhl	Bw.	0.044	0.022
Rosmarinöhl	Bw.	0.042	0.020
Sadebaumöhl	Bw.	0.044	0.021
Salpeter Min.		0.03040	0.009
Salpetrige Säure . . .	Bw.	0.044	0.018
Salpeterſäure	Bw.	0.045	0.019

Name der Körper		$\frac{dn}{n-1}$	dn
Salzſäure	Bw.	0.043	0.016
Sandarrak	Bw.	0.046	0.021
Saphir, blau	Bw	0.026	0.021
Saſſafraßöhl	Bw.	0.060	0.032
Schildpatt	Bw.	0.045	0.027
Schwefel, zerſchmolzen .	Bw.	0.130	0.149
Schwefelbalſam	Bw.	0.045	0.023
Schwefelkohlenſtoff bei — 0°. 56 C	Bar.		0.03067
„ „ + 28°. 89 C	Bar.		0·03084
Schwefelkupfer . . .	Hers.	0.036	0.019
Schwefelſäure	Bw.	0.031	0.014
Selenit	Bw.	0.037	0.020
Smaragd	Bw.	0.026	0.015
Spinell	Bw.	0.040	0.031
Steinſalz	Bw.	0.053	0.029
Spermacetöhl	Bw.	5.041	0.021
Spießglanz, ſalzſaurer . .		0.059	0.026
Strontian, kohlenſaurer max.	Bw.	0.046	0.032
„ „ min.	Bw.	0.027	0.015
„ ſchwefelſaurer .	Bw.	0.024	0.015
Tabaköhl		0.064	0.035
Terpentin	Bw.	0.048	0.029
Terpentinöhl	Bw.	0.042	0.020
Theeröhl	Bw.	0·062	0.032
Topas, bläulich	Bw.	0.025	0.016
„ blau	Bw.	0.024	0.025
Turmalin	Bw.	0.028	0.019
Thymianöhl	Bw.	0.050	0.024
Wachholdergummi . . .	Bw.	0.046	0.025
Wachholderöhl	Bw.	0.047	0.022
Waſſer	Bw.	0.035	0.012
Weihrauch	Bw.	0.048	0.028
Weinöhl	Bw.	0.032	0.012
Wurmholzöhl	Bw.	0.049	0.022
Weinſteinſäure	Bw.	0·030	0.016
Yſopöhl	Bw.	0.044	0.022
Zirkon	Bw.	0.044	0.045
Zucker	Bw.	0.036	0.020

Viele der vorſtehenden mit Bw bezeichneten Reſultate ſind von Young nach Brewſter's Meſſungen berechnet.

XX. Tafel.

Lage und Charakter der optiſchen Axen in mehreren Kryſtallen.

a) Einaxige Kryſtalle.

Name des Kryſtalles	Beſchaffenheit der Axe	Name des Kryſtalles	Beſchaffenheit der Axe
Apatit	—	Kalkkupfer, eſſigſauer .	+
Apophyllit: für rothes Licht	—	Kalk, ſalzſaurer . . .	—
„ für blaues . . .	+	Kalk-Magneſia, kohlenſaure (Bitterſpath)	—
Bergkryſtall	+	Kalkſpath	—
Beryll	—	Magneſiahydrat . . .	+
Blei, phosphorſaures .	—	Nikelkupfer, ſchwefelſaures	—
„ phosphorarſenikſaur.	—	Rubellit	—
Boracit	+	Rubin	—
Corund	—	Saphir	—
Eis	+	Smaragd	—
Eiſenoxyd	+	Strontianhydrat . .	—
Glimmer von Kariat .	—	Strontian, ſalzſaurer .	—
Idocras	—	Titanit	+
Kali, arſenikſaures . .	—	Turmalin	—
„ unterſchwefelſaures	—	Wernerit	—
Kalkeiſen, kohlenſaures (Braunſpath) .	—	Zink, wolframſaures .	+
„ ſchwefelſaures .	+	Zirkon	+

b) Zweiaxige Körper.

Name des Körpers		Beſchaffenheit der Hauptaxe nach Brewſter	Neigung der Axen
Ammoniak, benzoeſaures .	Bw.	+	45° 8′
» » . .	Mx.	+	48 8
» kohlenſaures . .	Bw.	—	43 24
» ſchwefelſaures . .	Mx.	......	49 42
Ammoniak-Magneſia: ſchwefelſaure	Bw.	+	51 22
Anhydrit	B.	......	44 41
»	Bw.	+	28 7
Apophyllit	Hers.	—	35 8
Aragonit f. d. Strahl. (Fig. 105) H	Rud.	—	20 25 6″
» » » » » G	Rud.	......	20 12 6
» » » » » F	Rud.	......	20 0 50
» » » » » E	Rud.	......	19 53 0
» » » » » D	Rud.	......	19 37 8
» » » » » C	Rud.	......	19 33 14
» » » » » B	Rud.	......	19 44 40
» » » » . .	Bw.	—	18 18
Baryt, kohlenſaurer . . .	.	—	....
» ſchwefelſaurer . . .	Bw.	+	37 42
» unterſchwefelſaurer . .	Mx.	......	ſehr groß
Barythydrat	Bw.	—	13 18
Bernſteinſäure . . .	Bw.	—	90 nahe
Blei, eſſigſaures . . .	Bw.	—	70 25
» kohlenſaures . . .	Bw.	—	5 15
» »	Mx.	—	3 0
» ſchwefelkohlenſaures .	.	—	....
Borax, natürlicher (Tinkal) .	Bw.	+	38 48
» künſtlicher . . .	Bw.	+	28 42
Citronenſäure	Bw.	+	70 29
Comptonit	Bw.	+	56 6
Cyanit	Bw.	+	81 48
Cymophan	Bw.	+	27 51
Dichroit	Bw.	......	60 6
»	Mx.	......	62 80
Eiſen, ſchwefelſaures . .	Bw.	......	90 0 nahe

Name des Körpers		Beſchaffenheit der Hauptaxe nach Brewſter	Neigung der Axen
Epidot	Bw.	—	84° 19′
»	Mx.	......	87 19
Feldſpath	Bw.	—	63 0
Glauberit, für violettes Licht	Bw.	—	90
Glimmer	B.	......	30
» andere Varietäten .	B.	—	31
» » » .	B.	......	32
» » » .	B.	......	34
» » » .	B.	......	37
»	Bw.	—	14 0
»	Bw.	......	25 0
»	Bw.	—	6 0
» ruſſiſcher . . .	Mx.	......	40 41 55″
Jolith	Bw.	—	62 50
Kali, blauſaures . . .	Bw.	+	19 24
» »	Mx.	+	19 34
» chlorſaures . . .	Bw.	......	82 0
» kohlenſaures . . .	Bw.	......	80 30
» ſalpeterſaures . . .	Bw.	—	5 20
» »	Mx.	—	5 15
» ſchwefelſaures . . .	Bw.	+	67 0
» weinſteinſaures . .	Bw.	—	71 20
Kali-Natron, weinſteinſaures	Bw.	+	80 0
Kalk, ſchwefelſaurer, bei gewöhnlicher Temperatur	Mx.	—	60 0
» » bei 58°.8	Ml.	—	0 0
Kupfer, ſalzſaures	.	—	84 30
Lepidolith	Bw.	—	45 0
Magneſia, ſchwefelſaure . .	Bw.	—	37 24
Magneſia-Eiſen, ſalzſchwefelſaures	Bw.	—	51 16
Magneſia-Natron ſchwefelſaures	Bw.	......	46 49
Nickel, ſchwefelſaurer . .	Bw.	+	42 4
Peridot	Bw.	......	87 56
Perlmutter	Bw.	—	11 28
Silber, ſalpeterſaures . .	Bw.	+	62 16
Soda, kohlenſaure . . .	Bw.	—	70 1
» phosphorſaure . .	Bw.	—	55 20
» unterſchwefelſaure . .	Mx.	......	89 20

Name des Körpers		Beſchaffenheit der Hauptaxe nach Brewſter	Neigung der Axen
Spermacet	Bw.	+	37° 40′
Stilbit	Bw.	+	41 42
Strontian, kohlenſaurer .	Bw.	—	6 56
„ ſchwefelſaurer . .	Bw.	+	50 0
Talk	Bw.	—	7 24
Topas, weißer . . .	B.	......	49 1 20″
„ „	Bw.	......	49 50
„ von Aberdeenſhire . .		+	65 0
„ für den Strahl (Fig. 105) H	Rud.	......	54 54 0
„ „ „ „ „ G	Rud.	......	55 34 24
„ „ „ „ „ F	Rud.	......	56 37 24
„ „ „ „ „ E	Rud.	......	56 40 30
„ „ „ „ „ D	Rud.	......	56 37 30
„ „ „ „ „ C	Rud.	......	56 3 0
„ „ „ „ „ B	Rud.	......	55 51 58
Topas	Bw.	+	65 0
Weinſteinſäure . . .	Bw.	—	79 0
Zink, ſalpeterſaures . .	Bw.	......	40 0 nahe
„ ſchwefelſaures . . .	Bw.	—	44 28
Zucker	Bw.	—	50 0

XXI. Tafel.

Zur Berechnung achromatiſcher Objective.

(Nach Herſchel.)

a) Brechungsverhältniß des Crownglaſes = 1.524
„ „ „ „ Flintglaſes = 1.585

$$\frac{d\,n}{n-1} = \beta, \quad \frac{d\,n_{,}}{n_{,}-1} = \beta_{,}.$$

$\beta : \beta_{,}$	Halbmeſſer				Brennweite	
	der erſten Fläche +	der zweiten Fläche +	der dritten Fläche −	der vierten Fläche +	der erſten Linſe +	der zweiten Linſe −
0.50	0.67485	0.42827	0.41575	1.43697	0.50	1.00000
0.55	0.67184	0.36332	0.36006	1.45353	0.45	0.81818
0.60	0.67069	0.30488	0.30640	1.42937	0.40	0.66667
0.65	0.67316	0.25208	0.25566	1.35709	0.35	0.53846
0 70	0.68279	0.20422	0.20831	1.23154	0.30	0.42858
0.75	0.70816	0.16073	0.16450	1.05186	0.25	0.33333

b) **Veränderung der erſten und vierten Fläche des zuſammengeſetzten Objectives, inſofern ſie von der Variation des Brechungsindex des Crownglaſes um + 0.010 und von dem des Flintglaſes um 0.010 abhängt.**

$\beta : \beta_{,}$	Variation des Halbmeſſers			
	der erſten Fläche		der vierten Fläche	
	des Crownglaſes	des Flintglaſes	des Crownglaſes	des Flintglaſes
0.50	0.00500	−0.00036	0.09921	−0.03962
0.55	0.00740	−0.00011	0·10080	−0.05033
0.60	0.00676	+0.00037	0.11049	−0.05659
0.65	0.00563	+0.00125	0.11614	−0.06323
0.70	0.00335	+0.00312	0.11613	−0.07570
0.75	−0.00174	+0.00568	0.10847	−0.07207

XXII. Tafel.

Leitfähigkeit für die Wärme.

a) Leitfähigkeit der Körper.

(Nach Despretz.)

Name des Körpers	Leitfähigkeit
Gold	1000.0
Silber	973.0
Platin	981.0
Kupfer	898.2
Eiſen	374.2
Zink	368.0
Zinn	303.9
Blei	179.6
Marmor	23.6
Porcellan	12.2
Ziegelmaſſe	11.4

b. Ordnung der Leitfähigkeit der Hölzer nach La Rive und Decandolle vom beſſeren Leiter angegeben.

1. Crataegus area.
2. Nußbaum.
3. Eiche.
4. Fichte.
5. Pappel.
6. Nußbaum.
7. Eiche.
8. Pappel.
9. Kork.

1—5 nach der Richtung der Faſern 6—8 nach der darauf ſenkrechten Richtung.

XXIII. Tafel.

Wärmecapacität.

a. Feſte und tropfbare Körper.

Name der Körper	Capacit.	Name der Körper	Capacit.
Achat . . . . . Wil.	0.1950	Aſche . . . . . Cra.	0.1923
Alaunlöſung 1 Th. Salz		» von Ulmenholz Cra.	0.1402
2.9 Waſſer . . . Kir.	0.649	» von Steinkohlen Cra.	0.1855
Alkohol . . . . Irv.	0.930	Baumöhl . . . Kir.	0.7180
» . . . . . . Cra.	0.6666	Dal.	0.50
» . . . . . Les.	0.64	Bitterſalzlöſung 1 Theil	
» . . . . . Cra.	0.602	Salz 2 Theil Waſſer Kir.	0.844
» vom ſpecifiſchen Ge-		Blei . . . . . Kir.	0.050
wichte 0.817 Dal.	0.70	» . . . . . Cra.	0.0352
» vom ſpecifiſchen Ge-		» . . . . Wil.	0.042
wichte 0.793 Des.	0.6220	» . . . . . Dal.	0.04
» vom ſpecifiſchen Ge-		» . . . . . Dul.	0.0293
wichte 0.848 Dal.	0.76	Bleioxyd, gelbes . Cra.	0.0680
Ammoniak, ätzendes, ſp.		Blut, arteriöſes . Cra.	1.0300
Gew. 0.948 Dal.	1.03	» venöſes . . Cra.	0.8928
» ſp. Gew. 0.997 Kir.	0.708	Eis . . . . . . Kir.	0.9000
» kohlenſaures Kir.	0.95	Eiſen . . . . . Irv.	0.1300
» geſchwefeltes ſpecifi-		»	0.143
ſches Gewicht 0.818		» . . . . . . Dal.	0.13
Kir.	0.994	» . . . . . Kir.	0.125
» ſalzſaure Löſ. 1 Th.		» . . . . . . Cra.	0.1269
Salz 1.5 Th.		» . . . . Wil.	0.126
Waſſer . . Kir.	0.798	» von 0—100° Dul.	0.1098
Antimon . . . . Kir.	0.086	» von 100—200 Dul.	0.1150
» . . . Cra.	0.0645	» von 200—300 Dul.	0.1218
» . . . Wil.	0.063	» von 300—400 Dul.	0.1285
» . . . Dal.	0.06	Eiſenoxyd . . . . Kir.	0.320
» von 0 bis 100° C Dal.	0.0507	Eiſenoxydul, luftfrei Cra.	0.1666
» » 0 » 300° C Dal.	0.0549	Eiſen, ſchwefelſaure Lö-	
Antimonoxyd, weißes Kir.	0.220	ſung 1 Th. Salz 2.5	
» » Cra.	0.2272	Th. Waſſer . . Kir.	0.734
» luftleer Cra.	0.1666	Erbſen . . . . . Cra.	0.4920

Name der Körper	Capacit.	Name der Körper	Capacit.
Eſſigſäure, ſpecifiſches		Kochſalzſoole vom ſpe=	
Gewicht 1.056 . . Dal.	0.66	cifiſch. Gew. 1.120 Bis.	0.8437
Eſſig . . . . . . Dal.	0.92	„ v. ſp. Gew. 1.197 Dal.	0.78
„ aus Wein . . Dal.	0.3870	„ 1 Th. Salz 8 Th.	
„ deſtillirt . . Kir.	0.1030	Waſſer . . Kir.	0.832
Gerſte . . . . . . Cra.	0.4210	Kreide . . . . . . Dal.	0.27
Glas von 0—100° C Dul.	0.1770	„ . . . . . . Cra.	0.256
„ von 0—300 Dul.	0.1900	Kuhmilch . . . Cra.	0.9999
„ ſchwediſches Wil.	0.1870	Dal.	0.98
„ „ Kryſtallgl. Lav.	0.1929	Kupfer . . . . . . Cra.	0.1111
„ Crownglas Irv.	0.2000	Wil.	0.114
„ Flintglas . . Dal.	0.19	„ 0°—100° C Dul.	0.0949
„ „ . . Kir.	0.174	„ 0—300 C Dul.	0.1013
Glockenſpeiſe . . Rum.	0.1100	Kupferoxyd . . . Cra.	0.2272
Gold . . . . Dal.	0.05	Leinöhl . . . . . Kir.	0.5280
Wil.	0.050	Lunge v. einem Schafe Cra.	0.7690
Dul.	0.0298	Muskelfleiſch . . . Kir.	0.7400
Holz von Apfelbaum Mei.	0.5700	Natrum, ſchwefelſaure	
„ „ Birnbaum Mei.	0.5000	Löſung 1 Th. Salz	
„ „ der Birke Mei.	0.4800	2.9 Th. Waſſer . Kir.	0.728
„ „ „ Buche Mei.	0.4900	Nickel . . . . . Dal.	0.10
„ „ „ Eiche Mei.	0.5100	„ . . . . . . Dul.	0.1035
„ „ „ Eſche Mei.	0.5100	Ochſenhaut mit Haa=	
„ „ „ Fichte Mei.	0.6500	ren . . . . . . Cra.	0.7870
„ „ „ Linde Mei.	0.6200	Platin . . . . . . Irv.	0.13
„ „ „ Pechtan=		„ von 0—100° C Dul.	0.0335
ne Mei.	0.5800	„ von 0—300 C Dul.	0.0355
„ „ Pflaumenb. Mei.	0.4400	Potaſche, ſpecifiſches Ge=	
„ „ der Tanne Mei.	0.6000	wicht 1.346 . . Kir.	0.759
„ kohle . . . Cra.	0.2631	Queckſilber . . . Kir.	0.033
Kali, kohlenſaures, ſpe=		„ . . . . . Cra.	0.0357
cifiſches Gew. 1.30 Dal.	0.75	„ . . . . . Lav.	0.0290
Kalilöſung	0.7590	„ . . . . . Dal.	0.0496
Kalk, ätzender . . Dal.	0.40	„ v. 0°—100° C Dul.	0.0330
„ „ . . Cra.	0.2229	„ v. 0—300 C Dul.	0.0350
„ „ . . Lav.	0.2169	Reißſtroh . . . . Cra.	0.5060
„ kohlenſaurer . .	0.2700	Salpeterlöſung 1 Theil	
Kalkhydrat . . . Dal.	0.4000	Salz 8 Th. Waſſer Lav.	0.8167
Kobalt . . . . . Dul.	0.1498	Salpeterlöſung 1 Theil	
Kochſalz . . . . Dal.	0.2300	Salz 3 Theil Waſſer Kir.	0.646

Name der Körper	Capacit.	Name der Körper	Capacit.
Salpeterſäure ſpeciſiſch.		Spermacet	0.399
Gew. 1.20 . Dal.	0.76	Spermacetöhl . Cra.	0.5000
» » 1.2989 Lav.	0.6613	Dal.	0.52
Les	0.62	Steingut . . . . Kir.	0.195
» » 1.30 . Dal.	0.66	Steinkohle	0.2777
» » 1.355 Kir.	0.576		0.28
» » 1.36 . Dal.	0.63	Tellur . . . . . . Dul.	0.0912
Salzſäure ſp. G. 1.122 Kir.	0.680	Terpentinöhl . . Kir.	0.472
» » » 1.153 Dal.	0.60	Irv.	0.400
Schwefel . . . . Dal.	0.19		0.4620
» . . . . Kir.	0.183	Waſſer	1.0000
» . . . . . Dul.	0.1880	Weinſteinlöſung 1 Th.	
Schwefeläther ſpeciſiſch.		Salz 237.3 Th. Waſ-	
Gewicht 0.793 .	0.6220	ſer . . . . . Kir.	0.765
» » 0.817 .	0.7000	Wismuth . . . Wil.	0.043
» » 0.76 Dal.	0.66	Dal.	0.04
Schwefelſäure ſpeciſiſch.		Dul.	0.0288
Gew. 1.885 Lav.	0.758	Zinn . . . . Cra.	0.0704
» » 1.872 Kir.	0.429	Dal.	0.07
Les.	0.34	Wil.	0.060
» » 1.844 Dal.	0.35	Dul.	0.0514
» » 1.85 Lav.	0.3346	Zinnoxyd, luftfrei Cra.	0.0990
» 4 Theil Säure		Kir.	0.096
5 Th. Waſſer Lav.	0.6631	Zinnbleioxyd . . . Kir.	0.102
» 4 Theil Säure		Zink . . . . Dal.	0.10
3 Th. Waſſer Lav.	0.6031	» . . . . Cra.	0.0943
» 1 Raumth. Säure		» . . . . Wil.	0.102
1 Th. Waſſer Dal.	0.52	» von 0—100° C Dul.	0.0927
» braune . . Irv.	0.350	» von 0—300 C Dul.	0.1015
Silber . . . . . Wil.	0.082	Zinkoxyd . . . . Cra.	0.1369
» . . . . . . Dal.	0.08	Zucker, brauner im Waſ-	
» von 0—100° C Dul.	0.0557	ſer gelöſet . Cra.	0.086
» von 0—300 C Dul.	0.0611	» ſp. Gew. 1.17 Dal.	0.77

b. Gaſe.

Name des Gaſes	Capacität bei conſtantem Volumen	Capacität bei conſtantem Druck	Verhältniß beider zu einander
Atmoſphäriſche Luft	1	1	1.421
Sauerſtoffgas	1	1	1.415
Waſſerſtoffgas	1	1	1.407
Kohlenſäuregas	1.249	1.175	1.339
Kohlenoxydgas	1	1	1.428
Stickgas	1.227	1.16	1.343
Öhlbildendes Gas	1.754	1.531	1.240
Waſſerdunſt	1.960	—	—

XXIV. Tafel.

Liquefaction der Gaſe durch ihre eigene Atmoſphäre.

Name des Gaſes	Temperatur	Druck in Atmoſphären
Schwefeligſaures Gas . . .	7°	2
Cyangas	7	3.6
Chlor	15.5	4
Ammoniakgas	0	5
»	10	6.5
Schwefelwaſſerſtoffgas . . .	—16	14
»	+ 8	17
Salzſäuregas	—16	20
»	— 4	25
»	+ 8	40
Kohlenſäuregas	—11	20
»	0	36
Salpetrigſaures Gas . . .	0	44
» »	7	51

XXV. Tafel.

Schmelz- und Siedtemperatur.

(W bezeichnet Grade des Wedgewood'ſchen, D Grade des Danill'ſchen Pyrometers; wo keine Signatur vorkommt werden Celſiſche Thermometergrade verſtanden.)

Name der Körper	Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Alaunlöſung 64 Theile Salz 36 Theile Waſſer . . . . . Gri.	....	102°.2
Alkohol: abſoluter . . G. L.	....	78.41
Ye.	....	77.323
„ 1 Th. Alkohol 1 Th. Waſſ.	—21°	....
„ 2 „ „ 1 „ „	—23	....
„ von 0.801 ſpecifiſchem Gewichte bei 20° C muthmaßlich Mun.	—58	....
„ „ 0.798 ſpecifiſchem Gewichte muthmaßlich . Hutton.	—79	....
„ „ 0.791 ſpecifiſchem Gewichte muthmaßlich . . Mun.	—92	70.3
Ameiſenäther von 0.7915 bei 18° C	....	56
Ammoniak, concentrirt . . .	—50	45
„ oxalſaures 40 Th. Salz 60 Th. Waſſer . . . . Gri.	....	103.3
„ ſalzſaures 20 Th. Salz 80 Th. Waſſer . . . . Gri.	—13.4	113.3
Antimon . . . . . Mor.	512.9	....
	425	....
Antimonöhl	....	200
Arſenik	210	....
Arſenikchlorid	unter—28.7	....
Arſenikfluorid . . . . Unv.	....	100
Arſenikwaſſerſtoff	....	—22.4
Barytlöſung, ſalzſaure, 45 Theile Salz 55 Theile Waſſer Gri.	....	104.5

Name der Körper		Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Barytlöſung, ſalpeterſaure 26.5 Th. Salz 73.5 Th. Waſſer	Gri.	....	101.1
Benzoeäther	Dum.	....	209
Bernſtein		288	....
Bergamotöhl		—5	....
Bergnaphta		....	106.2
Bittererde, ſchwefelſaure Löſung, 75.5 Theil Schwefel 42.5 Theil Waſſer	Gri.	....	105.5
Blauſäure, wäſſerige		....	32.8
» waſſerfreie	G. L.	—13.75	26.2
Blei	Kup.	334	....
»	Gri.	227	....
»	Mor.	322.2	....
»	Dan.	321	....
» 0.340 Th. Zinn 0.194 Th. Wismuth	Döb.	99	....
» eſſigſaure Löſung, 41.5 Th. Salz 58.5 Th. Waſſer	Gri.	....	101.7
» ſalpeterſaure Löſung, 41.5 Th. Salz 58.5 Th. Waſſer	Gri.	....	102.2
Blut		—3.9	....
Blutlaugenſalz 55 Th. Salz 45 Th. Waſſer	Gri.	....	103.3
Boraxlöſung, 52.5 Th. Salz 47.5 Th. Waſſer	Gri.	....	105.5
Borſäure in Waſſer gelöſet	Gri.	....	103.3
Brom	Ser.	—18	47.5
Bromantimon		94	270
Bromarſenik	Ser.	20 25	....
Bromcyan		....	—15
Bromkohlenſtoff	Ser.	0	....
Bromphosphor	Bal.	unter—12	....
Bromwismuth	Ser.	200	....
Butter		30	....
Butterſäure	Chev.	unter —9	....

Name der Körper		Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Cacaobutter		50	204
Campher		175	....
Campherſäure . . .	Bra.	62.5	....
Cerin	Bord.	58	....
Cerium		über 170 W	....
Chlor, tropfbares		unter 18.7	....
Chloräther	Unv.	....	66.75
Doppelchlorcyan . . .	Ser.	140	190
Chlorkohlenſtoff, feſter . .	Far.	160	180
» tropfbarer .	Far.	....	71
		....	77
Chlorkohlenwaſſerſtoff . . .		....	66.75
Chlormangan . . .	Dum.	....	—15
		....	—20
Chlorſäure		....	137.5
Chlortitan	Dum.	....	135
Cinchonin, ſchwefelſaures . .		über 100	....
Chrom		170 W	....
Colophon		135	....
Columbium		über 170 W	....
Conjac	Par.	—48.5	....
Copaivabalſam		....	212
Cyan		....	—18
Cyanchlorur	Unv.	—15	....
Cyanchlorid	Ser.	140	190
Cyanqueckſilberlöſung 35 Th. Salz 65 Th. Waſſer . . .	Gri.	....	101.1
Delphinſäure	Chev.	unter 9	....
Eiſen	Dal.	138 W	....
	Chap.	11956	....
» ſchwefelſaure Löſung 64 Th. Salz 36 Th. Waſſer .	Gri.	....	102.2
Emailfarben		6 W	....
Emetine	Dum.	50	....
Erythrogen	Biz.	43	50
Eſſigäther	Dum.	....	74
Eſſiggeiſt, brenzlicher . .	Mac.	....	65

Name der Körper		Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Eſſigſäure		—30	....
Fenchelöhl		10	....
Flußſäure, concentrirte		nntec —40	über 25
Fuſelöhl aus Kartoffeln		unter —18	125
Gold	Dan.	1421	....
	Mor.	1380	....
	Dal.	32 W	....
Gußeiſen	Mor.	130 W	....
	Dan.	1033	....
Hammelstalg		51	....
Helen		42	....
Holzeſſiggeiſt		....	81.2
Hydrothionſäure	Far.	....	—17.8
Jamaicin	Hüt.	100	....
Jatrophaſäure	Pel.	— 5	....
Inulin		100	....
Jod	G. L.	107	180
Jodchlorur	Ser.	15—20	20—25
Jodcyan	Unv.	....	100
Jodkohlenwaſſerſtoff	Ser.	120	....
Jodwaſſerſtoffſäure	G. L.	....	128
Iridium		über 160 W	....
Kadmiumamalgam	Mit.	75	....
Kalium		55	....
Kali, ätzendes	Gri.	....	157.8
„ chlorſaure Löſung 40 Th. Salz 60 Th. Waſſer	Gri.	....	103.3
„ ſaures, jodſaures	Ser.	....	120
„ ſchwefelſaure Löſung 17.5 Th. Salz 82.5 Th. Waſſer	Gri.	....	101.7
„ unterſchwefelſaures	Gri.	....	105.5
Kalikupfer, ſchwefelſaures, 40 Th. Salz 60 Th. Waſſer	Gri.	....	102.8
Kalinatrum, weinſaures, 90 Th. Salz 10 Th. Waſſer	Gri.	....	115.6
Kalilauge, concentrirt		....	175

Name der Körper	Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Kali, oxalſaure Löſung, 40 Th. Salz 60 Th. Waſſer . . . Gri.	—	104.5
„ ſalzſaures, 12.5 Th. Salz 85.5 Th. Waſſer	—3.4	—
„ talgſaures	über 100	175
„ weinſaures 68 Th. Salz 32 Th. Waſſer . . . . Gri.	—	102.3
Kobalt . . . . . . Dal.	130 W	—
Chap.	9940	—
Kochſalzlöſung: ſpecifiſches Gewicht bei 18°.8 C		
1.006 . . Bis.	— 0.6	100.3
1.012 . . Bis.	— 1.2	100.4
1.018 . . Bis.	— 1.8	100.8
1.024 . . Bis.	— 2.5	101
1.030 . . Bis.	— 3.0	101.2
1.036 . . Bis.	— 3.6	101.5
1.042 . . Bis.	— 4.2	101.8
1.048 . . Bis.	— 4.9	102
1.054 . . Bis.	— 5.5	102.2
1.060 . . Bis.	— 6.1	102.5
1.066 . . Bis.	— 6.7	102.7
1.072 . . Bis.	— 7.4	103
1.078 . . Bis.	— 8	103.2
1.084 . . Bis.	— 8.6	103.5
1.090 . . Bis.	— 9.2	103.7
1.096 . . Bis.	— 9.7	104
1.102 . . Bis.	—10.4	104.2
1.108 . . Bis.	—11	104.5
1.114 . . Bis.	—11.6	104.8
1.120 . . Bis.	—12.2	105
1.126 . . Bis.	—12.9	105.2
1.132 . . Bis.	—13.5	105.5
1.138 . . Bis.	—14.1	105.8
1.144 . . Bis.	—14.7	106
1.150 . . Bis.	—15.4	106.2
1.156 . . Bis.	—15.9	106.5

Name der Körper		Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
1.162 . .	Bis.	—16.5	106.7
1.168 . .	Bis.	—17.1	107.1
1.174 . .	Bis.	—17.8	107.3
1.180 . .	Bis.	—18.5	107.5
1.186 . .	Bis.	—19	107.8
1.192 . .	Bis.	—19.6	108.1
1.198 . .	Bis.	—20.2	108.4
1.204 . .	Bis.	—20.8	108.6
Kohlenſulphurid		unter 41	....
Kohlendoppelwaſſerſtoff . . .	Far.	6.9	....
» von comprimirtem Öhlgas .		—22.5	....
» 1 Th. Waſſerſt. 7.58 Kohlenſt.	Far.	....	60
» » » 8.38 »		....	56.56
» » » 7.90 »		....	71.11
» » » 8.25 »		....	80
» » » 8.76 »		....	87.28
» » » 9.17 »		....	93.33
» » » 8.31 »		....	98.89
» » » 8.48 »		....	104.44
Kohlenwaſſerſtoff, ſchwefelſaurer	Ser.	110	260
Kohlenwaſſerſtoffbrand		0	....
Kolſaöhl		—6.25	....
Korkſäure	Bous.	53.7	....
Kupfer		27 W	....
	Mor.	1207.3	....
	Dan.	1398	....
» eſſigſaure Löſung 16 Th. Salz 83.5 Th. Waſſer . .	Gri.	....	101.1
» ſalpeterſaure	Gri.	....	173.3
» ſchwefelſaure 41.6 Th. Salz 58.4 Th. Waſſer		— 2.2	....
Leinöhl		— 20	387.5
Macisöhl	Schüb.	....	316
Mangan	Dal.	160 W	....
	Chap.	12100	....
Manganbromur . . .	Dum.	....	15
		....	20

Name der Körper		Temperatur	
		des Schmelzens	des Siedens
Margarinſäure		60	....
Meſſing	Dal.	21 W	....
	Mor.	999	....
	Dan.	1021	....
Metallgemiſch aus 177 Th. Zinn 310		1869 D	....
Th. Blei		3807	....
„ d'Arzetſches . . .	Mor.	93.7	....
Milch		— 18	....
Mohnöhl		— 1.1	....
Mohnſäure	Ser.	125	....
Molybdän		170 W	....
Myricin	Bous.	62	....
Myrhenwachs		43	78
Naphtalin		78	210
Naphta von Amiano . .	Sau.	....	85.5
Natrium		90	....
Natrum, ätzendes . . .	Gri.	....	215.5
„ eſſigſaure Löſung 60 Th. Salz 40 Th. Waſſer . .	Gri.	....	124.5
„ phosphorſaure Löſung 60 Th. Salz 40 Th. Waſſer . .		....	105.5
„ kohlenſäuerliche Löſung 60 Th. Salz 40 Th. Waſſer .	Gri.	....	105.5
„ ſchwefelſaure Löſung 31.5 Th. Salz 68.5 Th. Waſſer .	Gri.	....	100.5
„ weinſaure Löſung 50 Th. Salz 50 Th. Waſſer . . .		—61	....
Nickel		unter 160 W	....
„ ſchwefelſaure Löſung 65 Th. Salz 35 Th. Waſſer .	Gri.	....	112.8
Odorin	Unv.	über 100	....
Öhläther		....	87.5
Öhlgeiſt		....	54.8
Öhlkampfer		0	6.25
Olivenöhl		2.5	....
Osmium		über 160 W	....

Name der Körper		Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Oxaläther	Dum.	....	183
		....	184
Oxalſäure Löſung	Gri.	....	121.1
Palladium		über 160 W	....
Palmöhl		29	....
Parillin	Pal.	125	....
Perlſäure	Che.	47	143
Perubalſam		....	287
Pfeffermünzöhl		—22	....
Phosphor	Hei.	43	250
	Pel.	....	265
Phosphorjodid:			
„ 8 Th. Jod 1 Th. Phosph.		100	....
„ 16 „ 1 „		26.2	....
„ 24 „ 7 „		46.2	....
Phosphorſulphurid:			
„ 72 Th. Schwef. 100 Th. Phosph.		42.5	....
„ 13 „ „ „		20	....
„ 25 „ „ „		15	....
„ 50 „ „ „		12	....
„ 200 „ „ „		22.5	....
„ 300 „ „ „		37.5	....
Pineytalg	Bab.	36.4	....
Platin	Chap.	170 W	....
		12821	....
Queckſilber	Dal.	—39.5	348
	Dul.	....	350
	Chri.	....	346
	Dan.	....	340
Queckſilberſublimatlöſung	Gri.	....	101
Ricinöhl		—18	....
Ricinſäure	Bus.	22	....
Ricin-Talgſäure		über 130	....
Roſenöhl		29—30	....
Rosmarinöhl		....	165
Rhodium		über 160 W	....
Sabadilſäure	Pel.	20	....

Name der Körper		Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Salpeterſäure vom ſpecifiſchen Gewichte 1.424		—53.8	....
1.407		—42.5	....
1.3880		—34.2	....
1.2588		—34.3	....
1.3290		—23.9	....
1.54	Mit.	....	80
	Dal.	....	79.4
1.50	Dal.	....	98.4
1.45	Dal.	....	115.5
1.42	Dal.	....	120
1.40	Mit.	....	107.5
	Dal.	....	109.4
1.35		....	108.3
1.30		....	116.6
1.26		....	113.3
1.22		....	111.1
1.20		....	109.4
1.18		....	109.9
1.17		....	106.1
1.16		....	105
1.15		....	104.4
1.14		....	103.9
„ rauchende vom ſpecifiſchen Gewichte 1.420 . . .		....	120
Salpetrige Säure vom ſpecifiſchen Gewichte 1.451 . .	Bus	—28	....
Salpeteräther		....	22
Salzäther, leichter		....	15.6
„ ſchwerer . . .		....	107.3
Salzſäure, concentrirt . . .		—19.2	....
„ vom ſpec. Gewichte 1.166	Dal.	....	76.7
1.154	Dal.	....	87.8
1.144	Dal.	....	100
1.136	Dal.	....	102.8
1.127	Dal.	....	105.5
1.121	Dal.	....	108.9

Name der Körper	Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
1.094 Dal.	....	111.1
1.075 Dal.	....	108.9
1.064 Dal.	....	110.5
1.047 Dal.	....	105.5
1.035 Dal.	....	103.9
1.018 Dal.	....	102.2
1.009 Dal.	....	101.1
Sauerſtoffäther	....	93.7
Schwefel	über 111	316
Schwefeläther vom ſpecifiſchen Gewichte 0.713 . . . Dum.	....	34
» » » » » im leeren Raume . . Dum.	....	—29
Schwefelſäure vom ſpecifiſchen Gewichte 1.85 Dal.	46.2	326.6
1.849 Dal.	....	318.3
1.848 Dal.	....	310
1.847 Dal.	....	301.7
1.845 Dal.	....	271.1
1.842 Dal.	....	285
1.838 Dal.	....	276.6
1.833 Dal.	....	268.3
1.827 Dal.	....	260.5
1.819 Dal.	....	252.8
1.810 Dal.	....	245
1.801 Dal.	....	237.7
1.791 Dal.	....	230.5
1.780 Dal.	....	224
1.769 Dal.	....	216.6
1.757 Dal.	....	210
1.744 Dal.	....	204.4
1.730 Dal.	....	199.4
1.715 Dal.	....	194.4
1.699 Dal.	....	190
1.684 Dal.	....	186.1
1.670 Dal.	....	182.2
1.650 Dal.	....	176.6

Name der Körper		Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
1.520	Dal.	....	143.3
1.408	Dal.	....	126.6
1.30	Dal.	....	115.5
1.20	Dal.	....	106.6
1.10	Dal.	....	103.3
Schwefelblauſäure		—12	102.5
Schwefelchlorophosphür . .	Ser.	....	125
Schwefeljodid		60	....
Schwefelkohlenſtoff		....	42
Senföhlfett		120	....
Selen		über 100	....
Silber	Dul.	28 W	....
	Mor.	1033.7	....
	Dan.	1223	....
	Pri.	998.7	....
	Dan.	1223	....
„ mit 1/10 Gold . .	Pri.	1048.7	....
Silvinſäure	Unv.	168.7	....
Silvinſäurehydrat . . .	Unv.	100	....
Spermacet		61.2	....
Solanin		über 100	....
Strontian, ſalpeterſaure Löſung, 53 Th. Salz 47 Th. Waſſer .	Gri.	....	106.8
Stearin von Baumöhl . . .		20	....
„ „ Mohnöhl . . .		6	....
„ „ Rüböhl . . .		7.5	....
Stearinſäure	Che.	70	....
Stereopten aus Anisöhl . . .		20	....
„ „ Terpentinöhl . .		— 7	....
„ „ Roſenöhl . . .		34	....
Stickſtoffoxydul		....	über 17.8
Talg		41.9	....
Talgſäure	Che.	70	....
„ 1 Th. Saure 1 Th. Alkohol .		45	....
Talkerde, ſchwefelſaure Löſung 57.5 Th. Salz 42.5 Th. Waſſer .	Gri.	....	105
Terpentinöhl		—10	156.8

Name der Körper	Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Tellur	322	....
Titan	über 170 W	....
Uran	170 W	....
Veratrin . . . . . Pel.	50	....
Wachs, ungebleichtes . . .	76.2	....
„ rohes	61.2	....
„ weißes	68.7	....
„ aus der Milch des Kuhbaums	60	....
Waſſer, reines bei 342 p. L. Luftdruck Kaem.		
341	....	100.495
340	....	100.412
339	....	100.330
338	....	100.248
337	....	100.165
336	....	100.082
335	....	100.00
334	....	99.918
333	....	99.834
332	....	99.750
331	....	99.616
330	....	99.582
329	....	99.474
328	....	99.415
327	....	99.331
326	....	99.246
325	....	99.161
324	....	99.076
323	....	98.990
322	....	98.905
321	....	98.819
320	....	98.732
319	....	98.656
318	....	98.560
317	....	98.474
316	....	98.387
315	....	98.300

Name der Körper	Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Waſſer, reines bei 314 p. L. Luftdruck	....	98.212
313	....	98.125
312	....	98.038
311	....	97.950
310	....	97.862
309	....	97.775
308	....	97.686
307	....	97.598
306	....	97.509
305	....	97.419
304	....	97.329
303	....	97.239
302	....	97.149
301	....	97.059
300	....	96.968
299	....	96.876
298	....	96.785
Waſſer, oxygenirtes	—30	....
Meerwaſſer	— 5	103.7
Wein, ſtarker	—6.6	....
Weineſſig	—2.2	....
Weinöhl, tropfbares . . Ser.	—35	280
» feſtes . . . . . Ser.	110	....
Weinſteinlöſung 9.7 Th. Salz 90.3 Th. Waſſer . . . . Gri.	....	101.1
Wismuth . . . . Dan.	66 D	....
Mor.	240.6	....
Dan.	239	....
Wolfram	über 170 W	....
Zink . . . . . . Dan.	94 D	....
Dan.	342	....
Mor.	374	....
» ſchwefelſaure Löſung 45 Th. Salz 55 Th. Waſſer . . . Gri.	....	104.5
» ſchwefelſaure Löſung 53.3 Th. Salz 46.7 Th. Waſſer . .	—1.8	....

Name der Körper		Temperatur des Schmelzens	Temperatur des Siedens
Zinn	Mor.	266.9	....
	Dan.	227	....
	Kup.	230	....
Zinnblei: 5 Atom Zinn 1 Atom Blei	Kup.	194	....
» 4 » » 1 » »	Kup.	189	....
» 3 » » 1 » »	Kup.	186	....
» 2 » » 1 » »	Kup.	196	....
» 1 » » 1 » »	Kup.	241	....
» 1 » » 3 » »	Kup.	289	....

Verbeſſerungen.

Seite	Zeile	ſtatt	ſoll es heißen
14	6	du	u + du
29	20	ihr	ihm
112	24 und 25	C F	E F
176	22	$\frac{d\nu}{dy}$	$\frac{d\gamma}{dy}$
193	16	$\frac{dz}{ds}$	$\frac{dx}{ds}$
—	17	$\frac{dx}{ds}$	$\frac{dz}{ds}$
381	9	D H	D M
399	7 von unt.	A E	L E
400	2	D B E	C B E
404	3 von unt.	$\frac{x}{2f^2}$	$\frac{x^2}{2f^2}$
415	11 von unt.	$\frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\ldots\alpha_{n-1}}{a_1\,a_2\,a_3\ldots\ldots a_{n-1}}\,b$	$\frac{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{n-1}}{a_1\,a_2\,a_3\ldots\ldots a_{n-1}}\,b$
421	6	$\left(\frac{a_1}{\alpha_1}\right)^2 Q_2$	$\left(\frac{a_1}{\alpha_1}\right)^4 Q_2$
451	4 von unt.	innerhalb	auf
454	9 von unt.	h	m
749	8	B F O	B F E
894	19	2.63	1.263

Erklärung
der in den Tafeln gebrauchten Abkürzungen.

Die Sylbe	Bedeutet	Die Sylbe	Bedeutet	Die Sylbe	Bedeutet
Ach.	Achard.	Bre.	Breithaupt.	J. Dav.	J. Davy.
All.	Allan.	Bri.	Brisson.	Del.	Delambre.
Au.	Augustin.	Bric.	Briche.	Des.	Despretz.
Aub.	d'Aubuisson.	Buch.	Buchholz.	Dest.	Destigny.
B.	Biot.	Bus.	Bussy.	Döb.	Döbereiner.
B. et A.	Biot u. Arago.	Bw.	Brewster.	Dub.	Daubeny.
Bach.	Bachmann.	Bz.	Berzelius.	Duf.	Dufrenoy.
Bab.	Babington.	C.	Crum.	Dul.	Dulong.
Bal.	Ballard.	C. et St.	Colladon et	Dum.	Dumas.
Bar.	Barlow.		Sturm.	Dup.	Dupperey.
Bau.	Bauersachs.	Cal.	Calandrini.	E. R.	Erzherzog Rai-
Bch.	L. v. Buch.	Cai.	La Caille.		ner.
Benz.	Benzenberg.	Car.	Carlini.	Eb.	Ebel.
Ber.	Bergmann.	Cass.	Cassini.	Eck.	Ekeberg.
Bér.	Bérard.	Cav.	Cavallo.	Ed.	Eduard.
Berg.	Berger.	Chap.	Chaptal.	Ell.	Ellicot.
Bern.	Bernoulli.	Char.	Charpentier.	Er.	Ermann.
Bes.	Bessel.	Chau.	Chaudet.	Esch.	Escher.
Bert.	Berthoud.	Cheu.	Chenevix.	Esm.	Esmark.
Beu.	Beudant.	Ches.	Cheuvreusse.	Eul.	Euler.
Bg.	Ritter v. Bürg.	Chev.	Chevreul.	Fab.	Fabri.
Bgr.	Baumgartner.	Chri.	Chrichton.	Fal.	Fallon.
Bis.	Bischoff.	Cl.	Clarke.	Far.	Faraday.
Biz.	Bizio.	Cle.	Cleveland.	Farm.	Farmont.
Bo.	Graf v. Borch.	Co.	Cobelli.	Fer.	Ferrer.
Bor.	Borda.	Col.	Collin.	Fisch.	Fischer.
Bord.	Bordet.	Cor.	Cordier.	Frey.	Freycinet.
Bos.	Boscovich.	Cra.	Crawford.	For.	Forster.
Bou.	Boudet.	Cru.	Cruitschanks	Fr.	Fraunhofer.
Boul.	Boullay.	Da.	David.	Fs.	Fuchs.
Bour.	Bournon.	Dal.	Dalton.	G. St.	k. k. österrei-
Bous.	Bouſſingault.	Dan.	Daniell.		chischer Ge-
Bow.	Bowen.	Dar.	Darluc.		neral-Stab.
Bra.	Brandes.	Dav.	H. Davy	G. L.	Gay - Lussac.

Die Sylbe	Bedeutet	Die Sylbe	Bedeutet	Die Sylbe	Bedeutet
Geb.	Gebhard.	Hün.	Hünefeld.	Lon.	Longchamp.
Geo.	George.	Hum.	A. v. Humboldt.	Low.	Lowry.
Ger.	Gerard.	Hutt.	Hutton.	Mac.	Macaire.
Gers.	Gersdorf.	Hütt.	Hüttenschmidt.	Mag.	Magnus.
Gerst.	Gerstner.	Hy.	Häuy.	Mal.	Malus.
Gis.	Gismondi.	Jam.	Jameson.	March.	Marchand.
Gme.	Gmelin.	Jans.	Janson.	Mars.	Marsden.
Gott.	Gotthard.	Jn.	John.	Mech.	Mechain.
Gouv.	Gouvenin.	Irv.	Irvine.	Mei.	Meyer.
Gre.	Gregor.	Jun.	Junker.	Mit.	Mitscherlich.
Gri.	Griffith.	Käm.	Kämtz.	Mol.	Molina.
Grol.	Grollmann.	Kar.	Karsten.	Mon.	Monro.
Gue.	Guerin.	Kat.	Kater.	Mont.	Monticelli.
Gui.	Guiburt.	Kea.	Keating.	Mor.	Morveau
Gül.	Gülderstädt.	Ken.	Kenedy.	Mul.	Mulgrave.
Gy.	Andr. de Gy.	Kir.	Kirwan.	Müll.	Müller.
H.	Haidinger.	Kla.	Klaproth.	Mun.	Muncke.
Hab.	Haberle.	Kob.	Kobell.	Mus.	Musschenbrock.
Hac.	Hacquet.	Koeh.	Koehler.	Ms.	Mohs.
Hall.	Hallstroem.	Kra.	Kraft.	Mx.	Marx.
Hat.	Hatchette.	Kul.	Kulik.	Mz.	Morozzo.
Has.	Hassenfratz.	Kup.	Kupffer.	Need.	Needham.
Heb.	Heberle.	K. St.	Koch-Sternfeld.	New.	Newton.
Hein.	Heinrich.	L.	de Luc.	Nob.	Nobili.
Hel.	Heller.	v. L.	von Lindenau.	Or.	Oriani.
Her.	Herapath.	Lan.	Landgrebe.	Ost.	Osterwald.
Herb.	Herbert.	Lav.	Lavoisier.	P.	Pini.
Heric.	Hericart de Thury.	Lax.	Laxmann.	Pal.	Pallota.
		Lech.	Lechevin.	Par.	Parry.
Heron	Heron de Villefosse.	Leon.	Leonhard.	Parr.	Parrot.
		Ler.	Lerchenfeld.	Pass.	Passinge.
Hers.	Herschel.	Les.	Leslie.	Pat.	Patrik.
Herz.	Herzberg.	Lev.	Levy.	Paus.	Pausner.
Hie.	Hiesinger.	Licht.	Lichtenberg.	Pel.	Pelletier.
Hof.	Hoffmann.	Lie.	Liebig.	Per.	Perney.
Homb.	Hombres Firmas.	Lies.	Liesganig.	Pfei.	Pfeiffer.
Hor.	Horner.	Lin.	Lindauer.	Pict.	Pictet.
Hos.	Hoser.	Lind.	Lindner.	Phi.	Philipps.

Die Sylbe	Bedeutet	Die Sylbe	Bedeutet	Die Sylbe	Bedeutet
Pink.	Pinkerdon	Sab.	Sabine.	Thom.	Thomson.
Pla.	Planiawa.	Sau.	Saussure.	Tral.	Tralles.
Pli.	Plisson.	Schm.	Schmidt.	Tro.	Trougthon.
Pouq.	Pouqueville.	Schnei.	Schneider.	Tur.	Turner.
Pov.	Povelsen.	Schr.	Schreber.	T. Wach.	Trolle - Wacht-
Pri.	Prinsep.	Schu.	Schumacher.		meister.
R.	Roy.	Schul.	Schultes.	Ull.	Ullmann.
Ram.	Ramond.	Schw.	Schwerd.	Unv.	Unverdorben.
Reb.	Reboul.	Schü.	Schübler.	Vau.	Vauquelin.
Rei.	Reichenstein.	Schuck.	Schuckburgh.	Vid.	Vidnewski.
Reich.	Reichard.	Sey.	Seyfried.	Vill.	Villars.
Rein.	Reineggs.	Ser.	Serullas.	Wah.	Wahlenberg.
Ren.	Abel - Renusat.	Sert.	Serturner.	Wal.	Walcher.
Reu.	Reuss.	Sme.	Smeaton.	Wat.	Watson.
Rich.	Richter.	Spa.	Spalanzani.	Wer.	Werner.
Roch.	Rochon.	Stern.	Graf Sternberg.	Wil.	Wilke.
Roe.	Roesch.	Stein.	Steinmann.	Will.	Willams.
Ros.	Rosenthal.	St.	Stein.	Woll.	Wollaston.
G. R.	Gust. Rose.	Stro. od.	Stromeyer.	Woeh.	Woechler.
Rs.	Rees.	Str.		Ye.	Yelin.
Rud.	Rudberg.	Thal.	Thalack.	Yg.	Young.
Rum.	Gf. v. Rumford.	Tay.	Taylor.	Zim.	Zimmermann.
Ry. et	Ray et Mudge.	Then.	Thenard.		
M.		Toern.	Toernsteen.		

Regiſter.

A.

Abkühlung, 651.

Abkühlungsmethode, 676.

Abſorption, ungleiche des verſchiedenfarbigen Lichtes, 497.

Abweichung an Spiegeln, ſphäriſche 385, an Linſen, chromatiſche 401, Längenabweichung, Abweichungskreis, Abweichungswinkel 402, ſphäriſche 403, an der erſten 404, an beiden Flächen 405, Minimum 406, reducirte Formel 407, für Glaslinſen 408, Seitenabweichung 408, Halbmeſſer der Abweichung 409, an einem Linſenſyſteme, chromatiſche 417, ſphäriſche 419, magnetiſche 715, 749.

Achromatiſche Prismen 428, Linſen 429, Stoffe zu denſelben 432.

Akuſtik 332.

Akuſtiſche Verſuche 365.

Amici 627.

Ampère 835, 837, 850.

Anderſon 265, 271, 282.

Anemometer 322.

Anwandlungen des Lichtes 569.

Anziehung 160, einer Kugel 161, für ein beſtimmtes Geſetz der Kraft 163, in Polarcoordinaten ausgedrückt 164, Modificationen bei Naturkörpern in Betracht der Einwirkung ihrer Theilchen untereinander 167, in Polarcoordinaten 171, Formeln für dieſe Wirkung 176.

Arago, 441, 484, 492, 525.

Aräometer, Theorie der Scalen, 76, der Gewichtsar. 77, Conſtruction der erſtern 79, Beſtimmung der Scale nach Briſſon 80 und Schmidt 80, 82, Bau der Procenten- 83, der Gewichtsar. 84, Gebrauch 85.

Atmoſphäre, Gleichgewicht 228, Höhe 229.

Auguſt 133, 265, 270, 272.

Ausdehnung durch die Wärme 86, Größe derſelben zu beſtimmen bei feſten Körpern 86, nach Lavoiſier 87, Hallſtröm 88, relative 88, Geſetze derſelben 89, bei tropfbaren Körpern 90, dem Waſſer insbeſondere 92, des Queckſilbers 95, anderer Flüſſigkeiten 97, der Gaſe 98, Verſuche hierüber von Dulong und Petit 99, Formeln dafür 101.

B.

Barometer 134, Conſtruction 134, Reinheit des Queckſ. 135, Wanddicke, Länge und Weite der Röhre 136, Füllen und Auskochen 137, Beſchaffenheit des Queckſilbergefäßes 139, die Scale 140, Winkel- 141, Doppel-, Rad- 142, Wag- Heber- 143, Gefäßbarometer 144, Gebrauch des Bar. 146, Correction 147, (Höhenmeſſung).

Barometerſtand 324, regelmäßige Änderungen 325, mittlerer Luftdruck an mehreren Orten 326, phyſiſche und dynamiſche Fluth 329, Änderungen im Zuſammenhang mit der Windesrichtung 330.

Barlow, 439.

Baroſkop, 151.

Beck und Moll, 344.

Bellani, 110, 120.

Beobachtungen, wie ſie anzuſtellen 8, mögliche Fehler 9, Annäherungsmethoden 10, relative Güte 13, wahrſcheinliche Größe des Fehlers 14, Maß der Genauigkeit 17, Methode für höhere Gleichungen 20, Mittel, aus ihnen die Geſetze der Erſcheinun-

gen abzuleiten 22, durch graphiſche Darſtellung 22, Berechnung 23.
Bérard, 679, 682, 687.
Beſſel, 122, 301, 303, 305, 307.
Beugung des Lichtes 470, Anſtellung der Verſuche 471, Gebrauch des Fraunhofer'ſchen Apparates 473, Reſultate der Beugung in einer Öffnung 475, ſchief einfallender Strahlen 476, in mehreren Öffnungen 477, Geſetz für Spectra der zweiten Klaſſe 478, Beugung nach mehreren Richtungen 480, Weg der gebeugten Strahlen 482, ſ. Eman.-Vibr. hyp. Erklärung 529.
Bewegung der Körper überhaupt, feſter insbeſondere 285, des Schwerpunktes 287, ſchwerer Körper im leeren Raum 292, in einem widerſtehenden Mittel 293, flüſſiger Körper 317, Bedingungen wegen Continuität der Maſſe 320, ausdehnſamer Körper 321, in der Atmoſphäre 322, ſchallender Körper 332.
Biot 369, 441, 505, 483, 485, 571, 578, 671, 841.
Blackadder, 119.
Bohnenberger 262, 298, 301.
Borda 306, 309, 311.
Bouvard, 147.
Boscovich 450, 641.
Bouguer, 525.
Brechung einfache 393, in Mitteln mit parallelen Wänden 393, dioptriſche Brennlinie 395, in einem dreiſeitigen Prisma 396, Minimum derſelben 398, in Linſen 399, Gleichung für eine Linſe 400, Abweichung chromatiſche 401, ſphäriſche 403, in mehreren Linſen 410, Öffnung wegen der Helligkeit 411, Größe der Bilder 412, Öffnungen wegen des Geſichtsfeldes 413, Vergrößerung 414, Geſichtsfeld 415, Ort des Auges, Helligkeit 416, Farbenabweichung 417, für Punkte außer der Axe 418, Kugelabweichung 419, Br. ohne Farbenzerſtreuung 428, in Prismen 428, in Linſen 429, mit Berückſichtigung der Lichtſtärke 431, ſecundäres Spectrum 432.
Brechungsverhältniß, Beſtimmung deſſelben durch Beobachtung der Vereinsweite für Strahlen von bekannter Entfernung 434, nach Fraunhofers Methode 435, nach Brewſter u. Marx 437, nach Barlow 439, Prechtl 440, mittelſt eines Theodolithen 440, für Gaſe nach Biot und Arago 441, für dieſelben, wenn es ſich nicht um abſoluten Werth des Brverh. handelt nach Dulong 444, Wollaſtons Methode 445, Laplace's Bemerkung hierüber 446.
Doppelte, Beſtimmung der Elemente derſelben 507, Lage und Anzahl 508, Charakter der Axen 509, Weg des ungew. gebrochenen Strahles durch Conſtruction 510, durch eine Formel 511, nach Hughens Geſetz 512, in Körpern mit zwei Brechungsaxen 516, Intenſität der brechenden Kraft 518, durch Zuſammenſetzung der Axen berechnet 519, ſ. Vibr.-Eman. hyp.
Brennfläche catoptriſche 386, dioptriſche 395.
Brennglas, 586.
Brennſpiegel, 585.
Brewſter 432, 437, 451, 497, 500, 486, 487, 519, 521, 626, 703.
Brillen 587, Eigenſchaften 588.
Briſſon, 80.
Bunten, 144.
Bürg, 110, 269.

C.

Cagniard-Latour 201, 362, 371.
Calorimeter 674, Gebrauch 675.
Capacität der Gefäße 35, für Wärme, (Wärmeſpec.). 674.
Capillarität, (Haarröhrchentheorie).
Carlini 325, 327, 329.
Cauchoix, 30.
Charles 578, 583.
Chemiſches Laboratorium, 7.
Chladni 364, 368.
Clement und Desormes 342.
Coefficienten Laplace'ſche, 165.
Colladon und Sturm 368.
Condenſator, 807.
Coulomb, 203, 725, 733, 736, 783, 785, 788, 789, 805.
Crawford, 676.

D.

Dalton, 244, 246, 248, 259.
Daniell, 259.
D'Aubuiſſon, 240.
Declinatorium, von Gambey 715, Horner 716, Poggendorf 717.
Deluc, 281.
Desormes, ſ. Element.
Despretz, 674.
Dichroismus, 497.
Dichte 60, Beſtimmung derſelben durch die Wage 60, Apparate hierzu 61, Leslies Inſtrument für gepulverte Körper 62, Manipulation und Vorſichten 66, bei tropfbaren 67 und gasförmigen Körpern insbeſondere 68, Formeln zur Berechnung für feſte 69, tropfbare 70, gasförmige Körper 72, Beſtimmung derſelben durch Aräometer 75, der Dünſte 252.
Dicke, Beſtimmung derſelben 30.
Directrix, 829.
Dove, 823, 830.
Drehwage, magn. 737, electriſche, 784.
Dumas, 254.
Dulong, 89, 368, 444, 651, 656, 679, 683, 687, 689.
Dünſte, Beſtimmung der Expanſivkraft der Waſſesdünſte, nach Dalton 244, Ure 245, Tafel darüber 246, Vergleichung beider 248, Geſetz der Spannkräfte 249, der Dünſte anderer Flüſſigkeiten 251, Dichte und ſpecifiſches Gewicht der Waſſerd. 252, nach Dumas 254, anderer Flüſſigkeiten 255, bei verſchiedenen Temperaturen 256, Wirkung der freien Dünſte in der Luft 256, 257, ſ. Hygrometer.

E.

Eckhart, 146.
Egen, 111. 113, 128, 786.
Elaſticität, Maß derſelben 191, Modulus 194, Ungleichheit derſelben im Äther 549, Elaſticitätsaxen 552, Fläche 554. ſ. Vibrationshyp.
Elaſticitätsmeſſer, 195.
Electricität, Apparate zur Erregung 772, im Gleichgewicht 782, Geſetze derſelben 785, Verh. zur abſtoßenden Kraft 788, Verluſt durch unvollkommene Leitung 789, Anordnung in guten Leitern 791, auf einem Ellipſoide 792, auf einem Sphäroid 795, Dicke der electr. Schichte 796, Wirkung zweier Kugeln auf einander 799, zweier ſich berührender Kugeln 801, der Berührungsſtelle 802, Gleichgew. in Leidnerflaſchen und Condenſatoren 805, in Bewegung 809, durch Bewegung einer Magnetnadel 810, Geſetze derſelben 812, Prüfung dieſer Geſetze durch Verſuche 818, Wirkung der bewegten E. in die Ferne 822, zweier Elemente auf einander 823, eines geſchloſſenen Stromes auf ein Element 826, zweier geſchloſſener Ströme 831, geradliniger 832, Drehungsmoment 834, krummliniger, in verſchiedenen Ebenen 835, eines Solenoids 837, eines electr. Stromes auf eine Magnetnadel 840, Beweis der hierbei gemachten Vorausſetzungen 841, Verſuche hierüber 845.
Electriſirmaſchine 772, Scheibe, Reibzeug 773, Amalgam 774, Conductor 775.
Electromagnetismus, Ampères Theorie 840, Geſetz der Kraft eines electr. Stromes auf eine Nadel 541, 843, Ausdruck für die Wirkung 844, Verſuche und Apparate 845, allgemeine 846, beſondere 846, 847, Vorſichten hiebei 848.
Emanationshypotheſe 563, Fortpflanzung, Reflexion und Brechung 564, Brechungsvermögen 566, doppelte Brechung 567, Theorie der Anwandlungen 569, Beugung 570, Polariſation 571, Vergleichung mit der Vibr. hyp. 572.
Erkaltung durch Ausſtrahlen, Theorie derſelben 650, Verſuche hierüber von Dulong und Petit 651, Apparat 652 Correctionen 653, Geſchwindigkeit 654, Geſetze derſelben 656, E. durch Mittheilung 656, in Gaſen 657, geſammte 658.
Erwärmung eines Punktes 647, eines geſchloſſenen Raumes 649, durch

Compreſſion 688, der Erde durch die Sonne 697.
Ettinghauſen, 637.
Expanſivkraft, 72, 244, 694, ſ. Dünſte, Gaſe, Wärme.
Eytelwein, 195.

F.

Faraday, 695, 849.
Farbenabweichung, ſ. Abweichung.
Farbenringe, Newtonſche 457, Erzeugung 458, Beobachtung und Meſſung derſelben 459, Geſetz 460, Beſtimmung der Dicke der Plättchen 461, Änderung für ſchief einfallende Strahlen 462, Tabelle für die Dicke der Plättchen 464, Durchmeſſer und Breite der verſchiedenfarbigen Ringe, und der ihnen entſprechenden Plättchendicke 467, die Farbe des Plättchens durch Conſtruktion erkennbar 469, im polariſirten Lichte 500, Erzeugung und Hülfsapparate 501, Zubereitung der Kryſtalle 502, Geſtalt der Ringe 503, Gleichung für dieſelben 504, Erklärung 505, ſ. Vibrat.-Emanationshyp. theoretiſche 535.
Farbenzerſtreuung, Verſuche hierüber 421, Methode um homogenes Licht zu erhalten 422, Fraunhofers Zerſtreuungsapparat 423, fixe Linien im Farbenbilde 424, Meſſung der Lichtſtärke im ſelben 426, Beſtimmung des Zerſtreuungsverhältniſſes nach der Methode Fraunhofers 447, Herſchels 448, wenn es ſich bloß um das Verh. des Zerſtreuungsvermögens zweier Körper handelt 449, nach Boscowich 450, nach Brewſter 451.
Fechner, 817, 819.
Fiſcher, 372.
Fernröhre 591, Theorie derſelben 591, achromatiſche Objective an dioptriſchen 592, Oculare 599. Galiläiſches 600, aſtronomiſches 601, Erdfernrohr mit drei 603, mit vier Ocularen 604, catoptriſches von Herſchel und Newton 606, von Gregory 607, Caſſegrain 609, allgemeine Betrachtungen 610, Prüfung 611, des Objectivs 613, der Oculare 614, Reinigung 615, Beſtimmung der Vergrößerung 616, nach Balz 617, Gauß 618.
Flaugergues 110.
Flüſſigkeiten, Gleichgewicht 205, tropfbarer unter Einfluß der Schwere 207, der Wirkung der Theilchen unter einander und der des Gefäßes auf die Flüſſigkeit 209.
Flüſſigkeitswärme, 693.
Fourier, 646, 658.
Fraunhofer, 423, 424, 426, 432, 448, 473, 474, 476, 477, 480, 543, 577, 605, 612, 627, 628, 641.
Fresnel 453, 472, 491, 492, 507, 516, 545, 546, 550.

G.

Gambey, 715.
Gaſe, Auffangen 40, Aufbewahren 41, Überfüllen 42, durch Pepy's, Hares Inſtrument 43, durch Blaſen, 43, Austrocknen derſelben durch Salze 44, durch Schwefelſäure 45. Beſtimmung des Rauminhaltes 45, Reduction auf Normaltemp, und Barometerſtand 46, Beſtimmung und Berechnung der Dichte, 72, der Ausdehnung durch die Wärme 98, 101, Gleichgew. derſelben 225, Bewegung Liquefaction 694.
Gauß, 618, 704.
Gay-Luſſac 114, 118, 143, 225. 251, 253, 279, 343.
Gerſtner, 149.
Geſchwindigkeit, virtuelle 178, der Bewegung 286.
Gewicht, Beſtimmung mittelſt der Wage 46, Reduction desſelben 57, ſpecifiſches ſ. Dichte.
Gewichte, Geſtalt, Material, Größe und Anzahl 51, ihre Prüfung 54.
Gleichgewicht der Kräfte an Körpern 157, allg. Geſetze deſſelben 177, an feſten 182, an elaſtiſchen Körpern 191, der Schwerkräfte 184, labiles, ſtabiles 185, discreter Maſſen 186, elaſtiſcher Saiten 192, elaſtiſcher Stäbe 197, mit unveränderter Axe 200, flüſſiger Körper 205, unter

Einfluß beſtimmter Kräfte 207, der Gaſe 225, in der Atmoſphäre 228, der Dünſte 244.
Goniometer, 580, von Wollaſton 581, von Charles 583, von Baumgartner 584.
Graduiren, 36.
Graveſande, 195, 578.

H.

Haarröhrchentheorie 210, Vorbereitungsſätze 211, 212, Geſtalt der Oberfläche der Flüſſigkeit in H. 214, in cylindriſchen Röhrchen 217, Wirkung coniſcher Röhrchen 218, Abſtoßung zweier Körper in einer Flüſſigkeit 219, Adhäſionserſcheinungen 220, andere Theorie 222, Verſuche hierüber 224.
Hällſtröm 89, 92, 701, 703.
Hanſteen, 727, 751.
Hare, 43.
Hauy, 225.
Helioſtat 576, ohne Uhrwerk 576, mit Uhrwerk und zwei Spiegeln 577, mit einem Spiegel 578.
Herſchel, d. j. 449, 500, 504, 596.
Höhenmeſſung mit dem Bar. 231. Theorie derſelben 231, Formel nach Ramond und Laplace 233, Correction wegen der Feuchtigkeit 233, Formel von Oltmanns 234, Gebrauch der Oltmann'ſchen Tafeln 235, Beiſpiel 236, Grad der Genauigkeit der Meſſung 237, Urſachen der fehlerhaften Reſultate 238, practiſche Regeln 240, nöthige Apparate 241.
Horner, 716.
Hörrohr, 352.
Hygrometer 259, Schwefeläther h. von Daniell 259, Conſtruction 260, Gebrechen 261, Verbeſſerung von Körner 262, Theorie 263, Beobachtungsregeln 264, Pſychrometer 265, Theorie 266, Formel f. daſſelbe 267, Prüfung dieſer Formel 269, andere Formel 271, Vergleichung des Schwefelätherh. und des Pſychrom. 272, Haarhygr. 273, Wahl 274, Zubereitung des Haares 275, Beſtimmung der Fundamentalpunkte 276, Prüfung 277, Reduction auf eine beſtimmte Temperatur 279, relative Spannkraft nach demſelben 280, Fiſchbeinhygr. 280, ſeine Gebrechen 282, relative Spannkraft 282, Vergleichung der Hygr. untereinander 283, relative Vorzüglichkeit des Pſychr. 284.
Hypſometriſche Tafeln, 234.

J.

Jacquin, 368, 636.
Inclinatorium, 718.
Interferenz des Lichtes 453, Methode den Verſuch anzuſtellen 453, mittelſt Spiegel 454, mittelſt eines Prismas 455, Beſtimmung der Größe ω 455, Erklärung einiger Interferenzphänomene 456, polariſirter Strahlen 492, Verſuche hierüber 494, hyp. Erklärung im Allg. 529, im pol. Lichte 547, circuläre 532.

K.

Kämtz, 701.
Kater, 298.
Klangfiguren, 375.
Körner 105, 114, 262.
Kugelabweichung ſ. Abweichung.

L.

Länge, magn. ſ. Abweichung, reducirte ſ. in Bewegung.
Laplace 88, 146, 165, 210, 222, 232, 446, 689.
Larive und Marcet, 683.
Laroche 679, 682, 686.
Lavoiſier, 88.
Leidnerflaſche 776, Theorie derſelben 806.
Leitungsfähigkeit innere für Wärme, 660, 670, äußere 661, Beſtimmung derſelben 673, electriſche 814, des Polardrahtes 819.
Lenoir, 721.
Leslie, 62, 265.
Leuchtkraft ſ. Lichtſtärke.
Licht 377, Leuchtkraft 378, Größe der Beleuchtung 379, Reflexion 380, einfache Brechung und Farbenzerſtreuung 393, Interferenz 453, Beugung 470, doppelte Brechung und Polariſation 484, Theorie 522, Optiſche Inſtrumente 576.

Lichtſtärke 378, der einzelnen Strahlen im Farbenbilde 426.
Linſen 399, Prüfung derſelben auf Wellen 636, auf Concentrirung 639, Fraunhofers Methode ſphäriſche, centrirte Linſen zu verfertigen 641, Beſtimmung des Halbmeſſers nach Boscovich 641, Stampfer 643, Beſtimmung der Brennweite 434, nach Maskelyne 644, des Öffnungsdurchmeſſers und der Dicke 645.
Liquefaction der Gaſe, 693.
Loupen, 625.
Luftdruck, ſ. Barometerſtand.
Luftpumpe 151, ihr Stiefel 152, Kolben 153, Hahn, Verbindungsſtücke 154, Prüfung 155, Beſchreibung einer 156.

M.

Magnetismus 712, der Erde 713, 742, Einfluß auf Magnetnadeln 720, Variationen der Richtung 725, Intenſität 725, Einfluß auf Eiſen 738, Lage der magn. Erdaxe 743, magn. Länge und Breite 744, verſchiedene Annahmen 749 freier künſtlicher Magnete 732. Moment deſſelben 736, Wirkung einer ſtörenden Eiſenmaſſe 739 zweier Magnete auf einander 740. Theoretiſche Erklärung 752, Wirkung eines magn. Körpers 754, einer Kugel 765, einer rotirenden Kugel auf einen Punkt 766, eines Cylinders auf eine Nadel 767, einer rotirenden auf eine ruhende Kugel 770.
Magnetnadel, Abweichungsnadel 715, Neigungsnadel 721, Juſtiren derſelben 722, Richtung einer frei ſchwebenden 746, ſ. Declinatorium, Inclinatorium.
Mairan, 570.
Malus, 447.
Manometer, gemeines 148, Gerſtners 149, Prechtl's 151.
Marx, 437, 501.
Maskelyne, 644.
Maßſtäbe 28, Beſchreibung eines genauen 29, Correction wegen der Wärmeausdehnung 32, Prüfung der Güte 33.
Mayer, 473, 722, 719.
Meikle, 272.
Meſſungen einer Dimenſion 28, der Dicke 30, des Durchmeſſers enger Röhrchen 34, des Rauminhaltes tropfbarer und feſter Körper 35, der Gaſe 40.
Micrometer, 637.
Microſcope 618, einfache 619, mit zwei Linſen 620, zuſammengeſetzte 622, achromatiſche 624, Einrichtung d. Microſc. 625, der zuſammengeſetzten 627, Objectträger 628, Beleuchtungsapparat 629, Geſtell 630, Gebrauch der Microſc. 630, Zurichten und Einlegen 631, Beleuchten 632, Meſſen des Objects 633, Prüfung der Microſc. auf Klarheit 635, Deutlichkeit 635, Vergrößerung 636, nach Jacquin 636, Ettingshauſen 637.
Miſchungsmethode 675, Anwendung auf Gaſe 678.
Mittelpunkt der Kräfte 177, 184.
Mohs 84.
Moll, ſ. Beck.
Mollweide 751.
Moment der Trägheit am Pendel 297.
Multiplicator. Theorie deſſelben 821.

N.

Neigung magn. 718. 748, Beſtimmung derſelben durch wirkliche Beobachtung 718, durch die Schwingungsmethode 723, Variationen derſelben 725, Anſtellung der Schwingungsverſuche 726, unabhängig von der Stärke der Nadel 728.
Newton 457, 458, 461, 465, 467, 569.
Nobili 850.

O.

Objectiv 592, achromatiſches 593, indirecte Berechnung 594, nach Herſchel 596, ſ. Fernrohr, Microſcope.
Oculare 599, ſ. Fernröhre, Microſcope, pancratiſche 614.
Ohm 811, 813, 816, 820.

Oltmann 232, 234.
Optik 377.
Optiſche, Inſtrumente 576.

P.

Pendel ſchweres 294, magnetiſches 735, electriſches 782.
Pendelbewegung 294, Theorie des einfachen Kreispendels 294, des Zuſammengeſetzten 295, Schwingungsmittelpunct und Axe 297, Reverſionspendel 298, Bewegung in einem widerſtehenden Mittel 299, nach der Beſſel'ſchen Theorie 301, Einfluß der Elaſticität der Unterlage und Stumpfheit der Schneide 304, Pendelbeobachtungen 304, ſchickliche Form der Pendel 305, Methode der Coincidenzen 306, Stellung der Pendel gegen einander 307, Berechnung der Schwingungsdauer 308, Correction wegen des Schwingungsbogens 310, Reduction auf Normaltemp. 311, auf den leeren Raum 312, auf die Meeresfläche 314, Vereinfachungen beim Reverſionspendel 315, Coniſches Pendel 316, Gebrauch desſelben 317.
Petit, ſ. Dulong.
Pepy, 42.
Pfeifen, 353.
Phyſikaliſches Kabinet 3, räumliche Verhältniſſe 4, beſtändige Temperatur 5, innere Einrichtung 6.
Plößl, 626, 627, 628.
Poggendorff, 718.
Poiſſon 167, 204, 364, 667, 728, 771, 791.
Polariſation des Lichtes 482, Methoden der Polariſirung 483, Beſtimmung des Polariſationswinkels nach Biot 483, Arago 484, für flüſſige Körper 485, nach Brewſter's Erfahrungsgeſetzen 486, theilweiſe Polariſirung 487, entgegengeſetztes Verhalten gebrochener und reflectirter Strahlen 488, Eigenſchaften des polariſirten Lichtes in Bezug auf Reflexion 489, Änderung ſeines Pol- Zuſtandes 491, in Bezug auf Interferenz 492, Farbenerſcheinungen im polariſirten Lichte 496, Dichroismus 497, Erklärung desſelben 498, Farbenringe 500, Biots Erklärung aus der Annahme einer beweglichen Pol. 564, circuläre 532, 549 ſ. Vebr.-Emanationshyp. 545.
Pole, magnetiſche 734.
Prandi, 578, 579.
Prechtl 151, 416.
Princip der virtuellen Geſchw. 179, Anwendung deſſelben 181, gilt auch bei Kräften mit veränderlichen Angriffspuncten 188, der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunctes 288, der Erhaltung der lebendigen Kräfte 289, der Flächen 290, der kleinſten Wirkung 292.
Pſychrometer, ſ. Hygrometer.
Pyrometer, 83.

R.

Ramond, 232, 239, 241.
Reflexion des Schalls 346, in cylindriſcher Röhre 347, Theilung der Schallwelle dabei 348, in freier Luft 349, des Lichts 380, an einer Rotationsfläche 381.
Reverſionspendel 298.
Rieſe, 718.
Rudberg, 516, 517.
Rumford, 676.
Rutherford, 118.

S.

Saiten, ihr Gleichgewicht 192, Verlängerung durch Spannung 193, Schwingungen 358.
Sauſſure, 273, 274, 275, 278.
Savart, 203, 365.
Savary, 841.
Schall 332, Fortpflanzung in der Luft 333, Anregung durch einen ſchwingenden Körper 337, Geſetze den ſchallerregenden Schwingungen 338, Stärke 339, geradelinige Fortpflanzung 340, Geſchwindigkeit in der Luft 341, Stattfindende Wärmeentwicklung 342, Formel der Geſchw. 345, Beobachtungsreſultate 345, Reflexion 346, Verſuche über die Geſchw. in der Luft 366, in anderen Gaſen 368, in tropfbaren Flüſſigkeiten 369, in feſten Körpern 369.

Schallwelle 339.

Schitko, 248, 691, 693.

Schleiermacher, 116.

Schmidt 80, 230, 783, 841.

Schweigger, 822.

Schwingungsaxe, Mittelpunct ſ. Pendel, Pfeifen.

Schwingungen der Luft in Pfeifen 353, warum kein Nachklingen 356, in offenen, gedeckten 357, Ort der Schwingungsknoten 358, Schwingungen der Saiten 360, Längen-Querſchwingungen 360, 361, Verh. beider 362, elaſtiſcher Stäbe 363, Längen-Quer- drehende Schwingung 364, elaſt. Platten und Membrane 365, Erregung der Schwingung 373, Befeſtigung des Tönen der Körpers 375, Klangfiguren 376, Schwingungszahlen 371, Verſuche hierüber 372.

Selligue, 629.

Shouw, 323.

Simon, 786.

Solenoid, 835.

Sphärometer 30, Gebrauch desſelben 31.

Spiegel, ſphäriſche 383, Theorie derſelben 384, ſphäriſche Abweichung 385, Brennfläche, Brennlinie 387, Geſtalt des Bildes 388, Winkelſpiegel 389, zwei ſphäriſche Spiegel 390, Materiale derſelben 391, Beſtimmung des Krümmungshalbmeſſers 392, Lieberkühnſche 626, Sömmering'ſche 636.

Sprachrohr 350, Theorie 351, verſtärkende Kraft 352.

Stampfer, 343, 435, 643.

Stäbe, elaſtiſche ihr Gleichgewicht 197, für St. mit unveränderter Axe 198, bei Torſion 203, Schwingungen 362.

Strom, electriſche ſ. Electr. in Bewegung.

T.

Tafeln, allg. Längenmaße 853, Schnittwaarenmaße 855, Wegmaß 857, allg. Flächenmaß 859, allg. Körpermaß 860, Fruchtmaß 861, Getränkmaß 865, beſondere Maße 869, Reduction der allg. Längenmaße mittelſt Logarithmen 870, Verwandlung des Duodecimal-Längenmaßes 871, des Duodecimal-Flächenmaßes 871, des Duodecimal-Körpermaßes in Decimaltheile 873, Vergleichung der Gewichte 873, Verwandlung der Gewichte 877, Reduction der Abwägungen auf den leeren Raum. Dichte feſter und tropfbarer Körper 879, Dichte der Gaſe und Dünſte 916, Ausdehnung der Körper durch die Wärme 919, Dichte und Volumen bei verſchiedenen Temperaturen des Waſſers 923, des Queckſilbers 924, der Gaſe 925, Ausdehnung tropfbarer Körper 926, Stand mehrerer Flüſſigkeiten in Thermometern 927, Reduction der Thermometergrade 928, Reduction des Weingeiſtthermometers auf das Queckſilberthermometer 932, höhere Grade des Queckſilberthermometers auf wahre Wärmegrade 933, Capillardepreſſion des Queckſilbers im Barometer 934, Reduction des Barometerſtandes auf 0° C. 935, Capillaritätshöhe verſchiedener Flüſſigkeiten 939, zur Berechnung der Berghöhen 940, Höhen bewohnter Orte 945, Flüſſe und Seen 962, Berge 967, Expanſivkraft und Dichte der Dünſte 9[illegible]8, Volumen der mit Dunſt geſättigten Luft 1004, Änderung des Haarhygrometers durch Änderung der Temperatur 1005, Spannkraft der Dünſte nach dem Haarhygrometer 1006, nach dem Fiſchbeinhygrometer 1007, Pendellänge 1008, Geſchwindigkeit des Schalles 1010, Brechungsexponenten 1013, Zerſtreuungsverhältniſſe 1020, Lage und Character der optiſchen Axen in Kryſtallen 1024. Brechung achro. Objective 1028, Leitfähigkeit für die Wärme 1029, Wärmecapacität 1080, Liquefaction der Gaſe 1033, Schmelz- und Siedtemp. 1034.

Teleſkope, ſ. Fernröhre.

Temperatur, — Beſtimmung höher 673, mittlere des Tages 699, Curve derſelben 700, 701, aus Beobachtungen 703, nach Gauß 704, Gang derſelben im Jahre 808.

Thermomagnetismus, ſ. Electriſch. magn. Wirkungen ſ. Wärme.
Thermometer 102, Conſtruction des Queckſilberth. 103, Beſchaffenheit und Dimenſionen der Röhre 103, Calibriren 104 Anblaſen der Kugel 105, Füllen 106, Beſtimmen der Queckſilbermenge 107, Luftleermachen 108, Beſtimmen des Eis- und Siedpunctes 109, Veränderungen des erſtern 110, Theilen der Scala 111, Correction des Siedpunctes wegen Barometerſtand 113, thermometriſche Röhre 115, Thermometer mit ungleichen Graden 114, Weingeiſttherm. 116, Vergleichung des Weingeiſt- und Queckſilbertherm. 117, Maximum und Minimumtherm. von Gayluſſac 118, Rutherford 118, Blakadder 119, Six und Bellani 120, Prüfung des Therm. 120, Berichtigung nach Beſſels Methode 122, nach Egen 128, Vorſichten beim Gebrauch desſelben 129, vorzüglich beim Beobachten der Luftwärme 132, Correctionen beim Queckſilbertherm. 133, wahre Thermometergrade 689, geometriſche Theilung 690.
Tonhöhe, 371.
Tralles, 700.
Tredgold, 195.
Tremery, 225.

U.

Ure, 245.

V.

Valz, 617.
Vergrößerungszahl, der Fernröhre 646, der Microſcope 636.
Vibrationshypotheſe 523, was in ihr Lichtwelle, Lichtſtrahl, Ähnlichkeit, Intenſität, Farbe des Lichtes ſei 523, Fortpflanzung 524, Theilung der Lichtwelle 525, Reflexion 526, Brechung 527, Beſtimmung der Wellenlänge 528, Interferenz 529, ähnlicher und unähnlicher Wellen 530, elliptiſche und circulare Schwingungen 532, Farben dünner Körper 533, bei ſenkrecht 534, bei ſchief einfallendem Lichte 536, Mängel dieſer Theorie bei ſehr ſchief einfallendem Lichte 538, Beugung des Lichtes in einer Öffnung 539, durch einen Schirm 540, Beugungscurve 541, Folgerungen aus der Gleichung für dieſelben 543, Beugung durch mehrere Öffnungen 544, die Richtung der Schwingungen verſchieden von jener der Fortpflanzung derſelben 545, Polariſation 546, Interferenz polariſirter Strahlen 547, Farben im polariſirten Lichte 548, circuläre P. 549, Folgerungen aus der Ungleichheit der Elaſticität des Äthers 550, Elaſticitätsaren 552, Elaſticitätsfläche 554, Erklärung der Phänomene der doppelten Brechung hieraus 557, Gleichung für die Wellenform 561, in Kryſtallen mit einer Axe der doppelten Brechung 562, Vergleichung mit Emanſyp. 571, ihr Vorzug 573.
Volta'ſche Säule 777, zum Behufe phyſiologiſcher 777, chemiſcher 778, Licht in Wärme-Verſuchen 778, Vorſichten beim Gebrauche 779, flüſſiger Leiter 780, electriſche Spannung derſelben 808.

W.

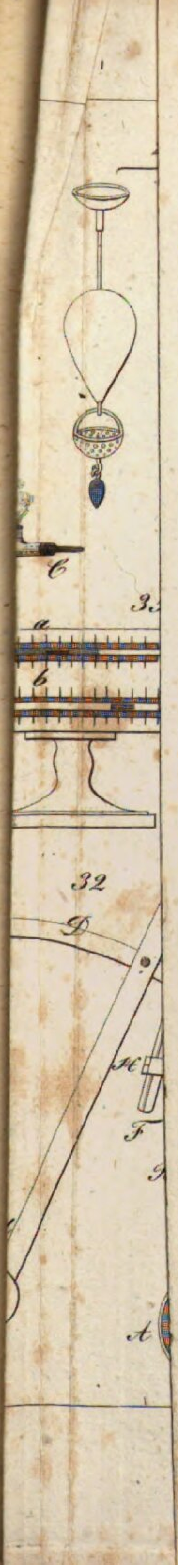
Wage, Theorie derſelben 46, Einrichtung 49, Prüfung 51, Gebrauch 54, Zeigerwage 55, Beſchreibung zweier Wagen 58, Flüſſigkeitswage 60.
Wärme, Bewegung 646, Theorie der ſtrahlenden 646, Verſuche hierüber 651, Wärmebewegung in feſten Körpern 658, nach Fourier 659, nach Poiſſon 667, Prüfung der Theorie durch Verſuche 671, Anwendung der Theorie auf Beſtimmung hoher Temperaturen 673, Leitungsfähigkeit der Körper 674, Gleichgewicht 674, ſpecifiſche W. 674, Beſtimmung durch Calorimeter 675, Miſchungsmethode 676, Abkühlungsmethode 677, Miſchungsmethode bei Gaſen 678, Reſultate dieſes Verfahrens 688, bei Dünſten 682, ſpec. Wärme (Capacität) bei conſtantem Volumen durch Beobachtung 683, Berechnung mittelſt der Schallgeſchwindigkeit 684, ſpec. W. gemengter Gaſe 686, Gleichgew. der Wärme mit den in Körpern vorhandenen Kräften 691, Schitkos Anſicht 692, Sonnenwärme 697. ſ. Temperatur.
Waſſer, Ausdehnung durch Wärme.
Wind 322, mittlere Richtung 323, Zuſammenhang mit Barometerſtand 330.
Wollaſton 445. 581.

Y.

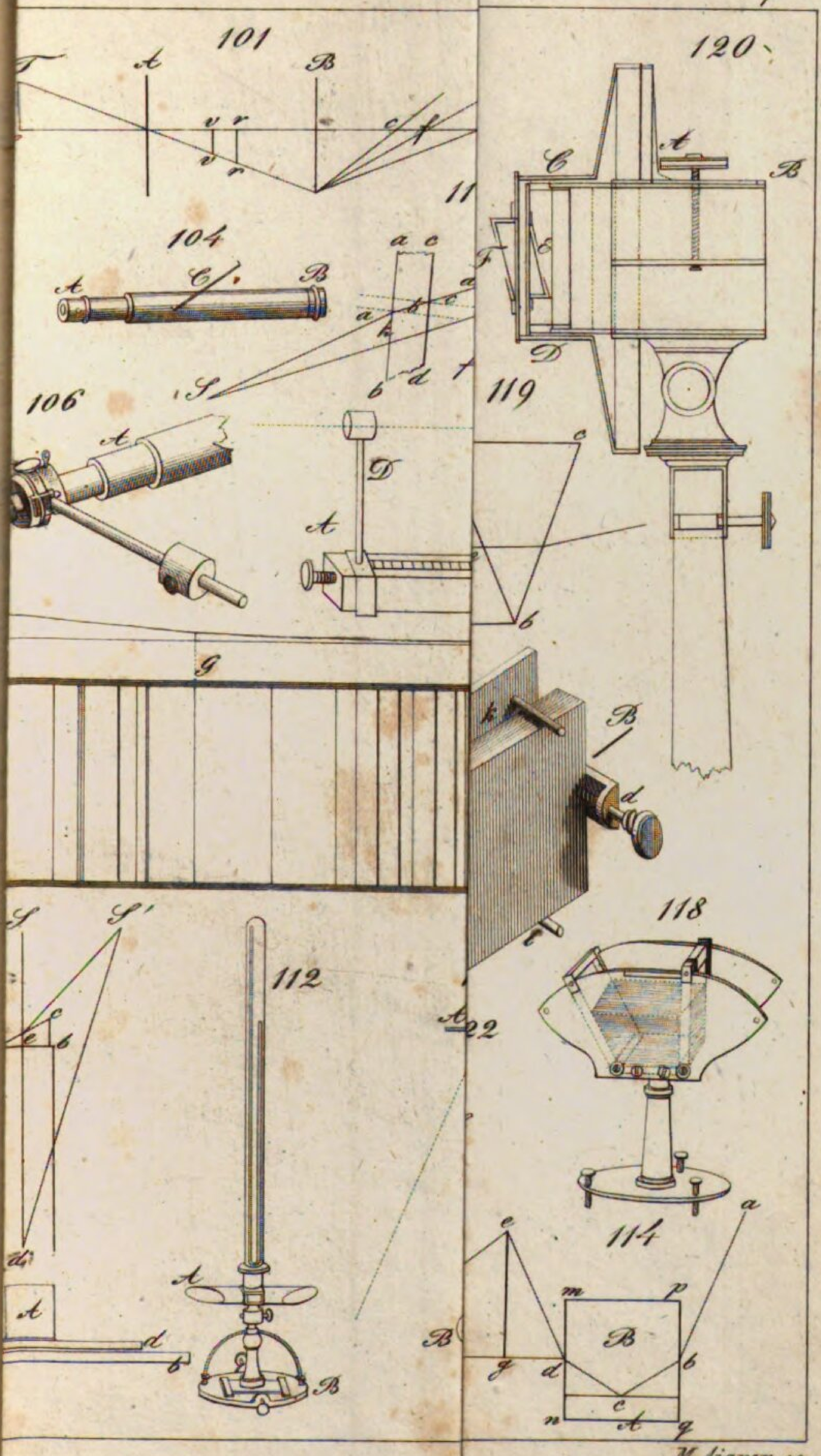
Young, 453.

Z.

Zeigerwage, 55.
Zerlegung, ſ. Zuſammenſetzung.
Zerſtreuungsverhältniß, ſiehe Farbenſtreuung.
Zuſammenſetzung der Kräfte, die einen Angriffspunkt 157, die mehrere Angriffspunkte haben und von unendlicher Anzahl 158, die Functionen des Abſtandes vom Angriffspunkte ſind 159, in Polarcoordinaten ausgedrückt 160, bei nicht continuirlichen Kräfte 167.

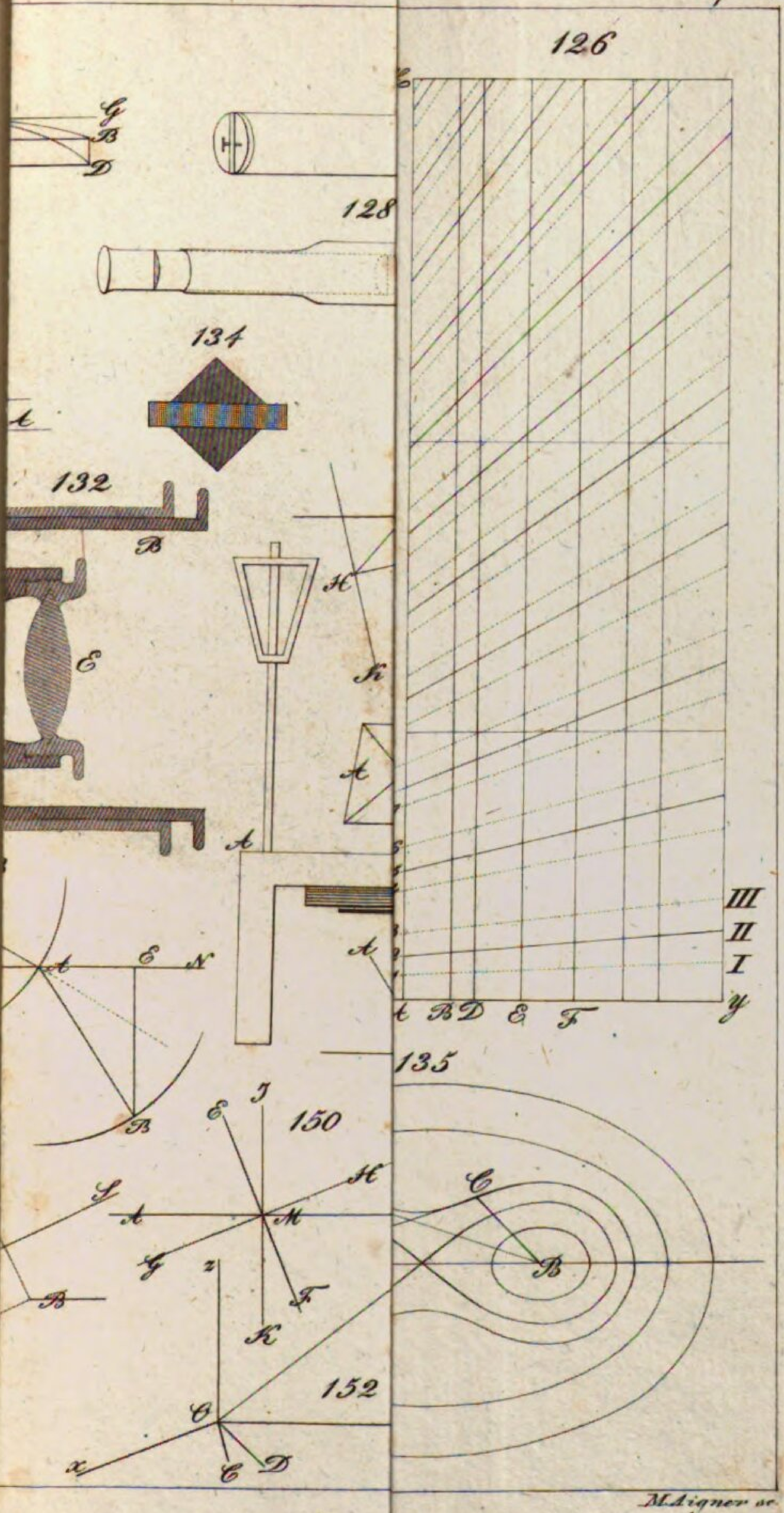

C
a
b
32
D
H
F
A

Taf. V.

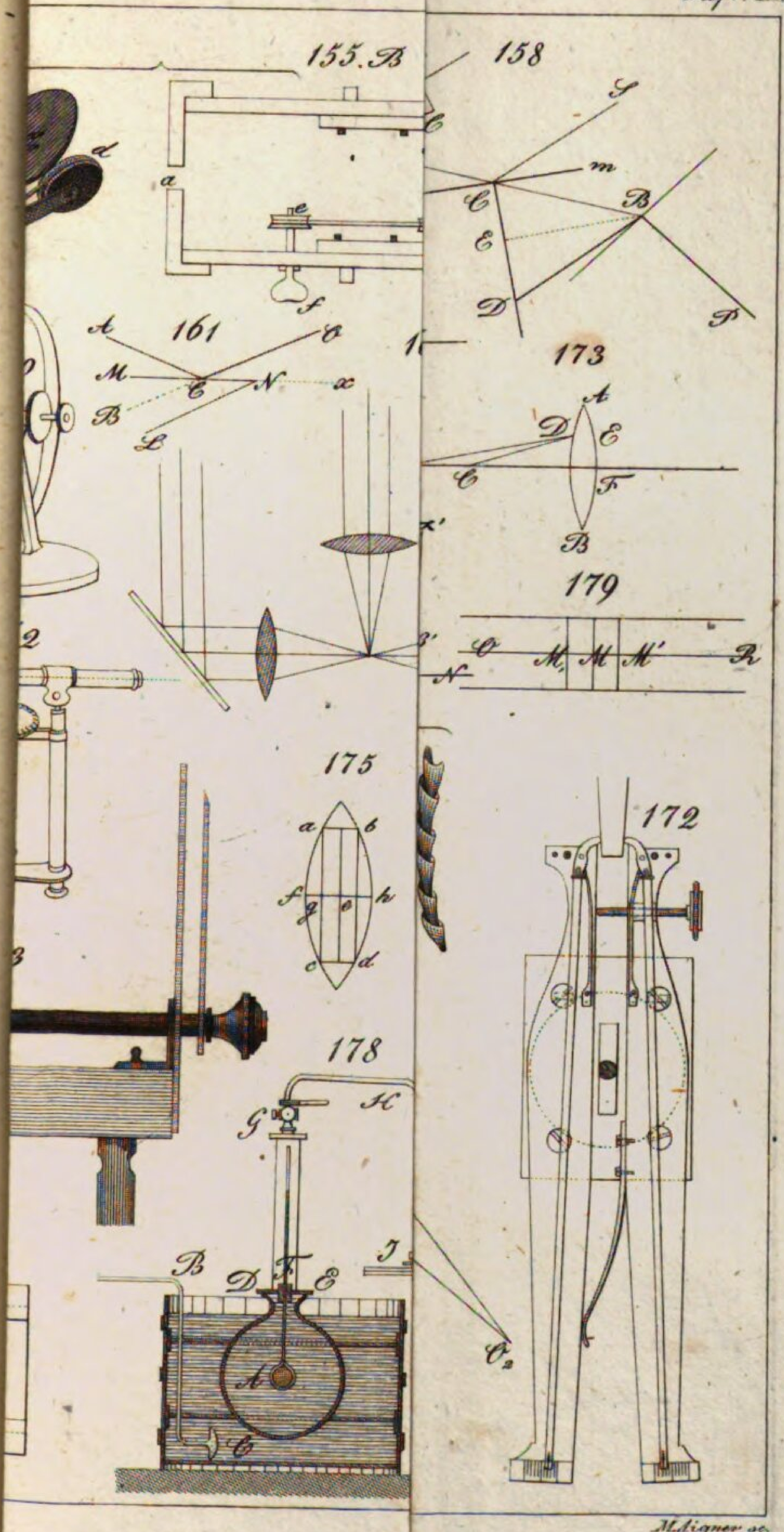


M. Aigner sc.

Taf. VI.



M. Aigner sc.



M. Aigner sc.

EIGENTHUM DER STADT AUGSBURG

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Baumgartner, Andreas

Die Naturlehre nach ihrem gegenwärtigen Zustande mit Rücksicht auf mathematische Begründung

Bd.: [2]

Wien 1831

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Phys 62 -2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11274579-3